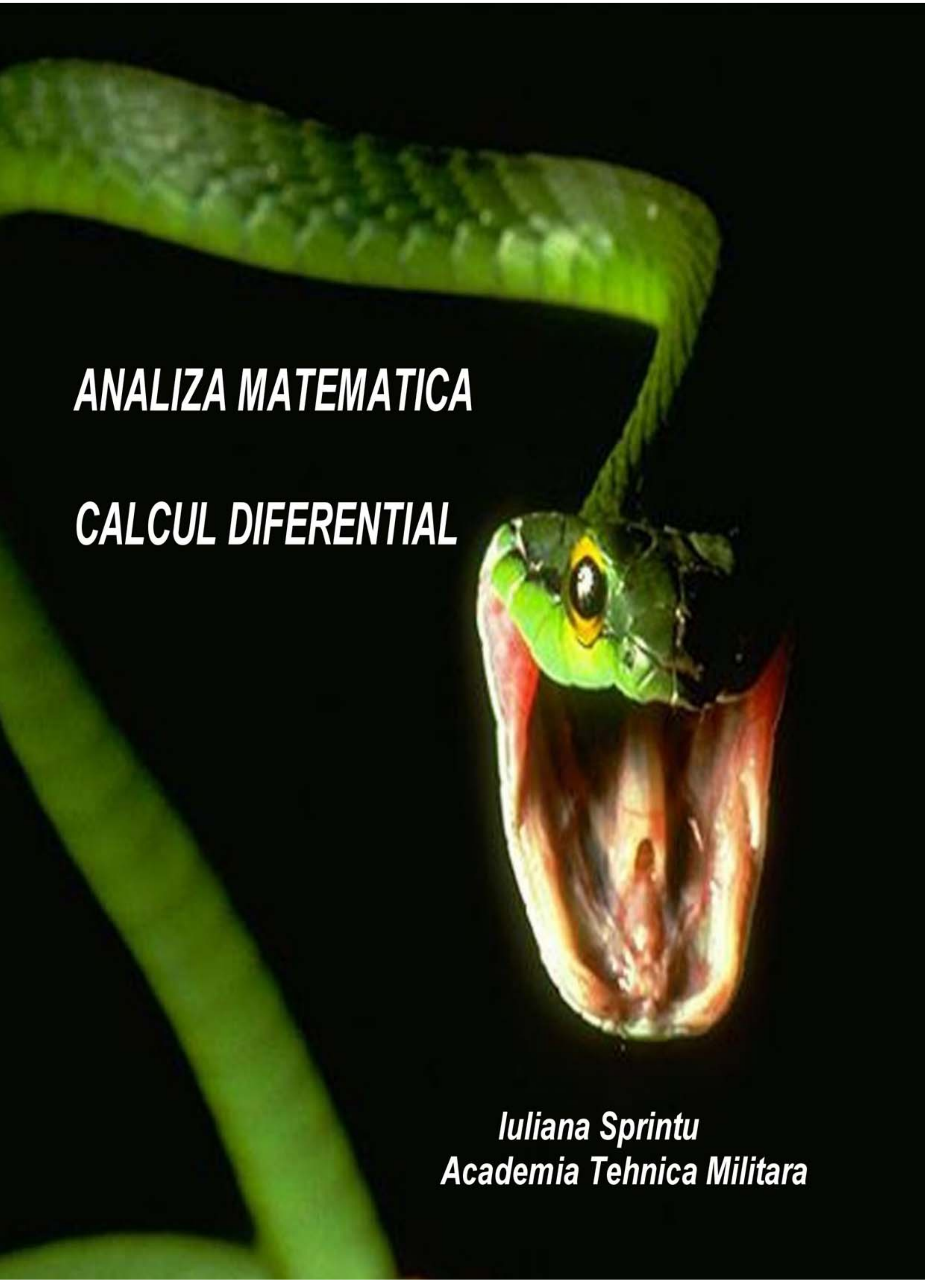

ANALIZA MATEMATICA

CALCUL DIFERENTIAL

Iuliana Sprintu
Academia Tehnica Militara

CUPRINS

Capitolul 1. Spații topologice. Spații metrice

- **1.1.** Spații topologice
- **1.2.** Convergența într-un spațiu topologic
- **1.3.** Interiorul şi aderența unei mulțimi
- **1.4.** Puncte de acumulare
- **1.5.** Spații compacte
- **1.6.** Topologia unui spațiu metric
- **1.7.** Spații metrice complete
- **1.8.** Spații normate. Spații Banach.
- **1.9.** Aplicații

Capitolul 2. Şiruri şi serii de numere

- **2.1.** Şiruri de numere reale. Puncte limită. Convergență.
- **2.2.** Şiruri definite prin relații de recurență
- **2.3.** Aplicații
- **2.4.** Serii de numere. Criterii de convergență
- **2.5.** Serii cu termeni pozitivi. Criterii de convergență
- **2.6.** Serii absolut convergente. Serii alternante.
- **2.7.** Operații cu serii
- **2.8.** Aplicații

Capitolul 3. Limite de funcții şi continuitate

- **3.1.** Limite de funcții şi continuitatea în spații topologice
- **3.2.** Limite de funcții şi continuitatea în spații metrice
- **3.3.** Continuitatea uniformă
- **3.4.** Aplicații

Capitolul 4. Şiruri şi serii de funcții

- **4.1.** Şiruri de funcții
- **4.2.** Serii de funcții
- **4.3.** Aplicații
- **4.4.** Serii de puteri
- **4.5.** Aplicații

Capitolul 5. Funcții de mai multe variabile

- **5.1.** Funcții vectoriale. Limite. Continuitate.
- **5.2.** Derivate parțiale. Diferențiale
- **5.3.** Extreme libere
- **5.4.** Funcții implicite
- **5.5.** Extreme condiționate
- **5.6.** Aplicații

Capitolul 6. Schimbări de variabile. Aplicații

BIBLIOGRAFIE

1. **L.Aramă, T. Morozan**: *Culegere de probleme de calcul diferențial şi integral*, vol. I, Editura Tehnică, Bucureşti, 1967.

2. **M. Craiu, M. Roşculeț**: *Culegere de probleme de analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1976.

3. **S. Chiriță**: *Probleme de matematici superioare*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1989.

4. **N. Donciu, D. Flondor**: *Algebră şi analiză matematică*. Culegere de probleme, vol. I, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1978.

5. **I.P. Elianu**: *Principii de analiză matematică*. Calcul diferențial, Editura Academia Militară, Bucureşti, 1976.

6. **L.V. Kantorovici**, **G.P. Akilov**: *Analiză funcțională*, Editura Ştiințifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1986.

7. **Miron Nicolescu, N. Dinculeanu, S. Marcus**: *Manual de Analiză matematică*, vol. I, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1966.

8. **M. Nicolescu**: *Funcții reale şi elemente de topologie*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1968.

9. **E. Popescu**: *Analiză matematică. Structuri fundamentale*, Editura Academiei Tehnice Militare, Bucureşti, 1998.

10. **M. Roşculeț**: *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1973.

11. **M. Roşculeț**: *Culegere de probleme de analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1968.

Capitolul 1

SPAȚII TOPOLOGICE. SPAȚII METRICE

1.1 Spații topologice

Definiția 1.1.1. Fie o mulțime $X \neq \varnothing$ şi τ o familie de părți ale lui *X*.
τ se numeşte ***topologie*** pe *X* dacă:
1) $\varnothing, X \in \tau$;
2) $(\forall)(D_\alpha)_{\alpha\in A} \subset \tau \Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha\in A} D_\alpha \in \tau$;
3) $(\forall) D_i \in \tau,\ i = 1,\dots,n \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} D_i \in \tau$.

Perechea (X,τ) se numeşte ***spațiu topologic***.

Dacă τ_1, τ_2 sunt două topologii pe *X*, τ_2 este ***mai fină*** decât τ_1, dacă $\tau_1 \subset \tau_2$.

Exemple

1) Pentru orice mulțime *X*, perechea $(X, P(X))$, unde $P(X)$ este mulțimea părților lui *X*, este un spațiu topologic. Aceasta se numeşte ***topologia discretă*** pe *X*.

2) Familia $\tau = \{\varnothing, X\}$ constituie o topologie pe *X*, numită ***topologia grosieră.***

3) Pe R se consideră
$\tau_R = \{D \subset R \,/\, (\forall)\, x \in D, (\exists)\, r > 0, \text{astfel incat } (x - r, x + r) \subset D\} \cup \varnothing$.
(R, τ_R) este un spațiu topologic.

4) Pe $\overline{R}$ se consideră
$\tau_{\overline{R}} = \tau_R \cup \{D \cup (a,\infty], D \cup [-\infty, b), D \cup [-\infty, b) \cup (a, \infty] \,/\, D \in \tau_R,\ a, b \in R\}$.
$(\overline{R}, \tau_{\overline{R}})$ este un spațiu topologic.

5) Pe mulțimea C a numerelor complexe se consideră
$\tau_C = \{D \subset C \,/\, (\forall)\, a \in D, (\exists)\, r > 0 \text{ astfel incat } B(a, r) \subset D\} \cup \varnothing$, unde
$B(a, r) = \{z \in C \,/\, |z - a| < r\}$ este discul deschis centrat în *a* şi de rază *r*.
(C, τ_C) este un spațiu topologic.

Definiția 1.1.2. Fie (X,τ) un spațiu topologic. Elementele lui τ se numesc ***mulțimi deschise***.

Definiția 1.1.3. Fie (X,τ) un spațiu topologic. O mulțime $A \subset X$ se numeşte ***închisă***, dacă complementara sa este mulțime deschisă, adică $CA \in \tau$.

Exemplu

În spațiul topologic (R, τ_R) mulțimile $[a,b], [a,\infty), \{a\}$ unde a şi b sunt numere reale, sunt mulțimi închise.

Definiția 1.1.4. Fie (X, τ) un spațiu topologic, $x \in X$ şi $V \subset X$.

V este ***vecinătate a lui*** x, dacă există o mulțime deschisă $D \in \tau$, astfel încât $x \in D \subset V$.

Se notează cu V_x mulțimea tuturor vecinătăților lui x.

Teorema 1.1.5. Fie (X, τ) un spațiu topologic şi $W \subset X$.

Următoarele afirmații sunt echivalente:

a) $W \in \tau$;

b) $W \in V_x, (\forall) x \in W$.

Propoziția 1.1.6. Fie (X, τ) un spațiu topologic şi $x \in X$.

V_x are următoarele proprietăți:

a) $(\forall) V \in V_x$ şi $V \subset U \Rightarrow U \in V_x$;

b) $(\forall) V_i \in V_x \ (i = 1,...,n) \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} V_i \in V_x$;

c) $(\forall) V \in V_x \Rightarrow x \in V$;

d) $(\forall) V \in V_x \Rightarrow (\exists) W \in V_x$, cu $W \subset V$ astfel incat $W \in V_y, (\forall) y \in W$.

1.2 Convergența într-un spațiu topologic

Definiția 1.2.1. Fie (X, τ) un spațiu topologic. O aplicație $f : N \to X$, $f(n) = x_n$, $n \in N$ se numeşte ***şir de puncte*** ale spațiului şi se notează prin $(x_n)_{n \in N}$.

Dacă x_n sunt numere reale, şirul $(x_n)_{n \in N}$ se numeşte ***şir de numere reale***.

Definiția 1.2.2. Fie (X, τ) un spațiu topologic. Spunem că şirul $(x_n)_{n \in N}$ de elemente din X ***converge*** la $x \in X$, dacă oricare ar fi V o vecinătate a lui x, există un rang $n_V \in N$, astfel încât $x_n \in V, \quad (\forall) n \ge n_V$.

Notație: $\lim_{n \to \infty} x_n = x$.

Observație. În mulțimea R a numerelor reale, dacă un şir de numere este convergent, limita sa este unică. Într-un spațiu topologic oarecare, limita unui şir, în general, nu este unică.

Exemplu

Fie X o mulțime infinită, nenumărabilă şi $\tau = \{G \,/\, X \setminus G \text{ este finita}\} \cup \{\varnothing\}$

În spațiul topologic (X, τ) orice şir $(x_n)_{n \in N}$, cu termenii diferiți doi câte doi, este convergent către orice punct x al spațiului, deci are o infinitate de limite.

Spațiile topologice în care este asigurată unicitatea limitei sunt ***spațiile topologice separate (Hausdorff)***.

Definiția 1.2.3. Un spațiu topologic (X, τ) se numeşte ***spațiu topologic separat (Hausdorff)*** dacă pentru $(\forall)\, x, y \in X$, cu $x \neq y$, există $U \in V_x$ şi $V \in V_y$ cu $U \cap V = \varnothing$.

Exemple

1) (R, τ_R) este spațiu topologic separat.

2) (C, τ_C) este spațiu topologic separat.

Propoziția 1.2.4. Într-un spațiu topologic separat limita unui şir convergent este unică.

Propoziția 1.2.5. Într-un spațiu topologic separat mulțimile formate dintr-un singur punct sunt mulțimi închise.

Corolar 1.2.6. Într-un spațiu topologic separat mulțimile finite sunt mulțimi închise.

Definiția 1.2.7. Fie (X, τ) un spațiu topologic, $x \in X$ şi mulțimea $U \subset V_x$. U se numeşte ***sistem fundamental de vecinătăți*** ale lui x, dacă pentru orice vecinătate $V \in V_x$ există $\mathrm{U} \in U$ astfel încât $\mathrm{U} \subset V$.

Exemple

1) În spațiul topologic (R, τ_R), familia $U_x = \{(x - r, x + r) / r > 0\}$ este un sistem fundamental de vecinătăți ale lui *x*.

2) În spațiul topologic (R, τ_R), familia $U_x = \left\{ \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right) / n \in N^* \right\}$ este un sistem fundamental numărabil de vecinătăți ale lui *x*.

3) În spațiul topologic (C, τ_C), familia $U_z = \{B(z, r) / r > 0\}$ este un sistem fundamental de vecinătăți ale lui *z*.

4) În spațiul topologic (C, τ_C), familia $U_z = \left\{ B\left(z, \frac{1}{n} \right) / n \geq 1 \right\}$ este un sistem fundamental numărabil de vecinătăți ale lui *z*.

Teorema 1.2.8. Fie (X, τ) un spațiu topologic, şirul $(x_n)_{n \in N}$ de elemente din *X*, $x \in X$ şi U_x un sistem fundamental de vecinătăți ale lui *x*.

Următoarele afirmații sunt echivalente:

1) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$;

2) $(\forall) U \in U_x \Rightarrow (\exists) n_U \in N$ cu $x_n \in U, (\forall) n \geq n_U$.

Corolar 1.2.9. Fie şirul de numere reale $(x_n)_{n\in N}$ şi $x \in R$.
Următoarele afirmații sunt echivalente:

1) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$;

2) $(\forall) \varepsilon > 0 \Rightarrow (\exists) n_\varepsilon \in N$ cu proprietatea $|x_n - x| < \varepsilon, \ (\forall) n \geq n_\varepsilon$.

Corolar 1.2.10. Fie şirul $(z_n)_{n\in N}$ de numere complexe şi $z \in C$.
Următoarele afirmații sunt echivalente:

1) $\lim_{n\to\infty} z_n = z$;

2) $(\forall) \varepsilon > 0 \Rightarrow (\exists) n_\varepsilon \in N$ cu proprietatea $|z_n - z| < \varepsilon, \ (\forall) n \geq n_\varepsilon$.

1.3 Interiorul şi aderența unei mulțimi

Definiția 1.3.1. Fie (X, τ) un spațiu topologic, $A \subset X$ şi un punct $x \in X$. x se numeşte ***punct interior*** al lui A, dacă mulțimea A este vecinătate pentru x, adică $A \in V_x$.

Se notează cu $\overset{\circ}{A} = \{x \in X \ / \ x \text{ este punct interior al lui } A\}$.

Mulțimea $\overset{\circ}{A}$ se numeşte ***interiorul*** lui *A*.

Exemplu

Fie spațiul topologic (R, τ_R) şi $A = [a, b], \quad a, b \in R, \quad a < b$.

Atunci $\overset{\circ}{A} = (a, b)$.

Propoziția 1.3.2. Fie (X, τ) un spațiu topologic şi $A \subset X$.

$\overset{\circ}{A}$ are următoarele proprietăți:

a) $\overset{\circ}{A} \subset A$;

b) $A \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$;

c) $\left(\overset{\circ}{A \cap B} \right) = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$;

d) A este mulțime deschisă dacă şi numai dacă $A = \overset{\circ}{A}$;

e) $\overset{\circ}{A} = \cup\{D / D \in \tau,\ D \subset A\}$, adică interiorul lui A este cea mai mare mulțime deschisă conținută în A.

Definiția 1.3.3. Fie (X, τ) un spațiu topologic, $A \subset X$ şi un punct $x \in X$. x se numeşte ***punct aderent*** al lui A, dacă pentru orice vecinătate $V \in V_x \Rightarrow V \cap A \neq \emptyset$.

Se notează cu $\overline{A} = \{x \in X \ / \ x \text{ este punct aderent al lui } A\}$.

Mulțimea $\overline{A}$ se numeşte ***aderența***, sau ***închiderea*** lui A.

Exemplu

Fie spațiul topologic (R, τ_R) şi $A = (a, b)$, $\quad a, b \in R, \quad a < b$.
Atunci $\overline{A} = [a, b]$.

Propoziția 1.3.4. Fie (X, τ) un spațiu topologic şi $A \subset X$.

$\overline{A}$ are următoarele proprietăți:

a) $A \subset \overline{A}$;

b) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$;

c) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Teorema 1.3.5. Fie (X, τ) un spațiu topologic şi $A \subset X$.

A este mulțime închisă, dacă şi numai dacă $A = \overline{A}$.

Propoziția 1.3.6. Fie (X, τ) un spațiu topologic şi $A \subset X$.
Atunci $\overline{A} = \cap\{F / F = \overline{F}, \quad A \subset F\}$, adică aderența lui A este cea mai mică mulțime închisă care o include pe A.

Definiția 1.3.7. Fie (X, τ) un spațiu topologic şi $A \subset X$. Mulțimea $Fr(A) = \overline{A} \cap \left(\overline{X \setminus A} \right)$ se numeşte ***frontiera*** lui A.

Exemplu. Fie spațiul topologic (R, τ_R). Frontiera lui $[a, b]$ este $\{a, b\}$.

1.4 Puncte de acumulare

Definiția 1.4.1. Fie (X, τ) un spațiu topologic şi $A \subset X$. Un punct $x \in X$ se numeşte ***punct de acumulare*** al mulțimii A, dacă pentru orice vecinătate $V \in V_x \Rightarrow (V \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.

Se notează cu $A' = \{x \in X \ / \ x$ este punct de acumulare al lui $A\}$.

Propoziția 1.4.2. Fie (X, τ) un spațiu topologic şi $A \subset X$.
A' are următoarele proprietăți:
a) $A' \subset \overline{A}$;
b) $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$;
c) $(A \cup B)' = A' \cup B'$;
d) $\overline{A} = A \cup A'$.

Propoziția 1.4.3. Fie (X, τ) un spațiu topologic, $A \subset X$ şi $x \in X$.
Sunt echivalente afirmațiile:
a) $x \in A'$;
b) $(\exists)(x_n)_{n \in N}$ un şir de elemente distincte din *A*, cu $x_n \neq x, (\forall) n \in N$, astfel încât $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$.

1.5 Spații compacte

Definiția 1.5.1. Fie (X, τ_X) un spațiu topologic şi $A \subset X$. O familie de părți ale lui *X*, $(D_i)_{i \in I}$ se numeşte ***acoperire*** a lui *A* dacă $A \subset \bigcup\limits_{i \in I} D_i$.

Dacă $D_i \in \tau_X, (\forall) i \in I$, atunci acoperirea se numeşte ***deschisă***.

Se spune că din acoperirea $(D_i)_{i \in I}$ se poate extrage o ***subacoperire finită***, dacă există un număr finit de mulțimi $D_{i_1}, D_{i_2}, ..., D_{i_n}$, astfel încât $A \subset D_{i_1} \cup D_{i_2} \cup ... \cup D_{i_n}$.

Definiția 1.5.2. Un spațiu topologic separat (X, τ_X) se numeşte ***compact***, dacă din orice acoperire deschisă a lui *X* se poate extrage o subacoperire finită.

Exemplu
Spațiul topologic (R, τ_R) nu este compact, deoarece din acoperirea deschisă $\{(-n, n)\}_{n \in N}$ nu se poate extrage o subacoperire deschisă.

Definiția 1.5.3. Fie (X, τ) un spațiu topologic separat. O ***mulțime*** $K \subset X$ se numeşte ***compactă***, dacă spațiul $(K, \tau|K)$ este compact.

Teorema Borel-Lebesgue. Orice mulțime închisă şi mărginită $K \subset R$ este compactă.

Observații

1) Orice mulțime finită dintr-un spațiu topologic separat este compactă.

2) O submulțime a unui spațiu topologic compact nu este totdeauna compactă. De exemplu, $X = [a,b]$ este compact, dar (a,b) nu este compact.

Teorema 1.5.4. Fie (X, τ) un spațiu topologic separat şi o mulțime $K \subset X$. Atunci sunt echivalente următoarele afirmații:

1) *K* este compactă;

2) Din orice acoperire deschisă a lui *K* se poate extrage o subacoperire finită.

Definiția 1.5.5. Un spațiu topologic (X, τ) se numeşte ***local compact*** dacă orice punct din *X* are o vecinătate compactă.

Exemple

1) Orice spațiu compact este local compact.

2) (R, τ_R) nu este compact, dar este local compact, deoarece orice punct $x \in R$ este punct interior unui interval $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ $\varepsilon > 0$, care este o mulțime compactă.

Teorema 1.5.6. Fie $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ două spații topologice separate, $f : X \to Y$ şi *K* o mulțime compactă din *X*.

Atunci $f(K)$ este compactă în *Y*.

Teorema 1.5.7. Fie (X, τ_X) un spațiu topologic separat, *K* o mulțime compactă din *X* şi $f : K \to R$. Atunci *f* este mărginită şi îşi atinge marginile.

1.6 Topologia unui spațiu metric

Definiția 1.6.1. Fie *X* o mulțime nevidă. O funcție $d : X \times X \to R$ se numeşte ***distanță*** (***metrică***) pe X dacă:

1) $d(x, y) > 0$ pentru $x \neq y$; $d(x, x) = 0, (\forall) x \in X$ (***pozitivitatea***);

2) $d(x, y) = d(y, x)$ $(\forall) x, y \in X$ (***simetria***);

3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ $(\forall) x, y, z \in X$ (***inegalitatea triunghiului***).

Definiția 1.6.2. Perechea (X, d) formată din mulțimea nevidă *X* şi distanța *d* se numeşte ***spațiu metric***.

Elementele din *X* se numesc ***puncte***, iar $d(x, y)$ este ***distanța de la** x **la** y*.

Exemple

1) (R,d) unde $d: R\times R\to R,\ d(x,y)=|x-y|$ este spațiu metric.

2) (C,d) unde $d: C\times C\to R,\quad d(z_1-z_2)=|z_1-z_2|$ este spațiu metric.

3) (R^n,d) unde $d: R^n\times R^n\to R,\quad d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$ pentru $x=(x_1,x_2,...,x_n),\ y=(y_1,y_2,...,y_n)$ este spațiu metric.

Definiția 1.6.3. Fie (X,d) un spațiu metric.

Mulțimea $B(x,r)=\{y\in X\ /\ d(x,y)<r\}\quad (r>0)$ se numeşte ***bila deschisă de centru*** x ***şi de rază*** r.

Mulțimea $B'(x,r)=\{y\in X\ /\ d(x,y)\le r\}\quad (r>0)$ se numeşte ***bila închisă de centru*** x ***şi de rază*** r.

Exemple

1) Fie (R,d) unde $d: R\times R\to R,\ d(x,y)=|x-y|$.
Atunci $B(x,r)=(x-r,\ x+r)$, adică bila deschisă de centru x şi rază r coincide cu intervalul deschis $(x-r,\ x+r)$.

2) Fie (R^2,d) unde $d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$. Atunci bila deschisă de centru x şi rază r coincide cu mulțimea punctelor din discul cu centrul în $x=(x_1,x_2)$ şi de rază r, fără circumferința sa.

3) Fie (R^3,d) unde $d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}$. Atunci bila deschisă de centru x şi rază r coincide cu interiorul sferei centrate în $x=(x_1,x_2,x_3)$ şi de rază r.

Propoziția 1.6.4. Orice spațiu metric este un spațiu topologic.

Propoziția 1.6.5. Bila deschisă este o mulțime deschisă, iar bila închisă este o mulțime inchisă.

Propoziția 1.6.6. 1) Orice spațiu metric este un spațiu topologic separat.

2) Limita unui şir convergent într-un spațiu metric este unică.

Teorema 1.6.7. Fie (X,d) un spațiu metric, $(x_n)_{n\in N}$ un şir de puncte din X şi $x\in X$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1) $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$;

2) pentru orice $\varepsilon>0$ există $n_\varepsilon\in N$ astfel încât $d(x_n,x)<\varepsilon$ oricare ar fi $n\ge n_\varepsilon$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$.

Propoziția 1.6.8. Fie (X, d) un spațiu metric, $(x_n)_{n\in N}$ un şir de puncte din X şi $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Atunci orice subşir al şirului $(x_n)_{n\in N}$ este convergent şi are limita x.

Definiția 1.6.9. Fie (X, d) un spațiu metric şi $A \subset X$. Mulțimea A se numeşte ***mărginită*** dacă există $x_0 \in X$ şi $r > 0$ astfel încât $A \subset B(x_0, r)$.

Propoziția 1.6.10. Într-un spațiu metric orice şir convergent este mărginit.

1.7 Spații metrice complete

Definiția 1.7.1. Fie (X, d) un spațiu metric. Un şir $(x_n)_{n\in N}$ din X se numeşte ***şir Cauchy*** dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in N$ astfel încât $d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad (\forall)\, n, m \geq n_\varepsilon$.

Propoziția 1.7.2. Fie (X, d) un spațiu metric. Atunci au loc următoarele afirmații:

1) Orice şir convergent $(x_n)_{n\in N}$ din X este şir Cauchy;

2) Orice şir Cauchy este mărginit;

3) Dacă şirul $(x_n)_{n\in N}$ conține un subşir convergent la x, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Definiția 1.7.3. Spațiul metric (X, d) se numeşte ***complet*** dacă orice şir Cauchy din (X, d) este convergent.

Exemple

1) (R, d) unde $d : R \times R \to R,\ d(x, y) = |x - y|$ este spațiu metric complet.

2) (R^n, d) unde $d : R^n \times R^n \to R,\quad d(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ este spațiu metric complet.

Principiul contracției. Fie (X, d) un spațiu metric complet şi $T : X \to X$ o aplicație cu proprietatea:

$d(T(x), T(y)) \leq c \cdot d(x, y), \quad (\forall)\, x, y \in X$, unde $c \in R,\ 0 \leq c < 1$.

Atunci ecuația $T(x) = x$ are soluție unică, care se poate obține iterativ:

$x_{n+1} = T(x_n), \quad n \in N$, cu $x_0 \in X$ dat.

Definiția 1.7.4. O funcție $T : X \to X$ cu proprietatea că există $0 \le c < 1$ astfel încât $d(T(x), T(y)) \le c \cdot d(x, y), \quad (\forall)\, x, y \in X$ se numește ***contracție de coeficient*** c.

Soluția dată de procesul iterativ $x_{n+1} = T(x_n), \quad n \in N$, cu $x_0 \in X$ dat se numește ***punct fix*** pentru funcția *T*.

