Partea a II-a

Elemente de teoria mulțimilor şi aplicații

Cuprins

I. Logică, mulțimi, axiome

I.1. Mulțimi, teorie naivă. Paradoxuri şi necesitatea axiomatizării

Teoria modernă a mulțimilor începe odată cu lucrarea „Teoria rațională a infinității” a lui Georg Cantor[1], în care se manevrează liber *mulțimile infinite* şi se dezvoltă o tehnică de măsurare a lor (teoria cardinalelor). Pînă la Cantor, matematicienii adoptau punctul de vedere al filozofilor Greciei antice: există noțiunea de *infinit actual* (o infinitate de obiecte concepute ca existînd simultan) şi cea de *infinit potențial* (o mulțime sau o mărime finită, dar care se poate mări oricît de mult). Filozoful Zenon, prin faimoasele sale aporii (paradoxuri) a atras atenția asupra consecințelor absurde care par să apară introducînd infinitul actual în raționamente. Se considera de aceea că infinitul actual nu este accesibil intuiției şi doar infinitul potențial poate fi folosit în gîndirea matematică.

Cantor are meritul de a fi spart această barieră mentală şi de a fi încercat să „numere infinitul”. El a avut ideea de a compara mulțimile (finite sau nu) cu ajutorul *funcțiilor bijective*: două mulțimi sînt „la fel de mari” (echipotente) dacă există o bijecție între ele. Cantor a obținut rezultate precum: $\mathbb{N}$ este echipotent cu $\mathbb{Q}$ şi cu mulțimea numerelor algebrice (numerele complexe care sînt rădăcini ale unui polinom nenul cu coeficienți raționali). Deja aceste afirmații nu sînt în acord cu percepția obişnuită şi arată că uneori „partea este la fel de mare ca şi întregul”. A mai arătat că $\mathbb{N}$ nu este echipotent cu $\mathbb{R}$ şi că, în general, o mulțime A nu este echipotentă cu mulțimea părților sale $\mathcal{P}(A)$. Există, deci, mai multe tipuri de infinitate. Alte rezultate contrazic şi mai mult simțul comun: există tot atîtea puncte pe un segment cîte sînt pe o dreaptă sau în întregul plan (sau chiar în întregul spațiu)! Astfel, în cazul mulțimilor infinite poate fi contrazis principiul „partea este mai mică decît întregul”: există cazuri cînd „partea este la fel de mare ca întregul”.

[1] Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918), matematician german.

În cadrul teoriei lui Cantor a mulțimilor (astăzi numită „teoria naivă a mulțimilor"), prin *mulțime* se înțelege o colecție (un ansamblu, un set) de obiecte distincte (*elementele* mulțimii), bine determinată şi considerată ca o entitate. Georg Cantor spunea *„Unter eine Menge verstehen wir jede Zusammenfassung* ***M*** *von bestimmten Wohlunterschiedenen Objekten* ***m*** *unseres Denkens zu einem Ganzen"*: „*Prin mulțime înțelegem orice grupare într-un tot M a unor obiecte distincte şi bine determinate* ***m*** *ale gîndirii noastre*".

Însă teoria mulțimilor în forma descrisă de Cantor conducea la paradoxuri care provin din „definiția" foarte permisivă şi vagă a conceptului de mulțime. Însuşi Cantor în 1895 observă că nu se poate vorbi de „mulțimea tuturor ordinalelor" (paradox publicat de Burali-Forti în 1897); mai tîrziu, s-a constatat că există şi alte „mulțimi contradictorii": „mulțimea tuturor cardinalilor", „mulțimea tuturor mulțimilor", „mulțimea mulțimilor care nu se conțin ca element" (paradoxul lui Russel[2]). Prezentăm acest paradox: presupunem că există mulțimea mulțimilor care nu se conțin ca element şi o notăm cu C (în notație modernă, $C = \{A \mid A \notin A\}$). Evident, are loc: sau $C \in C$, sau $C \notin C$. Dacă $C \in C$, atunci $C \notin C$ din definiția lui C, contradicție. Dacă $C \notin C$, atunci C nu satisface condiția de definiție a lui C, deci $C \in C$, contradicție.

Aceste paradoxuri au putut fi eliminate de *teoria axiomatică a mulțimilor*, care, printre altele, *nu permite existența* mulțimilor „foarte mari", care apar mai sus. O primă axiomatizare a fost dată de Zermelo[3] în 1908. Una din axiomele sale (care evită apariția paradoxurilor de tipul de mai sus) este *Axioma selecției* (sau *a specificării*), care în esență spune că, dată o „proprietate" [4] *P şi o mulțime A*, există mulțimea elementelor *din A* care satisfac proprietatea *P*. Cu alte cuvinte, *o proprietate nu determină o mulțime* (ca în definiția originală a lui Cantor), ci, *dată o mulțime A*, se poate vorbi doar de existența *submulțimii lui A* formată din elementele lui *A* care satisfac *P*.

În 1905 Richard construieşte un paradox de alt tip (simplificat ulterior de Berry şi publicat de Russel în 1906). Să considerăm următorul concept:

„cel mai mic număr natural care nu poate fi definit cu mai puțin de 17 cuvinte".

Dacă acest număr ar exista, atunci el *poate fi definit cu 16 cuvinte*, chiar de enunțul anterior (care are 16 cuvinte, numărați). Contradicția obținută arată că nu există un astfel de număr. Pe de altă parte, mulțimea numerelor naturale care pot fi definite cu cel mult 16 cuvinte este finită (căci mulțimea frazelor cu cel mult 16 cuvinte care definesc un număr natural este finită) şi deci *există* numere naturale care nu pot fi definite cu mai puțin de 17 cuvinte. Cel mai mic dintre acestea este un număr… care nu poate exista, conform celor de mai sus!

---

[2] Bertrand Russel (1872-1970), matematician şi filozof britanic.
[3] Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871-1953), matematician german.
[4] Mai precis, este vorba de un predicat cu o variabilă liberă.

Paradoxul de mai sus are altă sursă, şi anume *ambiguitatea limbajului* natural, obişnuit. Ce înseamnă exact *a defini* un număr natural?

Din considerațiile de mai sus rezultă că, pe lîngă o axiomatizare a teoriei mulțimilor, trebuie *restrîns limbajul natural* la cîteva modalități bine precizate şi simple de exprimare. În acelaşi timp, posibilitățile trebuie să fie suficient de permisive pentru a putea formula orice enunț matematic. Aceste scopuri sînt realizate de un *limbaj formal*. Vom prezenta un astfel de limbaj (de fapt, este vorba de un limbaj semi-formal, prezentat intuitiv; o prezentare riguroasă a unui limbaj formal depăşeşte cu mult cadrul şi scopurile noastre). Cu această ocazie, vom sublinia anumite aspecte de logică matematică.

I.2. Principiile axiomaticii Zermelo-Fraenkel

În teoria axiomatică a mulțimilor (axiomatizarea Zermelo-Fraenkel-Skolem, acceptată în cvasitotalitatea matematicii moderne) *toate obiectele sînt mulțimi*.

Altfel spus, nu se face distincție între conceptele „element” şi „mulțime”. Acest punct de vedere este firesc, dacă ne gîndim că o mulțime poate fi element al altei mulțimi; în plus, o teorie axiomatică trebuie să pornească de la un minim de noțiuni primare şi distincția între element şi mulțime ar complica lucrurile inutil.

Prezentăm cîteva elemente din teoria axiomatică Zermelo-Fraenkel-Skolem (ZFS) a mulțimilor. Pentru o tratare mai detaliată, incluzînd multe teme interesante (ordinali, cardinali, axioma alegerii etc.), vezi SCORPAN [1996].

Nu putem *defini* un obiect fără a face referire la alte obiecte, presupuse cunoscute. Aceste obiecte „cunoscute” trebuie la rîndul lor definite… Se vede că acest proces nu poate continua la infinit. Aşadar, trebuie să considerăm în cele din urmă *noțiuni care nu se definesc* (*noțiuni primare*); orice alte obiecte vor fi definite pornind de la noțiunile primare. *Această idee este la baza oricărei teorii axiomatice.*

În axiomatizarea teoriei mulțimilor, noțiunile de *mulțime* şi de *relație de apartenență* se consideră *noțiuni primare* (nu se definesc). *Toate obiectele teoriei sînt mulțimi* (în particular, toate elementele unei mulțimi sînt tot mulțimi!). Aceste noțiuni satisfac un set de *axiome* (care, într-un anumit sens, *definesc* obiectele respective). Altfel spus, nu ne interesază *ce sînt* mulțimile, ci *cum se comportă* unele față de altele şi față de relația de apartenență.

Axiomele stabilesc *regulile care se aplică obiectelor abstracte numite mulțimi şi relației de apartenență.* Lista axiomelor este de fapt o listă de *propoziții* (din limbajul formal al teoriei mulțimilor, pe care îl vom descrie) care sînt declarate şi acceptate ca adevărate. Orice altă afirmație despre mulțimi trebuie *demonstrată* pornind de la axiome. În acest mod se deduc toate proprietățile „uzuale” ale teoriei mulțimilor.

Deşi, după cum am spus, în teoria axiomatică *elementele unei mulțimi sînt tot mulțimi*, vom adopta (pe cît posibil), pentru a nu crea confuzii cititorului, distincția tradițională în notație: în general, vom nota *mulțimile cu majuscule: A, B*, …, iar *elementele mulțimilor cu minuscule: a, b*, …. Dacă A este o mulțime şi a este un element al lui A, atunci scriem $a \in A$ (citit *„a aparține lui A”* sau *„A conține pe a”*). Dacă a nu este element al mulțimii A, scriem $a \notin A$.

Axiomele teoriei (cu excepția Axiomei extensionalității) sînt toate de următorul tip: *fiind date una sau mai multe mulțimi,* se garantează existența *unei noi mulțimi* cu anumite proprietăți (construită cu ajutorul mulțimilor inițiale). Cu alte cuvinte, axiomele descriu *construcții permise în cadrul teoriei*. Se regăseşte astfel motivul pentru care a fost creată teoria: evitarea paradoxurilor generate de construcții de mulțimi „prea mari”, prin precizarea clară a regulilor de construcție de noi mulțimi.

I.3. Limbajul formal al teoriei axiomatice ZF a mulțimilor

Această secțiune poate fi omisă la o primă lectură. Cititorul care cunoaşte regulile de manipulare a expresiilor logice formale, conținînd operatori logici şi cuantificatori, poate trece direct la secțiunea următoare. În esență, se descriu explicit regulile de formare a unui expresii a limbajului formal, adică a unui enunț privitor la mulțimi („sintaxa limbajului”) şi care este sensul acestor enunțuri („semantica limbajului”). Intuitiv, o expresie a limbajului formal este o expresie logică, construită (conform regulilor cunoscute de la Logică, folosind operatori logici şi cuantificatori) din enunțuri de forma $x \in y$ şi $x = y$, unde x şi y numesc mulțimi. De exemplu, $(\forall A)\,(\forall B)\{[(\forall x)\ \ (x \in A\ \leftrightarrow\ x \in B)] \rightarrow A = B\}$ este o expresie a limbajului formal.

Axiomele teoriei sînt enunțuri ale limbajului formal care sînt declarate adevărate (vezi secțiunea următoare).

Pentru a putea enunța axiomele teoriei mulțimilor, avem nevoie de prezentarea (intuitivă) a limbajului formal al acestei teorii. Subliniem că <u>nu</u> este vorba de o formalizare propriu-zisă. Un limbaj formal prezentat riguros ar ocupa zeci de pagini (un exemplu de astfel de formalizare, în cadrul axiomatizării Gödel-Bernays a teoriei mulțimilor, poate fi găsit în REGHIŞ [1981]). Mai întîi descriem *sintaxa limbajului* (regulile după care putem forma expresii corecte ale limbajului formal).

3.1 Definiţie. Un *enunţ* al limbajului formal (numit şi *expresie* a limbajului formal) este un şir finit de *simboluri*, format după anumite reguli, descrise mai jos. Din punct de vedere intuitiv, un enunţ exprimă un fapt bine determinat despre obiectele la care se referă (adică despre mulţimi, în cazul nostru).

Descriem acum tipurile de *simboluri* şi regulile de construcţie a *expresiilor* limbajului formal (adică *sintaxa limbajului*):

i) Există *simboluri de tip nume* (pe scurt, *nume*), care denumesc *mulţimi* (acestea sînt singurele obiecte pe care le considerăm!). Numele sînt de două feluri: *nume constante* (pe scurt, *constante*), care se referă la un obiect bine precizat; *nume variabile* (pe scurt, *variabile*), care notează un obiect generic (arbitrar, neprecizat). Se presupune că *avem la dispoziţie o colecţie suficient de mare de nume constante şi variabile*. Exemple de nume: $x, y, a, b, c, A, B, \ldots$.

ii) Există simbolurile care notează *relaţii*: *relaţia de egalitate*, notată cu simbolul $=$, şi *relaţia de apartenenţă*, notată cu simbolul $\in$. Dacă x, y sînt nume (constante sau variabile), atunci următoarele şiruri de simboluri sînt *expresii* ale limbajului formal:

$x = y$ (citit „x este egal cu y”);

$x \in y$ (citit „x aparţine lui y” sau „x este element al lui y” sau „y conţine pe x”).

iii) *Conectorii* (sau *operatorii*) *logici* sînt simboluri care se folosesc pentru a exprima proprietăţi mai complexe, pentru a combina mai multe expresii într-una nouă. Operatorii logici sînt:

$\wedge$ (conjuncţia, „şi”);

$\vee$ (disjuncţia, „sau”);

$\neg$ (negaţia, „non”)

Dacă E, F sînt expresii (deja construite), atunci sînt expresii şi următoarele şiruri de simboluri:

$E \wedge F$ (citită „E şi F”);

$E \vee F$ (citită „E sau F”);

$\neg E$ (citită „non E”).

iv) *Cuantificatorii logici* sînt următoarele simboluri:

$\forall$ (numit *cuantificatorul universal* şi citit „oricare”),

$\exists$ (numit *cuantificatorul existenţial* şi citit „există”).

