Tema 4

Primitiva şi integrala Riemann. Aplicații.

Modulul 4.1 - Primitiva. Aplicații

Noțiunea de primitivă s-a degajat din aplicațiile matematicii în situații concrete, care constă în determinarea modelului matematic al unui proces atunci când se dă viteza de variație a acestuia.

Abstract, problema primitivei se formulează astfel: fiind dată funcția derivată $F = f^{'} : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ se cere să se determine funcțiile $f : I \to \mathbf{R}$. Problema primitivelor este deci inversa problemei fundamentale a calculului diferențial, care după cum s-a arătat în alt capitol, constă în determinarea derivatei unei funcții date.

Derivarea este un operator care asociază unei funcții date $f : I \to \mathbf{R}$ derivata sa $f^{'} : I \to \mathbf{R}$, în timp ce determinarea primitivelor (***primitivizarea***), adică inversa operației unare de derivare, este o funcție multivocă care asociază unei funcții date $F : I \to \mathbf{R}, (F = f^{'})$ mulțimea funcțiilor f cu proprietatea $f^{'} = F$ care este infinită (după una dintre consecințele teoremei Lagrange).

Definiția 4.1

1] Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ interval, $f : I \to \mathbf{R}$. Se numeşte ***primitivă a funcției f pe I***, orice funcție $F : I \to \mathbf{R}$ derivabilă pe I şi cu proprietatea $F^{'} = f$ pe I ($F^{'}(x) = f(x), \forall x \in I$).

2] Operația de determinare a unei primitive F a lui f pe intervalul I se numeşte ***operație de integrare***, notată prin simbolul $\int f(x)\,dx$.

3] Funcția $f : I \to \mathbf{R}$ care admite cel puțin o primitivă pe I se numeşte ***funcție cu primitive pe I*** şi mulțimea acestor funcții se va nota prin $\mathsf{P}(I)$.

Teorema 4.1 (Proprietăți generale ale primitivelor)

Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ interval şi $f : I \to \mathbf{R}$, atunci au loc afirmațiile:

(p_1) Dacă F este o primitivă a lui f pe I atunci pentru $\forall C \in \mathbf{R}$, funcția $F + C$ este o primitivă a lui f pe I.

(p_2) Două primitive oarecare F şi G a lui f pe I diferă printr-o constantă.

*(p_3) **Primitiva generală** sau **integrala nedefinită** sau **antiderivata** unei funcții f este dată prin:*

$$(1)\ \int f(x)\,dx = \{F + C \mid F : I \to \mathbf{R} \text{ primitivă a lui } f; C \in \mathbf{R}\} \overset{not}{=} F(x) + C,\ x \in I$$

(p_4) Integrala nedefinită este inversa aplicației de diferențiere:

$$(2)\ \int dF(x) = F(x) + C \quad (3)\ d\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x)\,dx.$$

Demonstrație (p_1) F este primitivă, deci F derivabilă cu $F' = f$ şi avem: $(F + C)' = F' + C' = F' = f$, de unde rezultă $F + C$ derivabilă cu $(F + C)' = f \Rightarrow F + C$ primitivă.

(p_2) Fie $F, G : I \to \mathbf{R}$ primitive ale lui f pe I, conform definiției 1: F, G derivabile cu: $F' = f$, $G' = f$ pe $I \Rightarrow F' = G' \Rightarrow (F - G)' = 0 \Rightarrow F - G = C$, $C \in \mathbf{R}$.

(p_4) Avem: $\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x) + C \ (2)$ şi

$$d\left[\int f(x)\,dx\right] = d\left[F(x) + C\right] = \left[F(x) + C\right]' dx = \left[F'(x) + C'\right] dx =$$
$$= F'(x)\,dx = f(x)\,dx \ (3)\ .◄$$

Teorema 4.2 (**Operații algebrice cu primitive**)

Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ interval şi $f, g : I \to \mathbf{R}$ cu $f, g \in P(I)$, atunci au loc proprietățile:

(p_5) $\int d(\lambda f) = \lambda \int df = \lambda f + C, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall C \in \mathbf{R}$

(p_6) $\int d(f \pm g) = \int df \pm \int dg = f \pm g + C\,; C \in \mathbf{R}$

(p_7) $\int d(fg) = \int (gdf + fdg) = \int gdf + \int fdg$

Demonstrație În ipoteza f, g diferențiabile (derivabile) pe I, avem: $d(\lambda f) = \lambda df,\ d(f \pm g) = df \pm dg,\ d(fg) = gdf + fdg$ şi după formula (2) se obțin imediat proprietățile (p_5), (p_6), (p_7).◄

Consecința 4.1

*Fie f, $g \in C^1(I)$ din (p_7) se obține **formula de integrare prin părți**, care este o metodă de calcul pentru primitive:*

$$(4)\ \int fdg = fg - \int gdf$$

Consecința 4.2

Dacă $f : I \to \mathbf{R}$, $f \in P(I)$ cu F o primitivă oarecare a sa şi $x = u(t), t \in J$ este o schimbare de variabilă cu $u \in C^1(J)$, atunci din formula de diferențiere a funcțiilor compuse, avem:

$$(5)\ \int f(x)\,dx = \int f\left[u(t)\right] du(t) = \int f\left[u(t)\right] u'(t)\,dt = F\left[u(t)\right] + C\ ,\ C \in \mathbf{R}\ .$$

Demonstrație Fie $F(u) = \int f(u)\,du$ şi $G(t) = \int f\left[u(t)\right] dt$, atunci avem:

$$dF\left[u(t)\right] = F'\left[u(t)\right] u'(t)\,dt = f\left[u(t)\right] u'(t)\,dt = G'(t) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F\left[u(t)\right] = G(t) + C$$

şi este valabilă ***formula de integrare prin schimbare de variabilă*** (5). ◄

Consecința 4.3

Din definiția primitivei, proprietățile sale (p_4) date prin (2) şi (3) din ***Tabloul derivatelor unor funcții elementare*** se obține ***Tabloul primitivelor unor funcții elementare*** (din bibliografie: [6], [10], [11], [14], [16] şi manualul de matematică pentru clasa a XII − a).

Tabelul primitivelor uzuale

1. $\int x^{\alpha} dx = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}; \alpha \in \mathbf{R} - \{-1\} \\ \ln|x|; \alpha = -1 \end{cases} + C$

2. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C \ (a \neq 0)$

3. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C = -\dfrac{1}{a} \operatorname{arcctg} x + C \ (a \neq 0)$

4. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C \ (a \neq 0)$

5. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{|a|} + C = -\arccos \dfrac{x}{|a|} + C \ (a \neq 0)$

6. $\int a^x dx = \dfrac{1}{\ln a} a^x + C \ (a > 0, a \neq 1); \int e^x dx = e^x + C$

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C; \int \cos x dx = \sin x + C$

8. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg} \dfrac{x}{2}\right| + C; \int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)\right| + C$

9. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C; \int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$

10. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C; \int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

11. $\int \left(1 + \operatorname{ctg}^2 x\right) dx = -\operatorname{ctg} x + C; \int \left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right) dx = \operatorname{tg} x + C$

12. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \dfrac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{a^2}{2} \arcsin \dfrac{x}{|a|} + C \ (a \neq 0)$

13. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \dfrac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \dfrac{a^2}{2} \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| C \ (a \neq 0)$

14. $\int \operatorname{sh} x dx = \int \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} dx = \operatorname{ch} x + C; \int \operatorname{ch} x dx = \int \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \operatorname{sh} x + C$

15. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C; \int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$

16. $\int \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \sec x + C; \int \dfrac{\cos x}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cosec} x + C$

17. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec} x + C = -\operatorname{arccosec} x + C$

18. $\int \frac{dx}{m\sqrt[m]{x^m-1}} = \sqrt[m]{x} + C \left(m \geq 2; m \in \mathbf{N} \right)$

Observații.

1. Pentru a testa dacă $F : I \to \mathbf{R}$ este o primitivă a funcției $f : I \to \mathbf{R}$ pe I; se verifică egalitatea: $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$.

2. Studiul primitivelor a fost efectuat şi în liceu, de aceea vom face unele completări, în special prezentând clasele de funcții reale de o variabilă reală a căror primitive se reduc, prin substituții convenabile, la primitive de funcții raționale.

3. Problema existenței primitivelor, înseamnă de fapt, pentru $\forall f : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ determinarea familiei de funcții $\mathsf{P}(I)$. Răspunsul complet la această problemă nu a fost dat încă. Se cunosc răspunsuri parțiale.

(i) Condiția necesară de existență a primitivelor lui $f : I \to \mathbf{R}$ este ca f să posede ***proprietatea Darboux***, deoarece în acest caz f este o derivată pe I ($f = F'$ pe I).

(ii) Orice ***funcție continuă*** $f : I \to \mathbf{R}$ posedă primitive pe I, (condiție suficientă) care se va demonstra în cadrul Integralei Riemann.

(iii) Există ***funcții discontinue*** care au primitive.

Exemplu. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}; x \neq 0, x \in \mathbf{R} \\ 0 \quad ; x = 0 \end{cases}$ discontinuă în $x_0 = 0$ are o primitivă $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin formula $F = G - H$ unde $G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ cu $G(x) = \begin{cases} x^2 \cos x; x \neq 0, x \in \mathbf{R} \\ 0 \quad ; x = 0 \end{cases}$ şi $H : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ care este o primitivă a funcției continue $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ cu $\varphi(x) = \begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x}; x \neq 0, x \in \mathbf{R} \\ 0 \quad ; x = 0 \end{cases}$.

Avem:

$F'(x) = G'(x) - H'(x)$ unde $G'(x) = \begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}, x \neq 0, x \in \mathbf{R} \\ 0 \quad , x = 0 \end{cases}$

şi $H'(x) = \begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x}, x \neq 0, x \in \mathbf{R} \\ 0 \quad , x = 0 \end{cases}$ deci $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbf{R}$ şi F este o primitivă a lui f pe $\mathbf{R}$.

4. Metodele de calcul pentru primitive sunt:

Tabelul primitivelor imediate ale unor funcții elementare, Metoda transformărilor algebrice şi trigonometrice, Metoda integrării prin părți, Metoda integrării prin formule de recurență după n $\in$ **N** şi Metoda substituției care se regăsesc în consecința 1, consecința2, consecința 3 şi în bibliografie ([6], [10], [11], [14], [16]).
5. Vom prezenta clase de funcții reale de o variabilă reală ale căror primitive sunt exprimabile prin combinații liniare finite de funcții elementare.