1.8 Spații normate. Spații Banach

Definiția 1.8.1. Fie *X* un *K*-spațiu vectorial (*K* este *R*, sau *C*). O aplicație $\| \cdot \| : X \to R$ se numește ***normă*** pe X dacă:

1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad (\forall)\, x \in X$;

2) $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \quad (\forall)(\alpha, x) \in K \times X$;

3) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\| \quad (\forall)(x, y) \in X \times X$.

Perechea $(X, \| \cdot \|)$ se numește ***spațiu normat***. Numărul $\|x\|$ se citește ***norma lui*** *x*.

Dacă corpul *K* este corpul numerelor reale, spațiul $(X, \| \cdot \|)$ se va numi ***spațiu normat real***.

Dacă corpul *K* este corpul numerelor complexe, spațiul $(X, \| \cdot \|)$ se va numi ***spațiu normat complex***.

Observația 1.8.2. Fie $(X, \| \cdot \|)$ un spațiu normat. Aplicația $d : X \times X \to R$ definită prin $d(x, y) = \|x - y\| \quad (\forall)(x, y) \in X \times X$ este o ***distanță*** pe *X*, de unde rezultă că orice spațiu normat este spațiu metric. Reciproca nu este adevărată. De exemplu, Q este spațiu metric relativ la distanța euclidiană, dar nu este spațiu normat (nu este nici spațiu vectorial).

Exemple

1) Pentru orice $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in K^n, \quad (K = R, K = C)$ definim:

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}; \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|; \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|.$$

$(K^n, \| \cdot \|_2), (K^n, \| \cdot \|_1), (K^n, \| \cdot \|_\infty)$ sunt spații normate.

2) Fie A o mulțime nevidă și $B(A)$ mulțimea funcțiilor mărginite $f : A \to R$. Atunci $(B(A), \|\cdot\|)$ unde $\|f\| = \sup\limits_{x \in A} |f(x)|$ este spațiu normat real, iar norma definită astfel se numeşte ***norma uniformă***.

Definiția 1.8.3. Un spațiu normat care este metric complet relativ la distanța din Observația 1.8.2 se numeşte ***spațiu Banach***.

Exemple

1) R^n este un spațiu Banach relativ la norma euclidiană:

$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}, \quad (\forall)\, x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$.

2) Fie m mulțimea şirurilor mărginite de numere reale. Pentru orice $x = (x_n)_{n \in N}$, $x \in m$ aplicația $\|x\| = \sup\limits_{n \in N} |x_n|$ este o normă pe m şi cu aceasta m devine un spațiu Banach.

3) Fie c mulțimea şirurilor convergente de numere reale. Pentru orice $x = (x_n)_{n \in N}$, $x \in c$ aplicația $\|x\| = \sup\limits_{n \in N} |x_n|$ este o normă pe c şi cu aceasta c devine un spațiu Banach.

Definiția 1.8.4. Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spațiu normat şi $a \in X$.

Mulțimea $B(a,r) = \{x \in X \,/\, \|x - a\| < r\}$ $(r > 0)$ se numeşte ***bila deschisă de centru** a **şi rază** r*.

Mulțimea $B'(a,r) = \{x \in X \,/\, \|x - a\| \le r\}$ $(r > 0)$ se numeşte ***bila închisă de centru** a **şi rază** r*.

Observația 1.8.5

Topologia asociată normei $\|\cdot\|$ este:

$\tau_{\|\cdot\|} = \{D \subset X \,/\, (\forall)\, x \in D,\ (\exists)\, r > 0$ pentru care $B(x,r) \subset D\} \cup \{\varnothing\}$.

$(X, \tau_{\|\cdot\|})$ este un spațiu topologic, în care se poate defini noțiunea de ***convergenț a unui şir.***

Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spațiu normat, $(x_n)_{n \in N}$ un şir din X şi $a \in X$.

Atunci $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \Leftrightarrow (\forall)\, \varepsilon > 0,\ (\exists)\, n_\varepsilon \in N$ astfel încât $\|x_n - a\| < \varepsilon$ pentru $(\forall)\, n \ge n_\varepsilon$.

Observația 1.8.6

Într-un spațiu normat are sens noțiunea de serie convergentă.

Definiția 1.8.7. Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spațiu normat şi $(x_n)_{n\in N}$ un şir de elemente din *X*. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ se numeşte ***convergentă în X cu suma s***, dacă ***şirul sumelor parțiale*** $(s_n)_{n\in N}$ unde $s_n = x_1 + x_2 + ... + x_n$, $(\forall)\, n \in N^*$, este convergent în *X* şi are limita *s*, adică $\lim_{n\to\infty} \|x_1 + x_2 + ... + x_n - s\| = 0$.

Definiția 1.8.8. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ se numeşte ***absolut convergentă***, dacă seria de numere reale şi pozitive $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ este convergentă.

Teorema 1.8.9. Într-un sațiu Banach orice serie absolut convergentă este convergentă.

Teorema 1.8.10. Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ în spațiul normat $(X, \|\cdot\|)$ şi seria de numere pozitive $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ convergentă, astfel încât există un rang $n_0 \in N$ cu proprietatea $\|x_n\| \le \alpha_n \quad (\forall)\, n \ge n_0$.

Atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă în *X*.

1.9 Aplicații

$\boxed{\textbf{1.9.1}}$ Fie $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Să se arate care din familiile următoare de părți ale lui *X* este topologie pe *X*:

$\tau_1 = \{\emptyset, X, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}\}$;

$\tau_2 = \{\emptyset, X, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$;

$\tau_3 = \{\emptyset, X, \{2, 3\}, \{3\}, \{3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}\}$.

Indicație de rezolvare

τ_1 nu este topologie pe *X*, deoarece $\{1, 2\}, \{1, 3\} \in \tau_1$, dar $\{1, 2\} \cup \{1, 3\} = \{1, 2, 3\} \notin \tau_1$.

τ_2 nu este topologie pe *X*, deoarece $\{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\} \in \tau_2$, dar intersecția lor $\{1, 2, 4\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2, 4\} \notin \tau_2$.

Pentru τ_3 se verifică toate condițiile din definiția topologiei, deci este o topologie pe *X*.

1.9.2 Să se arate că intersecția unei familii infinite de mulțimi deschise nu este întotdeauna mulțime deschisă.

Indicație de rezolvare

Se consideră familia de mulțimi deschise $(A_n)_{n\in N^*}$, pentru care $A_n = \left(-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right)$, $(\forall)\, n \in N^*$. Atunci $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$, care este o mulțime închisă.

1.9.3 Să se arate că reuniunea unei familii infinite de mulțimi închise nu este întotdeauna mulțime închisă.

Indicație de rezolvare

Se consideră familia de mulțimi închise $(A_n)_{n\in N^*}$, pentru care $A_n = \left[\dfrac{1}{n}, 1\right]$, $(\forall)\, n \in N^*$. Atunci   care nu este o mulțime închisă.

1.9.4 Dacă *A* este o mulțime deschisă, să se arate că $A \subset \mathring{\overline{A}}$.

Indicație de rezolvare

Mulțimea *A* este deschisă, dacă şi numai dacă $A = \mathring{A}$.

Cum $A \subset \overline{A} \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{\overline{A}} \Leftrightarrow A \subset \mathring{\overline{A}}$.

1.9.5 Dacă *A* este o mulțime închisă, să se arate că $\overline{\mathring{A}} \subset A$.

Indicație de rezolvare

Mulțimea *A* este închisă, dacă şi numai dacă $A = \overline{A}$.

Cum $\mathring{A} \subset A \Rightarrow \overline{\mathring{A}} \subset \overline{A} \Rightarrow \overline{\mathring{A}} \subset A$.

1.9.6 Fie $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, pe care se consideră topologia următoare: $\tau = \{\varnothing, X, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$.

a) Să se determine punctele interioare mulțimii $A \subset X$, $A = \{1, 2, 3\}$;

b) Să se determine punctele exterioare ale lui *A*;

c) Să se determine punctele frontieră ale lui *A*;

d) Să se determine punctele de acumulare pentru mulțimile $B = \{3, 4, 5\}$ şi $C = \{2\}$ din *X*.

Indicație de rezolvare

a) $1 \in \{1, 2\} \subset A, \quad 2 \in \{1, 2\} \subset A \Rightarrow 1 \in \overset{\circ}{A}, \quad 2 \in \overset{\circ}{A}$.

3 nu este punct interior al lui *A*, deoarece el nu aparține nici unei mulțimi deschise, inclusă în *A*;

b) Punctele exterioare lui *A* sunt punctele interioare ale mulțimii complementare lui *A*.

$CA = \{4, 5\} \Rightarrow \left(\overset{\circ}{CA}\right) = \varnothing$, deci nu există puncte exterioare lui *A*;

c) $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{CA} = \{3, 4, 5\}$;

d) $B' = \{3, 4\}, \quad C' = \{5\}$.

$\boxed{\textbf{1.9.7}}$ Fie $A = \left\{1, \frac{1}{2}, .., \frac{1}{n}, ...\right\}$. Să se determine mulțimea punctelor de acumulare A'.

Indicație de rezolvare

Se demonstrează că $0 \in A'$, adică pentru orice vecinătate *V* a lui 0, se verifică $(V \setminus \{0\}) \cap A \neq \varnothing$.

Fie $n_0 \in N^*$ arbitrar şi vecinătatea $V = \left(-\frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0}\right) \in V_0$.

Rezultă că $\left[\left(-\frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0}\right) \setminus \{0\}\right] \cap A \neq \varnothing$, deoarece $\frac{1}{n_0 + 1}$ aparține intersecției.

Se arată că nu mai există nici un punct de acumulare pentru mulțimea *A*.

Fie $x_0 \in A, \quad x_0 \neq 0 \Rightarrow (\exists)\, n_0 \in N^*$ astfel ca $x_0 = \frac{1}{n_0}$. Se consideră vecinătatea punctului x_0, de forma $V = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), \quad \varepsilon = \frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_0 + 1}$.

Rezultă $(V \setminus \{x_0\}) \cap A = \varnothing$, deci x_0 nu este punct de acumulare.

Astfel, $A' = \{0\}$.

$\boxed{\textbf{1.9.8}}$ Fie mulțimea $A = \left\{x \in R \,/\, x = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}; \quad n, m \in N^*\right\}$. Să se determine mulțimea A'.

Indicație de rezolvare

Se consideră mulțimile

$$A_n = \left\{ x \in R \,/\, x = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}, \quad (\forall)\, m \in N^* \right\}, \quad (\forall)\, n \in N^*.$$

Atunci $A_n \subset A \Rightarrow A_n{}' \subset A'$. Cum $A_n{}' = \left\{ \frac{1}{n} \right\}$, rezultă că mulțimea $B = \left\{ 0, 1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, ... \right\} \subseteq A'$. Se demonstrează incluziunea inversă, adică $A' \subseteq B$. Pentru aceasta, fie un punct $x_0 \in A' \Rightarrow (\exists)(x_n)_n \subset A, \quad x_n \neq x_0$, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Cum $x_n \in A \Rightarrow x_n = y_n + z_n$. Fie $z = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$ şi $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Rezultă că $x_0 = y + z$. Dacă $y = z = 0 \Rightarrow x_0 = 0 \in B$. Dacă $y \neq 0 \Rightarrow (y_n)_n$ este un şir staționar şi $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z = 0$, deci $x_0 = y \in B$.

Rezultă, astfel că $A' = B$.

$\boxed{1.9.9}$ **a)** Fie $A = \left\{ \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, ..., \frac{2^n - 1}{2^n}, \quad n \in N \right\}$. Să se demonstreze că $\overline{A} = [0,1]$;

b) Fie mulțimile $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{20}, \frac{1}{n} + \frac{1}{20} \right), \quad B_1 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{20}, \frac{1}{n} + \frac{1}{20} \right]$. Să se calculeze $B, B_1, \overline{B}$.

Indicații de rezolvare

a) $A \subset [0,1] \Rightarrow \overline{A} \subset [0,1]$. Pentru a demonstra incluziunea inversă, se consideră un punct $x \in [0,1] = \bigcup\limits_{l=0}^{2^n - 1} \left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n} \right] \Rightarrow (\exists)\, x \in \left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n} \right]$

Prin urmare, pentru orice vecinătate $V = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, $\varepsilon > \frac{1}{2^n}$, rezultă $V \cap A \neq \varnothing$ şi deci $\overline{A} = [0,1]$.

b)

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \quad \text{unde } I_n = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{20}, \frac{1}{n} + \frac{1}{20} \right), \quad I_1 = \left(\frac{19}{20}, \frac{21}{20} \right), \quad I_2 = \left(\frac{9}{20}, \frac{11}{20} \right).$$

Se arată că $B = I_1 \cup I_2 \cup \left(-\frac{1}{20}, \frac{23}{60} \right) \Rightarrow \overline{B} = \left[\frac{19}{20}, \frac{21}{20} \right] \cup \left[\frac{9}{20}, \frac{11}{20} \right] \cup \left[-\frac{1}{20}, \frac{23}{60} \right]$

$$B_1=\left[\frac{19}{20},\frac{21}{20}\right]\cup\left[\frac{9}{20},\frac{11}{20}\right]\cup\left(-\frac{1}{20},\frac{23}{60}\right].$$

$\boxed{\textbf{1.9.10}}$ Să se demonstreze că mulțimea $A=(0,1)\cap Q$ nu este compactă.

Indicație de rezolvare

Presupunând, prin reducere la absurd, că A este compactă, rezultă că din orice acoperire deschisă a sa, se poate extrage o subacoperire finită.

Fie $A\subset \bigcup\limits_{n\in N^*} D_n$, unde $D_n=\left(\frac{1}{n},1\right)$, $(\forall)\, n\in N^*$.

Fie $n_1<n_2<\ldots<n_k \Rightarrow A\subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} D_{n_i}$, unde $D_{n_1}\subset D_{n_2}\subset\ldots\subset D_{n_k}$.

Rezultă că $A\subset D_{n_k} \Rightarrow A\subset\left(\frac{1}{n_k},1\right)$, ceea ce este fals, deoarece $\frac{1}{n_k+1}\in A$, dar $\frac{1}{n_k+1}\notin\left(\frac{1}{n_k},1\right)$. Deci, presupunerea făcută este falsă şi A nu este compactă.

$\boxed{\textbf{1.9.11}}$ Să se arate că (R,d) unde $d: R\times R\to R$, $d(x,y)=\frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ este un spațiu metric.

Indicație de rezolvare

Se verifică imediat că $d(x,y)>0$ pentru $x\neq y$; $d(x,x)=0\quad(\forall)\, x\in R$ şi că $d(x,y)=d(y,x)$, $(\forall)\, x,y\in R$.

Pentru a demonstra inegalitatea triunghiului se utilizează inegalitatea:

$\frac{|\alpha+\beta|}{1+|\alpha+\beta|}\leq\frac{|\alpha|+|\beta|}{1+|\alpha|+|\beta|}\leq\frac{|\alpha|}{1+|\alpha|}+\frac{|\beta|}{1+|\beta|}$, inegalitate ce se obține din faptul că funcția $\varphi(\lambda)=\frac{\lambda}{1+\lambda}$ este crescătoare pentru $\lambda\geq 0$.

Rezultă că

$$d(x,z)=\frac{|x-z|}{1+|x-z|}=\frac{|(x-y)+(y-z)|}{1+|(x-y)+(y-z)|}\leq\frac{|x-y|}{1+|x-y|}+\frac{|y-z|}{1+|y-z|}=d(x,y)+d(y,z)$$

$\boxed{\mathbf{1.9.12}}$ Fie s mulțimea șirurilor de numere reale. Să se arate că aplicația $d : s \times s \to R,\quad d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$ este o distanță, dar aplicația $d_k : s \times s \to R,\quad d_k(x,y) = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$ $\quad k \geq 1$ fixat nu este o distanță.

Indicație de rezolvare

Pentru aplicația d se verifică condițiile distanței, iar pentru d_k se arată că $d_k(x,y) = 0$ pentru $x \neq y$.

$\boxed{\mathbf{1.9.13}}$ Să se arate că mulțimea $L^2([a,b])$ a funcțiilor continue $f : [a,b] \to R$ este un spațiu normat relativ la:

$$\| f \| = \left(\int_a^b | f(t) |^2 \,\mathrm{d}t \right)^{1/2} .$$

Indicație de rezolvare

Condițiile 1) și 2) se verifică imediat. Pentru condiția 3) se utilizează inegalitatea

$$\left(\int_a^b [\lambda \cdot | f(t) | + g(t)]^2 \,\mathrm{d}t \right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\int_a^b | f(t) |^2 \,\mathrm{d}t \right) \cdot \lambda^2 + 2 \cdot \left(\int_a^b | f(t) \| g(t) | \,\mathrm{d}t \right) \cdot \lambda + \left(\int_a^b | g(t) |^2 \,\mathrm{d}t \right) \geq 0$$

Ținând seama de semnul trinomului de gradul doi, rezultă că discriminantul $\Delta \leq 0$, adică:

$\left(\int_a^b | f(f) g(t) | \,\mathrm{d}t \right)^2 - \left(\int_a^b | f(t) |^2 \,\mathrm{d}t \right) \cdot \left(\int_a^b | g(t) |^2 \,\mathrm{d}t \right) \leq 0$. Extrăgând radicalul, se va obține imediat condiția 3) din definiția normei.

Capitolul 2

ŞIRURI ŞI SERII DE NUMERE

2.1 Şiruri de numere reale. Puncte limită. Convergenţă

Definiţia 2.1.1. Fie şirul $(x_n)_{n\in N}$ de numere reale. Un număr real a se numeşte ***punct limită*** al şirului considerat, dacă în orice vecinătate a sa, se află o infinitate de termeni ai şirului.

Notându-se cu A mulţimea punctelor limită pentru şirul $(x_n)_{n\in N}$, marginea superioară a mulţimii A se va numi ***limita superioară*** a şirului, iar marginea inferioară a mulţimii A, se va numi ***limita inferioară*** a şirului considerat.

Se va scrie: $L = \sup(A) = \limsup\limits_{n\to\infty}(x_n)$ şi $\ell = \liminf\limits_{n\to\infty}(x_n)$.

Exemple

1) Şirul cu termenul general $x_n = \sin\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$, $n \in N$ are ca puncte limită pe $-1, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1$ şi deci $L = 1$ şi $\ell = -1$.

2) Şirul cu termenul general $x_n = \dfrac{1}{n}$, $n \in N^*$ va avea $L = \ell = 0$.

Definiţia 2.1.2. Şirul $(x_n)_{n\in N}$ se numeşte ***convergent***, dacă există un număr x, astfel încât pentru $(\forall)\,\varepsilon > 0$, $(\exists)\,n(\varepsilon) \in N$, astfel încât pentru $(\forall)\,n \geq n(\varepsilon)$ să se verifice $|x_n - x| < \varepsilon$.

Numărul real x cu proprietatea de mai sus, se numeşte ***limita şirului*** $(x_n)_{n\in N}$ şi se va scrie $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = x$.

Dacă un şir $(x_n)_{n\in N}$ este convergent, atunci $L = \ell$.

Definiţia 2.1.3. Un şir care are limita infinită, sau un şir pentru care cele două limite, inferioară şi superioară sunt diferite, se numeşte ***şir divergent***.

Teorema lui Weierstrass. Orice şir monoton şi mărginit este convergent.

Teorema Töplitz. Fie o matrice infinită de numere reale $A = (a_{mn})_{(m,n)\in N^*\times N^*}$ cu proprietatea că există $M \in R_+^*$ astfel încât:

$|a_{k1}| + |a_{k2}| + \ldots + |a_{km}| + \ldots \leq M$, $(\forall)\,k \in N^*$.

Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1) Pentru orice şir convergent de numere reale $(x_n)_n$ şirul $(y_n)_n$ definit prin $y_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \cdot x_k$ este convergent şi $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} x_n$;

2) (i) $\lim_{n\to\infty} a_{nm} = 0, \quad (\forall)\, m \in N^*$;

(ii) $\lim_{n\to\infty} (a_{n1} + a_{n2} + ... + a_{nm} + ...) = 1$.

Consecinţa 1. Dacă în Teorema Töplitz se modifică 2.(ii) în $(\exists) \lim_{n\to\infty} \sum_{m\geq 1} a_{nm} = \ell < \infty$, atunci afirmaţia 1) devine $(\exists) \lim_{n\to\infty} y_n = \ell \cdot \lim_{n\to\infty} x_n$.

Teorema Cesaro-Stolz. Fie şirul $(a_n)_{n\in N}$ oarecare şi $(b_n)_{n\in N}$ monoton crescător de numere pozitive, cu $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. Atunci, dacă există $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \ell$, va exista şi $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ şi cele două limite vor avea aceeaşi valoare.

Indicaţie de rezolvare

Se aplică Teorema Töplitz şirului $(x_n)_n, \quad x_n = \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$, iar şirul dublu $(A_{nm})_{n,m\in N}, \quad A_{nk} = \frac{b_k - b_{k-1}}{b_n}, \quad k \leq n$ şi $A_{nk} = 0, \quad k > n$.

În aceste condiţii $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{b_1 - b_0}{b_n} \cdot x_1 + ... + \frac{b_n - b_{n-1}}{b_n} \cdot x_n \right) = \lim_{n\to\infty} x_n = \ell$.

De asemenea, $\frac{b_1 - b_0}{b_n} \cdot x_1 + ... + \frac{b_n - b_{n-1}}{b_n} \cdot x_n = \frac{a_n}{b_n}, \quad (\forall)\, n \in N^*$.

Consecinţa 2. Dacă $(a_n)_n, \quad (b_n)_n$ sunt două şiruri de numere reale cu proprietăţile:

1) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k = \infty, \quad b_n \in R_+^*, \quad (\forall)\, n$;

2) $(\exists) \lim_{n\to\infty} a_n = a$;

Atunci $(\exists) \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 \cdot b_1 + ... + a_n \cdot b_n}{b_1 + ... + b_n} = a$.

Criteriul radicalului

Dacă şirul $(a_n)_n$ este convergent şi are termenii pozitivi, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Indicație de rezolvare

Se aplică teorema Cesaro-Stolz pentru şirurile $(\lg a_n)_n$ şi $b_n = n$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lg a_1 + \lg a_2 + \ldots + \lg a_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \lg a_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \lg \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \lg a_n$, de unde rezultă $\lg\left(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}\right) = \lg\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)$ şi de aici cerința problemei.

Criteriul raportului

Dacă şirul $(a_n)_n$ are termenii pozitivi, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, dacă ultima limită există.

Criteriul produsului

Fie şirurile $(x_n)_n$ mărginit şi $(a_n)_n$ convergent la zero. Atunci şirul produs $(x_n \cdot a_n)_n$ este convergent la zero.

O reciprocă a teoremei Cesaro-Stolz

Dacă $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ sunt două şiruri de numere reale cu proprietățile:

1) $b_n \in R^*$, $b_n \neq b_{n+1}$, $(\forall)\, n \in N$;

2) $(\exists) \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in R$;

3) $(\exists) \lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{b_{n+1}} = b \in R \setminus \{1\}$;

Atunci $(\exists) \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \ell$.

Criteriul general de convergență al lui Cauchy. Condiția necesară şi suficientă ca un şir $(x_n)_{n\in N}$ să fie convergent este ca pentru $(\forall)\, \varepsilon > 0, (\exists)\, n(\varepsilon) \in N$, astfel încât pentru $(\forall)\, n \geq n(\varepsilon)$ şi pentru $(\forall) p \in N^*$, să se verifice $\left|x_{n+p} - x_n\right| < \varepsilon$.

2.2 Siruri recurente

Definiția 2.2.1. Un şir $(x_n)_n$ se numeşte ***şir recurent***, dacă este definit de o relație de forma $x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2},..., x_{n-k})$, $n > k$ cu $x_1, x_2,..., x_k$ cunoscuți. Numărul natural k se numeşte ***ordinul relației de recurență***.

Recurență de ordinul 1

$x_{n+1} = a \cdot x_n + b, \quad n \geq 0, \quad x_0 \in R$.

Cazul 1. $a \neq 0, \quad b = 0 \Rightarrow x_{n+1} = a \cdot x_n \Rightarrow x_n = a^n \cdot x_0, \quad (\forall) n \in N$.

Cazul 2. $a = 1, \quad b \neq 0 \Rightarrow x_{n+1} = x_n + b \Rightarrow x_n = n \cdot b + x_0, \quad (\forall) n \in N$.

Cazul 3. $b \neq 0, \quad a \notin \{0,1\} \Rightarrow x_{n+1} = a \cdot x_n + b, \quad (\forall) n \in N$.

Se caută un şir cu termenul general de forma $y_n = x_n + \alpha, \quad \alpha \in R$.

$y_{n+1} - \alpha = a \cdot (y_n - \alpha) + b \Rightarrow y_{n+1} = a \cdot y_n + \alpha \cdot (1 - a) + b$. Impunem condiția $\alpha \cdot (1 - a) + b = 0$ şi rezultă $y_{n+1} = a \cdot y_n \Rightarrow y_n = a^n \cdot y_0$ şi deci $x_n = a^n \cdot \left(x_0 + \frac{b}{a-1} \right) + \frac{b}{a-1}, \quad (\forall) n \in N$.

Recurență de ordinul 2

$a \cdot x_{n+1} + b \cdot x_n + c \cdot x_{n-1} = d, \quad n \geq 1, \quad a,b,c,d \in R$.

Observație: Printr-o translație a şirului $(x_n)_n$ se poate obține o recurență de forma $a \cdot x_{n+1} + b \cdot x_n + c \cdot x_{n-1} = 0, \quad n \geq 1, \quad a,b,c \in R$.

Pentru această problemă, se caută soluții de forma $x_n = r^n, \quad r \neq 0$. Înlocuind aceasta în relația de recurență, vom obține ecuația $a \cdot r^2 + b \cdot r + c = 0$, numită ecuația caracteristică asociată recurenței.

Se disting trei cazuri:

Cazul I: Dacă $\Delta > 0$ ecuația caracteristică are două rădăcini reale şi distincte r_1, r_2.

Lema 1. Şirurile cu termenii generali $y_n = r_1^n, \quad z_n = r_2^n, \quad n \in N$ sunt soluții ale relației de recurență.

Lema 2. Orice combinație liniară a şirurilor $y_n = r_1^n, \quad z_n = r_2^n, \quad n \in N$ este soluție a relației de recurență.

Lema 3. Soluția generală $(x_n)_n$ a relației de recurență şi şirurile $(y_n)_n, \quad (z_n)_n$ sunt liniar dependente.

Prin urmare, soluția generală a relației de recurență este:

$x_n = A \cdot r_1^n + B \cdot r_2^n, \quad n \in N, \quad A, B \in R$.

Cazul II: Dacă $\Delta = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = r$. .

Lema 1. Şirurile cu termenii generali $y_n = r^n, \quad z_n = n \cdot r^n$ sunt soluţii ale relaţiei de recurenţă.

Lema 2. Orice combinaţie liniară a şirurilor $(y_n)_n, \quad (z_n)_n$ este soluţie a relaţiei de recurenţă.

Lema 3. Soluţia generală $(x_n)_n$ a relaţiei de recurenţă şi şirurile $(y_n)_n, \quad (z_n)_n$ sunt liniar dependente.

Prin urmare, soluţia generală a relaţiei de recurenţă este:

$x_n = (A + B \cdot n) r^n, \quad n \in N, \quad A, B \in R$.

Cazul III: Dacă $\Delta < 0 \Rightarrow r_1 = \rho \cdot (\cos\theta + i \cdot \sin\theta), \quad r_2 = \rho \cdot (\cos\theta - i \cdot \sin\theta)$

Lema 1. Şirurile cu termenii generali $y_n = \rho^n \cdot \cos n\theta$ şi $z_n = \rho^n \cdot \sin n\theta$ Sunt soluţii ale relaţiei de recurenţă.