Cu ajutorul cuantificatorilor (numiţi uneori şi *cuantori*) se precizează dacă, într-o expresie, o variabilă se referă la *toate obiectele* sau *măcar la un obiect*. Dacă E este o expresie a limbajului şi x este o variabilă, atunci:

$(\forall x)E$ este expresie (citită „pentru orice x are loc E” sau „pentru orice x, E este adevărată”);

$(\exists x)E$ este expresie (citită „există x astfel încît are loc E” sau „există x astfel încît E este adevărată”).

v) *Parantezele rotunde* (,) au rolul de a elimina ambiguitățile. Astfel, în construcțiile precedente, se scrie de exemplu $(E) \wedge (F)$ în loc de $E \wedge F$, sau $(\forall x)(E)$ în loc de $(\forall x)E$ dacă pot apărea confuzii. Uneori, pentru un plus de claritate, se pot folosi şi parantezele pătrate [ ] sau acoladele { }, după regulile uzuale cunoscute.

Singurele expresii (enunțuri) admise ale limbajului formal sînt cele construite respectînd regulile precedente.

Variabilele unei expresii pot fi *libere* sau *legate*. Spunem că *variabila x este liberă în expresia E* dacă x apare în E, dar E nu conține nici o cuantificare a lui x (adică nici $\forall x$, nici $\exists x$ nu apar în E). Spunem că *variabila x este legată în E* dacă E conține un subşir de simboluri de forma $(\forall x)F$ sau $(\exists x)F$ (unde F este o expresie).

Dacă expresia E conține variabilele *libere* $x_1, \ldots, x_n$, vom sublinia uneori acest lucru scriind $E(x_1, \ldots, x_n)$. Fiind date constantele $c_1, \ldots, c_n$, prin înlocuirea peste tot în E a variabilei x_1 cu c_1, a lui x_2 cu c_2, …, a lui x_n cu c_n se obține o nouă expresie, notată cu $E(c_1, \ldots, c_n)$. Dacă $x_1, \ldots, x_n$ sînt *toate* variabilele libere din E, atunci $E(c_1, \ldots, c_n)$ este o *propoziție* (adică o expresie care nu are variabile libere). O expresie care are variabile libere se mai numeşte *predicat*.

3.2 Exemple. Presupunem că *x, y, z* sînt variabile şi *a, b* sînt constante. Arătați că următoarele şiruri de simboluri sînt expresii:

$x \in y$; $(\forall x)(x \in y)$; $(a \in b) \wedge (x = y)$; $\neg((a \in b) \wedge (x = y))$; $(\forall z)(\exists y)(x \in y)$.

Care sînt variabilele libere din fiecare?

Şirurile de simboluri: $x(\forall y)$; $x = \ \in$; $\forall y$ nu sînt expresii corecte ale limbajului formal (de ce?).

Să trecem acum la **interpretarea sensului expresiilor (**adică ***semantica*** limbajului**)**. Reamintim că o expresie care nu conține variabile libere se numeşte *propoziție*. Oricărei propoziții i se asociază o unică *valoare de adevăr*, după regulile descrise mai jos. Valorile de adevăr sînt: 0 (sau *fals*), şi 1 (sau *adevărat*). O propoziție cu valoarea de adevăr 0 se numeşte *propoziție falsă*; o propoziție cu valoarea de adevăr 1 se numeşte *propoziție adevărată*. O propoziție nu poate fi simultan falsă şi adevărată.

Descriem acum *regulile* de determinare a valorii de adevăr a unei propoziții date.

Fie *a, b* constante şi *x, y* variabile.

i) Propozițiile de forma $a = b$ sînt adevărate exact atunci cînd a şi b denumesc acelaşi obiect.

ii) Valoarea de adevăr a propozițiilor de forma $a \in b$ nu poate fi precizată acum; acest lucru este descris de axiome (în paragraful următor). Evident, intuitiv, $a \in b$ este adevărată dacă şi numai dacă mulțimea numită a este un element al mulțimii numită b.

iii) O propoziţie de forma $E \wedge F$ (unde E şi F sînt propoziţii) este adevărată dacă şi numai dacă E şi F sînt *ambele* adevărate.

iv) O propoziţie de forma $E \vee F$ este adevărată dacă şi numai dacă *măcar una* din propoziţiile E şi F este adevărată (adică sau E, sau F, sau atît E cît şi F sînt adevărate).

v) O propoziţie de forma $\neg E$ este adevărată dacă şi numai dacă propoziţia E este *falsă*.

vi) O propoziţie de forma $(\forall x)E(x)$ (unde variabila x este liberă în E) este adevărată dacă şi numai dacă pentru *orice* obiect c propoziţia $E(c)$ este adevărată.

vii) O propoziţie de forma $(\exists x)E(x)$ (unde variabila x este liberă în E) este adevărată dacă şi numai dacă *există măcar un obiect c* astfel încît propoziţia $E(c)$ să fie adevărată.

3.3 Observaţie. Valoarea de adevăr a propoziţiilor de tipul $E \wedge F$, $E \vee F$ se poate defini prin *tabele de adevăr*. Iată tabelul de adevăr pentru $E \vee F$, construit după regula iv):

E	F	$E \vee F$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

S-au scris pe linii toate combinaţiile posibile de valori de adevăr pentru E şi F. Tabelul se citeşte pe linii: de exemplu, linia 3 a tabelului spune, că, dacă E are valoarea de adevăr 0, iar F are valoarea de adevăr 1, atunci $E \vee F$ are valoarea de adevăr 1.

3.4 Definiţie. a) Două propoziţii E şi F se numesc *echivalente* dacă au aceeaşi valoare de adevăr. Scriem aceasta sub forma $E \equiv F$.

b) Definiţia se poate extinde la expresii oarecare. Două expresii E şi F sînt numite *echivalente* dacă:

- E şi F conţin aceleaşi constante şi aceleaşi variabile (fie $x_1, \ldots, x_n$ variabilele din E şi F);
- orice variabilă care este liberă în E este liberă în F, şi reciproc;
- *propoziţiile* $(\forall x_1)(\forall x_2)\ldots(\forall x_n)E(x_1, \ldots, x_n)$ şi $(\forall x_1)(\forall x_2)\ldots(\forall x_n)F(x_1, \ldots, x_n)$ au aceeaşi valoare de adevăr.

Scriem atunci $E \equiv F$ sau $E(x_1, \ldots, x_n) \equiv F(x_1, \ldots, x_n)$, evidenţiind variabilele libere.

3.5 Exerciţiu. Dacă E, F şi G sînt expresii, atunci au loc echivalenţele :

$\neg(E \wedge F) \equiv (\neg E) \vee (\neg F)$; $\neg(E \vee F) \equiv (\neg E) \wedge (\neg F)$; (legile lui DeMorgan)

$(E \wedge F) \vee G \equiv (E \vee G) \wedge (F \vee G)$; (distributivitatea lui $\vee$ faţă de $\wedge$)

$(E \vee F) \wedge G \equiv (E \wedge G) \vee (F \wedge G)$; (distributivitatea lui $\wedge$ faţă de $\vee$)

$\neg((\forall x)E) \equiv (\exists x)(\neg E)$; $\neg((\exists x)E) \equiv (\forall x)(\neg E)$ (legile de negare a cuantificatorilor).

De exemplu, $\neg(E \wedge F) \equiv (\neg E) \vee (\neg F)$ se poate demonstra cu următorul tabel de adevăr:

E	F	$E \wedge F$	$\neg(E \wedge F)$	$\neg E$	$\neg F$	$(\neg E) \vee (\neg F)$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

Identitatea coloanelor $\neg(E \wedge F)$ şi $(\neg E) \vee (\neg F)$ demonstrează echivalența cerută.

Legile lui DeMorgan arată că am fi putut reduce setul de conectori logici şi cuantificatori, de exemplu la $\forall$, $\neg$, $\wedge$.

Toate regulile de calcul cu expresii logice şi toate tautologiile demonstrate la partea de Logică rămîn valabile pentru expresii ale limbajului formal al teoriei mulțimilor.

3.6 Definiție. Pentru a face scrierea mai inteligibilă, introducem următoarele *prescurtări* uzuale. Fie E, F expresii. Atunci scriem:

$E \rightarrow F$ în loc de $(\neg E) \vee F$ şi citim „E implică F” sau „dacă E, atunci F”;

$E \leftrightarrow F$ în loc de $(E \rightarrow F) \wedge (E \rightarrow F)$ şi citim „E este echivalent cu F”.

3.7 Exercițiu. Scrieți tabelele de adevăr pentru conectorii $\rightarrow$ şi $\leftrightarrow$. Dacă E şi F sînt propoziții, $E \leftrightarrow F$ este adevărată dacă şi numai dacă E şi F au aceeaşi valoare de adevăr.

Insistăm asupra *implicației*, $\rightarrow$. Se justifică intuitiv că $E \rightarrow F$ este acelaşi lucru cu $(\neg E) \vee F$, astfel: "$E \rightarrow F$" înseamnă "dacă E este adevărată, atunci F este adevărată". Altfel spus, sau E este falsă (adică are loc $\neg E$), sau E este adevărată şi atunci automat F este adevărată (adică are loc F); pe scurt, $(\neg E) \vee F$. Este important de conştientizat această echivalență logică, utilă mai ales cînd trebuie negată o implicație (lucru care intervine frecvent, de exemplu în cazul demonstrațiilor prin reducere la absurd). Astfel, faptul că $E \rightarrow F$ este falsă înseamnă că are loc $(E \rightarrow F) \equiv \neg(\neg E) \vee F) \equiv E \wedge (\neg F)$ (ipoteza este adevărată şi totuşi concluzia este falsă). Această interpretare este conformă cu intuiția („bunul-simț”). De altfel, concluziile bazate pe un calcul logic formal trebuie totdeauna interpretate intuitiv, proces absolut necesar în înțelegerea unor demonstrații (sau în găsirea unor soluții la o problemă dată).

Ca şi la partea de logică, vom scrie

$$E \Rightarrow F \text{ dacă } E \rightarrow F \text{ este adevărată}$$
$$E \Leftrightarrow F \text{ dacă } E \leftrightarrow F \text{ este adevărată.}$$

Vom mai folosi şi alte prescurtări, larg utilizate, de exemplu $x \neq y$ pentru $\neg\,(x = y)$ sau $x \notin y$ în loc de $\neg\,(x \in y)$.

I.4. Axiomele extensionalității, reuniunii, mulțimii părților

Prezentăm cîteva elemente din teoria axiomatică Zermelo-Fraenkel-Skolem (ZFS) a mulțimilor. Pentru o tratare mai detaliată, incluzînd multe teme interesante (ordinali, cardinali, axioma alegerii etc.), vezi SCORPAN [1996].

Nu putem *defini* un obiect fără a face referire la alte obiecte, presupuse cunoscute. Aceste obiecte "cunoscute" trebuie la rîndul lor definite… Se vede că acest proces nu poate continua la infinit. Aşadar, trebuie să considerăm în cele din urmă *noțiuni care nu se definesc* (*noțiuni primare*); cu ajutorul lor vom putea defini alte obiecte. Aceasta este un principiu de bază în orice teorie axiomatică.

În axiomatizarea teoriei mulțimilor, noțiunile de *mulțime* şi de *relație de apartenență* se consideră *noțiuni primare* (nu se definesc) şi *toate obiectele teoriei sînt mulțimi* (în particular, toate elementele unei mulțimi sînt tot mulțimi!). Aceste noțiuni satisfac un set de *axiome* (care, într-un anumit sens, *definesc* obiectele respective). Altfel spus, nu ne interesază *ce sînt* mulțimile, ci *cum se comportă* unele față de altele şi față de relația de apartenență. Axiomele stabilesc regulile care se aplică obiectelor abstracte numite mulțimi şi relației de apartenență.

Lista axiomelor este de fapt o listă de *propoziții* (din limbajul formal construit anterior) care sînt declarate şi acceptate ca adevărate. Orice altă afirmație despre mulțimi trebuie *demonstrată* pornind de la axiome. În acest mod se deduc toate proprietățile „uzuale" ale teoriei mulțimilor.

Deşi, după cum am spus, în teoria axiomatică *elementele unei mulțimi sînt tot mulțimi*, vom adopta (pe cît posibil), pentru a nu crea confuzii cititorului, distincția tradițională în notație: în general, se notează *mulțimile cu majuscule* ($A, B, \ldots$), iar *elementele mulțimilor cu minuscule* ($a, b, \ldots$). Dacă A este o mulțime şi a este un element al lui A, atunci scriem $a \in A$ (citit „*a aparține lui A*" sau „*A conține pe a*"). Dacă a nu este element al mulțimii A, scriem $a \notin A$.

4.1 Axioma extensionalității (sau a **extensiei):** *Pentru orice două mulțimi A şi B, avem :*

$$[(\forall a)\ (a \in A \leftrightarrow a \in B)] \to A = B.$$

Mai riguros spus, *propoziția următoare este adevărată:*

$$(\forall A)\ (\forall B)\ \{[(\forall a)\ (a \in A \leftrightarrow a \in B)] \to A = B\}.$$

Această axiomă nu spune decît că *o mulțime este determinată de elementele sale*. Cu alte cuvinte, *dacă două mulțimi au aceleaşi elemente, atunci mulțimile coincid*.

Observăm că are loc şi implicația inversă: dacă $A = B$, atunci orice element a care aparține lui A aparține şi lui B. Acest fapt este evident: A şi B denumesc acelaşi obiect, deci orice enunț referitor la A este adevărat şi pentru B (şi reciproc).

Dacă A şi B sînt două mulțimi, vom scrie $A \subseteq B$ (şi citim *A inclus în B* sau *A este submulțime a lui B* sau *B include pe A*) dacă orice element al lui A aparține şi lui B:

$$(\forall a)\ [(a \in A) \to (a \in B)].$$

În caz contrar, notăm $A \not\subset B$.

Cu această notație, avem: $(\forall A)\ (\forall B)\ [\ (A = B) \leftrightarrow\ (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)]$.

Pe această proprietate se bazează majoritatea demonstrațiilor de egalitate de mulțimi.