Primitive de funcții raționale

Fie $f : D \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ cu $f(x) = \dfrac{P_0(x)}{Q(x)}$ cu $P_0, Q \in \mathbf{R}[X]$ şi cu gr $P_0 \geq$ gr Q atunci $\dfrac{P_0(x)}{Q(x)} = p_0(x) + \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ cu $p_0, P, Q \in \mathbf{R}[X]$ şi gr $P <$ gr.Q. După o teoremă din algebră, are loc descompunerea în fracții simple:

$f(x) = p_0(x) + \sum_1 \dfrac{A_n}{(x-x_0)^n} + \sum_2 \dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} \quad (\Delta = p^2 - 4q < 0)$ unde $\sum_1$ este suma relativă la toate rădăcinile reale simple şi multiple, iar $\sum_2$ este suma relativă la toate rădăcinile complexe simple şi multiple ale ecuației algebrice cu coeficienți reali: $Q(x) = 0$. Calculul primitivelor lui f este dat prin:

$$\int f(x)dx = \int p_0(x)dx + \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx \underset{\substack{(gr\, p = gr\, p_0 + 1) \\ p \in \mathbf{R}[X]}}{=} p(x) + \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = p(x) + \sum_1 \int \frac{A_n}{(x-x_0)^n}dx +$$
$$+ \sum_2 \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx$$

şi conduce la următorul rezultat:

(i) $\displaystyle\int \frac{A_n}{(x-x_0)^n}dx = \begin{cases} A_1 \ln|x-x_0| + C_1;\, n=1 \\ \dfrac{A_n}{1-n} \cdot \dfrac{1}{(x-x_0)^{n-1}} + C_2;\, n \geq 2 \end{cases}$. Pentru ecuația $x^2+px+q=0$ cu $\Delta = p^2 - 4q < 0$ şi rădăcinile $x_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbf{C}$; $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ are loc descompunerea canonică: $x^2 + px + q = (x - \alpha)^2 + \beta^2$ cu $\begin{cases} p = -2\alpha,\, q = \alpha^2 + \beta^2 \\ \Delta = -4\beta^2 < 0 \end{cases}$. Avem:

$$(ii) \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx = \begin{cases} \dfrac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \dfrac{M\alpha+N}{\beta} arctg \dfrac{x-\alpha}{\beta} + C_1;\, n=1 \\ \dfrac{-M}{2} \dfrac{1}{(n-1)(x^2+px+q)^{n-1}} + (M\alpha+N)I_n;\, n \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_n = \int \frac{d(x-\alpha)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n} = \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} \\ I_n = \frac{1}{(2n-1)\beta^2}\cdot\frac{x}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}, \text{ pentru } n \ge 2 \\ I_1 = \frac{1}{\beta} arctg \frac{x-\alpha}{\beta} + C_2;\ I_0 = x + C_3 \end{cases}$$

Integrarea funcțiilor iraționale

Integrarea funcțiilor iraționale, se va reduce, prin substituții convenabile, la integrarea de funcții raționale. Vom folosi notarea R(u, v, w, …) pentru a desemna o funcție rațională în variabilele u, v, w, … care la rândul lor sunt funcții în x.

1. $\int R(x^{\frac{m_1}{n_1}}, \ldots, x^{\frac{m_p}{n_p}})dx$ cu $\begin{cases} m_1,\ldots,m_p \in \mathbf{Z} \\ n_1,\ldots,n_p \in \mathbf{N}^* \end{cases}$ şi considerăm n = c.m.m.m.c.$\{n_1, n_2, \ldots, n_p\}$.

Substituția $x = t^n$ şi $dx = nt^{n-1}dt$, notând $s_1 = \frac{m_1}{n_1}\cdot n, \ldots, s_p = \frac{m_p}{n_p}\cdot n$ cu $s_1, \ldots, s_p \in \mathbf{Z}$, obținem:

$\int R(x^{\frac{m_1}{n_1}}, \ldots, x^{\frac{m_p}{n_p}})dx = n\int R(t^{s_1}, \ldots, t^{s_p})t^{n-1}dt = \int R_1(t)dt$ cu R_1 o funcție rațională în t.

2. $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_p}{n_p}}\right]dx$ unde $cx+d \neq 0; \frac{ax+b}{cx+d} \ge 0$ cu $a,b,c,d \in \mathbf{R}^*$; $m_1, \ldots, m_p \in \mathbf{Z}$, $n_1, \ldots, n_p \in \mathbf{N}^*$, şi considerăm n = c.m.m.m.c.$\{n_1, n_2, \ldots, n_p\}$. Substituția

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n \Rightarrow x = \begin{cases} \frac{dt^n - b}{a - ct^n} \quad (a - ct^n \neq 0) \\ dx = \frac{(ad-bc)nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2}dt \end{cases} \Rightarrow$$

$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_p}{n_p}}\right]dx = \int R\left[\frac{dt^n-b}{a-ct^n}, t^{s_1}, \ldots, t^{s_p}\right]\frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}dt = \int R_2(t)dt$ unde R_2 este o funcție rațională în t.

3. $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ cu $a, b, c, \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ şi $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$.

Se vor efectua ***substituțiile lui Euler***:

3_1. Dacă $a > 0$ substituția este: $\sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a} \pm t$ şi pentru cazul

$\sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a} + t \Rightarrow x = \frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}}\ (b - 2t\sqrt{a} \neq 0); dx = 2\frac{-\sqrt{a}t^2+bt-c\sqrt{a}}{(b-2t\sqrt{a})^2}dt;$

$\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{-\sqrt{a}t^2+bt-c\sqrt{a}}{b-2t\sqrt{a}} \Rightarrow \int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx =$

$= 2\int R\left[\frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}}, \frac{-\sqrt{a}t^2+bt-c\sqrt{a}}{b-2t\sqrt{a}}\right]\frac{-\sqrt{a}t^2+bt-c\sqrt{a}}{(b-2t\sqrt{a})^2}dt = \int R_3(t)dt$ cu R_3 o funcție rațională în t

3_2. Dacă $c > 0$ substituția este: $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$ şi pentru cazul

$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c} \Rightarrow x = \dfrac{2t\sqrt{c}-b}{a-t^2}\ (a-t^2 \neq 0);\ dx = 2\dfrac{t^2\sqrt{c}-bt+a\sqrt{c}}{(a-t^2)^2}dt;$

$\sqrt{ax^2+bx+c} = \dfrac{t^2\sqrt{c}-bt+a\sqrt{c}}{a-t^2} \Rightarrow \int \mathsf{R}\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx =$

$= 2\int \mathsf{R}\left[\dfrac{2t\sqrt{c}-b}{a-t^2}; \dfrac{t^2\sqrt{c}-bt+a\sqrt{c}}{a-t^2}\right]\dfrac{t^2\sqrt{c}-bt+a\sqrt{c}}{(a-t^2)^2}dt =$

$= \int \mathsf{R}_4(t)dt$ cu R_4 o funcție rațională în t

3_3. Dacă a < 0 şi c < 0, iar $\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c < 0$, $\forall\ x \in$ **R** şi $\sqrt{ax^2+bx+c} \in \mathbf{C}$. Dacă $\Delta = b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = a\ (x - x_1)(x - x_2)$, $\forall\ x_1, x_2 \in$ **R** şi $x_1 \neq x_2$.

Avem: $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = (x-x_1)\sqrt{a\dfrac{(x-x_2)}{(x-x_1)}}$ şi atunci:

$\int \mathsf{R}\left[x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right]dx = \int \mathsf{R}\left[x, (x-x_1)\sqrt{a\dfrac{(x-x_2)}{(x-x_1)}}\right]dx$ este de tip 2 şi se face substituția:

$\dfrac{x-x_2}{x-x_1} = t^2 \Rightarrow x = \dfrac{t^2x_1+x_2}{1+t^2}; dx = \dfrac{2t(x_1-x_2)}{(1+t^2)^2}dt; x - x_1 = \dfrac{x_2-x_1}{1+t^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \int \mathsf{R}\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx = \int \mathsf{R}\left[\dfrac{t^2x_1+x_2}{1+t^2}; \dfrac{x_2-x_1}{1+t^2}t\sqrt{-a}\right]\dfrac{2t(x_1-x_2)}{(1+t^2)^2}dt =$

$= \int \mathsf{R}_5(t)dt$ cu R_5 o funcție rațională în t

4. $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ integrale binome cu a, $b \in$ **R***, m, n, $p \in \mathbf{Q}$ şi notăm $m = \dfrac{m_1}{m_2},\ n = \dfrac{n_1}{n_2},\ p = \dfrac{p_1}{p_2}$ unde $m_1, n_1, p_1 \in \mathbf{Z}$ şi $m_2\ n_2\ p_2 \in \mathbf{N}^*$.

Teorema 4.3 (P. L. Cebîşev)

Primitivele pentru $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ *se pot exprima prin combinații finite de funcții elementare numai în următoarele trei cazuri:*

*4_1. $p \in$ **Z**;* *4_2.* $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbf{Z}$*;* *$4_3$.* $\dfrac{m+1}{n} + p \in \mathbf{Z}$.

Demonstrație. 4_1. Dacă $p \in \mathbf{Z}$, avem:

(i) $p = 0 \Rightarrow \int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx = \int x^m dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1} + C_1\ \ (m \neq -1)$.

(ii) $p > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx = \sum\limits_{k=0}^{p} C_p^k a^{p-k} b^k \int x^{nk+m} dx = \sum\limits_{k=0}^{p} C_p^k a^{p-k} b^k\ \dfrac{x^{nk+m+1}}{nk+m+1} + C_2$

(iii) $p < 0 \Rightarrow \int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx = \int \frac{x^m}{\left(a+bx^n\right)^{-p}}dx = \int \mathsf{R}(x, x^{\frac{m_1}{m_2}}, x^{\frac{n_1}{n_2}})dx$ de tip 1. şi notând n = c.m.m.m.c. $\{m_2, n_2\}$ prin substituţia $x^n = t \Leftrightarrow x = t^{\frac{1}{n}}$;

$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx = \frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1}\frac{1}{\left(a+bx^n\right)^{-p}}dt = \int \mathsf{R}_6(t)dt$ cu R_6 o funcţie raţională în t.

4_2. $p \notin \mathbf{Z}$ şi $\frac{m+1}{n} \in \mathbf{Z}$, atunci $\frac{m+1}{n} - 1 \in \mathbf{Z}$ şi prin substituţia $x^n = t$ avem:

$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx = \frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1}\left(a+bt\right)^p dt$ din care prin o nouă substituţie:

$a+bt = z^{p_2} \Leftrightarrow a+bx^n = z^{p_2} \Rightarrow t = \frac{z^{p_2}-a}{b}, dt = \frac{p_2}{b}z^{p_2-1}dz$ se obţine rezultatul final:

$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx = \frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1}\left(a+bt\right)^p dt = \frac{1}{n}\frac{p_2}{b}\int\left(\frac{z^{p_2}-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} z^{p_1+p_2-1}dz = \int \mathsf{R}_7(z)dz$ R_7 o funcţie raţională în z deoarece $\frac{m+1}{n} - 1 \in \mathbf{Z}$ şi $p_1 + p_2 - 1 \in \mathbf{Z}$.