Lema 2. Orice combinaţie liniară a şirurilor $(y_n)_n, \quad (z_n)_n$ este soluţie a relaţiei de recurenţă.

Lema 3. Soluţia generală $(x_n)_n$ a relaţiei de recurenţă şi şirurile $(y_n)_n, \quad (z_n)_n$ sunt liniar dependente.

Prin urmare, soluţia generală a relaţiei de recurenţă este:

$x_n = \rho^n \cdot (A \cos n\theta + B \sin n\theta), \quad n \in N, \quad A, B \in R$.

Observaţie: Pentru relaţii de recurenţă de ordin superior lui doi se procedează similar, urmând următoarele etape:

1) Se scrie şi se rezolvă ecuaţia caracteristică.

2) Se scrie soluţia generală a relaţiei de recurenţă ca o combinaţie liniară a soluţiilor parţiale.

2.3 Aplicaţii

$\boxed{\textbf{2.3.1}}$ Să se determine punctele limită pentru următoarele şiruri :

a) $u_n = a^{(-1)^{n+1}} + \dfrac{1}{n}$; **b)** $u_n = \left(1 + \dfrac{\cos n\pi}{n}\right)^n$;

c) $u_n = \sin\dfrac{n\pi}{4}$; **d)** $u_n = (-1)^n \cdot \sqrt[n]{n}$.

Indicații de rezolvare

a) Pentru n număr par, $u_n = \frac{1}{a} + \frac{1}{n} \to \frac{1}{a}$. Pentru n număr impar $u_n = a + \frac{1}{n} \to a$. Deci punctele limită sunt a şi $\frac{1}{a}$;

b) e şi $\frac{1}{\mathrm{e}}$;

c) $-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1$;

d) -1,1.

2.3.2 Să se determine limitele inferioară şi superioară pentru următoarele şiruri

a) $a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2} + (-1)^n \cdot \frac{n}{2n+1}$;

b) $a_n = \frac{1}{n} \cdot n^{(-1)^n} + \sin^2 n\frac{\pi}{4}$;

c) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left[\frac{1}{2} + (-1)^n\right] + \cos n\frac{\pi}{2}$.

Indicații de rezolvare

a) Se determină punctele limită ale şirului. Pentru n număr par $a_n = 1 + \frac{n}{2n+2} \to \frac{3}{2}$, iar pentru n număr impar $a_n = -\frac{n}{2n+1} \to -\frac{1}{2}$. Deci mulțimea punctelor limită este $L = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$, de unde rezultă că $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{2}$ şi $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\frac{1}{2}$;

b) $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 2$ şi $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$;

c) $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{2} \cdot \mathrm{e} + 1$ şi $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\frac{\mathrm{e}}{2}$.

2.3.3 Folosind teorema lui Weierstrass să se studieze convergența următoarelor şiruri :

a) $a_n = \frac{n^n}{(n!)^2}$; **b)** $a_n = \sqrt{a + a_{n-1}}$, $a > 0$, $a_0 = 0$;

c) $a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{a}{a_{n-1}}\right), a > 0, a_0 > 0$; **d)** $a_n = \frac{a}{2} - \frac{a_{n-1}^2}{2}, a_0 = 0, 0 < a < 1$;

e) $a_{n+1} = a_n(1 - a_n), 0 < a_0 < 1$; **f)** $a_n = 1 + \frac{2}{a_{n-1}}, \quad a_0 = 1.$

Indicații de rezolvare

a) Şirul $(a_n)_{n\in N}$ este cu termenii pozitivi, iar raportul

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)^n}{n^n} = \frac{1}{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{n+1}\cdot e < 1, (\forall)n \in N^*$, de unde rezultă că şirul este monoton descrescător. Cum toți termenii sunt pozitivi, şirul va fi mărginit inferior de 0, deci este convergent. Pentru calculul limitei, dacă $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, introducând limita în relația de recurență

$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{1}{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, se va obține $\ell = \ell \cdot 0 \cdot e$, de unde $\ell = 0$;

b) Şirul $(a_n)_{n\in N}$ este un şir de numere pozitive şi monoton crescător, demonstrație ce se poate realiza prin inducție matematică după *n*. Presupunând că ar exista $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, aceasta va trebui să verifice relația de recurență, adică $\ell = \sqrt{a+\ell}$, de unde $\ell^2 - \ell - a = 0$ şi se obțin $\ell_1 = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$, $\ell_2 = \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$. Cum $\ell_2 < 0$ nu convine, termenii şirului fiind pozitivi, rezultă ca limită posibilă ℓ_1;

Cum şirul este crescător, adică $a_{n-1} < a_n$ şi $a_1 = \sqrt{a} < a_n, (\forall)n \in N, n \ge 2$ rezultă $\frac{a_{n-1}}{a_n} < 1$, $\frac{a_1}{a_n} = \frac{\sqrt{a}}{a_n} < 1$, de unde $\frac{a}{a_n} < \sqrt{a}$. Din relația de recurență ridicată la pătrat, se va obține $a_n^2 = a + a_{n-1}$, adică $a_n = \frac{a}{a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n} < \sqrt{a} + 1, \quad (\forall)n \in N^*$, adică şirul este măginit superior, deci este convergent, iar ℓ_1 este limita sa.

2.3.4 Folosind teorema Cesaro-Stolz, să se calculeze următoarele limite :

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p + 2^p + ... + n^p}{n^{p+1}}, p+1 > 0$; **c)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}}{n}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\dfrac{1}{2}+...+\dfrac{1}{n}}{\ln n}$; **e)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$;

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\sqrt{2}+...+\sqrt[n]{n}}{n\sqrt{n}}$; **g)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{a+b}{c+d}+\dfrac{a\sqrt{2}+b}{c\sqrt{2}+d}+...+\dfrac{a\sqrt{n}+b}{c\sqrt{n}+d}\right)$.

Indicații de rezolvare

a) Cu notațiile din teorema Cesaro-Stolz, se consideră $a_n = n, b_n = 2^n$, de unde rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

b) Pentru $a_n = 1^p + 2^p + ... + n^p, b_n = n^{p+1}$, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{C_p^0 \cdot n^p + C_p^1 \cdot n^{p-1} + ... + C_p^p}{C_{p+1}^0 \cdot n^{p+1} + C_{p+1}^1 n^p + ... + C_{p+1}^{p+1} - n^{p+1}} = \frac{1}{p+1};$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{1}{n+1}}{\ln(n+1)-\ln n} = 1$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 2$;

f) 0 ; **g)** $\dfrac{a}{c}$.

$\boxed{\textbf{2.3.5}}$ Să se calculeze limitele următoare :

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n}$; **c)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)...(2n)}$; **e)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n!} - \sqrt[n-1]{(n-1)!}\right)$;

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{(a+1)(a+2)...(a+n)}{n!}}, a > -1$;

Indicații de rezolvare

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!}{n!} = \infty$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1$;

c)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}{n\cdot n\cdot \ldots \cdot n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\mathrm{e}};$$

d)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(2n)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+2)(n+3)\ldots(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot (2n+1)(2n+2) \cdot \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{4}{\mathrm{e}}$$

e) Se aplică teorema Cesaro-Stolz şirurilor $a_n = \sqrt[n]{n!}, b_n = n$. Rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}} = \frac{1}{\mathrm{e}} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n!} - \sqrt[n-1]{(n-1)!}\right);$$

f) 1.

$\boxed{\textbf{2.3.6}}$ Fie $(u_n)_n$ un şir de numere pozitive, crescător şi divergent.

a) Să se arate că dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{u_{n-1}} = \lambda$, $\lambda \in R_+ \setminus \{1\}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{u_n} = \lambda'$, atunci $\lambda' = \dfrac{\lambda}{\lambda - 1}$;

b) Să se arate că dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{u_{n-p}} = \lambda$ unde $\lambda \in R_+ \setminus \{1\}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{u_{n-p}} = \dfrac{\lambda^{p+1}}{\lambda - 1}$, $(\forall)\ p \geq 1$;

c) Să se arate că dacă $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{u_{n-1}}=\lambda$, unde $\lambda\in R_+\setminus\{1\}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{u_1+u_2+\ldots+u_{n-1}}=\lambda$;

d) Să se arate că dacă $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{u_{n-1}}=\lambda$, unde $\lambda\in R_+\setminus\{1\}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{u_1+u_2+\ldots+u_{n-p}}=\lambda^{p+1}$, $(\forall)\ p\geq 1$.

Indicații de rezolvare

a) Se consideră $a_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$, $b_n=u_n$ şi se aplică Teorema Cesaro-Stolz.

Rezultă

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{u_1+\ldots+u_n}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_n-u_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{u_n}{u_{n-1}}}{\frac{u_n}{u_{n-1}}-1}=\frac{\lambda}{\lambda-1}$$

şi deci $\lambda'=\dfrac{\lambda}{\lambda-1}$;

b) $\dfrac{u_1+\ldots+u_n}{u_{n-p}}=\dfrac{u_1+\ldots+u_n}{u_n}\cdot\dfrac{u_n}{u_{n-1}}\cdot\dfrac{u_{n-1}}{u_{n-2}}\cdot\ldots\cdot\dfrac{u_{n-p+1}}{u_{n-p}}$.

Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_1+\ldots+u_n}{u_{n-p}}=\dfrac{\lambda}{\lambda-1}\cdot\lambda\cdot\ldots\cdot\lambda=\dfrac{\lambda^{p+1}}{\lambda-1}$;

$$\frac{u_1+\ldots+u_n}{u_1+\ldots+u_{n-1}}=1+\frac{u_n}{u_1+\ldots+u_{n-1}}=1+\frac{u_n}{u_{n-1}}\cdot\frac{u_{n-1}}{u_1+\ldots+u_{n-1}}=$$

c) $$=1+\frac{u_n}{u_{n-1}}\cdot\frac{1}{\frac{u_1+\ldots+u_{n-1}}{u_{n-1}}}$$

Trecând la limită şi ținând seama de punctul b) se va obține

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_1+\ldots+u_n}{u_1+\ldots+u_{n-1}}=1+\lambda\cdot\frac{\lambda-1}{\lambda}=\lambda.$$

$\boxed{\textbf{2.3.7}}$ Utilizând criteriul general de convergență al lui Cauchy, să se demonstreze convergența şirurilor :

a) $u_n=\dfrac{\sin a_1}{2}+\dfrac{\sin a_2}{2^2}+\ldots+\dfrac{\sin a_n}{2^n}$; **b)** $u_n=\dfrac{\cos a_1}{1\cdot 2}+\dfrac{\cos a_2}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{\cos a_n}{n(n+1)}$;

c) $u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$;

d) $u_n = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{[1 + 3(n-1)] \cdot (1 + 3n)}$;

e) $u_n = \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \ldots + \frac{1}{(n+1)(n+4)}$; **f)** $u_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$;

g) $u_n = \frac{\cos x}{3} + \frac{\cos 2x}{3^2} + \ldots + \frac{\cos nx}{3^n}$; **h)** $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$;

Indicații de rezolvare

a) Fiind dat $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat, se va căuta un rang $n(\varepsilon) \in N$, astfel încât pentru $(\forall)\, n \geq n(\varepsilon)$ şi pentru $(\forall) p \in N^*$, să se verifice $|u_{n+p} - u_n| < \varepsilon$.

$$|u_{n+p} - u_n| = \left| \frac{\sin a_{n+1}}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{\sin a_{n+p}}{2^{n+p}} \right| < \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p}} =$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{p-1}}\right) = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) < \frac{1}{2^n}$$

şi cum $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} = 0$ se poate găsi un rang, de exemplu $n(\varepsilon) = \left[\frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2} \right] + 1$, pentru care $|u_{n+p} - u_n| < \frac{1}{2^n} < \varepsilon, (\forall)\, n \geq n(\varepsilon), (\forall) p \in N^*$, deci şirul este convergent;

c) $|u_{n+p} - u_n| = \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \ldots + (-1)^{p-1} \cdot \frac{1}{n+p} \right|$.

Dacă p este număr par, atunci

$$|u_{n+p} - u_n| = \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \right| =$$

$$= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} \right) + \ldots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \right) <$$

$$< \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+4} - \ldots - \frac{1}{n+p-2} + \frac{1}{n+p-2} - \frac{1}{n+p} =$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n+p}$$

Dacă p este impar, atunci

$$\left|u_{n+p}-u_n\right| = \left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)+\ldots+\frac{1}{n+p} <$$

$$< \frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+4}+\ldots+\frac{1}{n+p-2}-\frac{1}{n+p-1}+\frac{1}{n+p-1}=.$$

$$=\frac{1}{n+1}$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$, se poate găsi un rang $n(\varepsilon)=\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]+1$, pentru care $\left|u_{n+p}-u_n\right| < \frac{1}{n+1} < \varepsilon, (\forall)\, n \ge n(\varepsilon), (\forall) p \in N^*$, deci şirul este convergent;

d) $u_n = \frac{1}{3}\left[1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{1+3(n-1)}-\frac{1}{1+3n}\right]=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{1+3n}\right)$, de

unde $\left|u_{n+p}-u_n\right| = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+3n}-\frac{1}{1+3n+3p}\right) < \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+3n} < \frac{1}{n} < \varepsilon$;

e)

$$u_n = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+4}\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)$$

Rezultă $\left|u_{n+p}-u_n\right| < \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}\right) < \frac{1}{n} < \varepsilon$, deci şirul este convergent;

h)

$$\left|u_{n+p}-u_n\right| = \frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+p)^2} <$$

$$< \frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)} =$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}=$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

şi deci şirul este convergent.

$\boxed{\textbf{2.3.8}}$ Folosind criteriul lui Cauchy, să se demonstreze divergenţa şirurilor

a) $u_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$;

b) $u_n = \sin n$; **c)** $u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Indicaţii de rezolvare

a) Va trebui să găsim $\varepsilon > 0,\ p \in N^*$, astfel încât $\left|u_{n+p} - u_n\right| > \varepsilon, (\forall)\, n \in N$.

$\left|u_{n+p} - u_n\right| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+p} > \frac{p}{n+p} = \frac{1}{2}$ pentru $p = n$, deci se poate lua $\varepsilon = \frac{1}{2}$, şirul fiind divergent;

b) Presupunem, prin reducere la absurd, că există $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sin n$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin(n+1) - \sin(n-1)\right) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} 2\cdot\sin 1\cdot\cos n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\cos n = 0$.

În acelaşi timp, $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(2n) = \ell = \lim\limits_{n\to\infty} 2\cdot\sin n\cdot\cos n = 0 \Rightarrow \ell = 0$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos^2 n + \sin^2 n\right) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sin^2 n = 1 \Rightarrow \ell^2 = 1 \neq 0$, contradicţie, deci şirul nu are limită.

$\boxed{\textbf{2.3.9}}$ Se consideră şirul $(u_n)_n$ definit prin relaţia de recurenţă : $u_n = a\cdot u_{n-1} + b,\ a, b, u_0$ fiind daţi. Să se găsească expresia lui u_n în funcţie de a,b şi u_0. În acest caz există $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$?.

Indicaţie de rezolvare

$\begin{cases} u_1 = a\cdot u_0 + b \\ u_2 = a\cdot u_1 + b \\ ... \\ u_n = a\cdot u_{n-1} + b \end{cases}$ şi înmulţim prima ecuaţie cu a^{n-1}, pe a doua cu a^{n-2} şi aşa mai departe, ultima cu a. Prin adunare, vom obţine :

$$u_n = a^n u_0 + b\left(1 + a + a^2 + ... + a^{n-1}\right) = a^n u_0 + b\cdot\frac{1-a^n}{1-a}.$$

Dacă $|a| > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$, deci u_n nu are limită. Dacă $|a| < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \frac{b}{1-a}$.

Dacă $a = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \pm\infty$, în funcţie de semnul lui b.

Dacă $a = -1$, $u_{2p} = u_0$, $u_{2p+1} = b - u_0$, şirul reducându-se la două puncte distincte, deci nu are limită. Rezultă că şirul are limită doar în cazul $|a| < 1$.

$\boxed{\textbf{2.3.10}}$ Să se studieze convergența șirurilor:

a) $x_1 = 1, \quad x_2 = 3, \quad x_{n+2} = 5 \cdot x_{n+1} - 6 \cdot x_n, \quad n \geq 1;$

b) $x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_{n+2} = x_{n+1} - \dfrac{x_n}{4}, \quad n \geq 1;$

c) $x_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_2 = 1, \quad x_{n+2} = \sqrt{2} \cdot x_{n+1} - x_n, \quad n \geq 1.$

Indicații de rezolvare

b) Ecuația caracteristică este $r^2 - r + \dfrac{1}{4} = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = \dfrac{1}{2}$. Aplicându-se propoziția corespunzătoare cazului II rezultă $x_n = c \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^n + d \cdot n \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ și punând condiția ca $x_1 = 0, \quad x_2 = 1 \Rightarrow c = -4, \quad d = 4$.

Rezultă $x_n = -4 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 4 \cdot n \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

$\boxed{\textbf{2.3.11}}$ Să se studieze convergența șirurilor:

a) $x_{n+1} = \dfrac{2 \cdot a \cdot x_n}{a + x_n}, \quad a \in R, \quad a > 0$, cu $x_0 > 0$;

b) $x_{n+1} = x_n^2 - 2 \cdot x_n + 2, \quad n \geq 1, \quad x_1 \in [1,2]$;

c) $x_{n+1}^2 = 3 \cdot x_n - 2, \quad n \geq 1, \quad x_1 = \dfrac{3}{2}$;

d) $x_{n+1} = 3 + \dfrac{1}{x_n}, \quad n \geq 0, \quad x_0 = 3.$

Indicații de rezolvare

a) Pentru $x_0 < a$ șirul este monoton crescător și are limita a.

Pentru $x_0 = a \Rightarrow x_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Pentru $x_0 > a$ șirul este monoton descrescător și cu limita a;

b) Se demonstrează prin inducție matematică faptul că $(x_n)_n$ este un șir descrescător și mărginit $x_n \in [1,2]$. Rezultă că $(x_n)_n$ este convergent.
Notând cu $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ și trecând la limită în relația de recurență, vom obține ca limite posibile $\ell_1 = 1, \quad \ell_2 = 2$. Dacă $x_1 = 1 \Rightarrow x_n = 1, (\forall) n \Rightarrow \ell = 1$.
Dacă $x_1 = 2 \Rightarrow x_n = 2, (\forall) n \Rightarrow \ell = 2$. Dacă $x_1 \in (1,2)$ șirul este descrescător și mărginit inferior de 1, deci $\ell = 1$;

d) Fie $\ell \in R$ soluția ecuației $\ell = 3 + \frac{1}{\ell}$. Cum $x_n > 3$, $(\forall) n \in N^*$, dacă şirul ar fi convergent atunci limita sa va fi $\ell \geq 3$.

$$\left|x_{n+1} - \ell\right| = \left|3 + \frac{1}{x_n} - \ell\right| = \left|-\frac{1}{\ell} + \frac{1}{x_n}\right| = \frac{\left|x_n - \ell\right|}{\ell \cdot x_n} \leq \frac{1}{9} \cdot \left|x_n - \ell\right| \Rightarrow \left|x_{n+1} - \ell\right| \leq \frac{1}{3^2} \cdot \left|x_n - \ell\right|$$

şi de aici $0 \leq \left|x_n - \ell\right| \leq \left(\frac{1}{3^2}\right)^n \cdot \left|x_0 - \ell\right|$, $(\forall) n \in N$. Prin trecere la limită obținem că există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell = \frac{3+\sqrt{13}}{2} > 3$.

$\boxed{2.3.12}$ Să se studieze convergența şirurilor definite prin:

a) $x_n > 0$, $x_{n+1} \leq \frac{x_n}{1 + x_n}$, $(\forall) n \geq 0$, $x_0 = 1$;

b) $x_n + x_{n+1} > 0$, $(\forall) n \in N$, $x_{n+1}^2 < x_n^2$, $(\forall) n \in N$;

c) $0 < x_n < 2$, $(2 - x_n) \cdot x_{n+1} > 1$, $(\forall) n \in N$.

Indicații de rezolvare

a) $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{1}{1 + x_n} < 1 \Rightarrow x_{n+1} < x_n$, deci şirul este monoton descrescător şi mărginit inferior de 0, deci conform teoremei Weierstrass este convergent.

Notând cu $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ şi trecând la limită în relația de recurență, rezultă $\ell \leq \frac{1}{1+\ell} \Leftrightarrow \ell^2 \leq 0$ şi cum şirul are termenii pozitivi, rezultă $\ell = 0$.

c) Se aplică inegalitatea mediilor, de unde rezultă:

$1 < \sqrt{(2 - x_n) \cdot x_{n+1}} \leq \frac{(2 - x_n) + x_{n+1}}{2} \Rightarrow 2 < 2 - x_n + x_{n+1}$ şi deci şirul este strict crescător. Fiind mărginit superior de 2, el este convergent.

Notând cu $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ şi trecând la limită în relația de recurență, rezultă $\ell = 1$.

$\boxed{2.3.13}$ Fie $a > b > 0$ şi două şiruri $(a_n)_{n \in N}$ şi $(b_n)_{n \in N}$ definite prin :

$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n + b_n}$, $a_0 = a$ şi $b_{n+1} = \frac{b_n^2}{a_n + b_n}$, $b_0 = b$. Să se studieze $a_{n+1} - b_{n+1}$ şi $\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$ şi să se deducă limitele celor două şiruri.

Indicație de rezolvare

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n^2 - b_n^2}{a_n + b_n} = a_n - b_n = \ldots = a_0 - b_0 = a - b > 0.$$

$$\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} = \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 = \left(\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)^4 = \ldots = \left(\frac{b}{a}\right)^{2n+2}.$$

Cum $\frac{b}{a} < 1$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} = 0$. În acelaşi timp, $\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} - a + b}{a_{n+1}}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a + b}{a_{n+1}} = 0$. Se va obține astfel $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a - b$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

$\boxed{\textbf{2.3.14}}$ Să se arate că şirul $(a_n)_{n\in N}$ definit prin $a_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$ este convergent şi să se calculeze limita sa.

Indicație de rezolvare

$a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)\cdot\left(\frac{n-1}{n+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n!}{(n+1)^n}$, de unde rezultă că şirul este mărginit de 0 inferior şi de 1 superior. În acelaşi timp, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} < 1$, deci $(a_n)_{n\in N}$ este monoton descrescător. Rezultă că şirul este convergent, iar dacă $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, trecând la limită în relația de recurență $a_{n+1} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} \cdot a_n$, se va obține $\ell = \ell \cdot \mathrm{e}^{-1}$, deci $\ell = 0$.

$\boxed{\textbf{2.3.15}}$ Să se arate că şirul cu termenul general $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ este convergent şi să se deducă inegalitatea $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n$.

Indicație de rezolvare

Se ştie că pentru $a > 0$, $(1+a)^n > 1 + an$, iar pentru $a = \frac{1}{n-1}$ inegalitatea devine $\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n > 1 + \frac{n}{n-1} = 2 + \frac{1}{n-1} > 2$. Deci $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > 2$.

Pentru monotonie se compară $a_{n-1}=\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{n}$ cu $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Înlocuind în inegalitatea $a>0,\ \ (1+a)^n>1+an$ pe $a=\dfrac{1}{n^2-1}$, se va obține

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n>1+\frac{n}{n^2-1}>1+\frac{1}{n}\Leftrightarrow\left(\frac{n}{n-1}\right)^n\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n>1+\frac{1}{n},\text{sau}$$

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n>\frac{1+\frac{1}{n}}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}\Leftrightarrow\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\Leftrightarrow a_{n-1}>a_n,$$ deci şirul este monoton descrescător. Cum este mărginit inferior de 2, el va fi convergent, deci există $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\mathrm{e}$.

$\boxed{\textbf{2.3.16}}$ Să se arate că şirul cu termenul general $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}-\ln n$ este convergent.

Indicație de rezolvare

Se utilizează inegalitatea de la ex. 2.3.15, aplicându-se logaritmul.

Astfel, din $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}<\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^n\Rightarrow n\cdot\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<1<(n+1)\cdot\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$,

$\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}\Leftrightarrow\dfrac{1}{n+1}<\ln(n+1)-\ln n<\dfrac{1}{n}$. Dând valori pentru $n=1,2,\ldots,k$ şi însumând inegalitățile obținute, se va obține $\ln(k+1)<1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{k}$, deci $a_k>0,(\forall)k\in N^*$.

Pentru monotonie, se calculează $a_k-a_{k+1}=\ln(k+1)-\ln k-\dfrac{1}{k+1}>0$, deci şirul este monoton descrescător, de termeni pozitivi, deci este convergent.

$\boxed{\textbf{2.3.17}}$ Să se arate că şirul definit prin termenul general $a_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{n+n}$ este convergent şi să i se calculeze limita.

Indicație de rezolvare

Utilizând exercițiul 2.3.16, notând $\ell=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$, rezultă că și $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n+n}-\ln(2n)\right)=\ell \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n=\ln 2$.

$\boxed{\textbf{2.3.18}}$ Se consideră șirurile $(a_n)_n$ și $(b_n)_n$ care verifică următoarele condiții

1) termenii șirului $(b_n)_n$ sunt pozitivi ;

2) $s_n=b_1+b_2+\ldots+b_n$ are limita infinită ;

3) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\ell$.

În aceste condiții se verifică $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$.

Indicație de rezolvare

$$\lim_{n\to\infty} s_n=\infty,\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\ell \Leftrightarrow \left|\frac{a_n}{b_n}-\ell\right|<\frac{\varepsilon}{2},\ (\forall)n\ge n(\varepsilon) \Leftrightarrow \frac{a_k}{b_k}-\ell=\varepsilon_k,\ k=1,2,\ldots,n$$

Rezultă $a_k=(\ell-\varepsilon_k)\cdot b_k;\ |\varepsilon_k|<\frac{\varepsilon}{2}$. Luând $k=1,2,\ldots,n$ și însumând se va obține

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=\ell\cdot(b_1+b_2+\ldots+b_n)+\varepsilon_1\cdot b_1+\ldots+\varepsilon_n\cdot b_n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{s_n}-\ell=$$

$$=\frac{\varepsilon_1\cdot b_1+\varepsilon_2\cdot b_2+\ldots+\varepsilon_N\cdot b_N}{s_n}+\frac{\varepsilon_{N+1}\cdot b_{N+1}+\ldots+\varepsilon_n\cdot b_n}{s_n}$$

unde $N=n(\varepsilon)$.

Atunci $\left|\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{s_n}-\ell\right|\le\left|\frac{\varepsilon_1\cdot b_1+\ldots+\varepsilon_N\cdot b_N}{s_n}\right|+\left|\frac{\varepsilon_{N+1}\cdot b_{N+1}+\ldots+\varepsilon_n\cdot b_n}{s_n}\right|$.

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\varepsilon_1\cdot b_1+\ldots+\varepsilon_N\cdot b_N}{s_n}\right|=0$, iar

$$\left|\frac{\varepsilon_{N+1}\cdot b_{N+1}+\ldots+\varepsilon_n\cdot b_n}{s_n}\right|\le\frac{|\varepsilon_{N+1}|b_{N+1}+\ldots+|\varepsilon_n|b_n}{s_n}<$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{b_{N+1}+\ldots+b_n}{s_n}=\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{s_n-(b_1+\ldots+b_N)}{s_n}=\frac{\varepsilon}{2}\left(1-\frac{b_1+\ldots+b_N}{s_n}\right).$$

Rezultă $\left|\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{s_n}-\ell\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\left(1-\frac{b_1+\ldots+b_n}{s_n}\right)<\varepsilon$.