4.2 Observație importantă. Atenție la folosirea cuvintelor *include* şi *conține*:

- *„x conține pe y"* înseamnă că *„y este un element al mulțimii x";*

- *„x include pe y"* înseamnă că *„y este o submulțime a mulțimii x"* (adică orice element al lui x este şi element al lui y).

Evident, sensurile sînt diferite!

De exemplu, o dreaptă este *inclusă* într-un plan, în timp ce un punct este *conținut* în plan.

Axiomele care urmează sînt toate de următorul tip: *fiind date una sau mai multe mulțimi, se garantează existența unei noi mulțimi*, *cu anumite proprietăți* (construită cu ajutorul mulțimilor inițiale). Cu alte cuvinte, axiomele descriu *construcții permise în cadrul teoriei*. Se regăseşte astfel motivul pentru care a fost construită teoria: evitarea paradoxurilor generate de construcții de mulțimi „prea mari".

4.3 Axioma mulțimii părților unei mulțimi. $(\forall M)\ (\exists P)\ ((\forall A)(A \in P \leftrightarrow A \subseteq M))$.

În cuvinte: fiind dată o mulțime M, există o mulțime P astfel încît elementele lui P sînt exact submulțimile lui M.

Mulțimea P a cărei existență este postulată mai sus este unic determinată de mulțimea M. Într-adevăr, dacă şi Q satisface condiția $(\forall A\ (A \in Q \leftrightarrow A \subseteq M))$, atunci avem, pentru orice mulțime x: $x \in Q \leftrightarrow x \subseteq M \leftrightarrow x \in P$. Din axioma extensionalității obținem că $P = Q$.

Notația tradițională pentru P este $\mathcal{P}(M)$ (mulțimea părților lui M).

4.4 Axioma reuniunii. *Pentru orice mulțime A* (*subînțeles: avînd ca elemente tot mulțimi*), *se admite existența unei mulțimi ale cărei elemente sînt elementele mulțimilor din A*, *adică*:

$$(\forall A)\ (\exists U)\ (\forall x)\ [(x \in U) \leftrightarrow (\exists a)\ (a \in A \wedge x \in a)].$$

Pentru înțelegerea acestei axiome, este util să privim A ca pe o *familie de mulțimi*. Axioma de mai sus nu face decît să postuleze existența *reuniunii* acestei familii de mulțimi.

Mulțimea U – a cărei existență este garantată de axiomă – este unic determinată de A (demonstrați!) şi se notează $\bigcup A$ sau $\bigcup_{x \in A} x$ sau $\bigcup\{x \mid x \in A\}$. Această situație evidențiază din nou futilitatea distincției dintre element şi mulțime.

I.5. Axioma-schemă a selecției. Axioma perechii

Axioma-schemă a selecției (numită şi *Axioma-schemă a specificării* sau *Schema de comprehensiune*) nu este o simplă axiomă, ci o *schemă* de axiome. Mai precis, pentru orice expresie cu o variabilă liberă a limbajului formal se obține o axiomă. Aşadar, avem de a face cu *o infinitate de axiome*.

5.1 Axioma-schemă de comprehensiune (a selecției, a specificării). *Pentru orice mulțime A şi pentru orice expresie cu o variabilă liberă $P(x)$, există submulțimea elementelor din A pentru care P este adevărată. Formal,*

$$(\forall A)(\exists B)(\forall x)[x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge P(x))].$$ [5]

Axioma extensionalității asigură că A şi $P(x)$ determină *unic* mulțimea B din enunț. Această mulțime se notează tradițional:

$\{x \in A \mid P(x)\}$ (citit „mulțimea elementelor din A care satisfac P”).

Subliniem din nou că *se obține cîte o axiomă pentru fiecare alegere a unei expresii P cu o variabilă liberă*. Nu se pot condensa toate aceste enunțuri într-unul singur, de tipul

$$(\forall E \textit{ expresie cu o variabilă liberă})(\forall A)(\exists B)(\forall x)[x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge P(x))],$$

deoarece acesta *nu* este o expresie a limbajului formal (vezi definiția expresiilor limbajului formal): P nu denumeşte un *obiect* legitim (o mulțime), ci o *expresie*.

5.2 Observație. Dacă *se presupune că există măcar o mulțime*[6] A, axioma de mai sus asigură existența unei (unice) *mulțimi ce nu conține nici un element*, numită *mulțimea vidă* şi notată cu $\varnothing$.[7]

Într-adevăr, fie $P(x)$: "$x \neq x$". Din schema de comprehensiune, există $\varnothing := \{x \in A \mid x \neq x\}$. Pentru orice x, avem $x \notin \varnothing$ (dacă $x \in \varnothing$, atunci $x \neq x$, absurd). Unicitatea lui $\varnothing$ este o consecință a axiomei extensionalității (demonstrați!). Notăm deci $\varnothing := \{x \in A \mid x \neq x\}$.

5.3 Propoziție. *Mulțimea vidă este submulțime a oricărei mulțimi*. Formal

$$(\forall M)(\varnothing \subseteq M).$$

Demonstrație. Conform definiției, avem $\varnothing \subseteq M$ dacă şi numai dacă

$$(\forall x)\ (x \in \varnothing \to x \in M).$$

Dar expresia $(x \in \varnothing \to x \in M)$ este, conform definiției, o prescurtare pentru $\neg(x \in \varnothing) \vee (x \in M)$, care este adevărată, căci $\neg(x \in \varnothing)$ este adevărată. □

---

[5] În axiomatizarea lui Zermelo din 1908, acest rezultat era enunțat ca axiomă şi era numit *Axioma selecției*.
[6] Acest fapt este postulat de axioma infinității, enunțată mai jos.
[7] Nu este litera grecească majusculă *phi*, Φ, ci un simbol matematic derivat dintr-o literă norvegiană, Ø.

5.4 Observație. Putem acum defini şi alte „operații cu mulțimi". Astfel, pentru orice două mulțimi A şi B, folosind schema de comprehensiune, există mulțimile:

$$A \cap B := \{x \in A \mid x \in B\} \text{ (numită } \textit{intersecția} \text{ lui } A \text{ şi } B\text{)}$$

$$A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\} \text{ (numită } \textit{diferența} \text{ lui } A \text{ şi } B\text{).}$$

Demonstrați că $A \cap B = B \cap A$. Arătați că, în general, $A \setminus B \neq B \setminus A$.

Termenul de *comprehensiune* descrie modalitatea de a preciza o mulțime prin *enunțarea unei proprietăți pe care o au doar elementele mulțimii şi numai ele*. S-a văzut că această modalitate, care a stat la baza teoriei naive a mulțimilor, duce la paradoxuri; schema de comprehensiune restrînge această modalitate doar la posibilitatea următoare: pentru orice *mulțime dată M* şi orice „proprietate" P, există *submulțimea* elementelor lui M care satisfac P.

5.5 Axioma perechii.[8] *Fie a şi b două mulțimi. Atunci există o mulțime c care are drept elemente pe a şi pe b şi numai pe ele. Formal:*

$$(\forall a)(\forall b)(\exists c)(\forall x)\ [(x \in c) \leftrightarrow (x = a \vee x = b)]$$

Din axioma de extensionalitate, mulțimea c de mai sus este unic determinată de a şi b (demonstrați!). Această mulțime se notează $\{a, b\}$ şi se citeşte „mulțimea formată din elementele a şi b".

5.6 Observație. Ce se întîmplă dacă, în axioma de mai sus, $a = b$? Dată a o mulțime, aplicînd axioma perechii mulțimilor a şi a, există o unică mulțime c care are drept element pe a şi numai pe el. Formal,

$$(\forall a)(\exists c)(\forall x)\ [(x \in c) \leftrightarrow (x = a)]$$

Această mulțime se notează cu $\{a\}$ şi se citeşte „mulțimea formată din elementul a".

5.7 Exercițiu. Fie a şi b mulțimi. Demonstrați că există reuniunea lor $a \cup b$ (adică unica mulțime cu proprietatea $\forall x[(x \in a \cup b) \leftrightarrow (x \in a \vee x \in b)]$).

Demonstrație. Din axioma perechii, există $\{a, b\}$. Aplicînd axioma reuniunii mulțimii $\{a, b\}$, există o mulțime U cu proprietatea că, pentru orice x, are loc

$$(x \in U) \leftrightarrow (\exists y)[(y \in \{a, b\}) \wedge (x \in y)]$$

Cum $y \in \{a, b\} \leftrightarrow [(y = a) \vee (y = b)]]$, deducem că are loc, pentru orice x:

$$(x \in U) \leftrightarrow (x \in a) \vee (x \in b)]. \qquad \square$$

5.8 Exercițiu. Fie a, b, c mulțimi. Demonstrați că există mulțimea $\{a, b, c\}$, adică unica mulțime T cu $\forall x[(x \in T) \leftrightarrow (x = a \vee x = b \vee x = c)]$.

---

[8] Sensul cuvîntului „pereche" este aici de „pereche neordonată".

Demonstrație. Din axioma perechii, aplicată mulțimilor a şi b, există $\{a, b\}$. Aplicînd aceeaşi axiomă mulțimii c, există $\{c\}$. Din exercițiul precedent, există $\{a, b\}\cup\{c\} =: T$. Avem, pentru orice x: $(x \in T) \leftrightarrow [(x \in \{a, b\})\vee(x \in \{c\})]$, adică

$$(x \in T) \leftrightarrow [x = a \vee x = b \vee x = c]. \qquad \square$$

Pe lîngă *comprehensiune*, o mulțime se mai poate preciza prin *extensiune*, adică prin enumerarea tuturor elementelor sale. Astfel, fiind date elementele $x_1, \ldots, x_n$, există mulțimea X ale cărei elemente sînt exact $x_1, \ldots, x_n$. Scrierea $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ este o prescurtare a scrierii

$$(\forall x)(x \in X \leftrightarrow (x = x_1 \vee x = x_2 \vee \ldots \vee x = x_n)).$$

5.9 Definiție. Fie M o mulțime. Dacă $A \subseteq M$, adică A aparține mulțimii părților lui M, $\mathcal{P}(M)$, definim *complementara lui A (față de M)* ca fiind mulțimea $M \setminus A$. Complementara lui A se notează $\complement A$ sau $\complement_M A$ dacă există pericol de confuzie. Evident, $\complement A$ este tot o submulțime a lui M. Dacă, $A, B \in \mathcal{P}(M)$, *diferența simetrică a mulțimilor A şi B* este mulțimea

$$A\Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

5.10 Propoziție. *Pentru orice mulțimi A, B, C, au loc relațiile:*

i) $\emptyset\cap A = \emptyset$, $\emptyset\cup A = A$, $A \setminus \emptyset = A$, $A \setminus A = \emptyset$;

ii) $A\cap B \subseteq A$, $A\cap B \subseteq B$, $A \subseteq A\cup B$, $B \subseteq A\cup B$;

iii) $A\cap B = B\cap A$, $A\cup B = B\cup A$;

iv) $A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$, $A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C$;

v) $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$, $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$;

vi) $A\cup A = A = A\cap A$.

Demonstrație. *v)* $A\cap(B\cup C) = \{x \in A \mid x \in B\cup C\} = \{x \in A \mid x \in B \vee x \in C\}$. Avem deci, pentru orice x: $x \in A\cap(B\cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$. Însă ştim de la logică formula $p\wedge(q\vee r) \equiv (p\wedge q)\vee(p\wedge r)$ (distributivitatea lui $\wedge$ față de $\vee$). Astfel, $x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \Leftrightarrow x \in A\cap B \vee x \in A\cap C \Leftrightarrow x \in (A\cap B)\cup (A\cap C)$.

Celelalte relații sînt propuse ca exercițiu. $\square$

Exerciții

1. Fie A, B mulțimi. Scrieți o expresie a limbajului formal care să semnifice că:

a) Mulțimea A nu este inclusă în mulțimea B.

b) $A \neq B$ (folosiți doar relația de apartenență).

c) A conține măcar un element.

d) A conține cel mult un element.

e) A este submulțime a oricărei mulțimi.

f) A este element al oricărei mulțimi.

g) $B \subseteq \bigcup A$.

Pentru fiecare enunț de mai sus, negați enunțul respectiv şi scrieți negația în limbaj natural şi în limbaj formal.

2. Dați exemplu de mulțime A cu proprietatea $A \neq \varnothing$ şi $\bigcup A = \varnothing$. Cîte astfel de mulțimi există?

3. Are loc întotdeauna $\bigcup A \subseteq A$? Dar $\bigcup A \supseteq A$? Justificați.

4. Demonstrați că, pentru orice două mulțimi A, B, are loc: $A \subseteq B \Leftrightarrow A \bigcup B = B \Leftrightarrow A \bigcap B = A$.

5. Fie M o mulțime şi $A, B, C \in \mathcal{P}(M)$. Atunci au loc:

a) $\complement(A \bigcup B) = (\complement A) \bigcap (\complement B)$.

b) $\complement(A \bigcap B) = (\complement A) \bigcup (\complement B)$.

c) $A \setminus B = A \bigcap \complement B$.

d) $A \Delta B = B \Delta A = (A \bigcup B) \setminus (A \bigcap B)$.

e) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.

f) $A \Delta \varnothing = A$.

g) $A \Delta (B \bigcup C) = (A \Delta B) \bigcup (A \Delta C)$.

I.6. Relații, funcții

Să trecem la un alt concept fundamental, anume la cel de *funcție*. Pentru aceasta, avem nevoie de noțiunea de *cuplu* (*pereche ordonată*).

Intuitiv, noțiunea de *cuplu* (*pereche ordonată*) format(ă) de elementele a şi b diferă de mulțimea $\{a, b\}$, prin faptul că avem o „ordine”: a este primul, iar b este al doilea. Această distincție între a şi b se realizează prin:

6.1 Definiție. Fie a şi b mulțimi. Aplicînd axioma perechii mulțimilor a şi a, există mulțimea $\{a\}$; există şi $\{a, b\}$. Aplicînd din nou axioma, există mulțimea $\{\{a\}, \{a, b\}\}$, care se notează cu (a, b) şi se numeşte *perechea ordonată* (*cuplul*) format de a şi b. Observați că, dacă $a = b$, atunci $(a, b) = \{\{a\}\}$.