4_3. Dacă p, $\frac{m+1}{n} \notin \mathbf{Z}$ şi $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbf{Z}$ se reprezintă integrala binomă sub forma:

$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx = \int x^m\left(\frac{a+bx^n}{x^n}\cdot x^n\right)^p dx = \int x^{m+np}\left(\frac{a+bx^n}{x^n}\right)^p dx$ şi prima substituţie: $x^n = t \Leftrightarrow x = t^{\frac{1}{n}}$; $dx = \frac{1}{n}t^{\frac{1-n}{n}}dt$ conduce la:

$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx = \frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}+p-1}\left(\frac{a+bt}{t}\right)^p dt$; a doua substituţie:

$\frac{a+bt}{t} = z^{p_2} \Leftrightarrow \frac{a+bx^n}{x^n} = t^{p_2} \Rightarrow t = \frac{a}{z^{p_2}-b}\left(z^{p_2}-b \neq 0\right), dt = \frac{-ap_2z^{p_2-1}}{(z^{p_2}-b)^2}dz \Rightarrow$

$\Rightarrow \int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx = -\frac{ap_2}{n}\int\left(\frac{a}{z^{p_2}-b}\right)^{\frac{m+1}{n}+p-1} z^{p_1+p_2-1}dz = \int \mathsf{R}_8(z)dz$ cu $\frac{m+1}{n} + p - 1 \in \mathbf{Z}$, $p_1 + p_2 - 1 \in \mathbf{Z}$ şi R_8 o funcţie raţională în z.◄

Integrarea funcţiilor raţionale în sin *x* şi cos *x*

1. Calculul integralei $\int \mathsf{R}\left(\sin x, \cos x\right)dx$ în cazul general cu $x \in (-\pi\ ,\ \pi\ )$ se face printr-o schimbare de variabilă: $tg\frac{x}{2} = t \Rightarrow x = 2arctgt, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$,

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \Rightarrow \int \mathsf{R}\left(\sin x, \cos x\right)dx = 2\int \mathsf{R}\left[\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right]\frac{dt}{1+t^2} = \int \mathsf{R}_1(t)\,dt$ cu R_1 o funcţie raţională în t.

2. Dacă R (sin x, cos x) este o funcție impară în cos x, avem: $\mathsf{R}\left(\sin x,\cos x\right)dx = f(\sin^2 x,\cos^2 x)\cos x dx$ şi prin substituția: sin x= t, cos x dx = dt se obține: $\mathsf{R}\left(\sin x,\cos x\right)dx = f(\sin^2 x,\cos^2 x)\cos x dx =$

$= f\left(t^2,1-t^2\right)dt \Rightarrow \int \mathsf{R}\left(\sin x,\cos x\right)dx = \int f\left(t^2,1-t^2\right)dt = \int \mathsf{R}_2(t)\,dt$ cu cu R_2 o funcție rațională în t.

3. Dacă R (sin x, cos x) este o funcție impară în sin x, avem: $\mathsf{R}\left(\sin x,\cos x\right)dx = g(\sin^2 x,\cos^2 x)\sin x dx$ şi prin substituția: cos x= t,

-sin x dx = dt rezultă: $\int \mathsf{R}\left(\sin x,\cos x\right)dx = -\int g(\sin^2 x,\cos^2 x)(-\sin x dx) =$

$= -\int g\left(1-t^2,t^2\right)dt = \int \mathsf{R}_3(t)\,dt$ cu cu R_3 o funcție rațională în t.

4. Dacă R (sin x, cos x) este o funcție pară în sin x şi cos x, avem $\mathsf{R}\left(\sin x,\cos x\right)dx = h(\sin^2 x,\cos^2 x)dx$ şi prin substituția:

$tgx = t \Rightarrow x = arctgt,\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2},\ \sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2},\ \cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}$ se obține rezultatul final:

$\int \mathsf{R}\left(\sin^2 x,\cos^2 x\right)dx = \int h\left(\sin^2 x,\cos^2 x\right)dx = \int h\left[\dfrac{t^2}{1+t^2},\dfrac{1}{1+t^2}\right]\dfrac{dt}{1+t^2} = \int \mathsf{R}_4(t)\,dt$ cu R_4 o funcție rațională în t.

Integrarea funcțiilor raționale în exponențiale

Primitivele de forma: $\int \mathsf{R}\left(e^{r_1 ax},\ldots,e^{r_p ax}\right)dx$ cu $a \neq 0$, $a \in \mathbf{R}$ şi $r_1, \ldots, r_p \in \mathbf{Q}$, iar $r_i = \dfrac{m_i}{n_i}, m_i \in \mathbf{Z}, n_i \in \mathbf{N}^*$ şi i=1, …, p se va nota λ =c.m.m.m.c.{ $n_1, \ldots, n_p$ } şi prin substituția $e^{ax} = t^{\lambda}$, t >0 $\Leftrightarrow$ $x = \dfrac{\lambda \ln t}{a},\quad dx = \dfrac{\lambda}{a}\dfrac{dt}{t}$ se obține:

$\int \mathsf{R}\left(e^{r_1 ax},\ldots,e^{r_p ax}\right)dx = \dfrac{\lambda}{a}\int \mathsf{R}\left(t^{\lambda r_1},\ldots,t^{\lambda r_p}\right)\dfrac{dt}{t} = \int \mathsf{R}_1(t)\,dt$ cu R_1 o funcție rațională în t, deoarece $\lambda r_1, \ldots, \lambda r_p \in \mathbf{Z}$.

Integrale de forma $\int P_n(x) f(x)\,dx$

Fie $P_n \in \mathbf{R}[X]$ şi f este una dintre funcțiile elementare $e^x, a^x, \ln x, \log_a x, \arcsin x, \arccos x, arctg\, x, arcctg\, x$ etc.. Integrala se calculează prin metoda integrării prin părți cu scopul de a reduce treptat cu câte o unitate gradul plinomului P_n : gr $P_n = n$ ($n \in \mathbf{N}$). se întâlnesc următoarele cazuri:

1. $\int P_n(x)e^x dx = e^x P_n(x) - \int P'_n(x)e^x dx = e^x P_n(x) - \int Q_{n-1}(x)e^x dx \ \left(Q_{n-1} = P'_n \text{ şi gr} Q_{n-1} = n-1\right)$

2. $\int P_n(x)\ln x dx = Q_{n+1}(x)\ln x - \int Q_{n+1}(x)\dfrac{dx}{x} = \int \tilde{Q}_n(x)dx$ unde

$\left(Q_{n+1}(x) = \int P_n(x)dx \text{ cu gr} Q_{n+1} = n+1\right)$ şi $\tilde{Q}_n(x)$ polinom cu gr $\tilde{Q}_n = n$.

3. $\int P_n(x)\arcsin x dx = Q_{n+1}(x)\arcsin x - \int \dfrac{Q_{n+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \text{ cu } Q_{n+1}(x) = \int P_n(x)dx$

polinom de gradul ($n+1$); se elimină radicalul din ultima integrală prin una dintre substituţiile lui Euler. De asemenea, în unele cazuri sunt convenabile substituţiile trigonometrice $x = \sin t$ ($x = \cos t$); d $x = \cos t$ dt (d $x = -\sin t$ dt); $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = |\cos t|$;

$\left(\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = |\sin t|\right)$ şi se obţine integrala unei funcţii raţionale în sin$t$ şi cos$t$.

4. $\int P_n(x) arctgx dx = Q_{n+1}(x) arctgx - \int \frac{Q_{n+1}(x)}{1+x^2} dx = Q_{n+1}(x) arctgx - \int \mathsf{R}(x) dx$ cu R o funcţie raţională în x şi $Q_{n+1}(x) = \int P_n(x) dx$ polinom.

5. $\int P_n(x) a^x dx = P_n(x) \frac{a^x}{\ln a} - \frac{1}{\ln a} \int P'_n(x) a^x dx = P_n(x) \frac{a^x}{\ln a} - \frac{1}{\ln a} \int Q_{n-1}(x) a^x dx$

$(\mathrm{gr} Q_{n-1}(x) = n-1)$.

6. ***Integrale eliptice***

În cazul $\int \mathsf{R}\left(x, \sqrt{P_n(x)}\right) dx$ gr $P_n = n \geq 3$, primitivele nu se pot exprima, în general, prin combinaţii finite de funcţii elementare şi această clasă de integrale se numesc ***integrale eliptice.*** Integralele eliptice pot fi reprezentate sub una dintre formele:

1. $$\begin{cases} I(k,t) = \int \frac{dt}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 t}} \quad (0 \leq k \leq 1) \\ I(0,t) = t + c;\, I(1,t) = \int \frac{dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \int \frac{dt}{|\cos t|} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right| + C_1 \quad \left(tg \frac{t}{2} = u\right) \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} E(k,t) = \int \sqrt{1-k^2 \sin^2 t} dt \quad (0 \leq k \leq 1) \\ E(0,t) = t + c_1;\, E(1,t) = \int \sqrt{1-k^2 \sin^2 t} dt = \int |\cos t| dt = \sin t + C_3 \end{cases}$$

Funcţiile $I(k, t)$, $E(k, t)$ se numesc ***funcţii eliptice***; integralele de acest tip apar în calculul lungimii unui arc de elipsă din plan.

7. Integrale care nu se exprimă prin combinaţii liniare finite de funcţii elementare: $\int \frac{\sin x}{x} dx$ (sinusul integral); $\int \frac{\cos x}{x} dx$ (cosinusul integral); $\int \frac{dx}{\ln x}$ (logaritmul integral); $\int \frac{e^x}{x} dx$ (exponenţialul integral); $\int e^{-x^2} dx$ (integrala lui Poisson); $\int \cos x^2 dx$ şi $\int \sin x^2 dx$ (integralele lui Fresnel) şi integralele eliptice $\int \mathsf{R}\left(x, \sqrt{P_n(x)}\right) dx$ gr $P_n = n \geq 3$.

Aplicaţii.

1. $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{(x^2+1)-1}{1+x^2} dx = x - arctgx + C$

2. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \frac{dx}{\cos^2 x} = -ctgx - tgx + c$

$$3.\int \frac{dx}{\underset{\left(a\neq 0;\,\Delta=b^2-4ac\right)}{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\frac{\Delta}{4a^2}}=\frac{1}{a}\int \frac{d\left(x+\frac{b}{2a}\right)}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}}=$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{\Delta}\ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{\Delta}}{2ax+b+\sqrt{\Delta}}\right|+C & ;\Delta>0 \text{ prin substituția evidentă } x+\frac{b}{2a}=t, dx=dt\\ -\frac{2}{2ax+b}+C & ;\Delta=0\\ \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}arctg\,\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}+C & ;\Delta<0\end{cases}$$

$$4.\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,a\cos t dt=a^2\int\cos^2 t dt=$$

$$x\in[-a,a], x=a\sin t, dx=a\cos t dt, t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)\,dt=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}\sin t\cos t+C=$$

$$=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}+C=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{a^2}{2}\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}+C=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}\right]+C$$

5. $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ cu $a\neq 0$ şi $I\subset \mathbf{R}$ a. î. $ax^2+bx+c>0\ \forall\, x\in I$

$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int\frac{dx}{\sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}}}$ şi apar două cazuri $a>0$ şi $a<0$.