$\boxed{2.3.19}$ Să se arate că dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ şi $B_n = b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots + b_{2n}$ cu $b_n > 0$ are limita egală cu *b*,

atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+1}\cdot b_{n+1} + a_{n+2}\cdot b_{n+2} + \ldots + a_{2n}\cdot b_{2n}\right) = a\cdot b$.

Indicaţie de rezolvare

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow (\forall)\,\varepsilon > 0, (\exists)\, n(\varepsilon_1)\in N$ astfel încât pentru $(\forall)\, n \ge n(\varepsilon_1)$ să rezulte $|a_n - a| < \varepsilon$.

De asemenea, din $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = b$ rezultă că $|B_n - b| < \varepsilon, (\forall)\, n \ge n(\varepsilon_2)$.

Cum şirurile $(a_n)_n$ şi $(B_n)_n$ sunt convergente, ele sunt mărginite, adică $(\exists)\, M_1 \ge 0$ astfel încât $|a_n| \le M_1, (\forall)\, n \ge n_3$ şi $(\exists)\, M_2 \ge 0$ astfel încât $|B_n| \le M_2, (\forall)\, n \ge n_4$.

Se notează $a_n - a = \alpha_n$ şi $B_n - b = \beta_n$ şi se consideră $n(\varepsilon) = \max(n(\varepsilon_1), n(\varepsilon_2), n_3, n_4)$.

Atunci

$$|a_{n+1}\cdot b_{n+1} + \ldots + a_{2n}\cdot b_{2n} - a\cdot b| = |(\alpha_{n+1} + a)\cdot b_{n+1} + \ldots + (\alpha_{2n} + a)\cdot b_{2n} - a\cdot b| =$$
$$= |(\alpha_{n+1}\cdot b_{n+1} + \ldots + \alpha_{2n}\cdot b_{2n}) + a\cdot B_n - a\cdot b| \le$$
$$\le |\alpha_{n+1}|\cdot|b_{n+1}| + \ldots + |\alpha_{2n}|\cdot|b_{2n}| + |a|\cdot|B_n - b| <$$
$$< \varepsilon\cdot(M + |a|)$$

Unde $M = \max(M_1, M_2)$.

Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+1}\cdot b_{n+1} + a_{n+2}\cdot b_{n+2} + \ldots + a_{2n}\cdot b_{2n}\right) = a\cdot b$.

$\boxed{2.3.20}$ Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\frac{\pi}{n+1} + \ldots + \sin\frac{\pi}{2n}\right)$.

Indicaţie de rezolvare

Se utilizează exerciţiul 2.3.19, considerând $B_n = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$, $a_n = n\cdot\sin\frac{\pi}{n}$ şi se obţine $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\frac{\pi}{n+1} + \ldots + \sin\frac{\pi}{2n}\right) = \pi\cdot\ln 2$.

2.4 Serii de numere. Criterii de convergență

Definiția 2.4.1. Fie $(a_n)_n$ un şir de numere reale şi $(s_n)_n$ un şir definit prin : $\begin{cases} s_1 = a_1 \\ s_2 = a_1 + a_2 \\ \dots \\ s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \end{cases}$.

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de numere reale se numeşte ***convergentă***, dacă şirul sumelor parțiale este convergent.

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de numere reale se numeşte ***divergentă***, dacă şirul sumelor parțiale este divergent.

Criteriu necesar de convergență. Condiția necesară, dar nu şi suficientă, ca o serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ să fie convergentă este ca $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Exemplu

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă, cu toate că $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Criteriul general al lui Cauchy

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă $\Leftrightarrow (\forall)\,\varepsilon > 0, (\exists)\, n(\varepsilon) \in N$, astfel încât $\left|a_{n+1} + \dots + a_{n+p}\right| < \varepsilon$, $(\forall) n \ge n(\varepsilon), (\forall) p \in N^*$.

2.5 Serii cu termenii pozitivi. Criterii de convergență

Criteriul I al comparației

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ două serii cu termenii pozitivi, astfel ca $a_n \le b_n, (\forall)\, n \ge n_0$. Atunci :

a) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ va fi convergentă.

b) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ va fi divergentă.

Criteriul II al comparației

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ două serii cu termenii pozitivi, astfel ca $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}, (\forall) n \geq n_0$.

Atunci :

a) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ va fi convergentă.

b) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ va fi divergentă.

Criteriul III al comparației

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ două serii cu termenii pozitivi, astfel ca $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K$.

Atunci :

a) Dacă $0 < K < +\infty$ cele două serii au aceeaşi natură.

b) Dacă K=0, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ va fi convergentă.

c) Dacă $K = +\infty$, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ va fi divergentă.

Criteriul rădăcinii (al lui Cauchy)

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termenii pozitivi şi $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$.

Atunci :

a) Dacă $\lambda < 1$ seria este convergentă.

b) Dacă $\lambda > 1$ seria este divergentă.

c) Pentru $\lambda = 1$ criteriul nu se aplică.

Criteriul raportului (al lui d′Alembert)

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termenii pozitivi şi $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$.

Atunci :

a) Dacă $\lambda < 1$ seria este convergentă.
b) Dacă $\lambda > 1$ seria este divergentă.
c) Pentru $\lambda = 1$ criteriul nu se aplică.

Exemple

1) Se consideră seria $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \ldots$. Să se arate că ea este convergentă şi că $\limsup_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, iar $\liminf_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

Indicație de rezolvare

Seria are aceeaşi natură cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right)$.

Cum $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$, $(\forall) n \in N$ din criteriul I de comparație rezultă convergența seriei.

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{3^n} & \text{pentru} \quad n \text{ par} \\ \frac{1}{2^n} & \text{pentru} \quad n \text{ impar} \end{cases} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{2} & \text{pentru} \quad n \text{ par} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{3} & \text{pentru} \quad n \text{ impar} \end{cases}$$

$\limsup_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty > 1$, iar $\liminf_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1$.

2) Să se arate că seria $\frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{2^2} + 2^2 + \ldots + \frac{1}{2^n} + 2^n + \ldots$ este divergentă, şi $\limsup_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, iar $\liminf_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

Indicație de rezolvare

Seria are aceeaşi natură cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + 2^n \right)$, care este divergentă, deoarece $\frac{1}{2^n} + 2^n > 2^n$, $(\forall) n \in N$.

$$u_n=\begin{cases}2^n & \text{pentru} \quad n \text{ par}\\ \dfrac{1}{2^n} & \text{pentru} \quad n \text{ impar}\end{cases} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n}=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{2n+1}} & \text{pentru} \quad n \text{ par}\\ 2^{2n+1} & \text{pentru} \quad n \text{ impar}\end{cases}$$

Rezultă că $\limsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\infty>1,$ iar $\liminf\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=0<1.$

Observație: Criteriul raportului dă numai condiții suficiente de convergență şi divergență, aşa după cum rezultă din exemplele anterioare.

Criteriul logaritmic

Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ o serie cu termenii pozitivi şi $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=\lambda$.

Atunci :

a) Pentru $\lambda>1$ seria este convergentă.
b) Pentru $\lambda<1$ seria este divergentă.
c) Pentru $\lambda=1$ criteriul nu se aplică.

Criteriul lui Kummer

Fie şirul $(c_n)_n\subset R_+^*$ astfel încât seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{c_n}$ este divergentă.

Atunci seria cu termeni pozitivi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ este:

a) convergentă, dacă $\lim\limits_{n\to\infty}\left(c_n\cdot\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-c_{n+1}\right)>0$;

b) divergentă, dacă $\lim\limits_{n\to\infty}\left(c_n\cdot\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-c_{n+1}\right)\le 0$

Exemplu

Se consideră seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\cdot a^n,\quad a>0$. În acest caz, $c_n=n$, iar seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{c_n}$ este divergentă. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(c_n\cdot\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-c_{n+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2(1-a)-2an-a}{a(n+1)}=\begin{cases}\infty & a<1\\ -\infty & a>1\\ -2 & a=1\end{cases},$

de unde rezultă că seria este convergentă pentru $a\in(0,1)$.

Criteriul Raabe-Duhamel

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termenii pozitivi şi $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lambda$.

Atunci :

a) Pentru $\lambda > 1$ seria este convergentă.
b) Pentru $\lambda < 1$ seria este divergentă.
c) Pentru $\lambda = 1$ criteriul nu se aplică.

Criteriul de condensare al lui Cauchy

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi şi descrescători, iar $(a_n)_n$ un şir divergent de numere naturale, astfel încât şirul cu termenul general $\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n - a_{n-1}}$ să fie mărginit. Atunci seriile $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) \cdot u_{a_n}$ au aceeaşi natură.

Observație

Şirul $(a_n)_n$ se alege cel mai frecvent ca fiind $a_n = 2^n$, $(\forall) n \in N$, care satisface condițiile criteriului de condensare.

Criteriul lui Bertrand

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cu termenii pozitivi este:

1) convergentă, dacă $\lim_{n\to\infty} \ln n \cdot \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1 \right] > 1$;

2) divergentă, dacă $\lim_{n\to\infty} \ln n \cdot \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1 \right] < 1$.

Exemplu

Se consideră seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\alpha(\alpha+1)\cdot \ldots \cdot (\alpha+n-1)}$.

$$\lim_{n\to\infty} \ln n \cdot \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1 \right] = \lim_{n\to\infty} \ln n \cdot \left[\frac{n(\alpha-2)-1}{n+1} \right] = \begin{cases} -\infty & \alpha < 2 \\ 0 & \alpha = 2 \\ \infty & \alpha > 2 \end{cases},$$ de

unde rezultă că seria este convergentă pentru $\alpha > 2$ şi devergentă pentru $\alpha \le 2$.

Criteriul lui Gauss

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cu termenii pozitivi pentru care $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2}$, unde $\lambda, \mu \in R$, iar şirul $(\theta_n)_n$ este mărginit , este:

1) convergentă, dacă $\lambda > 1$, sau dacă $\lambda = 1$ şi $\mu > 1$;

2) divergentă, dacă $\lambda < 1$, sau dacă $\lambda = 1$ şi $\mu \le 1$.

Exemplu

Seria hipergeometrică

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\cdot\beta\cdot(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\cdot\gamma\cdot(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} \cdot x^n =$$

$$= 1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}\cdot x + \frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\beta\cdot(\beta+1)}{2!\cdot\gamma(\gamma+1)}\cdot x^2 + \ldots$$

$\alpha,\beta,\gamma,x \in R_+^*$.

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)}\cdot x \to x$ pentru $n \to \infty$. Din criteriul raportului, rezultă că seria este convergentă pentru $x < 1$ şi divergentă pentru $x > 1$.

Pentru $x = 1 \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)}{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{\beta}{n}\right)}$

Se utilizează dezvoltarea $\frac{1}{1+\frac{\alpha}{n}} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha^2}{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)}\cdot\frac{1}{n^2}$ şi

$\frac{1}{1+\frac{\beta}{n}} = 1 - \frac{\beta}{n} + \frac{\beta^2}{\left(1+\frac{\beta}{n}\right)}\cdot\frac{1}{n^2}$.

Se poate scrie $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n} + \frac{\theta_n}{n^2}$, unde $(\theta_n)_n$ este un şir mărginit. Aplicând criteriul lui Gauss, seria este convergentă pentru $\gamma-\alpha-\beta > 0$ şi divergentă pentru $\gamma-\alpha-\beta \le 0$.

Criteriul integral Mac Laurin-Cauchy

Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, care se poate scrie sub forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, unde funcţia *f* este continuă, pozitivă şi monoton descrescătoare.

Atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este:

a) convergentă, dacă $(\exists) \lim_{x\to\infty} F(x) < \infty$;

b) divergentă, dacă $(\exists) \lim_{x\to\infty} F(x) = +\infty$,

unde *F* este o primitivă a lui *f*.

Exemple

1) Să se studieze convergența seriei $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \cdot \ln(\ln n)}$.

Indicație de rezolvare

$f(x) = \frac{1}{x \ln x \cdot \ln \ln x} \Rightarrow F(x) = \ln \ln \ln x$, iar $\lim_{x\to\infty} F(x) = +\infty$, deci seria este divergentă.

2) Să se studieze convergența seriei $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\ln n)^{1+\sigma}}$, $\sigma > 0$.

Indicație de rezolvare

$f(x) = \frac{1}{x \cdot (\ln x)^{1+\sigma}} \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{\sigma \cdot (\ln x)^{\sigma}}$ şi cum $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$ rezultă că seria este convergentă.

Criteriul lui Ermakov

Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, care se poate scrie sub forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, unde funcția *f* este continuă, pozitivă şi monoton descrescătoare.

Atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este:

a) convergentă, dacă $(\exists)\, x_0 \geq 1$, astfel încât $\frac{f(e^x) \cdot e^x}{f(x)} \leq q < 1, \quad x \geq x_0$;

b) divergentă, dacă $(\exists)\, x_0 \geq 1$, astfel ca $\frac{f(e^x) \cdot e^x}{f(x)} \geq 1, \quad x \geq x_0$.

Exemplu

Să se studieze natura seriei $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n (\ln \ln n)^{1+\sigma}}$, $\sigma > 0$.

Indicație de rezolvare

$$f(x)=\frac{1}{x\cdot\ln x(\ln\ln x)^{1+\sigma}}\Rightarrow\frac{f\left(\mathrm{e}^{x}\right)\cdot\mathrm{e}^{x}}{f(x)}=\frac{(\ln\ln x)^{1+\sigma}}{(\ln x)^{\sigma}}\text{, iar}$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\ln\ln x)^{1+\sigma}}{(\ln x)^{\sigma}}=0$, deci seria este convergentă.

2.6 Serii absolut convergente. Serii alternate

Definiția 2.6.1. O serie cu termenii oarecare $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ se numeşte ***absolut convergentă***, dacă seria modulelor $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ este convergentă.

Definiția 2.6.2. Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ este convergentă, dar seria modulelor $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ este divergentă, seria se numeşte ***semiconvergentă***.

Teorema 2.6.3. O serie cu termeni oarecare absolut convergentă este convergentă.

Observație. Reciproca teoremei nu este adevărată, deoarece există serii convergente, dar care nu sunt absolut convergente.

Exemplu: Seria lui Riemann $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{1}{n^{\alpha}}$, pentru $\alpha>1$ este absolut convergentă, iar pentru $\alpha\le 1$ este semiconvergentă.

Observație. Seriile cu termeni pozitivi sunt absolut convergente. Criteriile de convergență stabilite la seriile cu termeni pozitivi sunt valabile şi pentru seriile absolut convergente.

Teorema 2.6.4. Dacă într-o serie absolut convergentă se schimbă ordinea termenilor în mod arbitrar, obținem o nouă serie absolut convergentă cu aceeaşi sumă.

Observație. Teorema este valabilă şi pentru seriile cu termeni pozitivi care sunt absolut convergente.

Teorema lui Riemann. Într-o serie de numere reale, semiconvergentă, se poate schimba ordinea factorilor astfel încât seria obținută să aibă ca sumă un număr dat.

Exemplu: Fie seria semiconvergentă

$S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}+...$. Se pot schimba termenii în ordinea $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2(2n+1)}-\frac{1}{2(2n+2)}+...$ iar noua serie are suma $\frac{1}{2}\cdot S$.

Criterii de convergență simplă (semiconvergență)

Criteriul lui Abel

Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se poate scrie sub forma $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \cdot v_n$, unde şirul $(u_n)_n$ este monoton şi mărginit, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

Criteriul lui Dirichlet

Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se poate scrie sub forma $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \cdot v_n$, unde şirul $(u_n)_n$ este monoton şi convergent la zero, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ are şirul sumelor parțiale mărginit, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

Exemplu

Să se arate că seria $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{\sin nx}{n}$ este convergentă pentru $x \neq 2k\pi,\quad k\in Z$.

Indicație de rezolvare

Şirul cu termenul general $u_n = \dfrac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{n}$ este monoton descrescător şi convergent la zero (utilizând teorema Cesaro-Stolz), iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ are şirul sumelor parțiale mărginit, deoarece $\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \dfrac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot x}{2\cdot \sin\frac{x}{2}}$, de unde

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}, \quad x \neq 2k\pi, \quad k \in Z .$$

Definiția 2.6.5. Se numeşte ***serie alternată*** o serie de forma $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot u_n$, unde $u_k \geq 0, \quad (\forall)\, k \in N^*$.

Criteriul lui Leibniz

Dacă într-o serie alternată $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot u_n$ şirul $(u_n)_n$ este monoton descrescător şi are limita zero, atunci seria este convergentă.

2.7 Operații cu serii

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ două serii. Atunci seriile $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, unde $c_n = a_1 \cdot b_n + a_2 \cdot b_{n-1} + \ldots + a_n \cdot b_1$ se numesc, respectiv, ***suma***, ***diferența*** şi ***produsul seriilor*** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Dacă seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sunt convergente şi au sumele A şi B, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ este convergentă şi are suma $A \pm B$.

Teorema lui Abel

Dacă seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ sunt convergente şi dacă A, B, C sunt, respectiv, sumele lor, atunci $A \cdot B = C$.

Teorema lui Mertens

Dacă seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sunt convergente şi cel puțin una dintre ele este absolut convergentă, atunci seria produs $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ este convergentă şi $A \cdot B = C$.

Teorema lui Cauchy

Dacă seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sunt absolut convergente, atunci seria produs $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ este absolut convergentă.

2.8 Aplicații

$\boxed{\textbf{2.8.1}}$ Să se arate că următoarele serii sunt convergente şi să se determine sumele lor:

a) $\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{3^n}+\ldots$; **b)** $\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\ldots+\frac{n}{a^n}+\ldots, |a|>1$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+a+1}-2\cdot\sqrt{n+a}+\sqrt{n+a-1}\right), \quad a>0$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+n)\cdot(a+n+1)}, a\in R\setminus Z$; **e)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$;

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{\sqrt{4n^2-1}}$.

Indicații de rezolvare

a) Şirul sumelor parțiale are termenul general

$s_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{3^n}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1+\frac{1}{3}}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\frac{1}{4}$, deci seria este convergentă şi are suma $s=\frac{1}{4}$;

b) $s_n=\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\ldots+\frac{n}{a^n}$. Pentru calculul limitei şirului sumelor parțiale se consideră funcția $f(x)=\frac{x}{a}+\left(\frac{x}{a}\right)^2+\ldots+\left(\frac{x}{a}\right)^n, x\in R$. Atunci $s_n=f'(1)$.

În acelaşi timp,

$$f(x)=\frac{x}{a}\cdot\frac{1-\left(\frac{x}{a}\right)^n}{1-\frac{x}{a}}=\frac{x^{n+1}-a^n\cdot x}{x-a}\cdot\frac{1}{a^n}\Rightarrow s_n=\frac{n-(n+1)a+a^{n+1}}{(1-a)^2\cdot a^n}.$$

Deoarece $|a|>1$ rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\frac{a}{(1-a)^2}$, rezultă că seria este convergentă şi are suma $s=\frac{a}{(1-a)^2}$;

c) $s=\sqrt{a}-\sqrt{a+1}$;

d) $a_n = \dfrac{1}{a+n} - \dfrac{1}{a+n+1} \Rightarrow s_n = \dfrac{1}{a+1} - \dfrac{1}{a+n+1} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{1}{a+1}$, deci seria este convergentă şi are suma $s = \dfrac{1}{a+1}$;

e) $s = \ln\dfrac{1}{2}$;

f) $s = 1$.

$\boxed{\textbf{2.8.2}}$ Să se însumeze seriile următoare date prin termenii generali :

a) $u_n = \varphi(n) - \varphi(n-1)$; **b)** $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)\cdot \ldots \cdot (n+k)}$, $k \in N.$;

c) $u_n = \dfrac{4n}{n^4 + 2n^2 + 9}$; **d)** $u_n = \dfrac{n!}{(x+1)(x+2)\cdot \ldots \cdot (x+n)}$;

e) $u_n = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{n^2+n+1}$; **f)** $u_n = \operatorname{arctg}\dfrac{2}{n^2}$;

g) $u_n = \dfrac{\ln(n+1) - \ln n}{\ln n \cdot \ln(n+1)}$, $n > 1$; **h)** $u_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{n!}$.

Indicaţii de rezolvare

a) $s_n = \varphi(n) - \varphi(0)$, deci pentru $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(n) = \ell, \Rightarrow s = \ell - \varphi(0)$;

b) $u_n = \dfrac{1}{k}\left[\dfrac{1}{n(n+1)\ldots(n+k-1)} - \dfrac{1}{(n+1)\ldots(n+k)}\right] \Rightarrow s = \dfrac{1}{k\cdot k!}$;

c)

$$n^4 + 2n^2 + 9 = \left[(n-1)^2 + 2\right]\cdot\left[(n+1)^2 + 2\right] \Rightarrow u_n = \frac{an+b}{(n-1)^2+2} + \frac{cn+d}{(n+1)^2+2} =$$

$$= \frac{1}{(n-1)^2+2} - \frac{1}{(n+1)^2+2} \Rightarrow s = \frac{5}{6}$$

d) $s = \dfrac{1}{x-1}$;

e)

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}=\operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{n(n+1)}}{1+\frac{1}{n(n+1)}}=\operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}}=\operatorname{arctg}\frac{1}{n}-\operatorname{arctg}\frac{1}{n+1}$$

$$s_n=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}\frac{1}{n+1}\Rightarrow s=\lim_{n\to\infty}s_n=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$$

f) $u_n=\operatorname{arctg}\frac{2}{(n^2-1)+1}=\operatorname{arctg}\frac{1}{n-1}-\operatorname{arctg}\frac{1}{n+1}\Rightarrow s=\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{\pi}{4}$;

g) $u_n=\frac{1}{\ln n}-\frac{1}{\ln(n+1)}\Rightarrow s_n=\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln(n+1)}\Rightarrow s=\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{1}{\ln 2}$;

h) $s=\lim_{n\to\infty}s_n=27\cdot \mathrm{e}$.

2.8.3 Folosind criteriul lui Cauchy, să se studieze natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha},\ \alpha\le 1$.

Indicație de rezolvare

Pentru $\alpha\le 0$ se observă că $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}\ne 0$, deci seria este divergentă.

Pentru $0<\alpha\le 1$ se aplică criteriul lui Cauchy, deci $\left|a_{n+1}+...+a_{n+p}\right|=\frac{1}{(n+1)^\alpha}+...+\frac{1}{(n+p)^\alpha}\ge\frac{p}{(n+p)^\alpha},(\forall)p\in N$. Luând $p=n$ se va obține $\left|a_{n+1}+...+a_{n+p}\right|\ge\frac{n}{2^\alpha\cdot n^\alpha}=\frac{1}{2^\alpha}\cdot n^{1-\alpha}$ şi cum $1-\alpha\ge 0$ rezultă că nu se verifică condiția din criteriul lui Cauchy, deci seria este divergentă.

2.8.4 Folosind criteriul lui Cauchy, să se demonstreze convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha},\ \alpha\ge 2$.

Indicație de rezolvare

$$\left|a_{n+1}+...+a_{n+p}\right|=\frac{1}{(n+1)^\alpha}+...+\frac{1}{(n+p)^\alpha}\le\frac{1}{(n+1)^2}+...+\frac{1}{(n+p)^2}<$$

$$<\frac{1}{n(n+1)}+...+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}$$

deci seria este convergentă.

$\boxed{\textbf{2.8.5}}$ Utilizând criteriile de comparaţie, să se stabilească natura următoarelor serii :

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{7n}}{n^2+3n+5}$; **b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}$; **c)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\cdot\sqrt[n]{n}}$; **d)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{n}$; **f)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\left(1+a+\ldots+a^n\right)}$, $a \geq 0$;

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a^n+n}$, $a \geq -1$; **h)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$;

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \sin\dfrac{a}{3^n}$, $0 \leq a \leq 3\pi$.

Indicaţii de rezolvare

a) Se consideră $u_n = \dfrac{\sqrt{7n}}{n^2+3n+5}$ şi $v_n = \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \sqrt{7} \in (0,\infty)$, rezultă că cele două serii au aceeaşi natură şi cum seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă;

b) $u_n = \dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{2}{n}\cdot\ldots\cdot\dfrac{n}{n} < \dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{2}{n} = 2\cdot\dfrac{1}{n^2} = v_n$, iar seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă, deci şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă;

c) Se compară cu seria divergentă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$;

d) Se compară cu seria convergentă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$;

e) $u_n = \dfrac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{n} \geq \dfrac{1}{n} = v_n$ şi cum seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ este divergentă rezultă că şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă;

f) Pentru a=1, seria devine $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ care este convergentă.

Pentru $a > 1 \Rightarrow u_n \leq \dfrac{1}{a^n} = v_n$ şi cum seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă rezultă că şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

Pentru $a \in (0,1) \Rightarrow u_n = \dfrac{1}{n\left(\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}\right)} = \dfrac{1-a}{n\left(1-a^{n+1}\right)} \geq \dfrac{1-a}{n} = v_n$ şi cum seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ este divergentă, rezultă că şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

Pentru a=0, seria este divergentă, ea fiind $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$;

g) $u_n = \dfrac{1}{a^n + n} \leq \dfrac{1}{a^n} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^n = v_n \Rightarrow$ pentru $a > 1$ seria este convergentă.

Pentru $a \in (-1,1)$ se compară cu seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{a^n + n} = 1 \in (0,\infty)$ rezultă că seria va fi divergentă.

Pentru a=1, seria este divergentă, ea fiind $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n+1}$;

h) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$ deci seria este divergentă;

i) Seria este convergentă.

$\boxed{\textbf{2.8.6}}$ Să se stabilească natura următoarelor serii folosind criteriul rădăcinii

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$; **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\cdot a^n, a>0$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^n}, a\geq 0$; **d)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, a\geq 0$;

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{(n+1)(n+a)}-n\right)^n, a>0$; **f)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$;

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{tg}^n\left(a+\frac{\alpha}{n}\right), a\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$; **h)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{an+b}{cn+d}\right)^n, a,b,c,d\in R_+$.

Indicații de rezolvare

a) convergentă;

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=a\mathrm{e}$, de unde rezultă că pentru $a<\frac{1}{\mathrm{e}}$ seria este convergentă, iar pentru $a>\frac{1}{\mathrm{e}}$ seria este divergentă. Pentru $a=\frac{1}{\mathrm{e}}$,

$u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^n}$;

c) convergentă;

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}a\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=a$, de unde rezultă că pentru $a<1$ seria este convergentă, pentru $a>1$ seria este divergentă, iar pentru a=1 se obține seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ care este divergentă;

e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\frac{a+1}{2}$, de unde rezultă că pentru $a<1$ seria este convergentă, pentru $a>1$ seria este divergentă, iar pentru a=1, $u_n=1$, deci seria este divergentă;

f) convergentă;

g) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{tg}\left(a+\frac{\alpha}{n}\right)=\mathrm{tg}\,a$, deci pentru $a\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ seria este convergentă, pentru $a\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ seria este divergentă, iar pentru $a=\frac{\pi}{4}$,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}u_n=\mathrm{e}^{2a}\neq 0$, deci seria este divergentă;

h) Pentru $a < c$ seria este convergentă, pentru $a \ge c$ este divergentă.

$\boxed{2.8.7}$ Folosind criteriul raportului, să se studieze natura următoarelor serii

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^p}, a > 0, p \in R$;

b) $a + \sum_{n=2}^{\infty} \left(2-\sqrt{e}\right)\left(2-\sqrt[3]{e}\right)\ldots\left(2-\sqrt[n]{e}\right)\cdot a^n, a > 0$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$; **d)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(n^3+1\right)\cdot a^n}{(n+1)!}, a \ge 0$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}, a \ge 0$; **f)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n!}}, a \ge 0$.