Această idee de introducere a noțiunii de cuplu este atribuită lui Kuratowski. Are loc proprietatea fundamentală următoare (demonstrați!):

6.2 Propoziție. *Fie a, b, a', b' mulțimi. Atunci are loc:* $(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a = a'$ *şi* $b = b'$. □

Astfel, spre deosebire de *mulțimea* $\{a, b\}$, în *cuplul* (a, b) *contează ordinea* elementelor a şi b; dacă $a \neq b$, atunci $(a, b) \neq (b, a)$, însă $\{a, b\} = \{b, a\}$.

Avînd definită noțiunea de cuplu, definim noțiunea de *triplet*:

$$(a, b, c) := ((a, b), c)$$

şi, prin recurență, *n-uplu*, $\forall n \geq 3$

$$(a_1, \ldots, a_n) := ((a_1, \ldots, a_{n-1}), a_n).$$

Are loc: $(a_1, \ldots, a_n) = (b_1, \ldots, b_n) \leftrightarrow a_1 = b_1 \wedge \ldots \wedge a_n = b_n$.

În manualele de liceu (şi în multe alte cărți de matematică), o *funcție* definită pe o mulțime A cu valori într-o mulțime B este „definită” (mai bine spus descrisă) ca fiind „*un procedeu* (*lege*), *prin care oricărui element din A i se asociază un unic element din B*”. Intuitiv, descrierea este corectă (dar vagă, deoarece foloseşte noțiunea nedefinită de *procedeu* (*lege*)); în plus, se subînțelege că pentru orice funcție se poate descrie un *procedeu* (*algoritm*) de obținere a imaginii oricărui element prin funcția dată. Acest lucru nu este necesar şi în matematică se întîlnesc exemple de funcții pentru care acest fapt nu are loc.

Se observă însă că o funcție $f : A \to B$ este perfect determinată de *graficul* său, adică de mulțimea cuplurilor $\{(a, f(a)) \mid a \in A\}$. Aceasta este şi ideea definiției conceptului de funcție în cadrul unei tratări riguroase. Începem cu alte două noțiuni, şi ele fundamentale:

6.3 Definiție. Fie A şi B mulțimi. Numim *produsul cartezian*[9] *al mulțimilor A* şi *B* mulțimea $A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$.

Avem dreptul de a defini o astfel de mulțime? Ar trebui să arătăm că ne încadrăm în schema de comprehensiune, adică să indicăm o mulțime a cărei existență este certă, care să conțină toate perechile de forma (a, b) cu $a \in A$ şi $b \in B$. Dar $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$. Observăm că avem $\{a\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$ şi $\{a, b\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$, deci $\{\{a\}, \{a, b\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$. Astfel, putem defini, respectînd schema de comprehensiune:

$$A \times B := \{c \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \mid (\exists a)(\exists b)[c = (a, b) \wedge a \in A \wedge b \in B]\}.$$

Folosind produsul cartezian putem defini noțiunile de *relație* şi de *funcție*:

6.4 Definiție. Fie A şi B două mulțimi.

a) Numim *relație binară între A şi B* (sau *de la A la B*) orice triplet de forma (A, B, ρ), unde $\rho \subseteq A \times B$. Uneori vom exprima acest fapt sub forma „ρ este o relație între A şi B”. Dacă $A = B$, scriem (A, ρ) şi spunem că ρ este *o relație pe A*. Adeseori, în loc de $(x, y) \in \rho$ se scrie $x\rho y$. Dacă sînt subînțelese mulțimile A şi B, se spune, simplu, „relația ρ” în loc de (A, B, ρ).

b) O relație binară f de la A la B se numeşte *funcție* (sau *aplicație*) *definită pe A cu valori în B* dacă *pentru orice* $a \in A$ *există un unic* $b \in B$ *astfel încît* $(a, b) \in f$. Formal:

$$\begin{gathered}(f \subseteq A \times B) \wedge (\forall a)\{(a \in A) \to (\exists b)[(b \in B) \wedge (a, b) \in f]\} \wedge \\ (\forall a)(\forall b)(\forall b')\{(a \in A) \wedge (b \in B) \wedge (b' \in B) \wedge (a, b) \in f \wedge (a, b') \in f \to (b = b')\}\end{gathered} \tag{*}$$

Deoarece pentru orice $a \in A$ există un unic $b \in B$ astfel încît $(a, b) \in f$, se scrie:

[9] În onoarea lui René Descartes (1596-1650), al cărui nume latinizat era Cartesius.

„$f(a) = b$” în loc de „$(a, b) \in f$”.

Se mai spune „*f este o funcție* (*aplicație*) *de la A la B*” şi se notează aceasta prin $f : A \to B$ sau $A \xrightarrow{f} B$.

Din punct de vedere formal, notația $f : A \to B$ nu este decît o prescurtare a expresiei (*).

Mulțimea A se numeşte *domeniul* funcției f; B se numeşte *codomeniul* lui f. Orice element a din domeniul lui f se numeşte *argument* al funcției f. Dacă $a \in A$ şi $b \in B$ astfel încît $f(a) = b$, b se numeşte *valoarea funcției f în a* sau *imaginea lui a prin f*.

Pentru orice mulțime A, notăm cu $\mathbf{1}_A$ sau cu id_A *funcția identitate* a mulțimii A, anume: $id_A : A \to A$, $id_A(a) = a$, $\forall a \in A$.

Dacă adoptăm punctul de vedere naiv: o funcție $f : A \to B$ este o „lege de corespondență” prin care oricărui element a din A i se asociază un unic element $f(a)$ din B, atunci mulțimea $\{(a, f(a)) \mid a \in A\} \subseteq A \times B$ se numeşte *graficul* lui f. Astfel, definiția **6.4.**b) identifică o funcție cu graficul ei.

6.5 Observație. Condiția (*) se scrie, mai puțin formalizat:

$$(f \subseteq A \times B) \text{ şi } \forall a \in A, \exists\, b \in B \text{ astfel încît } (a, b) \in f \text{ şi}$$
$$\forall a \in A, \forall b, b' \in B, (a, b) \in f \text{ şi } (a, b') \in f \text{ implică } b = b'.$$

Observăm că, în expresii, şirurile de forma "$(\forall a)(a \in A)$" se scriu adesea prescurtat "$\forall a \in A$". Această convenție, larg răspîndită, ascunde o capcană: o implicație, de genul $(\forall a)[(a \in A) \to P(a)]$, se scrie adesea "$\forall a \in A$, $P(a)$", în care implicația $\to$ nu apare explicit. Trebuie conştientizat acest fapt, mai ales cînd apare necesitatea negării unei astfel de expresii: negația ei este $(\exists a)\{(a \in A) \wedge \neg P(a)\}$, lucru care nu este clar din scrierea prescurtată (dar este destul de clar din punct de vedere intuitiv).

Pentru mulțimile A şi B, se notează cu B^A mulțimea funcțiilor definite pe A cu valori în B:

$$B^A := \{f \subseteq A \times B \mid f \text{ este funcție}\}.$$

6.6 Exercițiu. Fie A o mulțime. Cîte funcții $\varphi : \varnothing \to A$ (respectiv $\varphi : A \to \varnothing$) există?

6.7 Definiție. Fie I o mulțime (interpretată ca „mulțime de indici”). O funcție $b : I \to M$, unde M este o mulțime, se numeşte *familie de mulțimi indexată după I*. Notații tradiționale pentru această noțiune: $(B_i)_{i \in I}$ (unde $B_i := b(i)$), sau $\{B_i \mid i \in I\}$.

Dacă $(B_i)_{i \in I}$ este o familie de mulțimi ca mai sus, *reuniunea familiei* $(B_i)_{i \in I}$ este reuniunea imaginii funcției b:

$$\bigcup A = \bigcup_{i \in I} B_i := \{x \in M \mid \exists i \in I \text{ astfel încît } x \in B_i\}.$$

Intersecția familiei $\{B_i\}_{i \in I}$ este, prin definiție:

$$\bigcap_{i \in I} B_i := \{x \in M \mid \forall i \in I, x \in B_i\}.$$

De exemplu, dacă $I = \{1, 2\}$, $\{B_i\}_{i \in I} = \{B_1, B_2\}$,

$$\bigcup\{B_1, B_2\} = \bigcup_{i \in I} B_i = B_1 \cup B_2;\ \text{la fel, } \bigcap\{B_1, B_2\} = \bigcap_{i \in I} B_i = B_1 \cap B_2.$$

Se spune că *reuniunea familiei* $\{B_i\}_{i\in I}$ *este disjunctă* dacă $\{B_i\}_{i\in I}$ sînt disjuncte două cîte două: pentru orice $i, j \in I$, $i \neq j$ implică $B_i \cap B_j = \varnothing$.

6.8 Propoziție. *Pentru orice familie de mulțimi* $(B_i)_{i\in I}$ *şi orice mulțime A, au loc relațiile:*

i) $A\cap(\bigcup_{i\in I}B_i) = \bigcup_{i\in I}(A\cap B_i)$

ii) $A\cup(\bigcap_{i\in I}B_i) = \bigcap_{i\in I}(A\cup B_i)$

Demonstrație. Exercițiu. □

6.9 Definiție. Fie $f: A \to B$ o funcție. Dacă $C \subseteq A$, se defineşte *imaginea lui C prin f* ca fiind

$$f[C] = \{y \in B \mid (\exists x)(x \in C \wedge f(x) = y)\}.$$

Am aplicat schema de comprehensiune. Uneori se scrie, mai puțin riguros,

$$f[C] = \{f(x) \mid x \in C\}.$$

Notația tradițională pentru imaginea lui C prin f este $f(C)$; nu se poate folosi o astfel de notație în teoria axiomatică a mulțimilor, pentru că C poate fi simultan submulțime a lui A şi element al lui A (puteți da exemplu de un astfel de caz?) şi este foarte posibil ca $f(C)$ (valoarea în C a lui f) să difere de $f[C]$ (imaginea submulțimii C prin f). Totuşi, astfel de situații apar rar în „matematica uzuală” şi se scrie în majoritatea cazurilor $f(C)$ pentru imaginea submulțimii C prin funcția f.

Se notează $\operatorname{Im} f = f[A]$ (imaginea mulțimii A prin funcția f) şi se numeşte *imaginea* funcției f.

Dacă $D \subseteq B$, definim *contraimaginea* lui D prin f:

$$f^{-1}(D) = \{x \in A \mid f(x) \in D)\}.$$

Folosirea notației f^{-1} nu înseamnă în nici un caz că funcția f este inversabilă şi că f^{-1} ar fi inversa lui f (vezi definiția 6.13).

6.10 Propoziție. *Pentru orice funcție* $f: A \to B$, *orice familii de mulțimi* $(A_i)_{i\in I}$, *cu* $A_i \subseteq A$ *şi* $(B_j)_{i\in J}$, *cu* $B_j \subseteq B$, *au loc relațiile:*

i) $f[\bigcup_{i\in I} A_i] = \bigcup_{i\in I} f[A_i]$.

ii) $f[\bigcap_{i\in I} A_i] \subseteq \bigcap_{i\in I} f[A_i]$.

iii) $f^{-1}(\bigcap_{j\in J} B_j) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$.

iv)) $f^{-1}(\bigcup_{j\in J} B_j) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$.

Demonstrație. *ii)* Fie $y \in f[\bigcap_{i\in I} A_i]$. Avem de arătat că $y \in \bigcap_{i\in I} f[A_i]$. Dar $y \in f[\bigcap_{i\in I} A_i]$ înseamnă că $\exists x \in \bigcap_{i\in I} A_i$ astfel încît $f(x) = y$. Pe de altă parte, $y \in \bigcap_{i\in I} f[A_i]$ dacă şi numai dacă, $\forall i \in I$, $\exists x_i \in A_i$ astfel încît $y = f(x_i)$. Acest lucru este adevărat, căci $\exists x \in \bigcap_{i\in I} A_i$ astfel încît $f(x) = y$. □

6.11 Definiție. Se numeşte *inversă a unei relații* (A, B, ρ) relația (B, A, ρ^{-1}) unde $\rho^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in \rho\} \subseteq B \times A$.

Fie relațiile (A, B, ρ) şi (B, C, τ). Relația $(A, C, \tau\circ\rho)$, unde

$$\tau \circ \rho = \{(a, c) \in A \times C \mid (\exists b)(b \in B \wedge a\rho b \wedge b\tau c)\}$$

este numită *compusa* (sau *compunerea*) *relațiilor* τ şi ρ.

6.12 Propoziție. *a) Fiind date funcțiile* $u : A \to B$, $v : B \to C$, *compusa* $v \circ u$ *este tot o funcție,* $v \circ u : A \to C$, *şi,* $\forall a \in A$, *are loc:*

$$(v \circ u)(a) = v(u(a)).$$

b) Pentru orice relații (A, B, ρ), (B, C, τ), (C, D, η), *avem* $(\eta \circ \tau) \circ \rho = \eta \circ (\tau \circ \rho)$ (*compunerea relațiilor este asociativă*). *În particular, compunerea funcțiilor este asociativă.*

Demonstrație. *a)* Avem de arătat că $v \circ u$ este funcție. Fie $a \in A$. Atunci există $b \in B$ astfel încît $(a, b) \in u$. Cum v este funcție şi $b \in B$, există $c \in C$ astfel încît $(b, c) \in v$. Din definiția compunerii relațiilor, $(a, c) \in v \circ u$.