I. $a>0\Rightarrow$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{d\left(x+\frac{b}{2a}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\mp\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2}}=$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left[x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}}\right]+C_1; \text{ dacă } \Delta>0 \text{ (se ia semnul +)}\\ \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left[x+\frac{b}{2a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{ax^2+bx+c}\right]+C_2; \text{ dacă } \Delta<0 \text{ (se ia semnul -)}\end{cases}$$

II. $a<0\Rightarrow\Delta>0$ şi avem

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{d\left(x+\frac{b}{2a}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 - \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{x+\frac{b}{2a}}{\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}} + C_3 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}} + C_3$$

$$6. \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x} = \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x - 1} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{-2\sin^2 \frac{x}{2}}{2\cos^2 \frac{x}{2}} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| tg^2 \frac{x}{2} \right| + C = \ln \left| tg \frac{x}{2} \right| + C$$

$$7. \int arctgxdx = \int (x)' arctgxdx = xarctgx - \int \frac{x}{1+x^2} dx =$$

$$= xarctgx - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = xarctgx - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

$$8. \int \sqrt{a^2+x^2} dx = \int (x)' \sqrt{a^2+x^2} dx = x\sqrt{a^2+x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}} dx =$$

$$= x\sqrt{a^2+x^2} - \int \frac{x^2+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}} dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = x\sqrt{a^2+x^2} -$$

$$- \int \sqrt{a^2+x^2} dx + a^2 \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{a^2+x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$$

$$9. \forall n \in \mathbf{N}, \quad I_n = \int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n} = \int \frac{x^2+a^2}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}} dx = \int x \frac{xdx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}} + a^2 I_{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_n = a^2 I_{n+1} + \int x \left[\frac{1}{2n\left(x^2+a^2\right)^n} \right]' dx = a^2 I_{n+1} - \frac{x}{2n\left(x^2+a^2\right)^n} + \frac{1}{2n} I_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_{n+1} = \dfrac{1}{a^2} \left[\dfrac{x}{2n\left(x^2+a^2\right)^n} + \dfrac{2n-1}{2n} I_n \right]; n \geq 1 \\ I_0 = x + C_1; I_1 = \displaystyle\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{1}{a} + C_2 \end{cases}$$

$$10. I_n=\int tg^n x dx=\int tg^{n-2}x(tg^2x+1-1)dx=\int tg^{n-2}x\frac{dx}{\cos^2 x}-I_{n-2}=$$

$$=\int tg^{n-2}xd(tgx)-I_{n-2}=\frac{tg^{n-1}x}{n-1}-I_{n-2} \text{ cu } n\geq 2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} I_n=\dfrac{tg^{n-1}x}{n-1}-I_{n-2} \\ I_0=x+C_1; I_1=\int tgxdx=\int\dfrac{\sin x}{\cos x}dx=-\ln|\cos x|+C_2 \end{cases}$$

$$11. \int\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}dx=\int\left[\frac{1}{x-2}-\frac{3x+4}{(x^2+1)^2}-\frac{x+2}{x^2+1}\right]dx=\ln|x+2|+$$

$$+\frac{3}{2}\frac{1}{x^2+1}-4\left[\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}arctgx\right]-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-2arctgx+C$$

$(I_2=\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$ caz particular din 10.)

$$12. \int\frac{x+1}{x+\sqrt{x^2+2x+2}}dx=\int\frac{\frac{t(t+2)}{2(t+1)}}{t}\cdot\frac{1}{2}\frac{t^2+2t+2}{(t+1)^2}dt=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{t^3+4t^2+6t+4}{(t+1)^3}dt=\frac{1}{4}\int dt+\frac{1}{4}\int\frac{t^2+3t+3}{(t+1)^3}dt=$$

$$=\frac{t}{4}+\frac{1}{4}\int\frac{(t+1)^2+(t+1)+1}{(t+1)^3}dt=\frac{t}{4}+\frac{1}{4}\ln|t+1|-\frac{1}{4}\frac{1}{t+1}-$$

$-\frac{1}{8}\frac{1}{(t+1)^2}+C$ cu substituțiile:

$$\sqrt{x^2+2x+2}=t-x; x=\frac{t^2-2}{2(t+1)}; dx=\frac{t^2+2t+2}{(t+1)^2}dt; x+1=\frac{t(t+2)}{2(t+1)};$$

$$x+\sqrt{x^2+2x+2}=t; \sqrt{x^2+2x+2}=\frac{t^2+2t+2}{2(t+1)}$$

$$\Rightarrow\int\frac{x+1}{x+\sqrt{x^2+2x+2}}dx=\frac{1}{4}(x+\sqrt{x^2+2x+2})+\frac{1}{4}\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}|-$$

$$-\frac{2x+3-2\sqrt{x^2+2x+2}}{8(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})}+C$$

13. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx$

$$p=\frac{1}{3}\notin \mathbf{Z}; \frac{m+1}{n}=\frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}}=2\in \mathbf{Z}\Rightarrow 1+\sqrt[4]{x}=t^3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{x}=t^3-1\Rightarrow x=(t^3-1)^4; dx=4(t^3-1)^3 3t^2\,dt\Rightarrow$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int\left[(t^3-1)^4\right]^{\frac{-1}{2}} t\cdot 12t^2(t^3-1)^3\,dt=$$

$$=12\int\left(t^6-t^3\right)dt=\frac{12}{7}t^7-\frac{12}{4}t^4+C=\frac{12}{7}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^7}-3\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^4}+C$$

Modulul 4.2 - Integrala Riemann. Aplicații.

Noțiunea de integrală a apărut din nevoia practică de a determina arii şi volume ale unor figuri din plan şi corpuri din spațiu, cât şi multe considerații din fizică. ***Bazele calculului integral*** şi ***aplicațiile*** sale în geometrie, mecanică şi fizică au fost dezvoltate în secolul al XVIII –lea în lucrările lui Newton şi Leibniz. Definiția riguroasă a conceptului de "***integrală***" a fost dată peste un secol în lucrările lui Cauchy şi Darboux pentru clasa funcțiilor continue pe un interval compact din **R**. Extinderea integralei pentru funcții discontinue a fost realizată de Riemann şi Lebesgue, care au formulat condiții necesare şi suficiente de integrabilitate pentru funcții reale de o variabilă reală.

Unele probleme speciale din teoria integrabilității au fost elaborate de Stieltjes şi Lebesgue care au generalizat conceptul de integrală pentru cazul mulțimilor abstracte.

În teoria generală a integralei se pun astfel problemele:

Se defineşte o anumită "schemă" S (un ***procedeu*** S), prin care putem asocia unor anumite funcții date un număr real, în general, bine determinat. "***A integra***" o funcție $f : [a, b]\rightarrow \mathbf{R}$ ($a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$) relativ la schema S, înseamnă a determina numărul real S(f) asociat lui f, cu ajutorul schemei precizate S. În mod natural apar următoarele probleme:

I. Care este relația dintre tipurile de integrală considerate ?
II. Să se determine clase cât mai ample de funcții integrabile.
III. Să se indice metode, procedee pentru calculul integralelor când funcția de integrat are o formă cât mai generală sau o formă particulară remarcabilă (funcții raționale, funcții iraționale etc).
IV. Să se precizeze metodele de calcul aproximativ al integralelor care să fie însoțite de o formulă de evaluare a erorilor de calcul.

Definiția integralei Riemann. Clase de funcții integrabile.

Fie a, $b \in \mathbf{R}$ cu $a < b$ şi $f : [a, b] \to \mathbf{R}$. O divizare a intervalului $[a, b]$, notată Δ, este o mulțime finită de puncte $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_{i-1} < \quad < x_i < \ldots < x_n = b\}$ unde $x_i \in [a, b]$ se numesc ***punctele diviziunii*** $\boldsymbol{\Delta}$ şi $[x_{i-1}, x_i] \subset [a, b]$, i = 1,…$n$ se numesc ***intervalele parțiale ale lui*** $\boldsymbol{\Delta}$. Avem lungimea $l([x_{i-1}, x_i]) = x_i - x_{i-1} \overset{not}{=} \delta x_i > 0$ şi notăm prin $\|\Delta\| \overset{not}{=} \mu(\Delta) = = \max\{x_i - x_{i-1} \mid i = 1, .., n\}$ ***norma divizării*** $\boldsymbol{\Delta}$; evident $\delta x_i \leq \|\Delta\|$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$. Divizarea Δ ***este echidistantă*** dacă:
$x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}, \forall i \in \{1,...,n\}$ şi atunci $x_i = a + \dfrac{i}{n}(b-a)$. Se va nota prin $\mathsf{D}([a, b])$ sau D (când nu este pericol de confuzie) ***mulțimea tuturor divizărilor lui*** $[a, b]$. Pentru o divizare $\Delta \in \mathsf{D}([a, b])$ cu $\Delta = \{a = x_0 < \quad < x_1 < ... < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b\}$ se numeşte ***mulțime de puncte intermediare***, notată ξ_Δ, $\xi_\Delta = \{\xi_i \mid \forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]\}$; pentru $\Delta \in \mathsf{D}([a, b])$ dată există o mulțime infinită de familii de puncte intermediare ξ_Δ.
Dacă $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathsf{D}([a, b])$ se spune că $\boldsymbol{\Delta_2}$ ***este mai fină decât*** $\boldsymbol{\Delta_1}$ dacă $\Delta_1 \subset \Delta_2$ (adică Δ_2 are cel puțin un punct mai mult decât Δ_1): $\exists \bar{x}_i \in \Delta_2$ cu $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ şi $\bar{x}_i \notin \Delta_1$.
Relația de finețe dintre diviziunile lui $[a, b]$ este o relație de ordine pe $\mathsf{D}([a, b])$ şi în plus, $\forall \Delta_1, \Delta_2 \in \mathsf{D}([a, b])$ există $\Delta \in \mathsf{D}([a, b])$ a î. $\Delta_1 \subseteq \Delta$ şi $\Delta_2 \subseteq \Delta$ (se consideră $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$, şi evident $\Delta_1 \subseteq \Delta$ şi $\Delta_2 \subseteq \Delta$).
Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, $\forall \Delta \in \mathsf{D}([a, b])$ şi orice sistem de puncte intermediare $\xi_\Delta = \{\xi_i \mid \forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]\}$, numărul

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\delta x_i \overset{not}{=} \sigma_\Delta(f, \xi_\Delta)$$

se numeşte ***sumă integrală Riemann*** asociată funcției f, diviziunii Δ şi sistemului de puncte ξ_Δ.