Indicații de rezolvare

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a$, deci pentru $a < 1$ seria este convergentă, pentru $a > 1$ seria este divergentă, iar pentru a=1 se obține seria armonică generalizată $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, care este convergentă pentru $p > 1$ şi divergentă pentru $p \le 1$;

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a$, deci pentru $a < 1$ seria este convergentă, pentru $a > 1$

seria este divergentă, iar pentru a=1 avem $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 - e^{\frac{1}{n+1}}$.

Deoarece $e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, rezultă că $e^{\frac{1}{n+1}} < 1 + \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 - \frac{1}{n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}}$ şi

din criteriul III de comparație, seria este divergentă;

c) convergentă;

d) convergentă;

e) convergentă;

f) convergentă.

$\boxed{2.8.8}$ Utilizând criteriul logaritmic, să se cerceteze natura seriilor:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln x}, \quad x > 0$; **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln(an+1)-\ln n}}, \quad a > 0$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}$.

Indicații de rezolvare

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = -\ln x$, de unde rezultă că pentru $x < \frac{1}{\mathrm{e}}$ seria este convergentă, iar pentru $x > \frac{1}{\mathrm{e}}$ seria este divergentă. Pentru $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$, se obține seria armonică divergentă;

b) Pentru $a > \mathrm{e}$ seria este convergentă, iar pentru $a < \mathrm{e}$ seria este divergentă;

c) Divergentă, deoarece $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = 0$.

$\boxed{\textbf{2.8.9}}$ Să se stabilească, cu ajutorul criteriului Raabe-Duhamel, natura următoarelor serii :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$; **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^{\alpha}}, a > 0, \alpha \in R \setminus \{a\}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a(a+r)\ldots(a+nr-r)}{b(b+r)\ldots(b+nr-r)}\right]^{\alpha}, a, b, r > 0, \alpha \in R$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)}\right]^{a}, a \in R$.

Indicații de rezolvare

a) divergentă;

b) $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \cdot \frac{\mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\frac{1}{n}}$. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \to R$, definită prin $f(x) = \frac{\mathrm{e} - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$ şi se determină limita acesteia în punctul x=0.

Se va obține $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\frac{\mathrm{e}}{2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\frac{1}{\mathrm{e}}\cdot\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}<1$, deci seria este divergentă;

c) Pentru $\alpha<a$ seria este divergentă, pentru $\alpha>a$ seria este convergentă;

d) Pentru $r<\alpha(b-a)$ seria este convergentă, pentru $r>\alpha(b-a)$ seria este divergentă;

e) Pentru $a<2$ seria este divergentă, pentru $a>2$ seria este convergentă. Pentru *a*=2, se utilizează inegalitatea $\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}\geq\frac{1}{2\sqrt{n}}$, de unde rezultă că $\left[\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}\right]^2\geq\frac{1}{4n}$, deci seria este divergentă.

$\boxed{\textbf{2.8.10}}$ Să se studieze natura seriei armonice generalizate $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha\in R$.

Indicație de rezolvare

Pentru $\alpha\leq 0\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\neq 0$, deci seria este divergentă.

Pentru $\alpha>0\Rightarrow a_n=n^{-\alpha}>0$ este şir descrescător, deci seria armonică generalizată are aceeaşi natură cu seria $\sum\limits_{k=1}^{\infty}2^k\cdot\left(2^k\right)^{-\alpha}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(2^{1-\alpha}\right)^k$, care este seria geometrică cu rația $2^{1-\alpha}$. Deci, pentru $2^{1-\alpha}\geq 1\Leftrightarrow\alpha\leq 1$ seria este divergentă, iar pentru $2^{1-\alpha}<1\Leftrightarrow\alpha>1$ seria este convergentă.

$\boxed{\textbf{2.8.11}}$ Să se arate că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ cu termeni pozitivi şi monoton descrescători are aceeaşi natură cu seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\cdot u_{n^2}$.

Indicație de rezolvare

Se consideră $v_n=u_{n^2}+u_{n^2+1}+\ldots+u_{(n+1)^2}$.

Rezultă $\left[(n+1)^2-n^2+1\right]\cdot u_{(n+1)^2}\leq v_n\leq\left[(n+1)^2-n^2+1\right]\cdot u_{n^2}$, de unde $(n+1)\cdot u_{(n+1)^2}\leq 2(n+1)\cdot u_{(n+1)^2}\leq v_n\leq 2\cdot n\cdot u_{n^2}$ şi din criteriul I de comparație seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\cdot u_{n^2}$ au aceeaşi natură.

$\boxed{2.8.12}$ Să se stabilească natura seriilor alternate :

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+2}}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{10^{n-1}\cdot a+10^{n-2}\cdot a+...+10\cdot a+a}{10^n}$, $a>0$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{2n+1}{3^n}$;

d) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+...+\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+...$

Indicații de rezolvare

a) Şirul cu termenul general $u_n=\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+2}}$ este un şir descrescător, deoarece $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+2}<1$, $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=0$, deci conform criteriului lui Leibniz, seria este convergentă;

b) $\lim_{n\to\infty}u_n=a\cdot\frac{10^n-1}{9\cdot10^n}=\frac{a}{9}\neq0$, deci seria este divergentă;

c) convergentă;

d) $u_n=(-1)^{n+1}\cdot\frac{2}{n}$**,** şir descrescător şi convergent la zero, deci seria este convergentă.

$\boxed{2.8.13}$ Să se studieze convergența absolută şi semiconvergența seriilor cu termenii oarecare :

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{3^n}$, $x\in R$; **b)** $\sum_{n=1}^{\infty}\sin n^2$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$, $x\in R$; **d)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{(n+a)^{\alpha}}$, $\alpha\in R, a\in R\setminus Z_-$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{1-a^n}$, $a\neq\pm1$; **f)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{1+a^{2n}}$, $a\in R$;

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n(n+\sqrt{3})}$ unde $(a_n)_n$ este un şir mărginit.

Indicații de rezolvare

a) $|u_n| \le \dfrac{1}{3^n}$ şi utilizând criteriul I de comparație, seria este absolut convergentă;

b) divergentă, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ nu există;

c) absolut convergentă;

d) Pentru $\alpha > 1$ seria este absolut convergentă, pentru $\alpha \le 0$ seria este divergentă, deoarece nu se verifică condiția necesară de convergență a unei serii, iar pentru $\alpha \in (0,1]$, seria este semiconvergentă, utilizând criteriul lui Leibniz;

e) Pentru $|a| < 1$ seria este absolut convergentă, iar pentru $|a| > 1$ seria este divergentă, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \ne 0$;

f) Pentru $a = \pm 1$ seria este divergentă, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \ne 0$, iar pentru $a \in R \setminus \{-1,1\}$ seria este absolut convergentă;

g) Seria este absolut convergentă, deoarece $u_n = \dfrac{|a_n|}{n\left(n+\sqrt{3}\right)} \le \dfrac{M}{n^2}$.

$\boxed{\textbf{2.8.14}}$ Să se stabilească natura seriilor cu termenii oarecare :

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \cos n^2}{n}$; **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, x \in R$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{\sin nx}{n}$; **d)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\ln\left(2 + e^{3n}\right)}{\ln\left(3 + e^{2n}\right)}$;

e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}$; **f)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$;

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\alpha + \frac{1}{n}}}, \alpha \in R$.

Indicații de rezolvare

a) Se utilizează criteriul lui Dirichlet, considerând şirul cu termenul general $v_n = \dfrac{1}{n}$, care converge la zero şi seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n \cdot \cos n^2$, pentru care $u_n = \frac{1}{2}\left[\sin\left(n+n^2\right)+\sin\left(n-n^2\right)\right]$, deci şirul sumelor parţiale $s_n = \frac{1}{2}\sin\left(n+n^2\right)$ este mărginit. Seria este deci convergentă;

b) convergentă, cu criteriul lui Dirichlet, pentru şirul cu termenul general $v_n = \frac{1}{n}$ convergent la zero şi seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \Rightarrow s_n = \sin x + \ldots + \sin nx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sin\frac{x}{2}\cdot s_n = 2\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)x \cdot \sin\frac{nx}{2}$$

de unde rezultă că $|s_n| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$, deci şirul sumelor parţiale este mărginit, iar seria este convergentă;

c) convergentă;

d) divergentă, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \ne 0$;

e) convergentă, utilizând criteriul lui Abel, pentru şirul cu termenul general $v_n = \sqrt[n]{n}$ care este monoton şi mărginit şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$ convergentă (Leibniz);

f) Se utilizează inegalitatea

$$\ln n < n, (\forall)\, n \in N^* \Rightarrow u_n \le n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = v_n.$$

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă, utilizând criteriul III de comparaţie cu seria convergentă $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$;

g) Se studiază convergenţa absolută, utilizând criteriul III de comparaţie cu seria cu termenul general $v_n = \frac{1}{n^{\alpha}} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{|u_n|}{v_n} = 1 \in (0,\infty)$, deci cele două serii au aceeaşi natură. Rezultă că pentru $\alpha > 1$ seria este absolut convergentă.
Pentru $\alpha \le 0$ seria este divergentă, deoarece nu se verifică condiţia necesară de convergenţă a unei serii.

Pentru $\alpha \in (0,1]$ se aplică criteriul lui Abel pentru şirul cu termenul general $\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ monoton şi mărginit şi pentru seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\alpha}}$ convergentă cu criteriul lui Leibniz.

$\boxed{\textbf{2.8.15}}$ Să se arate că:

a) Suma dintre o serie convergentă şi una divergentă este o serie divergentă;

b) Există serii divergente a căror sumă este o serie convergentă.

Indicații de rezolvare

a) Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie convergentă şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ o serie divergentă. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ ar fi convergentă, atunci diferența dintre aceasta şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ar fi o serie convergentă, dar diferența este seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, care este o serie divergentă. Rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ este divergentă;

b) Seriile $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ sunt divergente, dar suma lor este seria cu suma egală cu zero, deci este o serie convergentă.

$\boxed{\textbf{2.8.16}}$ Să se efectueze produsul seriilor absolut convergente $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}$ şi să se deducă de aici suma seriei $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}$.

Indicație de rezolvare

Seria valorilor absolute este $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ pentru ambele serii. Pentru aceasta, şirul sumelor parțiale este $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ convergent către e, de unde rezultă că ambele serii sunt absolut convergente. Din Teorema lui Cauchy, seria produs $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ este absolut convergentă şi suma ei verifică $C = A \cdot B$.

Dar $c_n = \frac{1}{n!} \cdot (1-1)^n = 0 \Rightarrow C = 0$. Cum $A = e \Rightarrow B = 0$. Deci, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n!} = 0$.

$\boxed{\textbf{2.8.17}}$ Se poate ca produsul a două serii divergente să fie o serie absolut convergentă ?

Să se efectueze produsul seriilor $1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$ şi

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

$\boxed{\textbf{2.8.18}}$ Ştiind că $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ să se calculeze $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot (n+1)^2}$.

Indicaţie de rezolvare

$\frac{1}{n^2(n+1)^2} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)^2 = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - 2 \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$, de unde rezultă

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2} = \frac{\pi^2 - 9}{3}.$$

$\boxed{\textbf{2.8.19}}$ Să se studieze convergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)}\right]^p \cdot \frac{1}{n^q}$, ştiind că $\frac{1}{2\sqrt{n}} \le \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)} \le \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

Indicaţie de rezolvare

Condiţia necesară de convergenţă a seriei se verifică pentru $\frac{p}{2} + q > 0$. Deci pentru $\frac{p}{2} + q \le 0$ seria este divergentă.

Aplicându-se criteriul Raabe-Duhamel, se obţine o serie convergentă pentru $\frac{p}{2} + q > 1$ şi divergentă pentru $\frac{p}{2} + q < 1$.

Pentru cazul în care $\frac{p}{2}+q=1$ se aplică criteriul comparației I cu seria divergentă cu termenul general $\frac{1}{n}$.

$\boxed{2.8.20}$ Fie şirul definit prin $\begin{cases} a_1=\sqrt{\alpha} \\ a_n=\sqrt{\alpha+a_{n-1}}, \alpha>0, n\geq 2 \end{cases}$.

a) Să se demonstreze că şirul $(a_n)_n$ este convergent şi să se calculeze $\ell=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

b) Să se studieze natura seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\ell-a_n)$.

Indicație de rezolvare

a) Se demonstrează că şirul este monoton crescător, de termeni pozitivi şi că are limita $\ell=\frac{1+\sqrt{1+4\alpha}}{2}$.

b) convergentă.

$\boxed{2.8.21}$ a) Să se studieze convergența şirului $(x_n)_n$ cu $x_0>0$ şi definit prin $x_{n+1}=\frac{2\cdot a\cdot x_n}{a+x_n}, a\in R, a>0$.

b) Să se studieze convergența seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n-a)$.

Indicație de rezolvare

a) Dacă $x_0<a$ şirul este crescător, dacă $x_0>a$ şirul este descrescător. Limita şirului este a.

b) convergentă.

$\boxed{2.8.22}$ Să se demonstreze că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ este absolut convergentă pentru orice x real. Dacă $s(x)$ este suma seriei, să se stabilească relația $s(x+y)=s(x)\cdot s(y), (\forall)\, x,y\in R$.

Indicație de rezolvare

Dacă se consideră $u_n=\left|\frac{x^n}{n!}\right| \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=0<1$, deci seria este absolut convergentă.

Fie $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ s(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}\Rightarrow$

$$\Rightarrow s(x)\cdot s(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(y^n+\frac{n}{1!}\cdot y^{n-1}\cdot x+...+\frac{n!}{1!}\cdot x^n\right)=\frac{1}{n!}\cdot(x+y)^n=s(x+y)$$

$\boxed{\textbf{2.8.23}}$ Se dau şirurile $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ definite prin formulele de recurenţă :

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\quad b_{n+1}=\frac{2\cdot a_n\cdot b_n}{a_n+b_n},\quad n\in N,\quad a_0=a>b=b_0>0.$$

a) Să se demonstreze că cele două şiruri sunt convergente şi că au aceeaşi limită ℓ;

b) Să se studieze natura seriei $\sum_{n=0}^{\infty}(\ell-b_n)$.

Indicaţie de rezolvare

a) Se demonstrează că şirul $(a_n)_n$ este monoton descrescător de termeni pozitivi, iar $(b_n)_n$ este monoton crescător, prin inducţie matematică .
Notând $\ell_1=\lim_{n\to\infty}a_n$ şi $\ell_2=\lim_{n\to\infty}b_n$ şi trecând la limită în relaţiile de recurenţă, rezultă că $\ell_1=\ell_2=\ell$;

b) Seria numerică $\sum_{n=0}^{\infty}(\ell-b_n)$ este cu termenii pozitivi şi aplicându-se criteriul raportului, rezultă că este convergentă.

$\boxed{\textbf{2.8.24}}$ Fie $(\lambda_n)_n$ un şir de elemente din $[0,1]$ şi $(x_n)_n$ un şir definit prin $x_1=b,\quad x_n=\lambda_n\cdot a+(1-\lambda_n)\cdot x_{n-1},\quad (\forall)n\geq 2$, unde $a,b\in R$ sunt fixate, astfel încât $a<b$.

a) Să se demonstreze că şirul $(x_n)_n$ este convergent;

b) Dacă şirul $(\lambda_n)_n$ este monoton crescător, să se studieze natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty}(a-x_n)$.

Indicaţie de rezolvare

b) Fie $x=\lim_{n\to\infty}x_n,\quad \lambda=\lim_{n\to\infty}\lambda_n\Rightarrow x=\lambda\cdot a+(1-\lambda)\cdot x\Rightarrow x=a$.

Dacă termenul general al seriei este $u_n=a-x_n$, din criteriul raportului, rezultă că $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a-x_{n+1}}{a-x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a-[\lambda_{n+1}\cdot a+(1-\lambda_{n+1})\cdot x_n]}{a-x_n}=1-\lambda<1$

deci seria este convergentă.

Capitolul 3

LIMITE DE FUNCȚII ŞI CONTINUITATE

3.1 Limite de funcții şi continuitatea în spații topologice

Definiția 3.1.1. Fie (X, τ_X) şi (Y, τ_Y) două spații topologice, $A \subset X$, $a \in \overline{A}$ şi $f : A \to Y$. Spunem că funcția f ***are limită în punctul*** *a* dacă există $\ell \in Y$ cu proprietatea:

$(\forall) V \in V_{\tau_Y}(\ell) \Rightarrow (\exists) U \in U_{\tau_X}(a)$ cu $f(U \cap A) \subset V$, unde $V_{\tau_X}(a)$ reprezintă mulțimea vecinătăților lui *a* în topologia τ_X, iar $V_{\tau_Y}(\ell)$ reprezintă mulțimea vecinătăților lui ℓ în topologia τ_Y.

$\ell \in Y$ se numeşte ***limita lui*** f ***în punctul*** *a* şi se notează $\ell = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Observație. Dacă (Y, τ_Y) este spațiu topologic separat, $\ell \in Y$ este unic.

Teorema 3.1.2. Fie (X, τ_X) şi (Y, τ_Y) două spații topologice, $A \subset X$ şi $a \in \overline{A}$. Presupunem că există $(U_n)_{n \in N}$ un sistem fundamental de vecinătăți ale lui *a*, cu proprietatea $U_n \supset U_{n+1}$. Fie $f : X \to Y$.

Atunci $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ există dacă şi numai dacă pentru orice şir de elemente din *A*, $(x_n)_{n \in N}$ cu $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, şirul $(f(x_n))_{n \in N}$ este convergent.

Criteriul Cauchy-Bolzano. Fie (X, τ_X) un spațiu topologic separat, $A \subset X$, $a \in A'$ şi aplicația $f : A \to R$. Presupunem că există $(U_n)_{n \in N}$ un sistem fundamental de vecinătăți ale lui *a*.

Următoarele afirmații sunt echivalente:

1) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ există;

2) $(\forall) \varepsilon > 0 \Rightarrow (\exists) U_\varepsilon \in V_{\tau_X}(a)$ cu proprietatea $(\forall) x', x'' \in U_\varepsilon \cap A$ rezultă că $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Definiția 3.1.3. Fie (X, τ_X) şi (Y, τ_Y) două spații topologice, $f : X \to Y$ şi $a \in X$. Spunem că f este ***continuă în punctul*** *a* dacă pentru orice $V \in V_{\tau_Y}(f(a))$ există $U \in V_{\tau_X}(a)$ astfel încât $f(U) \subset V$.

Teorema 3.1.4. Fie (X, τ_X) şi (Y, τ_Y) două spaţii topologice, $f : X \to Y$ şi $a \in X$. Aplicaţia *f* este continuă în punctul *a* dacă şi numai dacă imaginea inversă prin *f* a oricărei vecinătăţi a lui $f(a)$ este o vecinătate a lui *a*.

Propoziţia 3.1.5. Fie (X, τ_X) şi (Y, τ_Y) două spaţii topologice, $f : X \to Y$ şi $a \in X$. Aplicaţia *f* este continuă în punctul *a* dacă şi numai dacă există $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ şi $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Propoziţia 3.1.6. Fie (X, τ_X) şi (Y, τ_Y) două spaţii topologice, $f : X \to Y$, $a \in X$ şi $U_a \subset V_{\tau_X}(a)$, $W_{f(a)} \subset V_{\tau_Y}(f(a))$ sisteme fundamentale de vecinătăţi ale lui *a*, respectiv $f(a)$.

Atunci f este continuă în punctul a dacă şi numai dacă pentru orice $W \in W_{f(a)}$ există $U \in U_a$ astfel încât $f(U) \subset W$.

Exemple

1) Fie $f : (R, \tau_R) \to (R, \tau_R)$, $a \in R$.
f este continuă în punctul *a* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru $(\forall) x \in R$ cu $|x - a| < \delta_\varepsilon$ să avem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

2) Fie $f : (C, \tau_C) \to (C, \tau_C)$, $a \in C$.
f este continuă în punctul *a* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru $(\forall) z \in C$ cu $|z - a| < \delta_\varepsilon$ să avem $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$.

Teorema 3.1.7. Fie (X, τ_X) şi (Y, τ_Y) două spaţii topologice separate, $A \subset X$ şi $a \in A$. Presupunem că există $(U_n)_{n \in N}$ sistem fundamental de vecinătăţi ale lui *a*, cu proprietatea $U_n \supset U_{n+1}$. Fie $f : X \to Y$.

f este continuă în punctul *a* dacă şi numai dacă pentru orice şir $(x_n)_{n \in N}$ de elemente din *A* cu $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, rezultă că $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$.

Teorema 3.1.8. Fie (X, τ_X) şi (Y, τ_Y) două spaţii topologice şi $f : X \to Y$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1) *f* este continuă pe *X*;

2) $(\forall) A \subset X \Rightarrow f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$;

3) $(\forall) F$ închisă în τ_Y rezultă că $f^{-1}(F)$ este închisă în τ_X;

4) $(\forall) B \subset Y \Rightarrow \overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$;

5) $(\forall)B\subset Y\Rightarrow f^{-1}\left(\overset{\circ}{B}\right)\subset \overset{\circ}{f^{-1}(B)}$;

6) $(\forall)G\in\tau_Y\Rightarrow f^{-1}(G)\in\tau_X$.

Exemple

1) Fie spațiul $(X,P(X))$ spațiul topologic discret şi (Y,τ_Y) un spațiu topologic oarecare. O funcție arbitrară $f:X\to Y$ este continuă pe *X*.

Indicație de rezolvare

Pentru $D\in\tau_Y\Rightarrow f^{-1}(D)\in P(X)$, deci este mulțime deschisă din *X* şi din teorema 3.1.8 (6) rezultă că funcția *f* este continuă.

2) Dacă τ_1,τ_2 sunt două topologii pe *X* cu $\tau_1\subset\tau_2$, atunci aplicația identică $1_X:(X,\tau_2)\to(X,\tau_1)$ este continuă pe *X*.

Indicație de rezolvare

Pentru $D\in\tau_1\Rightarrow 1_X^{-1}(D)=D\in\tau_2$ deoarece $\tau_1\subset\tau_2$, şi utilizând teorema 3.1.8 (6) rezultă că aplicația identică este continuă.

Teorema 3.1.9. Fie (X,τ_X), (Y,τ_Y) şi (Z,τ_Z) trei spații topologice. Dacă $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ sunt continue pe domeniile lor de definiție, atunci aplicația compusă $g\circ f:X\to Z$ este continuă pe *X*.

Definiția 3.1.10. Două spații topologice (X,τ_X) şi (Y,τ_Y) se numesc ***homeomorfe*** dacă există o aplicație bijectivă $f:X\to Y$, astfel încât *f* şi f^{-1} să fie continue pe *X*, respectiv pe *Y*.

În acest caz, *f* se numeşte ***homeomorfism***.

Exemple

1) Fie mulțimea $X=(0,\infty)$ înzestrată cu topologia τ_R.

Funcția $f:X\to X$, definită prin $f(x)=\dfrac{1}{x}$ este homeomorfism.

2) Fie spațiile topologice $(R,P(R)),(R,\tau_R)$ şi aplicația bijectivă $1_R:R\to R,\ \ 1_R(x)=x$. Deoarece $1_R^{-1}:R\to R$ nu este continuă rezultă că 1_R nu este homeomorfism.

3.2 Limite de funcții şi continuitatea în spații metrice

Teorema 3.2.1. Fie (X,d) şi (Y,ρ) două spații metrice, $A\subset X$, $a\in\overline{A}$, $\ell\in Y$ şi $f:A\to Y$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1) $\ell=\lim\limits_{x\to a} f(x)$;

2) Pentru orice $\varepsilon>0$ există $\delta_\varepsilon>0$ astfel încât pentru orice $x\in A$ cu $d(x,a)<\delta_\varepsilon$ să avem $\rho(f(x),\ell)<\varepsilon$;

3) Oricare ar fi şirul $(x_n)_{n\in N}\subset A$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\ell$.

Corolar 3.2.2. Fie $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ şi $a\in X$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1) *f* este continuă în *a*;

2) Pentru orice $\varepsilon>0$ există $\delta_\varepsilon>0$ astfel încât pentru orice $x\in X$ cu $d(x,a)<\delta_\varepsilon$ să avem $\rho(f(x),f(a))<\varepsilon$;

3) Oricare ar fi şirul $(x_n)_{n\in N}\subset X$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(a)$.

Corolar 3.2.3. Fie (X,d) şi (Y,ρ) două spații metrice, $A\subset X$, $a\in A'$ şi $f:A\to Y$. Atunci *f* este continuă în *a* dacă şi numai dacă limita $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ există şi este egală cu $f(a)$.

Exemplu

Fie spațiul metric (R^n,d), $n\geq 1$, unde *d* este distanța euclidiană.

Se definesc aplicațiile de proiecție $p_k:R^n\to R$ $(1\leq k\leq n)$ prin:

$p_k(x_1,x_2,...,x_n)=x_k$.

Acestea sunt continue pe R^n.

Indicație de rezolvare

Fie un punct $a=(a_1,a_2,...,a_n)\in R^n$ fixat şi un şir $(x_p)_{p\in N}$ de elemente din R^n, astfel încât $\lim\limits_{p\to\infty} x_p=a$. Cum $x_p=(x_{p1},x_{p2},...,x_{pn})\Rightarrow \lim\limits_{p\to\infty} x_{pk}=a_k$ în mulțimea numerelor reale şi deci $p_k(x_p)\to p_k(a)$ $(\forall)k$, de unde rezultă că fiecare aplicație de proiecție p_k este continuă.

3.3 Continuitate uniformă

Propoziția 3.3.1. Orice mulțime compactă K dintr-un spațiu metric (X,d) este închisă şi mărginită.

Teorema 3.3.2. Fie (X,d) un spațiu metric. O submulțime $K \subset X$ este compactă dacă şi numai dacă orice şir de puncte din K are un subşir convergent în K.

Corolar 3.3.3. Un spațiu metric (X,d) este compact dacă şi numai dacă orice şir de puncte din X conține un subşir convergent.

Teorema 3.3.4. O submulțime $K \subset R^m, \quad m \geq 1$ este compactă dacă şi numai dacă este închisă şi mărginită.

Definiția 3.3.5. Fie (X,d) şi (Y,ρ) două spații metrice. O funcție $f : X \to Y$ se numeşte ***uniform continuă*** pe X dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $x', x'' \in X$ cu $d(x', x'') < \delta_\varepsilon \Rightarrow \rho(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$

Teorema 3.3.6. Fie (X,d) şi (Y,ρ) două spații metrice şi $f : X \to Y$. Dacă (X,d) este compact şi f este continuă pe X, atunci f este uniform continuă pe X.

Definiția 3.3.7. Fie (X,d) şi (Y,ρ) două spații metrice. O funcție $f : X \to Y$ se numeşte ***lipschitziană*** dacă există o constantă reală $C > 0$ astfel încât $\rho(f(x), f(y)) \leq C \cdot d(x,y), \quad (\forall)\, x, y \in X$.

Propoziția 3.3.8. Fie (X,d) şi (Y,ρ) două spații metrice. Orice funcție $f : X \to Y$ lipschitziană este uniform continuă.

3.4 Aplicații

$\boxed{\textbf{3.4.1}}$ Să se studieze continuitatea funcției $f(x) = x \cdot E(x),\ x \in [0,\infty)$, unde $E(x)$ este partea întreagă a lui x.

Indicație de rezolvare

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\in[0,1)\\ x & x\in[1,2)\\ \ldots & \\ nx & x\in[n,n+1)\\ \ldots & \end{cases}.$$

Problema continuității se pune, deci, în punctele $x=n, n\in N$.