Arătăm unicitatea lui $c \in C$ cu proprietatea că $(a, c) \in v \circ u$. Fie $c, d \in C$ astfel încît $(a, c) \in v \circ u$ şi $(a, d) \in v \circ u$. Deci există $b \in B$ astfel încît $(a, b) \in u$ şi $(b, c) \in v \circ u$ şi există $b' \in B$ astfel încît $(a, b') \in u$ şi $(b', d) \in v$. Cum u este funcție, avem $b = b'$. Cum v este funcție, avem $c = d$. □

Se disting următoarele tipuri remarcabile de funcții:

6.13 Definiție. Fie $f : A \to B$ o funcție. Spunem că f este:

i) *funcție injectivă* dacă: $\forall x, y \in A, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$;

ii) *funcție surjectivă* dacă: $\forall y \in B, \exists\, x \in A$ astfel încît $f(x) = y$;

iii) *funcție bijectivă* dacă este injectivă şi surjectivă;

iv) *funcție inversabilă* dacă există $g : B \to A$ (numită inversa lui f) astfel încît $(g \circ f)(x) = x$, $\forall x \in A$ şi $(f \circ g)(y) = y$, $\forall y \in B$.

Notînd, pentru o mulțime M, prin $\mathbf{1}_M : M \to M$ funcția $\mathbf{1}_M(x) = x$, $\forall x \in M$ (numită şi *funcția identitate* a lui M, notată şi cu id_M sau id), condițiile ce definesc funcțiile inversabile pot fi rescrise în modul următor: $g \circ f = \mathbf{1}_A$, $f \circ g = \mathbf{1}_B$. Dacă există, inversa lui f se notează f^{-1}.

6.14 Propoziție. *Fie* $f : A \to B$ *şi* $g : B \to C$ *funcții. Atunci:*

a) Funcția f este inversabilă $\Leftrightarrow$ *f este bijectivă;*

b)Compunerea a două funcții injective (*surjective*) *este funcție injectivă* (*surjectivă*)*;*

c) Funcția $g \circ f$ *este bijectivă* $\Rightarrow$ *g este surjectivă şi f este injectivă.* □

Definiția produsului cartezian poate fi extinsă la o familie de trei sau mai multe mulțimi, sau, mai general, la o familie oarecare de mulțimi:

6.15 Definiție. a) Fiind date mulțimile A_1, A_2, A_3 [10], definim produsul lor cartezian:

$$A_1 \times A_2 \times A_3 := (A_1 \times A_2) \times A_3.$$

[10] În această ordine! De fapt, se dă o *familie de mulțimi* indexată după $\{1,2,3\}$.

Astfel, $\forall a_1 \in A_1$, $\forall a_2 \in A_2$, $\forall a_3 \in A_3$, notăm $((a_1, a_2), a_3)$, mai simplu, cu (a_1, a_2, a_3).

b) Pentru orice $n \geq 3$ şi orice familie de n mulțimi $A_1, A_2, \ldots, A_n$, definim (prin recurență[11]):

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n := (A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{n-1}) \times A_n.$$

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ se mai notează cu $\prod_{i=1}^{n} A_i$ sau $\prod_{1 \leq i \leq n} A_i$. Dacă $\forall i \in \{1,2, \ldots, n\}$, $a_i \in A_i$, se notează $((a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n) \in \prod_{i=1}^{n} A_i$ cu $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Astfel,

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i, i = \overline{1,n}\}$$

În cazul $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, $A \times A \times \ldots \times A$ (de n ori) se notează cu A^n.

c) Este necesară şi o definiție în cazul general al unei familii oarecare de mulțimi $(A_i)_{i \in I}$, indexată după o mulțime de indici I. Se defineşte produsul cartezian $\prod_{i \in I} A_i$:

$$\prod_{i \in I} A_i := \{\varphi : I \to \bigcup_{i \in I} A_i \mid \varphi(i) \in A_i, \forall i \in I\}.$$

6.16 Observație. Produsul cartezian definit ca la c), în cazul unei familii finite de mulțimi, nu este exact acelaşi cu cel definit la a) şi b) şi la **6.3**. Există însă o bijecție naturală între mulțimile obținute prin cele două definiții. De exemplu, dacă $I = \{1, 2\}$, avem funcția bijectivă β, definită pe $\{\varphi : \{1, 2\} \to A_1 \cup A_2 \mid \varphi(i) \in A_i, \forall i \in I\}$ cu valori în $A_1 \times A_2$, dată de $\beta(\varphi) = (\varphi(1), \varphi(2))$. Se pot astfel identifica noțiunile de produs cartezian definite mai sus.

I.7. Relații de ordine şi relații de echivalență

Relațiile de ordine şi de echivalență sînt deosebit de importante în toată matematica şi este esențială o bună cunoaştere a proprietăților lor.

Definim următoarele *tipuri remarcabile de relații pe o mulțime*:

7.1 Definiție. Fie o mulțime nevidă A şi ρ o relație pe A. Spunem că relația ρ este:

- *reflexivă* dacă $a\rho a$, $\forall a \in A$. Formal: $(\forall a)(a \in A \to a\rho a)$;
- *ireflexivă* dacă $\forall a \in A$, *nu* are loc $a\rho a$;
- *simetrică* dacă $\forall a, b \in A$, $a\rho b \to b\rho a$;
- *asimetrică* dacă $\forall a, b \in A$, $a\rho b \to \neg b\rho a$;
- *antisimetrică* dacă $\forall a, b \in A$, ($a\rho b$ şi $b\rho a$) $\to a = b$;
- *tranzitivă* dacă $\forall a, b, c \in A$, $a\rho b$ şi $b\rho c \to a\rho c$;
- *relație de echivalență* dacă este reflexivă, simetrică şi tranzitivă. Pentru relații de echivalență se folosesc notații de tipul $a \equiv b$, $a \sim b$ în loc de $a\rho b$.

[11] Folosim o accepție intuitivă a noțiunii de definiție prin recurență.

- *relație de preordine* dacă este reflexivă şi tranzitivă;
- *relație de ordine* dacă este reflexivă, tranzitivă şi antisimetrică. Pentru relații de (pre)ordine se folosesc în general notații de tipul $a \le b$ în loc de $a\rho b$.
- *relație de ordine strictă* dacă este ireflexivă şi tranzitivă. Pentru relații de ordine strictă se folosesc în general notații de tipul $a < b$ în loc de $a\rho b$.

7.2 Exercițiu. Exprimați definițiile de mai sus în termeni de incluziuni şi compuneri de relații (şi eventual de inverse). De exemplu, ρ este reflexivă înseamnă că $id_A \subseteq \rho$; ρ este simetrică înseamnă că $\rho^{-1} \subseteq \rho$.

Dacă $\le$ este o relație de ordine pe A, scriem $(A, \le)$ şi spunem că $(A, \le)$ este *mulțime ordonată*. Dacă pentru orice $a, b \in A$ avem $a \le b$ sau $b \le a$, atunci $(A, \le)$ se numeşte mulțime *total ordonată* (sau *lanț*) şi relația $\le$ se numeşte relație de *ordine totală*. Uneori, pentru a sublinia că o anumită relație de ordine nu este totală, se spune *relație de ordine parțială*. În loc de $a \le b$ se scrie şi $b \ge a$. Se observă că, dacă $\le$ este o relație de ordine pe A, atunci $\ge$ este tot o relație de ordine.

7.3 Observație. Dacă $\le$ este o relație de ordine pe A, atunci relația $<$ pe A, definită prin: $x < y \leftrightarrow (x \le y \wedge x \ne y)$ este o relație de *ordine strictă* pe A. Reciproc, dacă $<$ este o ordine strictă pe A, atunci, definind $x \le y \Leftrightarrow (x < y \vee x = y)$ se obține o relație de ordine pe A. Verificați! Aşadar, există o bijecție între relațiile de ordine pe A şi relațiile de ordine strictă pe A. De aceea, orice definiție sau rezultat aplicabil unei relații de ordine se aplică şi relației de ordine strictă asociate (şi reciproc).

7.4 Definiție. Fie $(A, \le)$ o mulțime ordonată şi B o submulțime a lui A. Un element $m \in A$ se numeşte *minorant* al lui B dacă $m \le b$, $\forall b \in B$. Un element $M \in A$ se numeşte *majorant* al lui B dacă $b \le M$, $\forall b \in B$. Submulțimea B se numeşte *minorată* (resp. *majorată*) dacă are un minorant (resp. majorant). Dacă B conține un minorant m pentru B, spunem că m este *cel mai mic element* (sau *primul element*) *al lui B*. Dacă B conține un majorant M pentru B, M se numeşte *cel mai mare element* (sau *ultimul element*) *al lui B*.

Dacă B are un prim element $m \in B$, acesta este unic: $\forall m' \in B$, avem $m \le m'$ (m este prim element) şi $m' \le m$, deci $m = m'$ din antisimetrie. La fel, *ultimul element al lui B este unic* (*dacă există*).

Ca exercițiu, exprimați definițiile şi proprietățile de mai sus (date pentru relații de ordine) pentru relații de ordine *strictă*.

7.5 Exemplu. Relația de divizibilitate "|" pe $\mathbb{N}$, dată de:

$$\forall a, b \in \mathbb{N} \ \ (a|b \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{N} \text{ astfel încît } b = ac)$$

este o relație de ordine, care *nu este totală* (nu are loc nici 2|3, nici 3|2); 0 *este ultimul element* al lui ($\mathbb{N}$, |) şi 1 *este primul element* al lui ($\mathbb{N}$, |). Relația uzuală de ordine "≤" pe $\mathbb{N}$ este *totală*, 0 este primul element al lui ($\mathbb{N}$, ≤); nu există ultimul element al lui ($\mathbb{N}$, ≤).

O mulțime (A, ≤) cu proprietatea că orice submulțime nevidă B a lui A are un prim element se numeşte mulțime *bine ordonată* (caz în care relația ≤ pe A se numeşte *relație de bună ordine*). Mulțimile bine ordonate sînt foarte importante: pe o mulțime bine ordonată se poate aplica un raționament prin *inducție*.

Orice mulțime bine ordonată este total ordonată (demonstrați!).

7.6 Definiție. Un element m al unei mulțimi ordonate (A, ≤) se numeşte *element maximal* al lui A dacă, $\forall b \in A$ cu $m \le b$ rezultă $m = b$. Un element m se numeşte *element minimal* al lui A dacă, $\forall b \in A$ cu $b \le m$ rezultă $m = b$. De exemplu, în mulțimea ordonată $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ cu divizibilitatea, 2 este element minimal. Care sînt toate elementele sale minimale? Această mulțime nu are elemente maximale (de ce?).

7.7 Definiție. Fie (A, ≤) o mulțime ordonată şi B o submulțime a sa. Fie $Maj(B)$ mulțimea majoranților lui B. Dacă există cel mai mic element al lui $Maj(B)$, acest element se numeşte *supremumul* (sau *marginea superioară a*) lui B şi se notează $\sup B$. Dacă există $\sup B = c$, atunci c este „*cel mai mic majorant al lui B*”, adică satisface condițiile:

- $\forall b \in B$, $b \le c$ (c este majorant al lui B).

- $\forall c' \in A$ astfel încît $\forall b \in B$, $b \le c'$, rezultă $c \le c'$ (c este mai mic decît orice alt majorant c' al lui B).

„Dual” (considerînd relația de ordine ≥) se obține noțiunea de *infimum* (sau *margine inferioară*) al submulțimii B a lui (A, ≤), notat (dacă există!) cu $\inf B$.

O mulțime ordonată (A, ≤) cu proprietatea că orice submulțime cu două elemente a sa are supremum şi infimum se numeşte *latice*. Dacă orice submulțime a lui A are sup şi inf, A se numeşte *latice completă*.

7.8 Exemple. a) Pentru o mulțime nevidă oarecare M, mulțimea $\mathcal{P}(M)$ a părților lui M este ordonată de relația de incluziune. Pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(M)$, există $\sup\{A, B\} = A \cup B$ şi $\inf\{A, B\} = A \cap B$. ($\mathcal{P}(M)$, ⊆) este chiar o latice *completă*.

b) ($\mathbb{N}$, |) este o latice. Date numerele naturale a, b, cine este $\inf\{a, b\}$ şi $\sup\{a, b\}$?

c) În mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$, ordonată cu ordinea uzuală, orice submulțime nevidă majorată are supremum (aceasta este o proprietate fundamentală a lui $\mathbb{R}$, esențială în Analiză).

d) Nu orice submulțime nevidă majorată a lui $\mathbb{Q}$ are supremum. Într-adevăr, mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ este majorată (de exemplu de 2) şi nu are supremum. Intuitiv, $\sup A$ există în $\mathbb{R}$ şi este $\sqrt{2}$, care nu este număr rațional (deci nu există $\sup A$ în $\mathbb{Q}$). Pentru o demonstrație riguroasă, se poate proceda astfel. Mai întîi se arată că $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Apoi, dacă ar exista $r \in \mathbb{Q}$, $r = \sup A$, avem două posibilități: ori $r^2 < 2$, ori $r^2 > 2$ (căci $r^2 = 2$ este imposibil). Dacă $r^2 < 2$, atunci se găseşte un număr rațional r_1 astfel încît $r < r_1$ şi $r_1^2 < 2$, ceea ce contrazice faptul că $r = \sup A$ ($r_1 \in A$ şi $r < r_1$). Analog, dacă $r^2 > 2$, se găseşte un număr rațional r_2 astfel încît $0 < r_2 < r$ şi $r_2^2 > 2$, ceea ce contrazice faptul că r este $\sup A$ (am găsit un majorant r_2 pentru A cu $r_2 < r$).

Exerciții

1. Fie A, B, C, D mulțimi. Arătați că $(A\bigcup B)\times C = (A\times C)\bigcup(B\times C)$ şi că $(A\bigcap B)\times(C\bigcap D) = (A\times C)\bigcap(A\bigcap B)\times(B\bigcap D)$.

2. Dacă (A, B, ρ) şi (B, C, σ) sînt relații, atunci $(\sigma\circ\rho)^{-1} = \rho^{-1}\circ\sigma^{-1}$.

3. Fie (A, ρ) o relație pe mulțimea A. Ce înseamnă că:

a) $\mathrm{id}_A \subseteq \rho$; b) $\rho\circ\rho \subseteq \rho$; c) $\rho \subseteq \rho^{-1}$; d) $\rho\bigcup\rho^{-1} = A\times A$; e) $\rho\bigcap\rho^{-1} \subseteq \mathrm{id}_A$; f) $\mathrm{id}_A\bigcap\rho = \varnothing$.