Definiția 4.2

1] Funcția $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, este ***integrabilă Riemann pe*** $[a, b]$ dacă există $I_{\mathbf{R}} \in \mathbf{R}$ cu proprietatea:

$$(2)\begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0 \text{ a.î. } \Delta \in \mathsf{D}[a,b] \text{ cu} \\ \|\Delta\| < \eta \Rightarrow \left|\sigma_\Delta(f, \xi_\Delta) - I_{\mathbf{R}}\right| < \varepsilon, \forall \xi_\Delta \end{cases} \Leftrightarrow (2')\, I_R = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sigma_\Delta(f, \xi_\Delta), \forall \xi_\Delta$$

2] Numărul real I_R se numeşte ***integrala Riemann*** sau ***integrala definită*** din f pe $[a, b]$, notată:

$$(3) I_{\mathbf{R}} = \int_a^b f(x)dx \text{ sau } I_{\mathbf{R}} = \int_a^b f dx \text{ sau } I_{\mathbf{R}} = \int_a^b f \text{ sau } I_{\mathbf{R}} = \int_{[a,b]} f$$

Observații.

1. Din definiția 1 rezultă că f este integrabilă Riemann dacă există $\lim\limits_{\|\Delta\| \to 0} \sigma_\Delta(f, \xi_\Delta) = I_{\mathbf{R}} \in \mathbf{R}$, $\forall \xi_\Delta$.
2. Avem $\int_a^b f dx = -\int_b^a f dx \quad (a < b)$

3. Dacă există $I_R \in \mathbf{R}$ cu proprietatea (2) acesta este unic.
4. O funcție integrabilă Riemann pe [a, b] se va numi funcție **R- *integrabilă*** şi vom nota prin $\mathsf{R}[a, b]=\{f \mid f : [a, b]\to \mathbf{R}$ integrabilă Riemann$\}$ mulțimea funcțiilor $f : [a, b]\to\mathbf{R}$, R – integrabile.

Teorema 4.4 (de caracterizare a integrabilității pe R)

Fie $f : [a, b]\to\mathbf{R}$ ($a, b\in \mathbf{R}$; $a < b$). Funcția f este integrabilă Riemann, dacă şi numai dacă, există $I_{\mathbf{R}} \in \mathbf{R}$ cu proprietatea:

$$(4)\begin{cases}\forall(\Delta_n)_{n\geq 1}\subset \mathsf{D}[a,b] \text{ un şir de diviziuni cu şirul normelor } \|\Delta_n\| \xrightarrow{\mathbf{R}} 0 \text{ şi } \forall \xi_{\Delta_n}, \\ \text{şirul sumelor integrale Riemann } \sigma_\Delta(f, \xi_\Delta) \text{ este convergent în } \mathbf{R} \text{ cu limita} \\ I_{\mathbf{R}}\in\mathbf{R}\end{cases}$$

Demonstrația în bibliografie ([10], [11], [16]).◄

Consecința 4.4. *Fie $f : [a, b]\to\mathbf{R}$ o funcție R – integrabilă, atunci are loc afirmația:*

$$(5)\forall\Delta_n\in\mathsf{D}[a,b], n\geq 1 \text{ cu } \|\Delta_n\| \xrightarrow{\mathbf{R}} 0 \text{ şi } \forall\xi_{\Delta_n} \Rightarrow \sigma_\Delta(f,\xi_\Delta) \xrightarrow{\mathbf{R}} \int_a^b f(x)dx = I_{\mathbf{R}}$$

Teorema 4.5 (Condiție necesară pentru integrabilitate)

Dacă $f : [a, b]\to\mathbf{R}$ este o funcție R – integrabilă, atunci f este mărginită pe [a, b].

Demonstrație.

f integrabilă $\overset{def1}{\Leftrightarrow}$ (2) adevărată şi fie $\varepsilon=1$, atunci există $\Delta\in\mathsf{D}([a, b])$ a. î.

$\left|\sigma_\Delta(f,\xi_\Delta)-I_{\mathbf{R}}\right|\leq 1, \forall(\xi_\Delta) \Leftrightarrow (2')\ I_{\mathbf{R}}-1\leq\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\delta x_i\leq I_{\mathbf{R}}+1, \forall\xi_\Delta\in\left\{[x_{i-1},x_i] \mid i=\overline{1,n}\right\}$ Fixăm $j\in\{1, 2, \ldots, n\}$ şi consederăm un sistem de puncte intermediare $\{\xi_1^0,\xi_2^0,\ldots,\xi_{j-1}^0,\xi_j,\xi_{j+1}^0,\ldots,\xi_n^0\}$ cu $\xi_1^0,\xi_2^0,\ldots,\xi_{j-1}^0,\xi_{j+1}^0,\ldots,\xi_n^0$ fixați şi $\forall\ \xi_j$ arbitrar cu $\xi_j\in[x_{j-1}, x_j]$ cu $j \neq i$. Din (2") pentru $\forall\ \xi_j\in[x_{j-1}, x_j]$ avem:

$$(6)\frac{(I_{\mathbf{R}}-1)+\sum_{i\neq j} f(\xi_j^0)\,\delta x_j}{x_j-x_{j-1}}\leq f(\xi_j)\leq\frac{(I_{\mathbf{R}}+1)+\sum_{i\neq j} f(\xi_j^0)\,\delta x_j}{x_j-x_{j-1}}$$

$\Rightarrow f$ este mărginită pe $[x_{j-1}, x_j]$ pentru $\forall\ j\in\{1, 2, \ldots, n\}$ $\Rightarrow$ f este mărginită pe $[a,b]=\bigcup_{j=1}^{n}[x_{j-1},x_j]$.◄

Consecința 4.5 *Dacă $f : [a, b]\to\mathbf{R}$ este o funcție nemărginită pe [a, b], atunci f nu este R – integrabilă (condiție suficientă).*

Demonstrația este directă din teorema 4.5.◄

Fie $f : [a, b]\to\mathbf{R}$ o funcție mărginită cu $m = \inf\{f(x) \mid x\in [a, b]\}$, $M = \sup\{f(x) \mid x\in [a, b]\}$. Dacă $\Delta\in\mathsf{D}([a, b])$ pe fiecare interval parțial $[x_{i-1}, x_i]$ notăm: $m_i(f)= \inf f(x)$, cu $x\in [x_{i-1}, x_i]$, $M_i(f)= \sup f(x)$, cu $x\in [x_{i-1}, x_i]$ şi considerăm sumele integrale Darboux:

$$(7)\begin{cases} s_\Delta(f)=\sum_{i=1}^{n} m(x_i)\,\delta x_i, \text{ suma inferioară Darboux} \\ S_\Delta(f)=\sum_{i=1}^{n} M(x_i)\,\delta x_i, \text{ suma superioară Darboux} \end{cases}$$

Definiția 4.3.

Fie $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ mărginită

1] Numărul $\sup\limits_{\Delta\in D[a,b]} s_\Delta(f)=\underline{I}$ se numeşte ***integrala inferioară Darboux a funcției f***, notată: $\underline{I}=\underline{\int_a^b} f(x)dx$.

2] Numărul $\inf\limits_{\Delta\in D[a,b]} S_\Delta(f)=\overline{I}$ se numeşte ***integrala superioară Darboux a funcției f***, notată: $\overline{I}=\overline{\int_a^b} f(x)dx$.

3] Funcția mărginită f este ***integrabilă Darboux*** pe $[a, b]$ sau ***D- integrabilă***, dacă prin definiție avem:

(8) $\underline{\int_a^b} f(x)dx=\overline{\int_a^b} f(x)dx=I_D\in\mathbf{R}$ şi I_D se numeşte ***integrala Darboux a funcției f*** pe $[a, b]$, notată prin acelaşi simbol $I_D=\int_a^b f(x)dx$.

Consecinta 4.6.

Din formula (7) şi definiția 4.3 rezultă în mod direct următoarele proprietăți ale sumelor integrale Darboux:

$(d_1)\ 0\le M_i-m_i\overset{not}{=}\omega_f([x_{i-1},x_i])\le M-m\le 2\|f\|_\infty, \forall i\in\{1,2,...,n\}$

$(\|f\|_\infty=\sup\{|f(x)|\,|x\in[a,b]\})$

$(d_2)\ S_\Delta(f)-s_\Delta(f)=\sum_{i=1}^{n}[M_i(f)-m_i(f)]\delta x_i\le\|\Delta\|\sum_{i=1}^{n}[M_i(f)-m_i(f)]$

$(d_3)\ S_\Delta(f)-s_\Delta(f)\le\max\{M_i(f)-m_i(f)\,|\,i=1,...,n\}(b-a)$

$(d_4)\ \forall\Delta_1,\Delta_2\in D[a,b]$ cu $\Delta_1\le\Delta_2\Rightarrow\|\Delta_1\|\ge\|\Delta_2\|, s_{\Delta_1}(f)\le s_{\Delta_2}(f), S_{\Delta_1}(f)\ge S_{\Delta_2}(f)$

$S_{\Delta_2}(f)-s_{\Delta_2}(f)\le S_{\Delta_1}(f)-s_{\Delta_1}(f)$

(d_5) Dacă f este mărginită pe [a, b]

$\forall\Delta_1,\Delta_2\in D[a,b],\ s_{\Delta_1}(f)\le S_{\Delta_2}(f),\quad s_{\Delta_1}(f)\le\underline{\int_a^b} f(x)dx=\underline{I}\le\overline{I}=\overline{\int_a^b} f(x)dx\le S_{\Delta_2}(f)$ (d_6)

Dacă f este mărginită pe [a, b] pentru $\forall\Delta\in D([a,b])$, avem:

$$\begin{cases} s_\Delta(f)\le\sigma_\Delta(f,\xi_\Delta)\le S_\Delta(f);\forall\xi_\Delta \\ s_\Delta(f)=\inf\limits_{\xi_\Delta}\sigma_\Delta(f,\xi_\Delta);\ S_\Delta(f)=\sup\limits_{\xi_\Delta}\sigma_\Delta(f,\xi_\Delta)\end{cases}.$$

Demonstrația propozițiilor (d_1) – (d_6) se face prin calcul direct, folosind definițiile semnelor integrale Darboux şi Riemann. ◄

Observații:

1. Când rafinăm diviziunea Δ , sumele inferioare Darboux cresc şi sumele inferioare superioare Darboux descresc.
2. Orice sumă inferioară Darboux este mai mică sau egală cu orice sumă superioară Darboux.
3. Pentru f : $[a, b]\to$ **R** s-au definit două integrale: integrala Riemann şi integrala Darboux şi două tipuri de integrabilitate. Vom dovedi că cele două integrale şi cele două tipuri de integrabilitate coincid şi vom folosi din acest motiv conceptele de “***integrală definită*** sau ***integrală***” şi “***funcție integrabilă*** ” pe $[a, b]$.

Teorema 4.5 (Darboux / pentru caracterizarea integrabilității)

Fie f : [a, b]→ ***R*** *o funcție mărginită, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:*

(i) f – este R – integrabilă; *(ii) f – este D – integrabilă;*

(iii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \Delta \in \mathcal{D}[a,b]$ a.î. $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) \le \varepsilon$;

(iv) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall \Delta \in \mathcal{D}[a,b]$ cu $\|\Delta\| < \eta \Rightarrow S_f(\Delta) - s_f(\Delta) < \varepsilon$.