$\lim\limits_{\substack{x\to n\\ x<n}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to n\\ x<n}}(n-1)\cdot x=n\cdot(n-1)\neq f(n)=n^2$, deci funcția este continuă pe $[0,\infty)\setminus N$.

3.4.2 Să se studieze continuitatea funcției $f(x)=x^2-E(x^2)$, $x\in[0,\infty)$, unde $E(x)$ este partea întreagă a lui *x*.

Indicație de rezolvare

Se exprimă partea întreagă a lui *x* şi se studiază continuitatea în punctele $x=\sqrt{n}, n\in N$.

3.4.3 Folosind criteriul Cauchy-Bolzano, să se cerceteze existența limitelor:

a) $\lim\limits_{x\to 0} x^n\cdot\sin\frac{1}{x}, n\in N$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sign} x$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$; **d)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{x+1}$.

Indicații de rezolvare

a) Pentru $\varepsilon>0$ arbitrar, se caută $\delta(\varepsilon)>0$, astfel încât pentru $(\forall)\, x', x''$ care verifică $|x'|<\delta(\varepsilon), |x''|<\delta(\varepsilon)$, să se verifice $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

$|f(x')-f(x'')|=\left|(x')^n\cdot\sin\frac{1}{x'}-(x'')^n\cdot\sin\frac{1}{x''}\right|\leq|x'|^n+|x''|^n<2(\delta(\varepsilon))^n$ şi impunând ca $2(\delta(\varepsilon))^n<\varepsilon\Rightarrow 0<\delta(\varepsilon)<\sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{2}}$ şi deci, conform teoremei Cauchy-Bolzano, limita există;

b) Pentru $x'=\frac{1}{n}<\delta$ si $x''=-\frac{1}{n}, |x''|<\delta\Rightarrow|f(x')-f(x'')|=2$, deci limita nu există;

c) Pentru $x' = \dfrac{1}{2n\pi}, x'' = \dfrac{2}{(2n+1)\pi} \Rightarrow |f(x') - f(x'')| = 1$, deci limita nu există;

d) limita există.

$\boxed{\textbf{3.4.4}}$ Fie aplicațiile continue $f, g : A \subset R \to R$ şi mulțimile:

$E = \{x \in A /\ f(x) = g(x)\}$

$F = \{x \in A /\ f(x) \leq g(x)\}$

$G = \{x \in A /\ f(x) < g(x)\}$

Să se arate că mulțimile E şi F sunt închise, iar G este deschisă.

Indicație de rezolvare

Funcția $f - g : A \to R,\ (f-g)(x) = f(x) - g(x), (\forall)\, x \in A$ este continuă.

$E = (f-g)^{-1}(0), \quad F = (f-g)^{-1}(-\infty, 0], \quad G = (f-g)^{-1}(-\infty, 0).$

$\boxed{\textbf{3.4.5}}$ Să se studieze continuitatea uniformă a funcțiilor :

a) $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1} \cdot \sin^2 x^2, \quad x \in [0, \infty)$ **;**

b) $f(x) = \ln x,\ x \in [\varepsilon, e], \varepsilon > 0$ **; c)** $f(x) = \ln x, \quad x \in (0, \mathrm{e}]$ **;**

d) $f(x) = \sin x^2, \quad x \in R$ **; e)** $f(x) = \dfrac{x}{x+1} + x, \quad x \in (0, \infty)$ **;**

f) $f(x) = \dfrac{x}{x+1} + x, \quad x \in (-1, \infty)$**.**

Indicații de rezolvare

a) Pentru $x_1 = \sqrt{2n\pi}, x_2 = \sqrt{2n\pi + \dfrac{\pi}{2}} \Rightarrow |x_1 - x_2| \to 0$,

dar $|f(x_1) - f(x_2)| > 1$, deci funcția nu este uniform continuă;

b) Funcția este continuă pe interval compact, deci este uniform continuă;

c) Pentru $x_1 = \dfrac{1}{n}, x_2 = \dfrac{1}{2n+1} \Rightarrow |x_1 - x_2| \to 0$, dar

$|f(x_1) - f(x_2)| = \ln\left(2 + \dfrac{1}{n}\right) \geq \ln 2$, deci funcția nu este uniform continuă;

d) Nu este uniform continuă.

e) Pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar şi pentru $x_1, x_2 \in (0, \infty)$, pentru care $|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon \Leftrightarrow |x_1| < \delta_\varepsilon, |x_2| < \delta_\varepsilon$, se va obține :

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| \frac{x_1}{x_1 + 1} + x_1 - \frac{x_2}{x_2 + 1} - x_2 \right| \le$$

$$\le |x_1 - x_2| + \left| \frac{x_1 - x_2}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} \right| < 2 \cdot |x_1 - x_2| < 2\delta_\varepsilon$$

şi impunând condiția $2\delta_\varepsilon < \varepsilon$, rezultă că funcția este uniform continuă;

f) Pentru $x_1 = -1 + \frac{1}{n}$, $x_2 = -1 + \frac{2}{n} \Rightarrow |x_1 - x_2| = \frac{1}{n} \to 0$, dar $|f(x_1) - f(x_2)| \to \infty$, deci funcția nu este uniform continuă.

$\boxed{3.4.6}$ Să se studieze continuitatea uniformă a funcțiilor $f_1, f_2, f_1 + f_2, f_1 \cdot f_2$ definite pe R prin $f_1(x) = x \cdot \sin^2 x^2$; $f_2(x) = x \cdot \cos^2 x^2$.

Indicație de rezolvare

Pentru $x_1 = \sqrt{(2n+1)\frac{\pi}{2}}$, $x_2 = \sqrt{n\pi} \Rightarrow |x_1 - x_2| \to 0$, dar $|f_1(x_1) - f_1(x_2)| \to \infty$ deci funcția f_1 nu este uniform continuă.

În mod asemănător se arată că nici funcția f_2 nu este uniform continuă.

Funcția $(f_1 + f_2)(x) = x$ şi este uniform continuă pe R.

Se arată că funcția $f_1 \cdot f_2$ nu este uniform continuă, considerând $x_1 = \sqrt{(2n+1)\frac{\pi}{4}}$, $x_2 = \sqrt{\frac{n\pi}{2}}$.

$\boxed{3.4.7}$ Fie $f : [0,3] \to [0,3]$, $f(x) = \frac{3x - x^2 + 4}{4}$.

a) Să se arate că $\mathrm{Im}(f) \subset [0,3]$;

b) Să se arate că *f* este o contracție de coeficient *k*;

c) Să se deducă de aici că şirul $(x_n)_n$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $x_0 = 0$ converge la unicul punct fix al lui *f*.

Indicație de rezolvare

a) $f(x)=-\frac{1}{4}\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{25}{16}$, deci $\max(f(x))$ este atins pentru $x=\frac{3}{2}$, iar $\min(f(x))$ pentru $x=0,\quad x=3$, de unde rezultă că $\mathrm{Im}(f)\subset[0,3]$;

b) Pentru orice cuplu de elemente $x,y\in[0,3]$ rezultă:

$|f(x)-f(y)|=\frac{1}{4}\cdot|x-y|\cdot|3-x-y|\le\frac{3}{4}\cdot|x-y|$, deci funcția este o contracție de coeficient $k=\frac{3}{4}$;

c) Şirul $(x_n)_n$ converge la unicul punct fix al lui *f*, adică la $c=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$.

3.4.8 Să se arate că funcția $f:R\to R,\quad f(x)=\frac{1}{2}\cdot\sin x$ este o contracție de coeficient $k=\frac{1}{2}$ şi apoi să se studieze convergența şirului $(x_n)_n$, definit prin $x_{n+1}=f(x_n),\quad n\ge 0,\quad x_0=a\in R$.

3.4.9 Să se arate că funcția $f:\left[\sqrt{2},2\right]\to\left[\sqrt{2},2\right],\quad f(x)=\sqrt{2+x}$ este o contracție de coeficient $k=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ şi apoi să se studieze convergența şirului $(x_n)_n$ definit prin $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n},\quad n\ge 0,\quad x_0=\sqrt{2}$.

Indicație de rezolvare

Pentru orice pereche de elemente $x,y\in\left[\sqrt{2},2\right]$ rezultă:

$$|f(x)-f(y)|=\left|\sqrt{2+x}-\sqrt{2+y}\right|=\left|\frac{x-y}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2+y}}\right|\le\frac{|x-y|}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2+y}}\le$$

$$\le\frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\le\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot|x-y|$$

deci *f* este o contracție de coeficient $k=\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Şirul definit prin relația de recurență $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n},\quad n\ge 0,\quad x_0=\sqrt{2}$ este convergent către unicul punct fix al lui *f* şi anume $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

Capitolul 4

ŞIRURI ŞI SERII DE FUNCȚII

4.1 Şiruri de funcții

Fie familia de funcții $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ definite pe aceeaşi mulțime X şi cu valori reale. Dacă mulțimea indicilor I este mulțimea numerelor naturale, atunci avem un şir de funcții.

Notație: $(f_n)_n$.

Definiția 4.1.1. Un punct $a \in X$ este ***punct de convergență al şirului de funcții*** $(f_n)_n$ dacă şirul numeric $(f_n(a))_n$ este convergent.

Mulțimea punctelor de convergență ale şirului de funcții $(f_n)_n$ se numeşte ***mulțimea de convergență*** a şirului $(f_n)_n$.

Exemple

1) Şirul de funcții $f_n(x) = x^n, \quad n \in N$ are mulțimea de convergență intervalul $[-1,1]$.

2) Şirul de funcții $f_n(x) = \dfrac{x}{n^2}, \quad n \in N^*$ are mulțimea de convergență R.

Definiția 4.1.2. Fie $(f_n)_n$ un şir de funcții definite pe mulțimea X şi având mulțimea de convergență A. Dacă $f(x)$ este limita şirului numeric $(f_n(x))_n, \quad (\forall) x \in A$, atunci s-a stabilit o corespondență $x \to f(x)$ a mulțimii A în mulțimea numerelor reale. Funcția $f(x)$ definită prin $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in A$ se numeşte ***funcția limită*** pe mulțimea A a şirului de funcții considerat.

Exemple

1) Şirul de funcții $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$ are mulțimea de convergență R şi pentru orice x real $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0, \quad (\forall) x \in R$.

2) Şirul de funcții $f_n(x) = a^{\frac{nx+1}{n+2}}, \quad n \in N, \quad a > 0$ este convergent pentru orice x real şi are funcția limită $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = a^x, \quad x \in R$.

Definiția 4.1.3. Se spune că şirul de funcții $(f_n)_n$ este ***simplu convergent*** pe *X* către funcția *f*, dacă pentru $(\forall)\, x \in X$ şi pentru $(\forall)\, \varepsilon > 0$ există un număr $n(\varepsilon, x)$, astfel încât $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad (\forall)\, n > n(\varepsilon, x)$.

Exemplu

Şirul de funcții $f_n(x) = \dfrac{x^4}{n^2}$ definit pe *R*, este convergent pe *R* către funcția $f(x) = 0, \quad (\forall)\, x \in R$. Se caută un număr $n(\varepsilon, x)$, astfel încât $\dfrac{x^4}{n^2} < \varepsilon, \quad (\forall)\, n > n(\varepsilon, x)$. Rezultă $n^2 > \dfrac{x^4}{\varepsilon} \Rightarrow n(\varepsilon, x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{\varepsilon}}$.

Definiția 4.1.4. Se spune că şirul de funcții $(f_n)_n$ este ***uniform convergent*** pe *X* către funcția *f*, dacă pentru $(\forall)\, \varepsilon > 0$ există un număr $n(\varepsilon)$, astfel încât $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad (\forall)\, n > n(\varepsilon)$ şi $(\forall)\, x \in X$.

Observație

Un şir de funcții uniform convergent este şi simplu convergent. Reciproca nu este adevărată.

Propoziția 4.1.5. Dacă şirul de funcții $(f_n)_n$, definit pe mulțimea *X*, satisface condițiile $|f_n(x)| \le a_n, \quad (\forall)\, x \in X, n \in N$, unde $(a_n)_n$ este un şir de numere pozitive cu limita zero, atunci şirul $(f_n)_n$ converge uniform către funcția constantă zero.

Corolar. Dacă pentru un şir de funcții $(f_n)_n$ definite pe o mulțime *X*, există o funcție $f : X \to R$ şi un şir de numere reale $(a_n)_n, \quad a_n > 0$, pentru care $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, astfel încât $|f_n(x) - f(x)| < a_n, \quad (\forall)\, x \in X$, atunci şirul de funcții $(f_n)_n$ converge uniform către funcția *f*.

Criteriul lui Cauchy. Şirul $(f_n)_n$ de funcții $f_n : X \to R$ converge uniform pe *X* către funcția $f : X \to R$ dacă şi numai dacă :
$(\forall)\, \varepsilon > 0$, $(\exists)\, n(\varepsilon)$ pentru care $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, (\forall)\, n, m > n(\varepsilon)$ şi $(\forall)\, x \in I$.

Teorema 4.1.6. Fie $(f_n)_n$ un şir de funcții uniform convergent pe *X* către funcția *f*. Dacă toate funcțiile f_n sunt continue în punctul $a \in X$, atunci şi funcția limită va fi continuă în punctul *a*.

Observații

1) În cazul în care $a \in X \cap X'$, teorema 5.1.6 este valabilă sub forma mai generală: Dacă şirul de funcții $(f_n)_n$ este uniform convergent pe $X \setminus \{a\}$, unde $a \in X \cap X'$ şi dacă toate funcțiile f_n sunt continue în punctul a, atunci şirul de funcții $(f_n)_n$ este uniform convergent pe *X* şi limita sa este continuă în *a*.

2) Teorema 5.1.6 rămâne valabilă dacă funcțiile f_n sunt continue la stânga (la dreapta) în punctul *a* şi atunci funcția *f* va fi continuă la stânga (la dreapta) în punctul *a*.

3) Condiția ca şirul de funcții $(f_n)_n$ să fie uniform convergent pe mulțimea *X* este numai suficientă, nu şi necesară, pentru ca funcția *f* să fie continuă într-un punct *a*.

Exemplu

Fie şirul de funcții $(f_n)_n$, definite prin $f_n(x) = x^n, \quad x \in (0,1)$. Pentru acesta, $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0 = f(x), \quad (\forall)\, x \in (0,1)$. Funcția *f* şi funcțiile f_n sunt continue, dar şirul de funcții considerat nu este uniform convergent.

Corolar. Un şir $(f_n)_n$ de funcții continue pe *X*, uniform convergent pe *X*, are limita o funcție continuă pe *X*.

Teorema Dini. Dacă şirul de funcții $(f_n)_n$, $f_n : I \to R$, este simplu convergent către funcția $f : I \to R$, unde *I* este un interval compact şi dacă $(f_n)_n$ este monoton în fiecare punct al lui *I*, iar funcțiile f_n şi *f* sunt continue pe *I*, atunci convergența şirului este uniformă.

Teorema 4.1.7. Fie *I* un interval mărginit şi $(f_n)_n$ un şir de funcții derivabile, definite pe *I*. Dacă $(f_n)_n$ converge uniform către *f* şi şirul derivatelor $\left(f_n'\right)_n$ converge uniform pe *I* către o funcție *g*, atunci funcția *f* este derivabilă pe *I* şi $f'(x) = g(x), (\forall)\, x \in I$.

Observație

Reciproca acestei teoreme nu este adevărată. Un şir de funcții $(f_n)_n$ poate fi uniform convergent către funcția *f*, cu f_n derivabile şi *f* derivabilă, fără ca şirul derivatelor $\left(f_n'\right)_n$ să fie uniform convergent.

Exemplu

Şirul $f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{n}$, $x\in[0,2\pi]$ este uniform convergent pe $[0,2\pi]$ către funcția $f(x)\equiv 0$, termenii şirului şi funcția limită sunt derivabili pe $[0,2\pi]$, dar şirul derivatelor $f_n'(x)=\cos nx$ nu este convergent pe $[0,2\pi]$.

Teorema 4.1.8. Dacă $(f_n)_n$ este un şir de funcții continue, uniform convergent pe un interval $[a,b]$ către funcția *f*, atunci :

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx.$$

Exemplu

Şirul de funcții $f_n(x)=\dfrac{\cos nx}{n}$ definit pe $[0,\pi]$ este uniform convergent pe $[0,\pi]$ către funcția $f(x)\equiv 0$.

Avem $\dfrac{1}{n}\cdot\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos nx dx=\dfrac{1}{n^2}\cdot\sin nx\Big/_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{1}{n^2}\cdot\sin\dfrac{n\pi}{2}\to 0$, când $n\to\infty$.

4.2 Serii de funcții

Definiția 4.2.1. Seria $f_1+f_2+...+f_n+...$, unde $f_1, f_2,..., f_n,...$ este un şir de funcții definite pe aceeaşi mulțime *X*, se numeşte ***serie de funcții***.

Notație: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$.

Pentru orice $x_0\in X$ avem seria numerică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$, serie care poate fi convergentă, sau divergentă.

Definiția 4.2.2. Mulțimea punctelor $x\in X$ pentru care seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este convergentă se numeşte ***mulțimea de convergentă a seriei*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$.

Exemplu

Cu şirul de funcţii $f_n(x)=\dfrac{x^n}{n!}, \quad x\in R, \quad n=0,1,2,...$ se formează seria de funcţii $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$, care are mulţimea de convergenţă $(-\infty, \infty)$.

Definiţia 4.2.3. Seria de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este ***simplu convergentă*** pe X către o funcţie f, dacă şirul sumelor parţiale $(s_n)_n$, $s_n = f_1 + f_2 + ... + f_n$ este simplu convergent pe X către f, pentru orice x.

Funcţia f definită pe X se numeşte suma seriei $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Definiţia 4.2.4. Seria de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este ***simplu convergentă*** pe X către o funcţie f, dacă pentru $(\forall)\,\varepsilon>0$ şi pentru $(\forall)\,x\in X$ există un număr $n(\varepsilon, x)$, astfel încât

pentru orice $n > n(\varepsilon, x)$ să avem $|f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

Exemplu

Seria de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^2}, \quad x\in R$ este simplu convergentă pentru orice x real.

Pentru a demonstra aceasta, fie şirul sumelor parţiale:

$$s_n(x)=\frac{\sin x}{1^2}+\frac{\sin 2x}{2^2}+...+\frac{\sin nx}{n^2} \Rightarrow |s_n(x)| \le \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{n^2}=u_n$$ unde

şirul cu termenul general u_n este convergent.

Definiţia 4.2.5. Seria de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este ***uniform convergentă*** pe X către o funcţie f, dacă şirul sumelor parţiale $(s_n)_n$ este uniform convergent pe A către f pe mulţimea X.

Definiția 4.2.6. Seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este ***uniform convergentă*** pe X către o funcție f, dacă pentru $(\forall)\,\varepsilon > 0,\ \ (\exists)\, n(\varepsilon)$, astfel încât pentru orice $n > n(\varepsilon)$ să avem

$$\left| f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon, \quad (\forall)\, x \in X .$$

Exemplu

Fie seria de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} x^n,\quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Pentru aceasta, șirul sumelor parțiale $s_n(x) = 1 + x + \ldots + x^n = \frac{1}{1-x} + \frac{x^{n+1}}{x-1}$ converge uniform către funcția $f(x) \equiv \frac{1}{1-x}$, deci seria este uniform convergentă.

Criteriul general de convergență uniformă

Seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe X, dacă și numai dacă $(\forall\ )\,\varepsilon > 0, (\exists)\, n_\varepsilon \in N$ pentru care $\left| f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots + f_{n+p}(x) \right| < \varepsilon$ pentru $(\forall)\, n > n_\varepsilon,\quad (\forall)\, p \in N,\quad (\forall)\, x \in A$.

Criteriul lui Weierstrass

Dacă $\left| f_n(x) \right| \le a_n,\ \ (\forall)\, x \in A,\ \ (\forall)\, n \in N$ și dacă seria de numere $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n > 0$ este convergentă, atunci seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ este uniform convergentă pe A.

Exemplu

Fie seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x},\quad x \in (1, \infty)$. Aceasta este uniform convergentă pentru orice $x \in (1, \infty)$, deoarece pentru $(\forall)\, x \in (1, \infty), (\exists)\, a \in (1, \infty)$, cu $a < x$, deci $\frac{1}{n^x} < \frac{1}{n^a}$, iar seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ este convergentă.

Teorema 4.2.7. Dacă toate funcțiile f_n sunt continue pe *X*, iar dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe *X* către *f*, atunci funcția *f* este continuă pe *X*.

Teorema 4.2.8. Fie seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ uniform convergentă pe *X* către funcția *f*. Dacă funcțiile f_n sunt derivabile pe *X* şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ este uniform convergentă pe *X* către funcția *g*, atunci funcția *f* este derivabilă pe *X* şi $f' = g$.

Exemplu

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}, \quad x \in [0,2\pi]$ este uniform convergentă pe $[0,2\pi]$ deoarece $\left|\frac{\cos nx}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3}$. Seria derivatelor este $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ care este uniform convergentă pe $[0,2\pi]$ deoarece $\left|-\frac{\sin nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$. Notând cu $f(x)$ suma seriei considerată, vom avea $f'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}, \quad x \in [0,2\pi]$.

Teorema 4.2.9. Fie seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ uniform convergentă pe $[a,b]$ către funcția *f*. Dacă funcțiile f_n sunt integrabile pe $[a,b]$, atunci funcția *f* este integrabilă pe $[a,b]$ şi $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}\,x$.

Observație. Teorema serveşte nu numai pentru calculul integralei definite a unei serii de funcții, ci şi a primitivelor pe orice interval conținut în mulțimea de convergență uniformă a seriei considerată.

Exemple

1) Seria trigonometrică $f(x) = 1 + \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \ldots + \frac{\cos nx}{n^2} + \ldots$ este uniform convergentă pentru orice *x* real.

Rezultă că $\int f(x)\,\mathrm{d}\,x = C + x + \frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 2x}{2^3} + \ldots + \frac{\sin nx}{n^3} + \ldots$.

2) Seria de funcții $1+x+x^2+...+x^n+...$ este uniform convergentă pentru orice $x\in(-1,1)$ și are suma $\dfrac{1}{1-x}$.

Deci, pentru $x\in(-1,1)$

avem $\displaystyle\int\frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = C+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+...+\frac{x^n}{n}+... = -\ln(1-x)+C'$.

Pentru $x=0$, $\quad C=C' \Rightarrow \ln(1-x) = -\dfrac{x}{1}-\dfrac{x^2}{2}-...-\dfrac{x^n}{n}-...,\quad |x|<1$.

4.3 Aplicații

$\boxed{4.3.1}$ Să se arate că șirul de funcții $(f_n)_n$, $f_n:[0,1]\to R$, $f_n(x)=x^n(1-x^n)$ este convergent, dar nu este uniform convergent pe $[0,1]$.

Indicație de rezolvare

Pentru $x\in[0,1]\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$, deci șirul de funcții este simplu convergent către funcția constantă $f(x)=0, (\forall)\, x\in[0,1]$.

Pentru a arăta că nu este uniform convergent către *f*, se consideră $x_n=2^{-1/n}\in[0,1]$, pentru care $f_n(x_n)=\dfrac{1}{4}, (\forall)\, n\in N$.

$\boxed{4.3.2}$ Să se arate că șirul de funcții $(f_n)_n$, $f_n:(1,\infty)\to R$, definite prin :

$f_n(x)=\sqrt{(n^2+1)\cdot\sin^2\dfrac{\pi}{n}+nx}-\sqrt{nx}$ este uniform convergent.

Indicație de rezolvare

$$0\le f_n(x)=\frac{(n^2+1)\cdot\sin^2\dfrac{\pi}{n}}{\sqrt{(n^2+1)\cdot\sin^2\dfrac{\pi}{n}+nx}+\sqrt{nx}}<\frac{(n^2+1)\cdot\dfrac{\pi^2}{n^2}}{2\sqrt{n}}<\frac{2\pi^2}{2\sqrt{n}}=\frac{\pi^2}{\sqrt{n}}.$$

Utilizând teorema anterioară pentru $a_n=\dfrac{\pi^2}{\sqrt{n}}\to 0$, rezultă că șirul de funcții converge uniform către funcția constantă $f(x)=0$.

4.3.3 Să se arate că şirul de funcții $(f_n)_n$, $f_n:[0,\infty)\to R$, $f_n(x)=\dfrac{1}{n}\cdot \mathrm{e}^{-nx}$ converge uniform către funcția $f(x)=0, \quad x\in[0,\infty)$.

4.3.4 Să se arate că şirul de funcții $(f_n)_n$ este uniform convergent pe intervalul indicat, pentru :

a) $f_n(x)=\dfrac{x^2}{\left(n^2+x^4\right)}, \quad x\in[1,\infty)$; **b)** $f_n(x)=\dfrac{x}{x+n}, \quad x\in[3,4]$;

c) $f_n(x)=\dfrac{x^n}{\left(1+x^{2n}\right)^n}, \quad x\in[1,\infty)$; **d)** $f_n(x)=\dfrac{\cos nx}{n^2+1}, \quad x\in[0,\pi]$.

Indicații de rezolvare

a) $0\le \dfrac{x^2}{n^2+x^4}\le \dfrac{1}{2n}\Rightarrow a_n=\dfrac{1}{2n}\to 0$, de unde şirul de funcții converge uniform către funcția constantă zero;

b) $f(x)=0$;

c) $0\le f_n(x)\le \dfrac{1}{2^n}\Rightarrow a_n=\dfrac{1}{2^n}\to 0\Rightarrow f(x)=0$;

d) $f(x)=0$.

4.3.5 Să se arate că şirul de funcții $(f_n)_n$ converge simplu, dar nu converge uniform :

a) $f_n(x)=\dfrac{x}{x+n}, \quad x\in(0,\infty)$;

b) $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}, \quad x\in[0,1]$.

Indicații de rezolvare

a) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$, deci şirul de funcții converge simplu către $f(x)=0$.

Pentru $x=n\Rightarrow f_n(x)=\dfrac{1}{2}, \quad (\forall)n\in N$, deci şirul nu converge uniform;

b) $f(x)=0, \quad x\in[0,1)$ şi $f(1)=\dfrac{1}{2}$. Se alege $x_n=1-\dfrac{1}{n}\in[0,1]$, pentru care

$f_n(x_n)=\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n\cdot\left[1+\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{2n}\right]^{-1}\to\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1}$, deci şirul nu converge uniform.

$\boxed{4.3.6}$ Să se arate că şirul de funcții $\left(f_n\right)_n$, $f_n:(0,\infty)\to R$, definite prin $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}2^k\cdot\sin\dfrac{1}{3^k\cdot x}$ nu este uniform convergent.

Indicație de rezolvare

Se aplică criteriul lui Cauchy :

$$\left|f_{n+p}(x)-f_n(x)\right|=\left|2^{n+1}\cdot\sin\frac{1}{3^{n+1}x}+\ldots+2^{n+p}\cdot\sin\frac{1}{3^{n+p}x}\right|$$

şi pentru $x=x_n=\dfrac{2}{3^{2n+1}\pi}$

$\sin\dfrac{1}{3^{n+1}x_n}=\sin 3^n\cdot\dfrac{\pi}{2}=(-1)^n,\ldots,\sin\dfrac{1}{3^{n+p}x_n}=\sin 3^{p-n-1}\cdot\dfrac{\pi}{2}=(-1)^{p-n-1}$ şi luând

$$p=n\Rightarrow\left|f_{2n}(x)-f_n(x)\right|=\left|2^{n+1}(-1)^n+\ldots+2^{2n}(-1)\right|=$$

$$=2^{n+1}\left|1-2+4+\ldots+(-1)^{n-1}2^{n-1}\right|>\frac{1}{2}$$

$\boxed{4.3.7}$ Să se arate că şirul de funcții $\left(f_n\right)_n$, $f_n:R\to R$, definite prin $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\cos kx}{k(k+1)}$ este uniform convergent şi limita sa este o funcție continuă pe R.