4. Fie A, B mulțimi finite, cu m elemente, respectiv n elemente.

a) Cîte elemente are $A\times B$?

b) Cîte relații binare de la A la B există?

c) Cîte funcții definite pe A cu valori în B există?

d) Cîte funcții injective definite pe A cu valori în B există?

5. Fie A, B, C mulțimi. Arătați că există o funcție bijectivă între mulțimile:

a) $A\times B$ şi $B\times A$;

b) $(A\times B)\times C$ şi $A\times(B\times C)$;

c) $(A)^{B\times C}$ şi $(A^B)^C$;

d) $(A\times B)^C$ şi $A^C \times B^C$.

e) $A^{B\cup C}$ şi $A^B\times A^C$, dacă $B\bigcap C = \varnothing$.

6. Fie $f : A \to B$ o funcție. Să se arate că:

a) f este injectivă $\Leftrightarrow \forall C, D \subseteq A$, are loc $f[C\bigcap D] = f[C]\bigcap f[D]$.

b) $\forall C \subseteq A$, are loc $f[C] = \varnothing \Leftrightarrow C = \varnothing$.

7. Fie $f : A \to B$ o funcție. Definim: $f_*: \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$, $f_*(C) = f[C]$ (imaginea submulțimii C prin f), $\forall C \in \mathcal{P}(A)$; $f^*: \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$, $f^*(D) = f^{-1}(D)$, $\forall D \in \mathcal{P}(B)$. Să se arate că următoarele afimații sînt echivalente:

a) f este surjectivă.

b) f^* este injectivă.

c) f_* este surjectivă.

d) $\complement f[X] \subseteq f[\complement X]$, $\forall X \in \mathcal{P}(A)$.

8. Cu aceleaşi notații ca în exercițiul precedent, să se arate că următoarele afimații sînt echivalente:

a) f este injectivă.
b) f^* este surjectivă.
c) f_* este injectivă.
d) $f[\complement X] \subseteq \complement f[X]$, $\forall X \in \mathcal{P}(A)$.

I.8. Axioma infinității. Mulțimea numerelor naturale. Inducție

În toată matematica este esențială mulțimea numerelor naturale $\mathbb{N}$. Se pune problema unui mod de *a construi* această mulțime (sau, întrucît este vorba de un concept care poate apărea drept primar, de *a axiomatiza* $\mathbb{N}$). Vom arăta că se poate da o construcție satisfăcătoare a lui $\mathbb{N}$ în cadrul teoriei axiomatice a mulțimilor.

O modalitate de introducere a lui $\mathbb{N}$ este dată de binecunoscuta *axiomatica Dedekind-Peano*. *Noțiunile primare* sînt cele de *număr natural* şi *funcție succesor*[12]. Limbajul acestei teorii axiomatice este format din:

- simbolul $=$ (notează egalitatea a două obiecte);
- simbolul 0 (notează un număr natural privilegiat fixat);
- nume variabile, constante, conectorii logici (ca la limbajul teoriei axiomatice a mulțimilor), cu deosebirea că numele denumesc acum obiectele acestei teorii, adică *numere naturale*.

Axiomele acestei teorii sînt:

1. Există un număr natural notat 0.

2. Pentru orice număr natural n, există un număr natural unic determinat, numit *succesorul lui n* şi notat $s(n)$ sau n^+: $(\forall n)(\exists n^+)$.

3. Orice două numere naturale cu acelaşi succesor sînt egale: $(\forall m)(\forall n)(m^+ = n^+ \rightarrow m = n)$.

4. 0 nu este succesorul nici unui număr natural: $(\forall n)(n^+ \neq 0)$.

5. (**Axioma inducției**) Pentru orice predicat cu o variabilă $A(n)$ are loc:

$$[A(0) \wedge (\forall n)(A(n) \rightarrow A(n^+))] \rightarrow (\forall m)A(m).$$

Observăm că axioma **5** **(**binecunoscutul *principiu de demonstrație prin inducție***)** este de fapt o *schemă de axiome*.

Introducerea operațiilor cu numere naturale, a relației de ordine şi deducerea principalelor proprietăți ale acestora folosind axiomatica Dedekind-Peano sînt interesante şi instructive.

[12] Întrucît este vorba de o teorie axiomatică, funcția succesor nu este a priori o *funcție* în sensul teoriei mulțimilor (ci este o noțiune primară); este adevărat însă că în *modelul* pe care îl construim, rolul funcției succesor va fi jucat de o funcție în sens uzual.

Aceste aspecte fiind însă destul de cunoscute (vezi de ex. BECHEANU et al. [1983]), nu insistăm în această direcție. Vom arăta, în schimb, că se poate *modela* sistemul axiomatic de mai sus în cadrul teoriei mulțimilor, dacă mai introducem o axiomă (de fapt, acest *model* se expune în general, cînd se vorbeşte de axiomatica Peano). Mai precis, vom construi o *mulțime* $\mathbb{N}$, un *element* $0 \in \mathbb{N}$ şi o *funcție* (în sens uzual) $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $s(n) = n^+$, care să satisfacă axiomele de mai sus.

Instrumentele oferite pînă acum de axiomele teoriei mulțimilor permit considerarea următorului „şir de mulțimi":

$$\varnothing;\ \{\varnothing\};\ \{\varnothing, \{\varnothing\}\};\ \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\};\ \ldots \tag{1}$$

Se observă că, pentru fiecare termen x al şirului, următorul termen este $x \bigcup \{x\}$. Primul termen are 0 elemente, al doilea are 1 element ş.a.m.d. Ar fi tentant să considerăm drept mulțime a numerelor naturale „mulțimea tuturor termenilor acestui şir", $\varnothing$ să joace rolul lui 0, iar funcția succesor să fie $s(x) = x \bigcup \{x\}$. Apar două probleme: *definirea riguroasă* a „mulțimii tuturor termenilor şirului (1)" şi garantarea *existenței* unei astfel de mulțimi. Faptul că există o mulțime care conține toți termenii şirului (1) este asigurat de o nouă axiomă:

8.1 Axioma infinității. $(\exists M)\ [\varnothing \in M \wedge (\forall y)(y \in M \to y \bigcup \{y\} \in M)]$.

Intuitiv, este clar că axioma de mai sus garantează existența unei mulțimi M care conține toate mulțimile şirului (1); aceasta nu înseamnă că M conține *doar* aceste mulțimi. În teoria axiomatică a mulțimilor, se adoptă următoarea strategie: se defineşte riguros *clasa* mulțimilor din şirul (1) (aceasta va fi clasa *ordinalelor finite*); atunci mulțimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale va fi obținută prin comprehensiune, ca fiind mulțimea acelor elemente din M (dată de axioma infinității) care sînt în plus ordinale finite. Apoi se demonstrează că toate aceste obiecte satisfac axiomele Dedekind-Peano.

Nu intrăm în detaliile acestei abordări (vezi SCORPAN [1995]).

Este deosebit de importantă următoarea teoremă, care stă la baza raționamentelor prin inducție:

8.2 Teoremă. *Mulțimea numerelor naturale* $\mathbb{N}$ *este bine ordonată în raport cu relația de ordine uzuală. Altfel spus, orice submulțime nevidă a lui* $\mathbb{N}$ *are un prim element.*

Nu demonstrăm acest enunț (pentru că nu am construit riguros $\mathbb{N}$ …).

Considerăm utile cîteva remarci şi rezultate privind tehnica de *demonstrație prin inducție*. Mai întîi dăm un rezultat denumit uneori ca o „variantă a principiului de inducție":

8.3 Propoziție. *Fie* $P(x)$ *un predicat cu proprietatea că, pentru orice număr natural* n, *dacă* $P(k)$ *este adevărată pentru orice* $k < n$, *rezultă că* $P(n)$ *este adevărată. Atunci* $P(n)$ *este adevărată pentru orice număr natural* n. *Mai precis, are loc* (*subînțelegem că toate variabilele sînt în* $\mathbb{N}$):

$$\{\forall n[(\forall k\,(k < n \rightarrow P(k)) \rightarrow P(n)]\} \rightarrow (\forall m)(P(m)).$$

Demonstrație. Mai întîi observăm că, în condițiile din enunț, $P(0)$ este adevărată. Într-adevăr, pentru $n = 0$ are loc implicația: $[\forall k(k < 0 \rightarrow P(k)] \rightarrow P(0)$. Dar $\forall k(k < 0 \rightarrow P(k))$ este adevărată, deoarece $k < 0$ este falsă pentru orice $k \in \mathbb{N}$ (o expresie de forma $p \rightarrow q$ este adevărată dacă p este falsă!). Deci $P(0)$ adevărată. [13]

Presupunem prin absurd că există $n \in \mathbb{N}$ astfel încît $P(n)$ să fie falsă. Atunci mulțimea nevidă $\{n \in \mathbb{N} \mid P(n)$ falsă$\}$ are un prim element a. Deci $P(k)$ este adevărată, $\forall k < a$, din modul de alegere a lui a. Cum are loc implicația $(\forall k(k < a \rightarrow P(k)) \rightarrow P(a)$, rezultă că $P(a)$ este adevărată, absurd. □

Este remarcabil faptul că acest rezultat are loc în *orice mulțime bine ordonată.* Propunem cititorului să reia ideea demonstrației de mai sus pentru a arăta :

8.4 Propoziție. *Fie* $(A, \leq)$ *o mulțime bine ordonată și fie* $P(x)$ *un predicat cu proprietatea că, pentru orice* $n \in A$, *dacă* $P(k)$ *este adevărată pentru orice* $k < n$, $k \in A$, *rezultă că* $P(n)$ *adevărată. Atunci* $P(n)$ *adevărată pentru orice* $n \in A$. *Mai precis, are loc* (*subînțelegem că toate variabilele sînt în* A):

$$\{\forall n\,[(\forall k\,(k < n \rightarrow P(k)) \rightarrow P(n)]\} \rightarrow (\forall n)(P(n)).$$ □

Un exemplu de aplicare a acestei propoziții este demonstrația teoremei polinoamelor simetrice: *Orice polinom simetric de n nedeterminate este polinom de polionoamele simetrice fundamentale*. (Aici mulțimea bine ordonată este $\mathbb{N}^n$, cu ordinea lexicografică).

Prezentăm o proprietate foarte importantă a lui $\mathbb{N}$, a cărei demonstrație ilustrează principiul de demonstrație prin inducție. Se presupun cunoscute operațiile de adunare și înmulțire în $\mathbb{N}$ și proprietățile lor.

8.5 Teoremă (Teorema împărțirii cu rest în $\mathbb{N}$). *Pentru orice numere naturale a, b, cu* $b \neq 0$, *există* q, $r \in \mathbb{N}$ *astfel încît* $a = bq + r$ *și* $r = 0$ *sau* $r < b$ (*q se numește* cîtul *iar r* restul *împărțirii lui a la b*). *În plus, q și r sînt unic determinate cu aceste proprietăți.*

Demonstrație. Fie $b \neq 0$ fixat. Demonstrăm prin inducție după a, aplicînd **8.3**. Mai precis, considerăm $P(a)$: $\exists q\, \exists r\, (q \in \mathbb{N} \wedge r \in \mathbb{N} \wedge a = bq + r \wedge r < b)$.

Pentru orice $a < b$, $P(a)$ este adevărată, luînd $q = 0$, $r = a$. Presupunem acum că $a \geq b$ și $P(k)$ este adevărată, $\forall k \in \mathbb{N}$, $k < a$. Să demonstrăm $P(a)$. Cum $a \geq b$ avem $a - b \in \mathbb{N}$ și $a - b < a$. Deci are loc $P(a - b)$: $\exists q, r$ astfel încît $a - b = bq + r$ și $r < b$, adică $a = b(q + 1) + r$, cu $r < b$.

---

[13] Așadar, nu are rost să se arate că $P(0)$ este adevărată cînd se folosește acest raționament prin inducție!

Unicitatea: presupunem că $a = bq + r = bt + s$, cu $r < b$ şi $s < b$. Pentru a face o alegere, fie $q \geq t$, adică $q - t \geq 0$. Atunci $b(q - t) = s - r$. Cum $s < b$, rezultă că $s - r < b$. Astfel, $b(q - t) < b$, de unde obţinem $q - t = 0$ şi $s - r = 0$. □

Teorema împărţirii cu rest este de o importanţă covîrşitoare în matematică. O primă aplicaţie a ei este *reprezentarea numerelor naturale într-o bază dată* (vezi Exerciţii).

I.9. Comentarii şi completări privind axiomatica mulţimilor

În această secţiune vom discuta cu titlu informativ anumite aspecte ale teoriei axiomatice a mulţimilor. Pentru detalii, se pot consulta lucrări precum SCORPAN [1996], MANIN [1977].

Clase

Nu există o „mulţime a tuturor mulţimilor”, căci acest concept conduce la paradoxuri. Dacă ar exista mulţimea tuturor mulţimilor, fie aceasta $\boldsymbol{A}$, atunci, conform schemei de comprehensiune, ar exista şi mulţimea $C = \{B \in \boldsymbol{A} \mid B \notin B\}$. Se vede că regăsim paradoxul lui Russel. Astfel de colecţii „foarte mari” de obiecte apar însă frecvent în matematică (dorim de exemplu să vorbim de o proprietate pe care o au „toate” grupurile) şi este necesară precizarea unui cadru riguros pentru aceste situaţii. O rezolvare rezonabilă este dată de conceptul de *clasă*.

În cadrul teoriei Gödel-Bernays (GB), *clasa* este noţiune primară (nu se defineşte clasa, ci este dat un set de axiome referitoare la clase; mulţimile vor fi un tip particular de clase – cele care sînt elemente ale altor clase). Teoria astfel dezvoltată este însă considerabil mai complicată decît ZFS [14].