Demonstrația se face pe etape folosind definițiile, teoremele şi consecințele prezentate anterior, urmând schema

I. (i) ⇒(ii); II. (iv) ⇒(iii); III. (iii) ⇒(ii);
IV. (ii) ⇒(iii); V. (iv) ⇒(i); VI. (iii) ⇒(iv)

şi se găseşte în bibliografie ([9], [6], [10], [11], [16]). ◄

Consecința 4.7.

*O funcție mărginită f : [a, b]→**R** este integrabilă Riemann, dacă şi numai dacă, f este integrabilă Darboux şi cele două integrale coincid:*

$$I_{\mathbf{R}} = \int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = I_{\mathbf{D}} \overset{not}{=} I \in \mathbf{R}\,.$$

Teorema 4.6 (Condiție suficientă de integrabilitate)

*Dacă f : [a, b]→**R** este funcție monotonă, atunci f este integrabilă pe [a, b].*

Demonstrație. Presupunem f monoton crescătoare şi neconstantă. $\forall\ \varepsilon > 0$ fixat, considerăm $\Delta \in \mathcal{D}([a, b])$ a. î.

$\|\Delta\| < \dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} = \eta(\varepsilon)$. Pentru $\forall\ [x_{i-1}, x_i]$ cu $i \in \{1, 2, ..., n\}$, avem:

$M_i(f) - m_i(f) = f(x_i) - f(x_{i-1})$ şi atunci $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) = s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n}\left[M_i(f) - m_i(f)\right]\delta x_i \le$

$\le \|\Delta\| \sum_{i=1}^{n}[f(x_i) - f(x_{i-1})] = \|\Delta\|[f(b) - f(a)] < \dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}[f(b) - f(a)] = \varepsilon \Rightarrow$ ⇒ f

este integrabilă după condiția (iii) din teorema lui Darboux.◄

Teorema 4.7. (Condiția suficientă de integrabilitate)

*Dacă f : [a, b]→**R** este funcție continuă, atunci f este integrabilă.*

Demonstrație f continuă pe $[a, b] \Rightarrow f$ este uniform continuă pe $[a, b]$ (Teorema Cantor) şi f este mărginită şi îşi atinge marginile pe $[a, b]$ (Teorema lui Weierstrass). Fie $\varepsilon > 0$ fixat şi f uniform continuă pe $[a, b] \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \eta(\varepsilon)$ independent de x a. î. $\forall x, y \in [a, b]$ cu $|x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Pentru o divizare $\Delta \in \mathcal{D}([a, b])$ cu $\|\Delta\| < \eta(\varepsilon)$, avem $|f(x) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ $\forall x, y \in [x_{i-1}, x_i]$ şi în particular, $M_i(f) - m_i(f) = \sup\{|f(x) - f(y)| \,|\, x, y \in [x_{i-1}, x_i]\} \le \dfrac{\varepsilon}{b-a}$

În aceste condiții după teorema Darboux (iii), avem:

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} \left[M_i(f) - m_i(f)\right]\delta x_i \le \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon$$

$\Rightarrow f$ este integrabilă pe $[a, b]$. ◄

Teorema 4.8 (Condiție suficientă pentru integrabilitate)

Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție mărginită cu un număr finit de puncte de discontinuitate (evident de speța I), atunci f este integrabilă pe $[a, b]$.

Demonstrația în bibliografie ([6], [10], [11], [16]). ◄

Observații.

1. Clasele de funcții integrabile $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ sunt: f monotonă (teorema 4), f continuă (teorema 5), f mărginită şi care are un număr finit de pucnte de discontinuitate.
2. Rezultatul cel mai general, Teorema lui Lebesgue: "O funcție $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este integrabilă dacă şi numai dacă, f este marginită şi continuă aproape peste tot pe $[a, b]$" se va prezenta în capitolul "***Integrala Lebesgue***".
3. În studiul unor extensiuni ale integralei Riemann se foloseşte conceptul de "funcție local integrabilă".

Definiția 4.4

Funcția $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este local integrabilă pe I, dacă şi numai adcă, prin definiție f este integrabilă pe orice interval compact $[u, v]$ conținut în intervalul de definiție I ($\forall u, v \in$ I cu $u < v$).

Proprietăți ale integralei şi ale funcțiilor integrabile

Demonstrațiile din acest capitol folosesc: definiția 1, teorema de caracterizare a integrabilității cu şiruri de diviziuni cu şirul normelor tinzând la zero, teorema lui Darboux şi uneori rezultatul din teorema lui Lebesgue.

Teorema 4.9 (Operații algebrice cu funcții integrabile)

Dacă f, $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ sunt funcții integrabile, atunci funcțiile:

$\lambda f(\lambda \in \mathbf{R}),\ f \pm g,\ fg,\ \dfrac{1}{f}(f(x) \ne 0, \forall x \in [a,b]),\ \sqrt{f}\ (f(x) \ge 0, \forall x \in [a,b])$ *sunt integrabile şi au loc formulele de calcul:*

(1°) $\int_a^b (\lambda f)dx = \lambda \int_a^b fdx$

(2°) $\int_a^b (f \pm g)dx = \int_a^b fdx \pm \int_a^b gdx$

Demonstrația este imediată folosind (4) din teorema 4.4 şi operațiile cu şiruri convergente în **R**. ◄

Consecinta 4.8.

*Dacă f , g ∈ R[a, b] atunci ∀ λ , μ∈ **R** funcția λ f + μ g ∈ R[a, b] şi are loc formula de calcul:*

(3°) $\int_a^b (\lambda f + \mu g)dx = \lambda \int_a^b fdx + \mu \int_a^b gdx$

Observații.

1. Integrala Riemann are proprietatea de liniaritate cu scalari din **R**.
2. Dacă $f \in$ R[a, b] şi a=b, avem: $\int_a^b f(x)dx = 0$ (după (1) din definiția 1). Dacă $a > b$, avem $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.
3. Reciproca afirmației f , g ∈ R[a, b] ⇒ f + g ∈ R[a, b] în general, nu este adevărată.

Exemplu:

$f,g:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ cu $f(x) = \begin{cases} -1; & x \in \mathbf{Q} \\ 1; & x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q} \end{cases}$ şi $g(x) = \begin{cases} -1; & x \in \mathbf{Q} \\ 1; & x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q} \end{cases}$ cu $f,g \notin \mathrm{R}[a,b]$

avem $(f+g)(x) = 0, \forall x \in \mathbf{R}$ şi $f + g \in \mathrm{R}[a,b]$ pentru $\forall [a,b] \subset \mathbf{R}$.

4. Mulțimea de funcții integrabile R[a, b] are structura algebrică de spațiu liniar în raport cu operațiile uzuale de înmulțire şi adunare cu scalari reali pentru funcții reale de o variabilă reală.

Teorema 4.10 (Proprietatea de aditivitate în raport cu intervalul)

*Funcția f : [a, b]→**R** este integrabilă pe [a, b] dacă şi numai dacă, ∀ c ∈ (a, b) funcțiile* $f_1 = f|[a,c]$ şi $f_2 = f|[c,b]$ *sunt integrabile şi are loc formula:*

$(3°)$ $\int_a^b fdx = \int_a^c fdx + \int_c^b fdx$.

Demonstrația se obține folosind teorema de caracterizare cu şiruri de diviziuni cu şirul normelor tinzând la zero (teorema 4.4). ◄

Consecinta 4.9 *Dacă I ⊆ **R** este interval şi f : [a, b]→**R** este o funcție continuă, atunci ∀ a, b, c ∈ I, are loc relația* $(3°)$ $\int_a^b fdx = \int_a^c fdx + \int_c^b fdx$.

Demonstrație. Dacă a< b < c avem (3) după teorema 2. Dacă a<b <c, avem:

$\int_a^c fdx = \int_a^b fdx + \int_b^c fdx = \int_a^b fdx - \int_c^b fdx \Leftrightarrow \int_a^b fdx = \int_a^c fdx + \int_c^b fdx.$ ◄

Observații.

1. Din teorema 2° rezultă că dacă $f \in$ R[a, b], pentru ∀ [c, d] ⊂[a, b] compact avem $f \in$ R[c, d], numită "***proprietatea de ereditate***".

2. Formula (3°) se numeşte “***proprietatea de aditivitate a integralei ca funcție de interval***”.
3. Formula (3°) se extinde în cazul unei reuniuni finite: $[a,b]=[a,c_1]\cup[c_1,c_2]\cup\ldots\cup\left[c_p,b\right]$.

Teorema 4.11 (Proprietatea de monotonie a integralei).
Fie f , g: $[a, b]\to \mathbf{R}$ cu f , $g \in$ R$[a, b]$ şi $f(x) \geq g(x)$ $\forall$ $x\in[a, b]$, atunci avem: $\left(4^{\circ}\right)$ $\int_a^b fdx \geq \int_a^b gdx$.

Demonstrația se obține cu ajutorul funcției $h = f - g$ pe $[a, b]$ şi a teoremei de caracterizare (teorema 4.4). ◄

Consecința 4.10
Fie $f : [a, b]\to\mathbf{R}$ cu $f\in$R$[a, b]$ şi m, M marginile lui f ($m \leq f(x) \leq M$, $\forall x\in[a, b]$), atunci avem: $\left(5^{\circ}\right)$ $m \leq \dfrac{1}{b-a}\int_a^b fdx \leq M$.

Demonstrație. Din relația m $\leq f(x) \leq$ M, $\forall$ $x\in[a, b]$, prin integrare, avem:
$m(b-a)=\int_a^b mdx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx = M(b-a) \Rightarrow \left(5^{\circ}\right)$.◄

Observații.

1. Formula (5°) conține expresia $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \mu(f)$ care se numeşte ***valoarea medie a lui f pe* [*a*, *b*].**
2. Formula (4°) exprimă “***proprietatea de monotonie a integralei***” şi pentru $f(x) \geq 0$, $\forall$ $x\in[a, b]$ şi $f\in$R$[a, b]$, avem:
$\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Consecința 4.11
Dacă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este o funcție continuă, atunci există $\xi\in [a, b]$ a. î. $\left(6^{\circ}\right)$ $\int_a^b fdx = f(\xi)(b-a)$.

Demonstrație. Funcția f continuă pe compactul $[a, b]$ este mărginită şi îşi atinge marginile (teorema Weierstass) deci există x_1, $x_2\in[a, b]$ a. î. m $= f(x_1)$, M $= f(x_2)$. Funcția f continuă pe intervalul $[a, b]$ are proprietatea lui Darboux şi pentru $\forall$ $\mu \in$ [m, M] $= f([a, b])$ există $\xi\in [a, b]$ a. î. $f(\xi) = \mu$ şi notând $\mu = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ din (5°) se obține (6°).◄

Teorema 4.12 (Majorarea modulului integralei)
Dacă $f : [a, b] \to\mathbf{R}$ este integrabilă, atunci $|f| \in$ R$[a, b]$ şi avem:
(7°) $\left|\int_a^b fdx\right| \leq \int_a^b |f|\,dx \leq (b-a)\|f\|_{\infty}$, $\left(a,b\in \mathbf{R};\ a<b\right)$.