Indicație de rezolvare

Se aplică criteriul lui Cauchy.

$$\left|f_{n+p}(x)-f_n(x)\right|=\left|\frac{\cos(n+1)x}{(n+1)(n+2)}+\frac{\cos(n+2)x}{(n+2)(n+3)}+\ldots+\frac{\cos(n+p)x}{(n+p)(n+p+1)}\right|<$$

$$<\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\ldots+\frac{1}{(n+p)(n+p+1)}<$$

$$<\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{n+p}-\frac{1}{n+p+1}=$$

$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+p+1}<\frac{1}{n+1}<\varepsilon$$

Deci şirul de funcții este uniform convergent, iar funcțiile f_n fiind continue pe R, rezultă că limita şirului va fi o funcție continuă pe R.

$\boxed{4.3.8}$ Să se studieze convergența şirului de funcții $(f_n)_n$, $f_n : [0,1] \to R$, definite prin $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n}, (\forall)\, n \in N^*$.

Indicație de rezolvare

Funcțiile f_n sunt continue pe intervalul compact $[0,1]$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{n} = 0$, deci şirul este simplu convergent către funcția constantă $f \equiv 0$ continuă. De asemenea, şirul de funcții considerat este monoton descrescător în fiecare punct $x \in [0,1]$, deci conform Teoremei Dini, şirul este uniform convergent.

$\boxed{4.3.9}$ Să se arate că şirul de funcții $(f_n)_n$, definite prin $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^3} \cdot \sin kx, \quad x \in R$, este convergent pe *R*, iar limita sa este o funcție continuă, cu derivata continuă pe R.

Indicație de rezolvare

Se aplică criteriul lui Cauchy :

$$\left| f_{n+p}(x) - f_n(x) \right| = \left| \frac{\sin(n+1)x}{(n+1)^3} + \frac{\sin(n+2)x}{(n+2)^3} + \dots + \frac{\sin(n+p)x}{(n+p)^3} \right| \le$$

$$\le \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+2)^3} + \dots + \frac{1}{(n+p)^3} <$$

$$< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} =$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Rezultă că şirul de funcții este uniform convergent pe R.

În mod asemănător se arată că şirul derivatelor $f_n'(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k \cdot \cos kx}{k^3} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\cos kx}{k^2}$ este uniform convergent, iar limita sa este o funcție continuă.

$\boxed{4.3.10}$ Să se arate că şirul de funcții $f_n : [0,1] \to R, \quad f_n(x) = n \cdot x \cdot \mathrm{e}^{-nx^2}$ converge, dar $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \ne \int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx$.

$\boxed{\textbf{4.3.11}}$ Să se arate că şirul de funcţii $(f_n)_n$, definite prin :

$f_n(x) = \dfrac{nx}{(1+n^2x^2)}$, $\quad x \in [0,1]$ converge neuniform pe $[0,1]$, dar :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx .$$

Indicaţie de rezolvare

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0$$

Rezultă că şirul de funcţii converge simplu către $f(x)=0$.

Pentru convergenţa uniformă se consideră $x_n = \dfrac{1}{n} \in (0,1)$, pentru care $f_n(x_n) = \dfrac{1}{2}$, $\quad (\forall) n \in N$, deci şirul nu converge uniform.

$\boxed{\textbf{4.3.12}}$ Să se determine mulţimea de convergenţă, A, pentru următoarele serii de funcţii:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^n, \quad x \in R \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$;

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\ln n} \cdot \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n, \quad x \in R$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (2-x)\left(2-x^{1/2}\right)\cdot \ldots \cdot \left(2-x^{1/n}\right), \quad x>0$;

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \cdot \ln\left(1+a^n\right), \quad a \geq 0, \quad x \in R$;

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+5}{7n^2+3n+2} \cdot \left(\frac{x}{2x+1}\right)^n, \quad x \neq \frac{1}{2}$;

f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^5 \cdot x^{2n}}, \quad x \neq 0$; **g)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot \sin\frac{x}{3^n}, \quad x \in R$;

h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{\mathrm{e}^{nx}}, \quad x \in R$; **i)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}, \quad x \neq 0$.

Indicații de rezolvare

a) Pentru $x \in R \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ arbitrar fixat, se consideră seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, unde $f_n(x) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^n$. Pentru aceasta se studiază convergența absolută, utilizând criteriul rădăcinii .

Rezultă că $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \left|\frac{1-x}{1-2x}\right|$, de unde seria este absolut convergentă pentru $\left|\frac{1-x}{1-2x}\right| < 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$.

Pentru $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$ seria este divergentă, deoarece nu este verificată condiția necesară de convergență a unei serii;

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|1-x^2|}{1+x^2} \cdot \frac{\ln n}{\ln(n+1)} = \frac{|1-x^2|}{1+x^2} < 1$

pentru $(\forall)\, x \in R \setminus \{0\}$.

Pentru *x*=0, se obține seria alternată $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\ln n}$, care este convergentă.

Rezultă că mulțimea *A* de convergență a seriei de funcții este R;

c) Deoarece $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$ şi $x > 0$, rezultă că de la un anumit rang n_0, termenii seriei de funcții vor avea acelaşi semn, căci $2 - \sqrt[n]{x} > 0, \quad (\forall)\, n \ge n_0$.

Se va obține, astfel, o serie cu termenii pozitivi, pentru care se aplică criteriul Raabe-Duhamel.

$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{f_n(x)}{f_{n+1}(x)} - 1\right] = \ln x$, de unde rezultă că pentru $x > \mathrm{e}$ seria este convergentă, pentru $x < \mathrm{e}$ este divergentă, iar pentru *x*=e seria este divergentă, utilizând criteriul al doilea de comparație cu seria divergentă $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

De asemenea, pentru *x*=2 seria este convergentă, deoarece $f_n(2) = 0$.

Rezultă mulțimea de convergență *A*=$\{2\} \cup (\mathrm{e}, \infty)$;

d) Pentru $a \in [0,1) \Rightarrow A = R$.

Pentru $a = 1 \Rightarrow A = (1, \infty)$.

Pentru $a \in (1, \infty) \Rightarrow A = (2, \infty)$;

e) $A=(-\infty,-1)\cup\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$;

f) $A=(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$;

g) $A=R$;

h) $A=(0,\infty)$;

i) $A=\varnothing$.

4.3.13 Să se determine mulţimea de convergenţă şi uniform convergenţă a seriei

$$x+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x}{1+nx}-\frac{x}{1+(n-1)x}\right],\quad 0\le x\le 1.$$ Să se determine suma seriei.

Indicaţie de rezolvare

Folosind definiţia :

$$S_n(x)=x+\left(\frac{x}{1+x}-x\right)+\left(\frac{x}{1+2x}-\frac{x}{1+x}\right)+\ldots+\left[\frac{x}{1+nx}-\frac{x}{1+(n-1)x}\right]=$$

$$=\frac{x}{1+nx}.$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=f(x)=0,\quad x\in[0,1].$$

Deoarece $|S_n(x)|<\frac{1}{n}$, $(\forall)\,x\in[0,1]$, rezultă că seria de funcţii este uniform convergentă pe $[0,1]$ către funcţia $f(x)=0$.

4.3.14 Utilizând criteriul lui Weierstrass, să se studieze convergenţa seriilor de funcţii :

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^3}{1+n^3\cdot x^4},\quad x\in R$; **b)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]\cdot\frac{\cos nx}{n+1},\quad x\in R$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+2^n},\quad x\in R$; **d)** $\sum_{n=1}^{\infty}a^n\cdot\sin\frac{1}{3^n\cdot x^2},\quad x\neq 0,\quad |a|<3$.

Indicaţii de rezolvare

a) $|f_n(x)|\le\frac{1}{2n^{3/2}}$, $(\forall)\,x\in R$**,** deci seria este absolut şi uniform convergentă;

b)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \mathrm{e} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \Rightarrow 0 < \mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \frac{3}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f_n(x)| < \frac{3}{n(n+1)} < \frac{3}{n^2}$$

deci seria este absolut şi uniform convergentă;

c) absolut şi uniform convergentă;

d) $|f_n(x)| \le \left|\frac{a}{3}\right|^n, (\forall)\, x \in R \setminus \{0\}$, şi cum $|a| < 3$, seria este absolut şi uniform convergentă.

$\boxed{\textbf{4.3.15}}$ Să se demonstreze că seriile următoare sunt convergente pe mulțimile indicate, iar sumele lor sunt funcții continue pe aceste mulțimi :

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n^4 + x^2}}, \quad x \in R$; **b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}, \quad x \in R$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}, \quad 0 \le x < \infty$, unde seria numerică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este absolut convergentă.

Indicații de rezolvare

a) $|f_n| < \frac{1}{n^2}$, deci seria este uniform convergentă;

b) $|f_n| < \frac{1}{(2n-1)^2}$, deci seria este uniform convergentă.

$\boxed{\textbf{4.3.16}}$ Este posibil ca o serie de funcții continue pe o mulțime X, să conveargă neuniform pe această mulțime către o funcție continuă ?

Indicație de rezolvare

Este posibil. Ca exemplu fie seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right], x \in [0,1]$.

Toți termenii seriei sunt funcții continue pe $[0,1]$.

$s_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$, pentru care $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = 0, \quad (\forall)\, x \in [0,1]$, deci seria converge simplu către funcția $f(x) \equiv 0$ continuă, dar seria de funcții considerată nu converge uniform. Astfel, pentru $x_n = \frac{1}{n} \in [0,1] \Rightarrow s_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$ şi deci relaţia de convergenţă uniformă nu se verifică.

$\boxed{\textbf{4.3.17}}$ Este posibilă derivarea termen cu termen a seriilor :

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{-nx^2} - e^{-(n-1)x^2}\right], \quad x \in [0,1]$;

b)

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{2n}\ln\left(1+n^4x^2\right)-\frac{1}{2(n-1)}\ln\left(1+(n-1)^4x^2\right)\right], \quad x \in [0,1] \quad ?$$

Indicaţii de rezolvare

a) $S_n(x) = e^{-nx^2} - 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n(x) = -1$, pentru $x \in (0,1]$ şi $\lim_{n\to\infty} S_n(0) = 0$.

Rezultă că funcţia sumă este discontinuă în origine, deci nu este derivabilă în acest punct.

Nu este posibilă derivarea termen cu termen;

b) Este posibilă.

$\boxed{\textbf{4.3.18}}$ Este posibilă integrarea termen cu termen a seriei :

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2x\left[n^2 e^{-n^2x^2} - (n-1)^2 e^{-(n-1)^2x^2}\right], \quad x \in [0,1] \quad ?$$

Indicaţie de rezolvare

Şirul sumelor parţiale este $S_n(x) = 2x \cdot \frac{n^2}{e^{n^2x^2}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n(x) = 0$. Rezultă că seria este simplu convergentă către $f(x) = 0$ şi $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. În acelaşi timp, seria integrată este convergentă şi are suma 1, deci nu este posibilă integrarea termen cu termen.

$\boxed{\textbf{4.3.19}}$ Să se arate că seria $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^n - x^{2n} - x^{n-1} + x^{2n-2}\right)$ converge neuniform pe $[0,1]$ şi totuşi :

$$\int_0^1\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^n - x^{2n} - x^{n-1} + x^{2n-2}\right)\right]dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\left(x^n - x^{2n} - x^{n-1} + x^{2n-2}\right)dx.$$

Indicație de rezolvare

Șirul sumelor parțiale are termenul general $S_n(x) = x^n - x^{2n}$, de unde rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = 0,\ x \in [0,1]$, deci șirul este simplu convergent către funcția constantă $f(x) = 0$.

Pentru a demonstra că nu este uniform convergent, se consideră $x_n = 2^{-1/n} \in [0,1]$, pentru care $S_n(x_n) = \dfrac{1}{4},\quad (\forall)\, n \in N^*$.

Pentru a demonstra egalitatea, cum suma seriei este $f(x) = 0$, rezultă $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x = 0$, și $\int_0^1 \left(x^n - x^{2n} - x^{n-1} + x^{2n-2}\right)\mathrm{d}\,x = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2n-1}$, iar seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2n-1}\right)$ este convergentă și are suma egală cu zero.

4.3.20 Fie funcția $f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1] \\ 2-x & x \in (1,2] \end{cases}$ și având proprietatea $f(x) = f(x+2)$. Fie $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n}{4^n} \cdot f\left(4^n \cdot x\right)$. Să se arate că:

a) *F* este continuă pe *R*;
b) *F* nu este derivabilă pe *R*.

Indicație de rezolvare

a) *f* este continuă pe intervalul compact $[0,2]$ și subunitară. Cum ea este periodică de perioadă 2, rezultă că este subunitară pe R, deci mărginită.

Se demonstrează că seria de funcții $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n}{4^n} \cdot f\left(4^n \cdot x\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ este uniform convergentă.

$$s_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) = f(x) + \left(\frac{3}{4}\right) \cdot f(4 \cdot x) + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot f\left(4^2 \cdot x\right) + \ldots +$$

$$+\left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot f\left(4^n \cdot x\right)$$

Aplicând criteriul de convergență al lui Cauchy, rezultă:

$$\left|s_{n+p}(x)-s_n(x)\right|=\left|\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\cdot f\left(4^{n+1}\cdot x\right)+\ldots+\left(\frac{3}{4}\right)^{n+p}\cdot f\left(4^{n+p}\cdot x\right)\right|\le$$

$$\le\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\cdot\left[1+\frac{3}{4}+\ldots+\left(\frac{3}{4}\right)^{p-1}\right]=\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\cdot 4\cdot\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{p}\right)\le$$

$$\le\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\cdot 4\to 0,\quad \text{pentru } n\to\infty$$

Rezultă că şirul sumelor parţiale este uniform convergent, deci seria este uniform convergentă şi deci, F este continuă;

b) Fie $x\in R$ arbitrar fixat şi $m\in N$ fixat. Atunci $\left(4^m\cdot x\right)\in R$ şi deci, există $k\in Z$ astfel încât $k\le 4^m\cdot x\le k+1\Rightarrow \dfrac{k}{4^m}\le x\le\dfrac{k+1}{4^m}$.

Notăm $\alpha_m=\dfrac{k}{4^m}$, $\beta_m=\dfrac{k+1}{4^m}\Rightarrow \quad \alpha_m\le x\le\beta_m$.

Fie numerele reale $\left(4^n\cdot\alpha_m\right)$, $\left(4^n\cdot\beta_m\right)$.

Pentru $m=n\Rightarrow\left(4^n\cdot\beta_m-4^n\cdot\alpha_m\right)=4^{n-m}(k+1-k)=4^{n-m}=1$.

Pentru $n>m\Rightarrow\left(4^n\cdot\beta_m-4^n\cdot\alpha_m\right)=4^{n-m}=\text{nr. par}$.

Pentru $n<m\Rightarrow\left(4^n\cdot\beta_m-4^n\cdot\alpha_m\right)=4^{n-m}=\dfrac{1}{4^{m-n}}$, de unde rezultă că, în acest caz, nu există nici un număr întreg cuprins între ele.

Din acestea rezultă $\left|f\left(4^n\cdot\beta_m\right)-f\left(4^n\cdot\alpha_m\right)\right|=\begin{cases}4^{n-m} & n\le m\\ 0 & n>m\end{cases}$ şi deci:

$$\left|F(\beta_m)-F(\alpha_m)\right|=\left|\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n\cdot f\left(4^n\cdot\beta_m\right)-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n\cdot f\left(4^n\cdot\alpha_m\right)\right|=$$

$$=\left|\sum_{n=0}^{m}\left(\frac{3}{4}\right)^n\left[f\left(4^n\cdot\beta_m\right)-f\left(4^n\cdot\alpha_m\right)\right]\right|=\sum_{n=0}^{m}\left(\frac{3}{4}\right)^n\cdot 4^{n-m}=$$

$$=\frac{1}{4^m}+\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{1}{4^{m-1}}+\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4^{m-2}}+\ldots+\left(\frac{3}{4}\right)^m\ge$$

$$\ge 1+\left(\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\ldots+\left(\frac{3}{4}\right)^m=4\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^{m-1}\right]\to 4$$

Cum $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\beta_m-\alpha_m\right)=0$, rezultă că $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{F(\beta_m)-F(\alpha_m)}{\beta_m-\alpha_m}=+\infty$, deci F nu este derivabilă pe R.

4.4 Serii de puteri

Definiția 4.4.1. O serie de forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad a_n \in R$ se numeşte ***serie de puteri***.

Observație. Mulțimea de convergență a unei serii de puteri conține cel puțin un punct şi anume punctul $x = 0$, pentru care seria de puteri este convergentă şi are suma a_0.

Există serii de puteri care au mulțimea de convergență formată dintr-un singur punct şi există serii de puteri convergente pentru price *x* real.

Exemple

1) Seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot x^n$ este convergentă numai în punctul $x = 0$, deoarece pentru orice $x_0 \neq 0$ există un rang *n* pentru care $|n \cdot x_0| > 1$ şi deci $\lim_{n \to \infty} |n! \cdot x_0| = \infty$.

2) Seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ este convergentă pe *R*, deoarece pentru orice

$$x_0 \in R \Rightarrow \left| \frac{u_{n-1}}{u_n} \right| = \frac{|x_0|}{n+1} \to 0 \text{ pentru } n \to \infty.$$

Teorema lui Abel

Pentru orice serie de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad a_n \in R$ există un număr $\rho \geq 0$, finit sau infinit, pentru care :

a) seria este absolut convergentă pe intervalul $(-\rho, \rho)$;

b) seria este divergentă pentru $|x| > \rho$.

ρ se numeşte raza de convergență a seriei, iar $(-\rho, \rho)$ intervalul de convergență

Observație

Teorema lui Abel nu spune nimic în legătură cu convergența sau divergența seriei de puteri în punctele din capatele intervalului de convergență.

Teorema 4.4.2. (d'Alembert)

Fie seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$. Dacă $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lambda$ finită sau infinită, atunci raza de convergență a seriei de puteri va fi:

$$\rho = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} & 0 < \lambda < \infty \\ 0 & \lambda = +\infty \\ +\infty & \lambda = 0 \end{cases}.$$

Teorema 4.4.3. (Cauchy-Hadamard)

Fie seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$. Dacă $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda$ finită sau infinită, atunci raza de convergenţă a seriei de puteri va fi:

$$\rho = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} & 0 < \lambda < \infty \\ 0 & \lambda = +\infty \\ +\infty & \lambda = 0 \end{cases}.$$

Teorema 4.4.4. Pentru orice $r \in (0, \rho)$ seria de puteri este uniform convergentă pe $[-r, r]$.

Corolar 4.4.5. Suma unei serii de puteri este o funcţie continuă pe intervalul de convergenţă.

Corolar 4.4.6. Suma unei serii de puteri este uniform continuă pe orice interval compact conţinut în intervalul de convergenţă.

Teorema 4.4.7. Fie seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ convergentă în intervalul $(-\rho, \rho)$. Seria formată cu derivatele termenilor săi, $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$ va avea acelaşi interval de convergenţă.

Corolar 4.4.8

Dacă $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ şi $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$,

atunci $s'(x) = \varphi(x), \quad (\forall) x \in (-\rho, \rho)$.

Corolar 4.4.9. Suma seriei formată cu derivatele termenilor unei serii de puteri este o funcţie continuă şi derivabilă pe intervalul de convergenţă.

Corolar 4.4.10. Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ este o serie de puteri cu raza de convergență ρ, atunci:

a) Seria formată cu derivatele de ordinul *n* ale termenilor seriei are aceeaşi rază de convergență;

b) Suma s a seriei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ este indefinit derivabilă pe intervalul de convergență şi derivata de ordinul *n* este egală cu suma seriei derivatelor de ordinul *n* pentru orice $x \in (-\rho, \rho)$.

Teorema 4.4.11. Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ este o serie de puteri cu raza de convergență ρ, atunci pentru orice interval închis $[a,b] \subset (-\rho, \rho)$ seria de puteri poate fi integrată termen cu termen şi $\int_a^b f(x) \mathrm{d}\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n \cdot x^n \,\mathrm{d}\, x$, unde $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$.

Exemplu

Seria $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ are raza de convergență $\rho = 1$.

Seria derivatelor $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n}$ are aceeaşi rază de convergență şi are suma $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, deci suma seriei inițiale este $s(x) = C + \operatorname{arctgx}$. Pentru $x = 0, \quad C = 0 \Rightarrow s(x) = \operatorname{arctg}(x)$.

Operații cu serii de puteri

Fie două serii de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$ cu razele de convergență ρ_1 şi ρ_2. Atunci:

a) Suma celor două serii de puteri este tot o serie de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) \cdot x^n$ care are raza de convergență $\rho \ge \min(\rho_1, \rho_2)$. Dacă $A(x), B(x)$

sunt sumele celor două serii de puteri şi $S(x)$ este suma seriei $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)\cdot x^n$ atunci $S(x) = A(x) + B(x), \quad (\forall)\, x \in (-\rho, \rho)$;

b) Diferența celor două serii de puteri este tot o serie de puteri $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - b_n)\cdot x^n$ care are raza de convergență $\rho \geq \min(\rho_1, \rho_2)$. Dacă $D(x)$ este suma seriei $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - b_n)\cdot x^n$, atunci $D(x) = A(x) - B(x), \quad (\forall)\, x \in (-\rho, \rho)$

c) Produsul celor două serii de puteri este tot o serie de puteri:

$$a_0 \cdot b_0 + (a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0)\cdot x + \ldots + (a_0 \cdot b_n + a_1 \cdot b_{n-1} + \ldots + a_n \cdot b_0)\cdot x^n + \ldots$$

care are raza de convergență $\rho \geq \min(\rho_1, \rho_2)$. Dacă $P(x)$ este suma seriei produs, atunci $T(x) = A(x)\cdot B(x), \quad (\forall)\, x \in (-\rho, \rho)$;

d) Câtul a două serii de puteri $A(x)$ şi $B(x), \quad b_0 \neq 0$ este o serie de puteri $C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n$, cu coeficinții definiți de egalitatea $A(x) = B(x)\cdot C(x)$.

Serie Taylor

Fie $f : I \to R$ o funcție indefinit derivabilă pe intervalul *I* şi fie un punct x_0 interior lui *I*. ***Formula lui Taylor*** pentru funcția *f* ***în punctul*** x_0 este:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!}\cdot f'(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}\cdot f^{(n)}(x_0) + R_n(x),\ x \in I.$$

Dacă şirul $(R_n(x))_n$, pentru $x \in X \subset I$, este convergent către zero, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot f^{(n)}(x_0)\cdot(x - x_0)^n$ numită ***seria Taylor a funcției*** *f* ***în punctul*** x_0 este convergentă pentru $x \in X \subset I$ către funcția *f*.

Formula $f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!}\cdot f'(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}\cdot f^{(n)}(x_0) + \ldots$ se numeşte ***formula de dezvoltare*** a funcției *f* ***în serie Taylor*** în jurul punctului x_0.

Teorema 4.4.12. Seria Taylor a funcției f în jurul punctului x_0 este convergentă într-o vecinătate V a lui x_0, dacă derivatele de orice ordin $f^{(n)}$ sunt egal mărginite pe V, adică $\left|f^{(n)}(x)\right| < M, \quad (\forall)\, x \in V$.

Observație. Dacă $x_0 = 0$, atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0) \cdot (x - x_0)^n$ se numeşte ***serie Mac Laurin*** pentru funcția f.

4.5 Aplicații

$\boxed{\textbf{4.5.1}}$ Să se determine mulțimea de convergență pentru următoarele serii de puteri :

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[1 - (-2)^n\right] \cdot x^n$; **b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n + 3^n}$; **c)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2+n} \cdot x^n$; **e)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!} \cdot x^n, \quad a > 0$;

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \cdot x^n$; **g)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} \cdot (x-1)^n$;

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n \cdot (x+3)^n$; **i)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \cdot (x+3)^n$.

Indicații de rezolvare

a) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$;

b) $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n + 3^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n\left(1 + \frac{2^n}{3^n}\right)}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \rho = 3$ şi intervalul de convergență este $(-3,3)$. Pentru x=3 şi pentru x=-3 seria este divergentă, deoarece nu este verificată condiția necesară de convergență a unei serii, deci mulțimea de convergență este $(-3,3)$;

c) $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \rho = \infty$ şi deci, mulțimea de convergență este R;

d) $\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$; **e.** R ; **f.** $(-1,1)$;

g) Se consideră seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot y^n$, $y = x-1$ şi se obține mulțimea de convergență $(0,2]$;

h) -3 ; **i)** $(-e-3, e-3)$.

$\boxed{4.5.2}$ Să se determine raza de convergență pentru seriile de puteri:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, unde $a_{2n} = \frac{1}{n}$, $a_{2n-1} = \frac{1}{2^{n+1}}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \cdot x^n$.

Indicații de rezolvare

a) $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda$ şi $\rho = \frac{1}{\lambda}$.

Avem $\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{n}} = 1$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n-1]{\frac{1}{2^{n+1}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \lambda = \max\left\{1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\} = 1 \Rightarrow \rho = 1$;

b) $\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$.

$\boxed{4.5.3}$ Dacă raza de convergență a seriei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este $\rho \in (0, \infty)$, să se găsească raza de convergență a seriilor de puteri următoare:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^m \cdot x^n$, $m \in N^*$; **b)** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^{nm}$, $m \in N^*$;

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1+|a_n|} \cdot x^n$.

Indicații de rezolvare

a) $\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \Rightarrow \rho_1 = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n^m}{a_{n+1}^m}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|^m = \rho^m$;

b) Se notează $y = x^m$. Rezultă că seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ are raza de convergență ρ, deci seria este absolut convergentă pentru

$|y| < \rho \Rightarrow \left|x^m\right| < \rho \Rightarrow |x|^m < \rho \Rightarrow |x| < \sqrt[m]{\rho}$, deci raza de convergență a seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^{nm}, \quad m \in N^*$ este $\rho_1 = \sqrt[m]{\rho}$;

c) $\rho_1 = \max(\rho, 1)$.

$\boxed{\textbf{4.5.4}}$ Să se determine mulțimea de convergență şi suma următoarelor serii de puteri :

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{x^n}{n}$; **b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{x^{3n+1}}{3n+1}$; **d)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot x^n$;

e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot (2n-1) \cdot x^{2n-2}$; **f)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{4n-3}}{4n-3}$;

g) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)(n+3) \cdot x^n$;

h) $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!} \cdot x^n, \quad a \in R$.

Indicații de rezolvare

a) Se calculează raza de convergență a seriei de puteri :

$\lambda = \lim\limits_{n \to \infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n}{n+1} = 1 \Rightarrow \rho = \dfrac{1}{\lambda} = 1$. Intervalul de convergență este $(-1, 1)$.

Se studiază convergența în capetele intervalului.

Pentru $x = 1$, se obține seria numerică alternată $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{1}{n}$ care este convergentă, iar pentru $x = -1$, se obține seia $-\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$, care este divergentă.

Deci, mulțimea de convergență a seriei este $(-1, 1]$.

Fie $f(x)$ suma seriei de puteri. Atunci $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot x^{n-1} = \dfrac{1}{1+x}, \quad |x| < 1$.

Prin integrare, se obține $f(x) = \ln(1+x) + C, \quad x \in (-1, 1)$. Pentru determinarea constantei de integrare *C*, se consideră *x*=0, de unde se obține *C*=0.

Prin urmare, $f(x) = \ln(1+x), \quad x \in (-1, 1)$.