În teoria ZFS, prin *clasă* se înţelege o expresie cu o variabilă liberă (un predicat cu o variabilă)[15]. Cu alte cuvinte, o proprietate nu mai defineşte o *mulţime* de obiecte, ci este privită ea însăşi ca o entitate şi o numim *clasă*. *O clasă nu este un obiect al teoriei* ZFS, *ci o expresie a limbajului formal* (cf. comentariul de la axioma-schemă a substituţiei). De exemplu, predicatul $P(x)$: „$x = x$” este evident satisfăcut de orice mulţime x; acest predicat defineşte „clasa tuturor mulţimilor”. Abuzînd de limbajul de la mulţimi, fiind dată o clasă $P(x)$, în loc să se spună ca un anumit x satisface P sau „$P(x)$ este adevărată”, se spune „x aparţine clasei P” sau „x este un element al clasei P”.

Observăm că orice mulţime a defineşte o clasă, anume „$x \in a$”.

[14] În plus, se poate arăta că orice enunţ despre mulţimi, demonstrabil în GB, este demonstrabil în ZFS.
[15] Această interpretare pentru clase a fost prezentată de W. Quine în 1963.

Reciproc, spunem că o clasă $P(x)$ *corespunde* unei mulţimi M dacă are loc $\forall x\ (P(x) \leftrightarrow x \in M)$: obiectele care satisfac P sînt exact elementele lui M. Uneori spunem în acest caz chiar că *P este* o mulţime.

În acest sens, *clasa tuturor mulţimilor nu corespunde unei mulţimi*. Demonstraţia a fost dată chiar la începutul acestui paragraf!

Se pot defini şi *operaţii cu clase*, prin analogie cu cele de la mulţimi. Astfel, dacă $P(x)$ şi $Q(x)$ sînt clase, definim *reuniunea* claselor P şi Q ca fiind clasa $P(x) \vee Q(x)$; *intersecţia* lor este clasa $P(x) \wedge Q(x)$. Cum s-ar defini *diferenţa* lor? Dar faptul că clasa P este *inclusă* în clasa Q?

În această terminologie, schema de comprehensiune nu spune altceva decît că *intersecţia dintre o clasă şi o mulţime este o mulţime.*

Apare acum destul de clar că exprimări de genul „mulţimea tuturor grupurilor” nu sînt legitime, o exprimare corectă fiind „clasa tuturor grupurilor”. Noţiunea de clasă este esenţială în *teoria categoriilor*.

Axioma alegerii

Axioma alegerii (AC)[16] este o nouă axiomă care joacă un rol deosebit în matematică, datorită faptului că, pe de o parte, are un enunţ aparent „evident”; pe de altă parte, are un caracter neconstructiv care i-a atras multe critici. Există multe enunţuri echivalente cu această axiomă. În formularea lui Zermelo, AC se enunţă:

Pentru orice mulţime A în care elementele sînt disjuncte două cîte două[17]*, există o mulţime care conţine exact cîte un element din fiecare mulţime nevidă din A* :

$$(\forall A)[(\forall x)(\forall y)(x \in A \wedge y \in A \wedge x \neq y) \to x \cap y = \varnothing] \to$$
$$(\exists c)[(\forall x)(x \in A \wedge x \neq \varnothing) \to (\exists z)(c \cap x = \{z\}].$$

Altfel spus, putem „alege” cîte un element din fiecare mulţime nevidă din A şi forma cu ele o nouă mulţime. Controversele privind această axiomă provin şi din faptul că unii matematicieni consideră că existenţa unei astfel de mulţimi implică şi existenţa unui „procedeu de alegere” a unui element dintr-o mulţime nevidă. În 1963 s-a demonstrat că *AC nu poate fi dedusă din ZF*. În majoritatea matematicilor contemporane, AC este acceptată alături de ZF, în sistemul numit ZFC.

Există numeroase enunţuri echivalente cu Axioma Alegerii. Iată cîteva:

Principiul bunei ordonări (Zermelo 1904). *Orice mulţime nevidă A poate fi bine ordonată* (*există o relaţie de bună ordine pe A*).

Produsul cartezian al unei familii de mulţimi nevide este nevid.

[16] Acronimul expresiei Axiom of Choice.
[17] Reamintim că elementele lui A sînt tot mulţimi.

Pentru orice mulţime a, există o funcţie de alegere $f : a \to \bigcup a$ (adică f are proprietatea că, $\forall x \in a, x \neq \varnothing \to f(x) \in x$). [18]

Pentru orice funcţie surjectivă $\varphi : E \to F$ *există* $\psi : F \to E$ *astfel încît* $\varphi\psi = id_F$.

Lema lui Zorn. *Fie* $(A, \leq)$ *o mulţime ordonată nevidă în care orice submulţime total ordonată este majorată* (*mulţime „inductiv ordonată”*). *Atunci există un element maximal al lui A*.

Lema lui Zorn este folosită în Algebră în demonstrarea unor teoreme importante: existenţa unei baze într-un spaţiu vectorial oarecare, existenţa idealelor maximale într-un inel, existenţa închiderii algebrice a unui corp comutativ.

__Cardinali__

În continuare prezentăm cîteva noţiuni de *teoria cardinalilor*. Pentru o tratare mai în detaliu, vezi MIRON, NĂSTĂSESCU [1974], SCORPAN.

9.6 Definiţie. Fie A şi B două mulţimi. Spunem că A şi B sînt *echipotente* (sau că sînt *cardinal echivalente*, sau că *au acelaşi cardinal*) dacă există o bijecţie $f : A \to B$. Scriem atunci $A \sim B$ sau $|A| = |B|$.

Pentru orice mulţimi A, B, C, au loc:

a) $A \sim A$ (reflexivitate);

b) Dacă $A \sim B$, atunci $B \sim A$ (simetrie);

c) Dacă $A \sim B$ şi $B \sim C$, atunci $A \sim C$ (tranzitivitate).

Astfel, putem spune că relaţia de echipotenţă " $\sim$ " este o relaţie de echivalenţă pe clasa mulţimilor. Clasa[19] tuturor mulţimilor echipotente cu o mulţime dată A se numeşte *cardinalul mulţimii A* şi se notează card A sau $|A|$. Spunem că A este o mulţime *finită* cu n elemente ($n \in \mathbb{N}$) dacă $A \sim \{1, \ldots, n\}$ şi atunci notăm $|A| = |\{1, \ldots, n\}| =: n$. O mulţime care nu este finită se numeşte *infinită*. Se poate demonstra că: *mulţimea A este infinită* $\Leftrightarrow$ *există o funcţie injectivă* $\varphi : A \to A$ *care nu este surjectivă* $\Leftrightarrow$ *există o funcţie injectivă* $\psi : \mathbb{N} \to A$.

Dacă $|A| = |\mathbb{N}|$, spunem că A este o mulţime *numărabilă*.

Se introduce o *relaţie de ordine* între cardinali: spunem că $|A| \leq |B|$ dacă există o funcţie injectivă $\varphi : A \to B$. *Definiţia este corectă*: dacă $A \sim A'$, $B \sim B'$ şi există o funcţie injectivă $\varphi : A \to B$, atunci există o există o funcţie injectivă $\varphi' : A' \to B'$ (demonstraţi!).

Observăm că $|A| \leq |B|$ dacă: există o funcţie injectivă $\varphi : A \to B$, dar $|A| \neq |B|$, adică nu există funcţii bijective (mai precis surjective) de la A la B.

Se verifică imediat că, pentru orice mulţimi A, B, C are loc:

---

[18] Altfel spus, funcţia f "alege" cîte un element $f(x)$ din fiecare mulţime nevidă $x \in a$.

[19] Nu putem vorbi de "*mulţimea* tuturor mulţimilor echipotente cu A".

a) $|A| \le |A|$ (*reflexivitate*);

b) $|A| \le |B|$ şi $|B| \le |C|$ implică $|A| \le |C|$ (*tranzitivitate*);

Are loc următoarea teoremă importantă, care arată că $\le$ este şi *antisimetrică* (deci are într-adevăr aceleaşi proprietăți ca o relație de ordine).

9.7 Teoremă. (Cantor-Schröder-Bernstein) *Fie A şi B două mulțimi. Dacă* $|A| \le |B|$ *şi* $|B| \le |A|$, *atunci* $|A| = |B|$.

Demonstrație. Idee: să găsim $D \subseteq A$ astfel încît $A \setminus D \subseteq \mathrm{Im} g$ şi $\alpha : A \to B$, dată de:

$$\alpha(a) = \begin{cases} f(a) & \text{dacă } a \in D \\ g^{-1}(a) & \text{dacă } a \notin D \end{cases}$$

să fie o bijecție (faceți un desen!). Trebuie să avem atunci $A \setminus D = g(B \setminus f(D))$, adică $D = A \setminus g(B \setminus f(D))$.

Pentru a găsi D ca mai sus, definim $\varphi : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, $\varphi(E) := A \setminus g(B \setminus f(E))$, $\forall E \in \mathcal{P}(A)$. Noi căutăm un D cu $\varphi(D) = D$.

Se arată uşor că *φ este crescătoare*: dacă $E \subseteq F$, atunci $\varphi(E) \subseteq \varphi(F)$.

Definim $M := \{E \subseteq A \mid E \subseteq \varphi(E)\}$. Evident, M este nevidă căci, de exemplu, $\varnothing \in M$.

Fie $D := \bigcup M$ (scrisă şi $\bigcup\{E \mid E \in M\}$). Să arătăm că $\varphi(D) = D$.

Avem $\varphi(D) = \varphi(\bigcup\{E \mid E \in M\}) = \bigcup\{\varphi(E) \mid E \in M\} \supseteq \bigcup\{E \mid E \in M\} = D$.

Deci $D \subseteq \varphi(D)$. Aplicînd φ acestei incluziuni, obținem $\varphi(D) \subseteq \varphi(\varphi(D))$ adică $\varphi(D) \in M$. De aici, $D = \bigcup\{E \mid E \in M\} \supseteq \varphi(D)$. Astfel, $\varphi(D) = D$.

Lăsăm cititorului verificarea faptului că α este bijecție. □

Relația de ordine $\le$ este şi *totală* (demonstrația face apel la Axioma Alegerii):

9.8 Teoremă. *Oricare ar fi două mulțimi A, B, are loc* $|A| \le |B|$ *sau* $|B| \le |A|$. □

Această ultimă proprietate este chiar echivalentă cu Axioma Alegerii.

Axiomatica ZFS

Sistemul axiomatic ZFS (Zermelo-Fraenkel-Skolem) propriu-zis conține 4 axiome şi o schemă de axiome: axioma extensionalității, axioma reuniunii, axioma mulțimii părților, *axioma-schemă a substituției* şi axioma infinității.

Față de prezentarea adoptată de noi, în sistemul axiomatic ZFS diferența este că axioma-schemă de comprehensiune şi axioma perechii sînt înlocuite de un enunț mai puternic, anume de *Axioma-schemă a substituției*. Pentru enunțarea acestei axiome avem nevoie de o definiție.

9.1 Definiție. O expresie $E(x, y)$ cu exact două variabile libere x şi y se numeşte *relație funcțională* dacă pentru orice x există cel mult un y astfel încît $E(x, y)$ să fie adevărată:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)\,((E(x, y) \wedge E(x, z)) \to y = z).$$

Intuitiv, putem privi o relație funcțională ca pe o „funcție parțial definită pe clasa mulțimilor”: pentru anumiți x există un unic y astfel încît $E(x, y)$ să aibă loc; se notează uneori chiar „funcţional”, $y = \widetilde{E}(x)$ în loc de $E(x, y)$. Observăm că nu este neapărat adevărat că $(\forall x)(\exists y)E(x, y)$ (pentru orice x să existe un y astfel încît $E(x, y)$).

În termeni mai puţin formali, axioma-schemă a substituţiei afirmă că: *Pentru orice relaţie funcţională E(x, y) şi pentru orice mulţime a, există „imaginea prin E a mulţimii a”.*

Evident, trebuie să definim riguros conceptul de „imagine a unei mulţimi printr-o relaţie funcţională”.

9.2 Definiţie. Spunem că mulţimea b este *imaginea mulţimii a prin relaţia funcţională* $E(x, y)$ dacă „elementele lui b sînt de forma $\widetilde{E}(x)$, cu $x \in a$”, adică:

$$(\forall y)[y \in b \leftrightarrow (\exists x)(x \in a \wedge E(x, y))].$$

Axioma-schemă a substituţiei este: *pentru orice relaţie funcţională E(x, y), are loc:*

$$(\forall a)(\exists b)(\forall y)[y \in b \leftrightarrow (\exists x)(x \in a \wedge E(x, y))].$$

În cuvinte: *Pentru orice relaţie funcţională E(x, y) şi pentru orice mulţime a, există imaginea prin E a mulţimii a.*

Subliniem din nou că *se obţine cîte o axiomă pentru fiecare alegere a unei relaţii funcţionale E*. Nu se pot condensa toate aceste enunţuri într-unul singur, de tipul

$$(\forall E \text{ relaţie funcţională})(\forall a)(\exists b)(\forall y)[y \in b \leftrightarrow (\exists x)(x \in a \wedge E(x, y))],$$

deoarece acesta *nu* este o expresie a limbajului formal (vezi definiţia expresiilor limbajului formal): E nu denumeşte un *obiect* legitim (o mulţime), ci o *expresie*.

Folosind axioma extensionalităţii, se demonstrează imediat că *imaginea unei mulţimi printr-o relaţie funcţională este unic determinată* (mulţimea b a cărei existenţă este garantată de axioma schemă a substituţiei este unic determinată de E şi a).

Axioma-schemă a comprehensiunii (a selecţiei, a specificării) este în acest cadru o *teoremă*, consecinţă a a**xiomei-schemă a substituţiei**:

9.3 Teoremă (*Schema de comprehensiune*). *Pentru orice mulţime A şi pentru orice expresie cu o variabilă liberă P(x), există submulţimea elementelor din A pentru care P este adevărată. Formal,* $(\forall A)(\exists B)(\forall x)[x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge P(x))]$.[20]

Demonstraţie. Pentru demonstraţie, căutăm o relaţie funcţională şi aplicăm axioma-schemă a substituţiei. Fie expresia $E(x,y)$: "$(x = y) \wedge P(y)$". Afirmăm că E este o relaţie funcţională. Într-adevăr, fie x, y, z cu $E(x,y)$ şi $E(x,z)$ adevărate. Atunci $x = y$ şi $x = z$, deci $y = z$.