Demonstrație. Pentru $\forall$ x, $y\in[a, b]$, avem $|\,|f(x)| - |f(y)|\,| \leq |f(x) - f(y)|$ şi din această inegalitate deducem că $|f| \in$ R$[a, b]$. Cum $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, $\forall$ $x \in [a, b]$, folosind (4°) avem:

$-\int_a^b |f|\,dx \le \int_a^b f dx \le \int_a^b |f|\,dx \Rightarrow \left|\int_a^b f dx\right| \le \int_a^b |f|\,dx$ şi cum $|f(x)| \le \|f\|_\infty$ rezultă (7°).◄

Teorema 4.13 (Teorema I de medie)

*Fie f : [a, b]→**R** cu f ∈R[a, b] şi g(x) ≥ 0, atunci există γ ∈[m, M]*

$\left(m = \inf_{x\in[a,b]} f(x), M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)\right)$a.î.$\left(8^\circ\right) \int_a^b f(x)g(x)dx = \gamma\int_a^b g(x)dx$.

În particular, dacă g(x) = 1, ∀x ∈ [a, b], avem:

$\left(8^\circ\right)'$ $\int_a^b f(x)dx = \gamma(b-a)\ (a<b)$.

Demonstraţie.

Din : $m \le f(x) \le M, x\in[a,b]$, şi $g(x)>0 \Rightarrow mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x), \forall x\in[a,b]$ şi după (4°) rezultă: $m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx\,(*)$. Dacă $\int_a^b g(x)dx = 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ şi pentru ∀γ∈ [m, M] are loc (8°). Dacă $\int_a^b g(x)dx > 0$, notăm $\gamma = \dfrac{\int_a^b fgdx}{\int_a^b gdx} \in [m,M]$ şi după (*) rezultă (8°).◄

Consecinţa 4.12

*Dacă f : [a, b]→**R** este continuă şi g ∈R[a, b] este nenegativă, atunci există ξ ∈ [a, b] a. î.* $\left(8^\circ\right)''$ $\int_a^b fgdx = f(\xi)\int_a^b gdx$.

În particular, dacă $g(x)\equiv 1, \forall x\in[a,b]$ *se obţine (6°).*

Demonstraţia este directă. Din ipoteza "*f* continuă pe [*a*, *b*]", pentru ∀γ ∈[m, M], există ξ ∈ [*a*, *b*], astfel încât *f* (ξ) = γ ⇒(8°).◄

Teorema 4.14

*Fie I ⊆ **R** interval şi f : I →**R** local integrabilă pe I. Dacă a ∈ I este un punct fixat şi se consideră funcţia*

(9°) F(x) = $\int_a^b f(t)dt$*, ∀x∈ I atunci F are proprietăţile:*

(i) F este continuă pe I;

(ii) F este derivabilă în ∀x_0∈I în care f este continuă cu F'(x_0) = = f (x_0).

Demonstraţie. (i) Fie ∀x_0 ∈ I şi ∀ r >0 fixat, atunci F(*x*) – F(x_0) = = $\int_a^x fdt - \int_a^{x_0} fdt = \int_{x_0}^x fdt, \forall x\in J\cap I$ unde $J=[x_0-r, x_0+r]$.

$|F(x)-F(x_0)| = \left|\int_{x_0}^x fdt\right| \le \int_{x_0}^x |f|\,dt \le |x-x_0| \sup_{t\in J}|f(t)|, \forall x\in J$.

Considerăm ∀ε >0 şi

$\eta_\varepsilon = \dfrac{\varepsilon}{M}$ cu $\sup_{t\in J}|f(t)| = M \Rightarrow |F(x)-F(x_0)| < \varepsilon\ |x-x_0| < \eta, \forall x\in I \Rightarrow$ F continuă în $\forall x_0 \in$ I ⇒ F continuă pe I.

(ii) Fie $\forall x_0 \in$ I şi f continuă în $x_0 \in$ I; pentru $\forall \varepsilon > 0$ există $\eta_\varepsilon > 0$ a. î. $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, $\forall x \in I \cap [x_0 - \eta, x_0 + \eta] \Rightarrow \forall x \in$ I cu $x \neq x_0$,

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)dt - \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(x_0)\,dt = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x}[f(t)-f(x_0)]dt$$ şi avem:

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| \le \frac{1}{|x-x_0|}\sup|f(t)-f(x_0)|\cdot|x-x_0| < \varepsilon, \forall x \in J = I \cap [x_0-\eta, x_0+\eta]; x \neq x_0$$

$\Rightarrow$ există $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0) \overset{def}{=} F'(x_0) \Rightarrow$ F este derivabilă în $x_0 \in$ I cu $F'(x_0) = f(x_0)$.

◀

Consecinta 4.13

*Fie $I \subseteq$ **R** interval şi $f : I \to$ **R**.*

I) *Dacă f este o funcție continuă pe I, atunci pentru $\forall a \in I$ fixat, funcția (9°) $F(x) = \int_a^x f(t)dt, x \in I$ este derivabilă şi avem $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$, deci f admite primitive pe I şi F este o primitivă a funcției f pe I.*

II) *Pentru $\forall a, b \in I$ şi f continuă pe I, avem:*

(10°) $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$,

unde F este o primitivă oarecare a lui f pe I.

Demonstrație. I) Afirmația este o consecință direcă a teoremei 6° – cazul (ii).
II) $\forall$ a, $b \in$ I fixați şi F o primitivă a lui f pe I, notăm:

$F_0 = F(x) = \int_a^x f(t)dt, \forall x \in I$ şi după afirmația I), avem: $F_0' = f$ pe I, deci $(F - F_0) = f - f = 0 \Rightarrow F = F_0 + C, C \in \mathbf{R}$.

Cum $F_0(a) = 0 \Rightarrow C = F(a)$ şi avem: $\int_a^b f(x)dx = F_0(b) = F(b) - C = F(b) - F(a)$. ◀

Observații.

1. Dacă f din teorema 6° este continuă la stânga (la dreapta) în $\forall x_0 \in$ I, atunci F este derivabilă la stânga (la dreapta) în $\forall x_0 \in$ I cu $F_s'(x_0) = f(x_0 - 0)$ $\left(F_d'(x_0) = f(x_0 + 0)\right)$.
2. Consecinta 4.13-I se numeşte "***Teorema fundamentală a calculului integral***".
3. Formula (10°) este ***formula Leibniz – Newton*** care este o metodă de calcul a integralei Riemann.

Metode de calcul ale integralei Riemann

Integrala Riemann poate fi calculată folosind definiția 1 şi construind după schema (S) sumele integrale, apoi calculăm limita acestora când norma divizării tinde la zero; acestă metodă este mai dificil de aplicat în cazul multor funcții reale.

Teorema 4.15 (Formula Leibniz - Newton)

*Dacă $f : [a, b] \to$ **R** este o funcție integrabilă şi f admite primitive pe [a, b] atunci pentru orice primitivă F a lui f pe [a, b] are loc formula Leibniz-Newton:*

(10°) $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Demonstrație. Pentru $\forall \Delta \in \mathcal{D}([a, b])$, avem

$$F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^{n}[F(x_i)-F(x_{i-1})]=s_\Delta(f)=\sum_{i=1}^{n}F'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$$

pentru $\forall \xi_i \in (x_i - x_{i-1})$ din teorema Lagrange aplicată lui F derivabilă pe $[x_i - x_{i-1}]$ şi avem $F(b)-F(a)=\sigma_\Delta(f,\xi_\Delta)$; cum *f* este integrabilă, aplicând teorema 1 (de caracterizare a funcţiilor integrabile):

$F(b)-F(a)=\sigma_{\Delta_n}(f,\xi_{\Delta_n})$ cu $\|\Delta_n\|\to 0$ şi $F(b)-F(a)=\lim_{\|\Delta_n\|\to 0}\sigma_{\Delta_n}(f,\xi_{\Delta_n})=\int_a^b f(x)dx$.◄

Consecinţa 4.14

*Dacă f : [a, b]→**R** este o funcţie derivabilă cu f ' funcţie integrabilă pe [a, b], avem:* $\int_a^b fdx = f(b)-f(a)$.

Demonstraţia rezultă din teorema 4.4 pentru F = *f*' pe [*a*, *b*].◄

Teorema 4.16 (Formula de integrare prin părţi)

*Fie f , g : [a, b]→**R** cu f , g ∈ C^1([a, b]), atunci are loc **formula de integrare prin părţi**:*

(11°) $\int_a^b fg'dx = fg\big|_a^b - \int_a^b f'gdx$.

Demonstraţie. Din *f* , *g* ∈ C^1([*a*, *b*]) ⇒(*fg*)' = *f'g* +*g' f* este o funcţie continuă pe [*a*, *b*] şi după consecinţa 7° – (i) admite primitive şi este integrabilă, deci se aplică formula de calcul (10°): $\int_a^b (fg)'dx = fg\big|_a^b$, dar

$$\int_a^b (fg)'dx=\int_a^b (f'g+fg')dx=\int_a^b f'gdx+\int_a^b fg'dx \Rightarrow (fg)\big|_a^b=\int_a^b f'gdx+\int_a^b fg'dx \Rightarrow$$

$$\int_a^b fg'dx = fg\big|_a^b-\int_a^b f'gdx \text{ .} ◄$$

Teorema 4.17 (Formula schimbării de variabilă (I))

*Fie f : [a, b]→**R** o funcţie continuă, atunci pentru orice φ : [α , β]→[a, b] cu φ ∈C^1([a, b]) are loc **formula schimbării de variabilă (I)**:*

(12°) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt$.

Demonstraţie. Pentru *f* continuă pe [*a*, *b*], fie F o primitivă a sa şi cum F, φ sunt derivabile, atunci F ∘ φ : [α , β] →**R** este derivabilă cu.

$(F\circ\varphi)'(t)=(F'\circ\varphi)(t)\cdot\varphi'(t)=(f\circ\varphi)(t)\cdot\varphi'(t)=f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t), \forall t\in[\alpha,\beta]$. Funcţia (*f* ∘ φ)· φ ' este integrabilă şi (F ∘ φ)' continuă pe [α , β], admite primitive, deci:

$\int_\alpha^\beta [F\circ\varphi]'dt=[F\circ\varphi](\beta)-[F\circ\varphi][\alpha]=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]$ şi din $(F\circ\varphi)'=(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$

$$\Rightarrow \int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\cdot\varphi'dt=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]\Rightarrow\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt$$ ◄

Teorema 4.18 (Formula schimbării de variabilă (II))

*Dacă f : [a, b]→**R** este continuă pentru orice φ : [α , β]→[a, b] bijectivă şi cu φ^{-1} ∈ C^1([a, b]) are loc **formula schimbării de variabilă (II)**:*

(13°) $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} [f \circ (\varphi^{-1})'](x)dx$.