Conform axiomei-schemă a substituţiei, pentru mulţimea A există o mulţime B astfel încît:

$$(\forall y)[y \in B \leftrightarrow (\exists x)(x \in A \wedge E(x, y))],$$

adică $y \in B \leftrightarrow (\exists x)(x \in A \wedge (x = y) \wedge P(y))$, ceea ce revine la a spune că $y \in B \leftrightarrow (y \in A \wedge P(y))$, ceea ce trebuia demonstrat. □

[20] În axiomatizarea lui Zermelo din 1908, acest rezultat era enunţat ca axiomă şi era numit *Axioma selecţiei*.

De asemenea, *axioma perechii* este tot o teoremă:

9.4 Propoziție *(Teorema perechii)*. *Fie a şi b două mulțimi. Atunci există o mulțime c care are ca elemente pe a şi pe b şi numai pe ele. Formal:*

$$(\forall a)(\forall b)(\exists c)(\forall x)\ [(x \in c) \leftrightarrow (x = a \vee x = b)]$$

Mulțimea c de mai sus este unic determinată de a şi b şi se notează $\{a, b\}$.

Demonstrație. Ideea este de a construi o mulțime cu două elemente D şi de a obține $\{a, b\}$ ca imaginea lui D printr-o relație funcțională bine aleasă, aplicînd axioma substituției.

Ştim că există mulțimea vidă $\varnothing$. Construim (cu axioma mulțimii părților) mulțimea $\mathcal{P}(\varnothing)$, care are un element (avem $\varnothing \subseteq \varnothing$, deci $\varnothing \in \mathcal{P}(\varnothing)$; $\varnothing$ este chiar unicul element al lui $\mathcal{P}(\varnothing)$, deci $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$). Cum $\varnothing$ nu are nici un element, deducem că $\mathcal{P}(\varnothing) \neq \varnothing$. Construim acum $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing)) = \mathcal{P}(\{\varnothing\})$. Unicele mulțimi incluse în $\{\varnothing\}$ sînt $\varnothing$ şi $\{\varnothing\}$, deci $\mathcal{P}(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ are două elemente (cum am dorit).

Fie $E(x, y)$: "$(x = \varnothing \wedge y = a) \vee (x = \{\varnothing\} \wedge y = b)$" (verificați că este o relație funcțională). Imaginea prin E a lui $\mathcal{P}(\{\varnothing\})$ este chiar mulțimea căutată c.

Unicitatea lui c rezultă din axioma extensionalității. □

9.5 Observație. O expresie cu exact două variabile libere se numeşte *relație*. Pentru orice relație $R(x, y)$ putem defini "*domeniul*" D_R şi "*imaginea*" I_R ca fiind *clasele*:

$$D_R(x)\text{: "}(\exists y)R(x, y)\text{"}$$

$$I_R(y)\text{: "}(\exists x)R(x, y)\text{"}$$

Demonstrați că, dacă clasele D_R şi I_R sînt mulțimi, atunci relației $R(x, y)$ i se asociază o relație ρ între D_R şi I_R (în sensul definiției **6.4.**a), $\rho := \{(x, y) \in D_R \times I_R \mid R(x, y) \text{ adevărată}\}$. Mai mult, această relație este *funcție* (în sensul definiției **6.4.**b) dacă şi numai dacă R este *relație funcțională*. Invers, unei funcții $f : A \to B$ i se asociază o relație funcțională $F(x, y)$: "$x \in A \wedge y = f(x)$".

Demonstrați că, dacă R este relație funcțională şi D_R este mulțime, atunci I_R este mulțime. Reciproca este adevărată?

Consistență, independență, modele

Este de dorit ca orice teorie axiomatică (deci şi ZFS) să satisfacă următoarele *proprietăți*:

Consistența (sau *necontradictorietatea*) teoriei: din axiomele teoriei nu se poate deduce simultan o propoziție şi negația ei (adică nu se poate obține o *contradicție*). O teorie care nu este consistentă nu are nici o valoare ştiințifică: *dacă există o propoziție p astfel încît p şi* $\neg p$ *sînt adevărate, atunci orice propoziție q este adevărată* (ceea ce elimină orice interes în stabilirea adevărului unei propoziții). Într-adevăr, este clar că, dacă p şi $p \to q$ sînt adevărate, atunci q este adevărată. Însă p e adevărată din ipoteză, iar $p \to q$ este $\neg p \vee q$, adevărată căci $\neg p$ este adevărată.

Independenţa axiomelor: nici o axiomă nu este o consecinţă a celorlalte. O teorie în care axiomele nu sînt independente nu este însă lipsită de interes (poate fi, cel mult, acuzată de redundanţă).

Problemele stabilirii consistenţei şi independenţei unui sistem axiomatic sînt dificile şi profunde.

Strîns legată de problema consistenţei este *modelarea* unui sistem axiomatic. Se numeşte *model* al unei teorii axiomatice o structură de obiecte care satisfac axiomele teoriei. Se pot da exemple numeroase: un model al axiomelor geometriei plane este $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, un model pentru axiomele inelului este $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ etc. Are loc următorul rezultat: *o teorie axiomatică este consistentă dacă şi numai dacă are un model*.

Se observă că, în exemplele de mai sus, modelele teoriilor sînt obiecte construite în cadrul teoriei (axiomatice) a mulţimilor (care este mai largă decît teoriile respective). O teoremă a lui Gödel afirmă, într-o exprimare neriguroasă, că un model pentru o teorie axiomatică poate fi construit doar într-o teorie mai largă. Aşadar, un eventual model pentru ZF (care i-ar demonstra consistenţa) nu ar putea fi construit decît într-o teorie mai largă. Însă ZF este suficient de cuprinzătoare pentru a putea servi drept fundament al întregii matematici; pe de altă parte, verificarea consistenţei unei ipotetice teorii mai largi revine la construcţia unei teorii şi mai largi ş.a.m.d. Se vede că această cale nu conduce la o demonstraţie a consistenţei teoriei ZF. Se poate doar presupune că teoria ZF nu conduce la apariţia de contradicţii (de fapt, am văzut că a fost creată tocmai pentru a elimina contradicţiile apărute în teoria naivă a mulţimilor). În acest sens, este grăitor următorul citat din MANIN [1977], p. 102:

> Problema consistenţei formale a axiomelor Zermelo-Fraenkel trebuie să rămînă o chestiune de credinţă, cu excepţia cazului cînd o eventuală inconsistenţă formală este demonstrată. Pînă acum toate demonstraţiile bazate pe aceste axiome nu au dus niciodată la o contradicţie; dimpotrivă, au deschis în faţa noastră bogata lume a matematicilor clasice şi moderne. Această lume are o anumită realitate şi o viaţă proprii, care depind în mică măsură de formalismele alese pentru a le descrie. O descoperire a unei contradicţii în oricare din diversele formalisme, chiar dacă ar apărea, ar servi doar la clarificarea, rafinarea şi poate reconstrucţia unor anumite idei, dar nu ar conduce la falimentul lor, cum s-a întîmplat de mai multe ori în trecut.

Independenţa axiomelor are şi ea legătură cu consistenţa. Să exemplificăm aceasta pe cazul unei noi axiome, *axioma fundării*.

Axioma fundării (AF**).** *Orice mulţime nevidă conţine un element de care este disjunctă:*

$$(\forall a)[a \neq \varnothing \rightarrow (\exists b)(b \in a \wedge b \cap a = \varnothing)].$$

Acest enunţ implică: *Nici o mulţime nu este element al ei însăşi*. Într-adevăr, dacă avem o mulţime x astfel încît $x \in x$, atunci $\{x\}$ contrazice axioma fundării: singurul element al lui $\{x\}$ este x şi avem $x \cap x$ nevidă, căci conţine pe x. Mai mult, nu există „lanţuri de mulţimi” de forma $x_0 \in x_1 \in x_2 \in \ldots \in x_n \in x_0$. Dacă ar exista un asemenea lanţ, atunci mulţimea $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ contrazice AF (de ce?). La fel, nu poate exista un şir $(x_n)_{n \in \omega}$ astfel încît

$x_{n+1} \in x_n$, $\forall n \in \omega$. AF își datorează numele faptului că, pentru orice mulțime x, orice lanț de forma $x \ni x_0 \ni x_1 \ni \ldots \ni x_n \ni \ldots$ este finit și se termină cu $\varnothing$: $\exists n$ astfel încît $x \ni x_0 \ni x_1 \ni \ldots \ni x_n \ni \varnothing$, adică orice șir descrescător (față de relația $\in$) este finit și *„fundat”* pe $\varnothing$.[21]

S-a demonstrat că, dacă acceptăm că ZF este consistentă, atunci ZF + AF (sistemul ZF la care se adaugă AF) nu conduce la contradicții. Această probare a *consistenței relative* a AF s-a realizat prin construirea unui model (în cadrul ZF) care satisface ZF + AF. În plus, s-a construit un alt model (tot în cadrul ZF) care satisface ZF și *negația AF*. Din aceste două rezultate se vede că AF este independentă de ZF (nu poate fi dedusă din axiomele ZF).

Un alt rezultat în această direcție este demonstrarea *independenței axiomei infinității față de restul axiomelor ZF*, printr-un procedeu asemănător în principiu cu cel de mai sus.

Exerciții

1. Arătați că, pentru orice mulțime A, are loc $|A| < |\mathcal{P}(A)|$. (*Ind.* Arătăm că orice funcție $f: A \to \mathcal{P}(A)$ nu este surjectivă. Fie $B = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$. Atunci B nu este în imaginea lui f.)

2. Arătați că:

a) $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$

b) $|\mathbb{N}\times\mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$. (*Ind.* Demonstrația revine la a aranja perechile de forma (a, b), cu $a, b \in \mathbb{N}$, într-un șir. O posibilitate este dată de șirul: (0,0), (0,1), (1,0), (0,2), (1,1), (2,0), …. Deduceți o formulă generală pentru locul în șir al lui (a, b) și definiți cu ajutorul ei o funcție bijectivă de la $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ la $\mathbb{N}$.)

c) $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$.

d) $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$.

3. Axioma infinității face referire la mulțimea vidă $\varnothing$, a cărei existență rezultă din existența măcar a unei mulțimi. Dar acest lucru este asigurat de axioma infinității. Cum se poate ieși din acest (aparent) cerc vicios?

4. (Reprezentarea unui număr în baza b) Fie b un număr natural nenul fixat (numit *bază de numerație*). Demonstrați că, $\forall a \in \mathbb{N}$, există și sînt unice $n \in \mathbb{N}^*$ și $c_0, \ldots, c_{n-1} \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$, astfel încît

$$a = c_{n-1}b^{n-1} + \ldots + c_1 b + c_0 \qquad (R)$$

[21] Astfel, întregul univers descris de ZF și AF este "creat" pornind de la $\varnothing$ (universul "von Neumann", vezi MANIN [1977], p. 95-102).

În cazul în care are loc egalitatea (R) de mai sus, se mai scrie $a = \overline{c_{n-1}\ldots c_1c_0}$, scriere numită *reprezentarea lui a în baza b*. Numerele naturale 0, 1, …, $b - 1$ se numesc *cifre*[22] *în baza b* (pentru scrierea concretă se dau b simboluri care reprezintă aceste cifre şi nu se foloseşte bara superioară, scrisă aici pentru a evita confuzia cu produsul $c_{n-1}\ldots c_1c_0$). Uneori, în notaţie, se mai specifică baza b, ca indice. De exemplu, $105_7 = 54_{10}$. (Ind. Din teorema împărţirii cu rest aplicată lui a şi b, $\exists!\ q,\ r \in \mathbb{N}$ astfel încît $a = bq + r$. Se pune $c_0 = r$ şi se repetă procedeul pentru q – sau, mai riguros, se aplică o inducţie după a. Pentru unicitate, se observă că c_0 este restul împărţirii lui a la b şi se aplică o inducţie după cel mai mic număr de cifre dintr-o reprezentare a lui a în baza b).

5. Reprezentaţi în baza 10 numerele 1011_2, 1212_3. Scrieţi în bazele 2, 7, 16, numerele 129_{10}, 1152_{10}.

[22] A se remarca distincţia între *număr* şi *cifră* (într-o bază fixată). De exemplu, cifrele în baza 16 (sistem *hexadecimal*) sînt 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F, unde A îl reprezintă pe 10 (scris în baza zece), B pe 11 etc.

Index

U

V

Z

Bibliografie

1. BECHEANU, M. et al. [1983], *Algebră pentru perfecționarea profesorilor,* Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti.
2. BLOCH, E.D. [2000], *Proofs and fundamentals; a first course in mathematics*, Birkhäuser, Boston, 2000.
3. FREUDENTHAL, H. [1973], *Limbajul logicii matematice,* Ed. Tehnică, Bucureşti.
4. ION, I.D., RADU, N. [1981a] *Algebra*, Ed. Didactică şi pedagogică, Bucureşti.
5. ION, I.D., RADU, N., NIȚĂ, C., POPESCU, D. [1981b] *Probleme de algebră*, Ed. Didactică şi pedagogică, Bucureşti.
6. LAVROV, I.A., MAKSIMOVA, L.L., *Probleme de teoria mulțimilor şi logică matematică*, Ed. Tehnică, Bucureşti 1974.
7. MANIN, YU. I. [1977], *A Course in Mathematical Logic*, Springer Verlag, New York.
8. NĂSTĂSESCU, C. [1974] *Introducere în teoria mulțimilor*, Ed. Didactică şi pedagogică, Bucureşti.
9. NĂSTĂSESCU, C. [1983] *Teoria dimensiunii în algebra necomutativă,* Ed. Academiei R.S.R., Bucureşti.
10. NIȚĂ, C., SPIRCU, T. [1974] *Probleme de structuri algebrice*, Ed. Tehnică, Bucureşti.
11. REGHIŞ, M. [1981] *Elemente de teoria mulțimilor şi logică matematică*, Ed. Facla, Timişoara.
12. SCORPAN, A. [1996] *Introducere în teoria axiomatică a mulțimilor*, Ed. Universității Bucureşti, Bucureşti.