Demonstrație. Cum φ este bijectivă şi $\varphi^{-1} : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ este bijectivă şi de clasă $C^1([a, b])$ atunci $f \circ \varphi : [a, b] \to \mathbf{R}$ este continuă şi avem:
$\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(t)dt = \int_{(\varphi^{-1})^{-1}(\alpha)}^{(\varphi^{-1})^{-1}(\beta)} \left[(f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}\right]\cdot\left(\varphi^{-1}\right)'dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f \circ (\varphi^{-1})'(x)dx = \int_a^b f(x)dx \Rightarrow$ (13°).◄

Observații.

1. Formula (12°) se numeşte "***prima fomulă de schimbare de variabilă***" în integrală unde $x = \varphi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ şi $\varphi \in C^1([a, b])$, iar $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Se alege convenabil funcția φ astfel încât integrala din membrul doi al formulei (12°) să fie mai simplă sau chiar din tabelul primitivelor unor funcții elementare.
2. Formula (13°) se numeşte "***a doua formulă de schimbare de variabilă***" şi pentru $x = \varphi(t)$ strict crescătoare avem: $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ şi cum $[\alpha,\beta] \xrightarrow{\varphi} [a,b] \xrightarrow{f} \mathbf{R}$, iar φ este inversabilă cu $\varphi^{-1} \in C^1([a, b])$, atunci $f \circ \varphi$ este continuă şi $f(\varphi^{-1})'$ integrabilă pe $[a, b]$.
3. Denumirea de formula (I) şi (II) de schimbare de variabilă în integrală este convențională; de fapt avem o singură formulă de schimbare de variabilă şi mai multe moduri de aplicare a acestei formule în calcule.
4. Din necesitatea de a folosi integralele Riemann în aplicații concrete este uneori suficient să se cunoască o valoare aproximativă a integralei $\int_a^b f(x)dx$ cu o eroare dată oricât de mică. În acest scop, vom enunța fără demonstrație, teoremele care indică metodele de calcul aproximativ al integralelor.

Teorema 4.19 (Formula dreptunghiurilor)

Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ cu $f \in C^2([a, b])$ şi $x_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$ cu $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, $S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)$ atunci S_n aproximează $\int_a^b f(x)dx$ cu o eroare:

(14°) $E_n \le \frac{(b-a)^2}{4n}\|f'\|_\infty; \left|\int_a^b f(x)dx - S_n\right| = E_n \le \frac{(b-a)^2}{4n}\|f'\|_\infty$.

Teorema 4.20 (Formula trapezelor)

Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ cu $f \in C^2([a, b])$ şi $x_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$ cu $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, $S_n = \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})\right]$ atunci S_n aproximează $\int_a^b f(x)dx$ cu o eroare:

(15°) $E_n \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}\|f''\|_\infty; \left|\int_a^b f(x)dx - S_n\right| = E_n \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}\|f''\|_\infty$.

Teorema 4.21 (Formula lui Simpson)

Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *cu* $f \in C^4([a, b])$ *şi* $x_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$ *cu* $i \in \{0, 1, 2, ..., n\}$, $S_n = \frac{b-a}{6n}\{[f(a)+f(b)]+2f(x_1)+...+2f(x_{n-1})\}$ *atunci* S_n *aproximează* $\int_a^b f(x)dx$ *cu o eroare*:

(16°) $E_n \le \frac{(b-a)^5}{2880n^4}\|f^{(4)}\|_\infty ; \left|\int_a^b f(x)dx - S_n\right| = E_n \le \frac{(b-a)^5}{2880n^4}\|f^{(4)}\|_\infty$.

Aplicații ale calculului integral

Orice mărime geometrică, fizică, economică etc. care are proprietatea de "***aditivitate față de mulțime (interval)***" se poate exprima printr-o integrală definită. Astfel noțiunile de "***arie***" şi "***volum***" pentru figuri geometrice din plan şi corpuri din spațiu se pot defini în mod riguros din punct de vedere matematic.Vom prezenta fără demonstrație unele aplicații ale integralei definite.

I. Aria unui domeniu din plan

1. ***Aria mulțimii*** din plan D$\subset$ $\mathbf{R}^2$ mărginită de dreptele $x = a$, $x = b$, $y = 0$ şi graficul funcției $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ pozitivă şi continuă se calculează prin formula: (17) $\mathsf{A}(D) = \int_a^b f(x)dx$.

2. În cazul $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ continuă şi de semn oarecare, avem: (17') $\mathsf{A}(D) = \int_a^b |f(x)|dx$.

3. ***Aria mulțimii*** din plan mărginită de dreptele $x = a$, $x = b$ şi graficele funcțiilor f, $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ continue este calculată prin formula: (18) $\mathsf{A}(D) = \int_a^b |g(x) - f(x)|dx$.

II. Lungimea unui arc de curbă

Se numeşte ***curbă plană*** o mulțime $\Gamma \subset \mathbf{R}^2$ cu proprietatea că există o funcție continuă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, notată $y = f(x)$, x$\in$ $[a, b]$ şi $G_f = \Gamma \subset \mathbf{R}^2$ (graficul lui f din plan este Γ). Dacă f are derivată continuă (sau numai funcție integrabilă) pe $[a, b]$, lungime a curbei Γ se calculează după formula: (19) $l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx$.

III. Volumul unui corp de rotație

Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă, atunci corpul K din spațiu obținut prin rotirea graficului lui f , G_f, în jurul axei Ox, are volumul calculat prin formula: (20) $\mathsf{V}(K) = \pi\int_a^b f^2(x)dx$.

IV. Suprafața unui corp de rotație

Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă pe $[a, b]$ şi cu f' continuă ($f \in C^1([a, b])$), atunci suprafața S a corpuui K obținut prin rotirea graficului lui f în jurul axei Ox se calculează prin formula:

(21) $S(K) = 2\pi\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}dx$.

Exemple.

1. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ cu $f = \sqrt{1-x^2}$ funcție continuă şi prin schimbarea de variabilă:

$x = \sin t, dx = \cos tdt, x = 0 \to t = 0, x = 1 \to t = \frac{\pi}{2}$ avem : $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt =$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 tdt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$

2. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx$ cu $f(x) = \sin^n x \in C^1\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ şi $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}, I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin xdx = 1$, aplicând metoda integrării prin părți se obține o formulă de recurență:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x(\sin xdx) = -\cos x \sin^{n-1} x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\cos^2 xdx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} xdx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx \Rightarrow I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_{n-1}$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2} \text{ cu } n \geq 2 \Rightarrow I_n = \begin{cases} \frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k-3}{2k-2}\cdot....\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}; n = 2k \\ \frac{2k}{2k+1}\cdot\frac{2k-2}{2k-1}\cdot....\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1; n = 2k+1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} = \left[\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot...\cdot\frac{2k}{2k-1}\cdot\frac{2k}{2k+1}\right]\cdot\frac{I_{2k}}{I_{2k+1}}$$

şi se arată că $\lim_{n\to\infty}\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}...\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\right]$ numită ***formula lui Wallis.***

3. $\int_4^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$ prin substituția

$x = t^2, dx = 2tdt, x = 4 \to t = 2, x = 9 \to t = 3,$ avem : $\int_4^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx = 2\int_2^3 \frac{tdt}{1+t} =$

$= 2\int_2^3 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)dt = 2t\Big|_2^3 - 2\ln(1+t)\Big|_2^3 = 2 - 2\ln\frac{4}{3}$

4. $\int_1^2 x\ln xdx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = 2\ln 2 - \frac{1}{2}\int_1^2 xdx = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$

5. $I_n=\int_1^e (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n\Big|_1^e - \int_1^e xn(\ln x)^{n-1}\frac{1}{x}\,dx = e - nI_{n-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} I_n = e - nI_{n-1}, n \ge 1 \\ I_0 = e-1; I_1 = 1 \end{cases}$

formulă de recurență pentru calculul lui I_n, $n\in \mathbf{N}$.

6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{2\left(5+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}\right)}dx$ prin substituția $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$, deci: $x = 2\,\mathrm{arctg}\,t, dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ şi

$x=0 \to t=0, x=\frac{\pi}{2} \to t=1$ se obține $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{2\left(3+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}\right)}dx = \int_0^1 \frac{1+t^2}{2(3+t^2)}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt =$

$=\int_0^1 \frac{dt}{t^2+3} = \int_0^1 \frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}\Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi\sqrt{3}}{18}$

7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x}$ prin substituția $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t \Rightarrow x = 2\,\mathrm{arctg}\,t, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$,

$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, x=0 \to t=0, x=\frac{\pi}{2} \to t=1$ se obține $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x} = \int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+2\frac{1-t^2}{1+t^2}} =$

$=2\int_0^1 \frac{dt}{t^2+5} = \frac{2}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}}\Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$

8. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{tg}\,x}{1+\mathrm{tg}\,x}dx$ şi prin substituția tg$x = t \Rightarrow$

$x = \mathrm{arctg}\,t, dx = \frac{dt}{1+t^2}, x=0 \to t=0, x=\frac{\pi}{4} \to t=1$ avem:

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx = \int_0^1 \frac{t}{1+t}\cdot\frac{dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{1}{2}\left[\frac{t+1}{1+t^2} - \frac{1}{1+t}\right]dt = \frac{1}{4}\ln(1+t^2)\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,t\Big|_0^1 -$

$-\frac{1}{2}\ln(t+1)\Big|_0^1 = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \ln 2\right)$

9. $\int_1^4 \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx = \int_1^4 x^0(1+x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}dx$ (m=0, $n=\frac{1}{2}, p=\frac{1}{2}, \frac{m+1}{n}=1\in \mathbf{Z}$) prin substituția: $1+\sqrt{x}=t, x=(t-1)^2, x=1\to t=2, x=4 \to t=3$ avem:

$$\int_1^4 1+\sqrt{x}dx=\int_2^3 \sqrt{t}\,2(t-1)dt=2\int_2^3\left(t\sqrt{t}-\sqrt{t}\right)dt=2\left.\left(\frac{t^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}-\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right)\right|_2^3=\frac{16}{5}\sqrt{3}-\frac{8}{15}\sqrt{2}$$

10. $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx$ prin substituția: $e^x-1=t^2\Rightarrow x=\ln(1+t^2),\ \ dx=\frac{2t}{1+t^2}dt,$

$x=0\to t=0, x=\ln 2\to t=1$, avem:

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx=2\int_0^1\frac{t^2}{1+t^2}dt=2\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=2t\Big|_0^1-2\operatorname{arctg}t\Big|_0^1=2-\frac{\pi}{2}$$

11. $\int_1^2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$ prin substituția: $\frac{x-1}{x+1}=t^2\Rightarrow x=1\to t=0, x=2\to t=\frac{1}{\sqrt{3}}$ şi

$x=\frac{1+t^2}{1-t^2}, dx=\frac{4t}{\left(1-t^2\right)^2}dt$ avem:

$$\int_1^2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{4t^2}{\left(1-t^2\right)^2}dt=\frac{2t}{1-t^2}\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}-2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{dt}{\left(1-t^2\right)^2}=\sqrt{3}+\ln\left|\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}-1}{\frac{1}{\sqrt{3}}+1}\right|=\sqrt{3}+\ln(2-\sqrt{3})$$