Deoarece seria de puteri este convergentă şi în punctul x=1, rezultă că funcţia $f(x)$ este continuă în acest punct şi $f(1)=\lim\limits_{x\to 1}\ln(1+x)=\ln 2$;

b) Mulţimea de convergenţă este $[-1,1]$.

Fie $f(x)$ suma seriei de puteri. Atunci $f'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^{2n}=\dfrac{1}{1+x^2}, \quad |x|<1.$

Deci, $f(x)=\operatorname{arctg} x+C$ şi pentru x=0 se va obţine C=0, deci suma seriei de puteri este $f(x)=\operatorname{arctg} x, \quad x\in(-1,1)$.

Cum seria de puteri este convergentă şi în capetele intervalului de convergenţă, rezultă $f(-1)=\operatorname{arctg}(-1)=-\dfrac{\pi}{4}$ şi $f(1)=\operatorname{arctg} 1=\dfrac{\pi}{4}$;

c) Mulţimea de convergenţă este $(-1,1]$.

Notând cu $f(x)$ suma seriei de puteri, rezultă $f'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^{3n}=\dfrac{1}{1+x^3}$, de

unde $f(x)=\displaystyle\int\frac{1}{1+x^3}\,dx=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$;

d) Mulţimea de convergenţă este $(-1,1)$.

Pentru calculul sumei seriei de puteri se pleacă de la seria de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n+1}$,

care are suma $g(x)=\dfrac{x}{1-x}\Rightarrow g'(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$.

Rezultă că suma seriei de puteri este $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$;

e) Mulţimea de convergenţă este $(-1,1)$.

Suma seriei de puteri este $f(x)=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$;

f) Mulţimea de convergenţă este $(-1,1)$.

Suma seriei de puteri este $f(x)=\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x-\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$;

g) Mulţimea de convergenţă este $(-1,1)$.

Pentru calculul sumei seriei de puteri, se pleacă de la seria de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n+3}$,

care are suma

$g(x)=\dfrac{x^3}{1-x}\Rightarrow g'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+3)x^{n+2}$, $g''(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+3)x^{n+1}$ şi

$g'''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)(n+3)\cdot x^n = f(x)$. Se obține astfel suma seriei de puteri

$f(x)=\dfrac{6}{(1-x)^4}$;

h) Intervalul de convergență este $(-1,1)$.

Pentru x=1, se obține seria $1+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}\cdot a(a-1)\ldots(a-n+1)$, care este absolut convergentă pentru $a\geq 0$ şi semiconvergentă pentru $a\in(-1,0)$.

Pentru $x=-1$, se obține seria $1+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}\cdot(-a)(1-a)\ldots(n-a-1)$, care este absolut convergentă pentru $a\geq 0$.

Prin urmare, dacă $a>0, a\in N$ mulțimea de convergență este $[-1,1]$.

Dacă $a\in(-1,0)$, mulțimea de convergență este $(-1,1]$.

Dacă $a\leq -1$, mulțimea de convergență este $(-1,1)$.

Dacă a=0, sau a este număr natural, mulțimea de convergență este R.

Fie $f(x)$ suma seriei de puteri pe $(-1,1)$. Prin derivare, obținem :

$f'(x)=a+\dfrac{a(a-1)}{1!}\cdot x+\ldots+\dfrac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{(n-1)!}\cdot x^{n-1}+\ldots$. Înmulțind această relație cu x şi adunând rezultatul la $f'(x)$, vom obține :

$$x\cdot f'(x)+f'(x)=a\cdot\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}\cdot x^n\right]=a\cdot f(x)\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{a}{1+x},$$

de unde rezultă $\ln|f(x)|=a\ln(1+x)+C, \quad |x|<1$.

Pentru x=0, rezultă C=0, deci suma seriei este $f(x)=(1+x)^a$, $x\in(-1,1)$.

4.5.5 Să se demonstreze că seria $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2}$ este convergentă pentru orice $x\in[-1,1]$, iar suma ei f verifică ecuația :

$$(1-x)\cdot f'(1-x)-x\cdot f'(x)=\ln\frac{1-x}{x}, \quad x\in(0,1).$$

Indicație de rezolvare

$\lambda=\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1\Rightarrow\rho=1$, deci intervalul de convergență este $(-1,1)$.

Pentru x=1 se obține seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, care este convergentă.

Pentru $x=-1$, se obține seria alternată $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$, convergentă, cu Leibniz.

Deci, mulțimea de convergență este $[-1,1]$.

Se consideră $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2} \Rightarrow f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n} \Rightarrow x\cdot f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

Fie $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \Rightarrow g'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}, \quad x\in(0,1)$.

Rezultă că $g(x)=-\ln(1-x)$,

deci $x\cdot f'(x)=-\ln(1-x) \Rightarrow (1-x)\cdot f'(1-x)=-\ln x$ şi se verifică ecuația dată.

$\boxed{4.5.6}$ Să se arate că seria de puteri $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{3n}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot\ldots\cdot(3n-1)(3n)}$ este convergentă pe R şi că suma ei verifică ecuația $f''(x)+x\cdot f(x)=0, \quad (\forall)\, x\in R$.

Indicație de rezolvare

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0 \Rightarrow \rho=\infty$, deci seria de puteri este convergentă pe R.

Notându-se cu $f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{3n}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot\ldots\cdot(3n-1)(3n)}$, rezultă

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{3n-1}}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(3n-1)}=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{2\cdot 3\cdot 5}-\ldots \Rightarrow f''(x)=-x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{3n-2}}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(3n-3)}$$

şi prin înlocuire se verifică ecuația dată.

$\boxed{4.5.7}$ Să se determine o serie de puteri, convergentă pe R şi astfel încât suma f a ei să verifice ecuația :

$$x\cdot f''(x)+f'(x)+x\cdot f(x)=0, \quad (\forall)\, x\in R.$$

Indicație de rezolvare

Se caută f de forma $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot x^n$. Derivând de două ori termen cu termen obținem :

$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a_n \cdot x^{n-1}$ şi $f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n \cdot x^{n-2}$, pe care înlocuindu-le în ecuația ce trebuie verificată, rezultă identitatea :

$$a_1+\sum_{n=2}^{\infty}\left(n^2 a_n + a_{n-2}\right)\cdot x^{n-1}=0, \quad (\forall)\, x\in R.$$

De aici, rezultă că $a_1=0, \quad n^2\cdot a_n + a_{n-2}=0, \quad n=2,3,...$, adică :

$$a_{2k-1}=0 \text{ şi } a_{2k}=(-1)^k\cdot\frac{a_0}{4^k\cdot (k!)^2}, \quad k\in N.$$

Pentru $a_0=1\Rightarrow 1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{x^{2k}}{4^k\cdot (k!)^2}$, care este o serie de puteri convergentă pe R.

$\boxed{\textbf{4.5.8}}$ Se notează razele de convergență ale seriilor de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot b_n x^n$ şi $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\cdot b_k\right)\cdot x^n$ prin $R_a, R_b, R_{a+b}, R_{a\cdot b}, R_{a\otimes b}$.

Să se arate că:

a) $R_{a+b}\geq \min(R_a, R_b)$;

b) $R_{a\cdot b}=R_a\cdot R_b$;

c) $R_{a\otimes b}\geq \min(R_a, R_b)$.

Indicații de rezolvare

a) Seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ are raza de convergență R_a, deci ea este absolut convergentă pentru $|x|<R_a$. Similar, seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ este absolut convergentă pentru $|x|<R_b$.

Fie $r_0\leq R_a, \quad r_0\leq R_b$. Atunci, pentru orice x care verifică $|x|<r_0$ se verifică:

$$\left|(a_{n+1}+b_{n+1})\cdot x^{n+1}+\ldots+(a_{n+p}+b_{n+p})\cdot x^{n+p}\right|\le |a_{n+1}||x|^{n+1}+\ldots+|a_{n+p}||x|^{n+p}+$$

$$+|b_{n+1}||x|^{n+1}+\ldots+|b_{n+p}||x|^{n+p}<\varepsilon$$

S-a demonstrat, astfel că seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ este absolut convergentă pentru orice x pentru care $|x|<r_0$, deci $R_{a+b}\ge \min(R_a,R_b)$;

b) $R_{a\cdot b}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n b_n}{a_{n+1}b_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right|=R_a\cdot R_b$;

c) Se procedează ca la punctul a).

Fie $r_0\le R_a$, $r_0\le R_b$. Atunci, pentru orice x care verifică $|x|<r_0$ se verifică:

$$\left|\sum_{q=n+1}^{n+p}\left(\sum_{k=0}^{q}a_{q-k}\cdot b_k\right)\cdot x^q\right|\le \sum_{q=n+1}^{n+p}\left|\sum_{k=0}^{q}a_{q-k}\cdot b_k\right|\cdot|x|^q\le$$

$$\le \sum_{q=n+1}^{n+p}\left(\sum_{k=0}^{q}|a_{q-k}||b_k|\right)\cdot|x|^q=\left(\sum_{m=n+1}^{n+p}|a_m|\cdot|x|^m\right)\cdot\left(\sum_{s=n+1}^{n+p}|b_s|\cdot|x|^s\right)\le\varepsilon^2 .$$

S-a demonstrat, astfel că seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}\cdot b_k\right)\cdot x^n$ este absolut

convergentă pentru orice x pentru care $|x|<r_0$, deci $R_{a\otimes b}\ge\min(R_a,R_b)$;

$\boxed{\textbf{4.5.9}}$ Să se arate că funcțiile :

a) $f(x)=\sin x,\quad x\in R$ **; b)** $g(x)=\cos x,\quad x\in R$ **;**

c) $h(x)=e^x,\quad x\in R$ se pot dezvolta în serie de puteri pe R şi să se determine seriile Mac Laurin corespunzătoare.

Indicații de rezolvare

Funcțiile sunt indefinit derivabile pe R şi :

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),\quad g^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),\quad h^{(n)}(x)=e^x,$$

$(\forall)\,x\in R, n\in N^*$

Deoarece $\left|f^{(n)}(x)\right|\le 1,\quad \left|g^{(n)}(x)\right|\le 1,\quad (\forall)\,x\in R, n\in N$, rezultă că funcțiile f şi g se pot dezvolta în serie de puteri pe R.

Pentru funcția h, avem că pentru orice interval compact $[-a,a]$ funcția verifică $h(x)=e^x\le e^a$, deci h se poate dezvolta în serie de puteri pe orice astfel de

interval. Cum *a* este real arbitrar, rezultă că *h* se poate dezvolta în serie de puteri pe R.
Se obțin dezvoltările :

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots, \quad x \in R$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots, \quad x \in R \quad .$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad x \in R$$

4.5.10 Să se arate că funcțiile următoare se pot dezvolta în serie de puteri şi să se găsească dezvoltarea, precizându-se intervalul în care este valabilă :

a) $f(x) = (1+x)^a, \quad x > -1, \quad a \in R \setminus \{0,1,2,\ldots\}$;

b) $f(x) = \arcsin x, \quad x \in [-1,1]$;

c) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1$.

Indicații de rezolvare

a) $f^{(n)}(x) = a(a-1)\ldots(a-n+1)\cdot(1+x)^{a-n}, \quad f^{(n)}(0) = a(a-1)\ldots(a-n+1)$.
Rezultă seria Mac Laurin corespunzătoare :
$1 + \frac{a}{1!} \cdot x + \frac{a(a-1)}{2!} \cdot x^2 + \ldots + \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!} \cdot x^n + \ldots$, serie de puteri care are intervalul de convergență $(-1,1)$. $f(x) = (1+x)^a$ se numeşte funcție binomială;

b) $f(x) = \arcsin x \Rightarrow f'(x) = (1-x^2)^{-1/2}$. Rezultă că pentru $x \in (-1,1)$ funcția $f'(x)$ este o funcție binomială. Astfel, înlocuind în dezvoltarea funcției binomiale (din exercițiul precedent) pe *x* cu $-t^2$ şi $a = -\frac{1}{2}$, vom obține :

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot t^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot t^4 + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)} \cdot t^{2n} + \ldots, \quad |t| < 1.$$

Prin integrare termen cu termen pe intervalul $[0, x]$, $|x| < 1$, se va obține dezvoltarea : $\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$.

Cum această serie este convergentă şi în punctele -1 şi 1, deoarece :
$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)} \cdot \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{\sqrt{(2n+1)^3}} < \frac{1}{n^{3/2}}, \quad (\forall) n \in N^*$, rezultă că dezvoltarea este valabilă pe intervalul $[-1,1]$.

Capitolul 5

FUNCȚII DE MAI MULTE VARIABILE

5.1 Funcții vectoriale. Limite. Continuitate

Definiția 5.1.1. O funcție $f : X \to R, \quad X \subset R^n$, se numeşte ***funcție reală de variabilă vectorială*** $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in X$.

Definiția 5.1.2. Fie m funcții reale $f_1, f_2, ..., f_m$ definite pe o aceeaşi mulțime $X \subset R^n$. Corespondența:
$(x_1, x_2, ..., x_n) \to (f_1(x_1, x_2, ..., x_n), f_2(x_1, x_2, ..., x_n), ..., f_m(x_1, x_2, ..., x_n))$ defineşte o funcție $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$ pe $X \subset R^n$ cu valori în R^m. Se spune că f este o ***funcție vectorială de variabilă vectorială***.

Definiția 5.1.3. Fie funcția $f : X \to R^m, \quad X \subset R^n$ şi a un punct de acumulare al mulțimii X. Se spune că un vector $b \in R^m$ este ***limita funcției f în punctul a*** dacă pentru $(\forall)\varepsilon > 0, \ (\exists)\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru $(\forall)\, x \in X,\, x \neq a,$ cu $\|x - a\| < \delta(\varepsilon)$ să avem $\|f(x) - b\| < \varepsilon$.

Notație: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Definiția 5.1.4. Fie funcția $f : X \to R^m, \quad X \subset R^n$ şi $a \in X$. Se spune că funcția f este ***continuă în punctul*** a dacă pentru $(\forall)\varepsilon > 0, \quad (\exists)\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât pentru $(\forall)\, x \in X$, cu $\|x - a\| < \delta(\varepsilon)$ să avem $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.

Dacă a este punct de acumulare al mulțimii X, atunci continuitatea funcției f în a este echivalentă cu:
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ sau $\lim\limits_{x \to a} \|f(x) - f(a)\| = 0$.

Observații

1) Dacă f este continuă în punctul a, există o vecinătate a lui a în care funcția este mărginită.

2) Dacă f este continuă în punctul a, atunci funcția $\|f\|$ este continuă în punctul a. Reciproca nu este adevărată în general.

3) Dacă f şi g sunt continue în punctul a funcțiile $f + g$ şi $\lambda \cdot f$ sunt continue în a.

4) Dacă există $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ în R^m şi f nu este definită în punctul a, atunci f se poate prelungi prin continuitate în punctul a, punând condiția $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

5) Fie funcțiile $f : X \to Y \subset R^m$, $g : Y \to R^p$, $X \subset R^n$. Dacă funcția f este continuă în punctul $a \in X$, iar funcția g este continuă în punctul $b = f(a) \in Y$, atunci funcția compusă $g \circ f : X \to R^p$ este continuă în punctul $a \in X$.

6) Fie funcția reală $f : X \to R$, $X \subset R^n$. Dacă f este continuă în punctul $a \in X$ şi $f(a) \neq 0$ există o vecinătate V a lui a astfel încât pentru $x \in V \cap X$ să avem $f(x) \cdot f(a) > 0$.

7) Fie funcția vectorială $f : X \to R^m$, $X \subset R^n$ continuă în punctul $a \in X$ şi $f(a) \neq 0$. Atunci există o vecinătate V a lui a astfel încât pentru $x \in V \cap X$ să avem $f(x) \neq 0$.

Definiția 5.1.5. Fie $f : X \to R^m$, $X \subset R^n$ şi $a \in X$. Fie submulțimea $X_i = \{x_i \in R / (a_1, a_2, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_n) \in X\} \subset X$. Pe aceasta, funcția f este o funcție f_i de o singură variabilă $x_i \in X_i$. Dacă f_i este continuă în punctul $a_i \in X_i$, spunem că f este ***continuă parțial în raport cu variabila*** x_i în punctul $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$.

Teorema 5.1.6. O funcție f continuă într-un punct $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ este continuă în acest punct în raport cu fiecare variabilă.

Observație. Reciproca acestei teoreme nu este în general adevărată. Dacă o funcție este continuă într-un punct în raport cu fiecare variabilă în parte, nu rezultă că ea este continuă în acel punct.

Exemplu

Fie funcția $f : R^2 \to R$ definită prin:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3xy^6}{x^2 + y^{12}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Dacă $x = 0 \Rightarrow \lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = 0$, deci funcția f este continuă în raport cu variabila y în punctul $(0,0)$.

Dacă $y=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x,0)=0$, deci funcția f este continuă în raport cu variabila x în punctul $(0,0)$.

În acelaşi timp, funcția f nu este continuă în punctul $(0,0)$, deoarece pentru $x \to 0,\ y \to 0$ cu $y^6 = m \cdot x,\quad m \in R \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \dfrac{3m}{1+m^2}$, limită care depinde de parametrul real m, deci nu este unică.

Definiția 5.1.7. Fie $f : X \to R^m,\quad X \subset R^n$. Se spune că f este ***uniform continuă*** pe X, dacă pentru $(\forall)\,\varepsilon > 0,\quad (\exists)\,\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât oricare ar fi punctele $x, x' \in X$ cu $\|x - x'\| < \delta(\varepsilon)$ să avem $\|f(x) - f(x')\| < \varepsilon$.

Teorema 5.1.8. O funcție f uniform continuă pe o mulțime X este uniform continuă în raport cu fiecare variabilă.

Observații

1) O funcție vectorială continuă pe un interval compact $I \subset R^n$ este mărginită pe I.

2) O funcție vectorială continuă pe un interval compact $I \subset R^n$ este uniform continuă pe I.

3) Pentru o funcție vectorială continuă pe un interval compact $I \subset R^n$ există un punct $\xi \in I$ astfel încât $\|f(\xi)\| = \sup\limits_{x\in I}\|f(x)\|$.

4) O funcție reală de variabilă vectorială, continuă pe un interval compact $I \subset R^n$, îşi atinge marginile.

Exemple

1) Fie funcția $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ definită pe discul $x^2+y^2 \le R^2$. Aceasta este continuă pe domeniul ei de definiție. Minimul funcției este atins în punctul $(0,0)$ şi are valoarea 0, iar maximul funcției este atins în orice punct (x,y) situat pe cercul de ecuație $x^2+y^2 = R^2$ şi are valoarea R.

2) Funcția $f(x,y)$ definită pe discul $x^2+y^2 \le R^2$ prin:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3xy^6}{x^2+y^{12}} & (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

nu este uniform continuă pe domeniul de definiție, deoarece nu este continuă în punctul $(0,0)$.

5.2 Derivate parțiale. Diferențiale

Definiția 5.2.1. Fie funcția $f : X \to R, \quad X \subset R^2$ şi (a,b) un punct interior lui *X*. Se spune că:

a) f este ***derivabilă parțial*** în (a,b), ***în raport cu variabila*** *x*, dacă : $(\exists) \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x,b) - f(a,b)}{x-a} < +\infty$, iar limita se numeşte ***derivata parțială*** a lui *f* ***în raport cu*** *x* şi se notează $f_x{}'(a,b)$, sau $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$.

b) *f* este ***derivabilă parțial*** în (a,b), ***în raport cu variabila*** *y*, dacă : $(\exists) \lim\limits_{y \to b} \dfrac{f(a,y) - f(a,b)}{y-b} < +\infty$, iar limita se numeşte ***derivata parțială*** a lui *f* ***în raport cu*** *y* şi se notează $f_y{}'(a,b)$, sau $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$.

Observație. Dacă o funcție este derivabilă parțial în raport cu variabila *x* în fiecare punct al mulțimii de definiție *X*, spunem că funcția este derivabilă parțial în raport cu *x* pe mulțimea *X*.

Exemplu

Funcția $f : R^2 \to R, \quad f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2+y^2}$ este derivabilă parțial în raport cu *x* şi cu *y* pe R^2 şi $f_x'(x,y) = 2x \cdot \mathrm{e}^{x^2+y^2}, \quad f_y'(x,y) = 2y \cdot \mathrm{e}^{x^2+y^2}$.

Definiția 5.2.2. Fie funcția $f : X \to R, \quad X \subset R^n$ şi $(a_1, a_2, ..., a_n)$ un punct interior lui *X*. Funcția *f* este ***derivabilă parțial în punctul*** $(a_1, a_2, ..., a_n)$, ***în raport cu variabila*** x_k, dacă :

$$(\exists) \quad \lim_{x \to x_k} \frac{f(a_1, a_2, ..., a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, ..., a_n) - f(a_1, a_2, ..., a_n)}{x_k - a_k} \text{ şi este finită.}$$

Limita se numeşte ***derivata parțială a lui f în raport cu variabila*** x_k şi se notează $f_{x_k}{}'(a_1, a_2, ..., a_n)$, sau $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a_1, a_2, ..., a_n)$.

O funcție $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ are *n* derivate parțiale.

Exemplu

Funcția $f: R^3 \to R, \quad f(x,y,z) = \ln\left(1 + x^2 \cdot y^2 \cdot z^2\right)$ are derivatele parțiale

$$f'_x(x,y,z) = \frac{2x \cdot y^2 \cdot z^2}{1 + x^2 \cdot y^2 \cdot z^2}, \quad f'_y(x,y,z) = \frac{2y \cdot x^2 \cdot z^2}{1 + x^2 \cdot y^2 \cdot z^2}.$$

$$f'_z(x,y,z) = \frac{2z \cdot y^2 \cdot x^2}{1 + x^2 \cdot y^2 \cdot z^2}, \quad (\forall)(x,y,z) \in R^3$$

Observații

1) Dacă funcția reală $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ este derivabilă parțial în raport cu variabila x_k în punctul $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$, atunci *f* este continuă parțial în raport cu variabila x_k în punctul *a*.

2) Dacă funcția reală $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ este derivabilă parțial în raport cu fiecare variabilă $x_1, x_2, ..., x_n$ în punctul $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$, atunci *f* este continuă în raport cu fiecare variabilă în parte în punctul *a*.

Definiția 6.2.3. Fie funcția vectorială $f: X \to R^m, \quad X \subset R^n$, componentele sale $f_1, f_2, ..., f_m$ fiind funcții reale derivabile parțial în raport cu fiecare variabilă $x_1, x_2, ..., x_n$ într-un punct $(a_1, a_2, ..., a_n) \in X$.

Derivata parțială a funcției f în raport cu x_k în punctul *a* este definită prin:

$$\lim_{x_k \to a_k} \frac{f(a_1, a_2, ..., a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, ..., a_n) - f(a_1, a_2, ..., a_n)}{x_k - a_k}$$ şi se notează cu $f'_{x_k}(a)$.

Observație

Dacă se consideră funcția *f* raportată la o bază $e_1, e_2, ..., e_m$, atunci:

$$f(x) = e_1 \cdot f_1(x) + e_2 \cdot f_2(x) + ... + e_m \cdot f_m(x), \quad x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n.$$

Derivata sa parțială $f'_{x_k}(a)$ are componentele:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_k}(a_1, a_2, ..., a_n), \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(a_1, a_2, ..., a_n), ..., \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(a_1, a_2, ..., a_n).$$

Exemplu

Funcția vectorială $\vec{f}(\vec{r}) = \vec{i} \cdot \frac{x}{y^2 + z^2 + 1} + \vec{j} \cdot \frac{y}{z^2 + x^2 + 1} + \vec{k} \cdot \frac{z}{x^2 + y^2 + 1}$

definită pe R^3 are derivatele parțiale de forma:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x}(\vec{r}) = \vec{i} \cdot \frac{1}{y^2 + z^2 + 1} + \vec{j} \cdot \frac{-2xy}{\left(x^2 + z^2 + 1\right)^2} + \vec{k} \cdot \frac{-2xz}{\left(x^2 + y^2 + 1\right)^2}$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial y}(\vec{r}) = \vec{i} \cdot \frac{-2xy}{\left(y^2 + z^2 + 1\right)^2} + \vec{j} \cdot \frac{1}{\left(x^2 + z^2 + 1\right)} + \vec{k} \cdot \frac{-2yz}{\left(x^2 + y^2 + 1\right)^2}.$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial z}(\vec{r}) = \vec{i} \cdot \frac{-2xz}{\left(y^2 + z^2 + 1\right)^2} + \vec{j} \cdot \frac{-2yz}{\left(x^2 + z^2 + 1\right)^2} + \vec{k} \cdot \frac{1}{\left(x^2 + y^2 + 1\right)}$$

Derivate parțiale de ordin superior. Fie funcția $f : X \to R, \quad X \subset R^2$, derivabilă parțial în raport cu fiecare variabilă în parte, în punctele interioare ale lui X. Dacă $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ și $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ sunt, la rândul lor, derivabile parțial în raport cu fiecare dintre variabile, atunci derivatele lor parțiale se numesc ***derivate parțiale de ordinul doi*** ale lui f și se notează prin :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx}.$$

Exemplu

Funcția $f(x, y) = \ln\left(1 + x^2 + y^2\right)$ definită pe R^2 are derivatele parțiale:

$$f'_x(x, y) = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \quad f'_y = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}$$

$$f''_{xx}(x, y) = \frac{2}{1 + x^2 + y^2} - \frac{4x^2}{\left(1 + x^2 + y^2\right)^2}$$

$$f''_{yy}(x, y) = \frac{2}{1 + x^2 + y^2} - \frac{4y^2}{\left(1 + x^2 + y^2\right)^2}.$$

$$f''_{xy}(x, y) = \frac{-4xy}{\left(1 + x^2 + y^2\right)^2} = f''_{yx}$$

$f''_{xy}, \quad f''_{yx}$ se numesc ***derivate parțiale mixte***.

Criteriul lui Schwarz. Fie $f : X \to R, \quad X \subset R^2$ şi punctul $(x_0, y_0) \in X$. Dacă există $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ într-o vecinătate V a lui (x_0, y_0) şi sunt continue în (x_0, y_0), atunci $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$.

Criteriul lui Young. Fie $f : X \to R, \quad X \subset R^2$ şi punctul $(x_0, y_0) \in X$. Dacă există derivatele parţiale $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ într-o vecinătate V a punctului (x_0, y_0) şi sunt diferenţiabile în (x_0, y_0), atunci $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$.

Definiţia 5.2.4. Fie funcţia $f : X \to R, \quad X \subset R^2$ şi (a, b) un punct interior lui X, astfel încât funcţia f admite derivate parţiale continue în (a, b).

$\mathrm{d} f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \cdot \mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \cdot \mathrm{d}y$ se numeşte ***diferenţiala funcţiei f în punctul*** (a, b).

Definiţia 5.2.5. Operatorul $\mathrm{d} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \mathrm{d}y$ care aplicat funcţiei f dă diferenţiala funcţiei f în punctul (x, y) se numeşte ***operatorul de diferenţiere***.

Observaţie. Fie funcţia $f : X \to R, \quad X \subset R^2$ şi (a, b) un punct interior lui X. Atunci f este diferenţiabilă în punctul (a, b), dacă există $\lambda, \mu \in R$ şi există o funcţie $\omega : X \to R$ continuă şi nulă în (a, b), astfel încât :

$$f(x, y) - f(a, b) = \lambda \cdot (x - a) + \mu \cdot (y - b) + \omega(x, y) \cdot \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}, (\forall)(x, y) \in X$$

Dacă f este diferenţiabilă în (a, b), atunci f admite derivate parţiale în (a, b) şi $\lambda = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \quad \mu = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$.

Observaţii

1) Pentru o funcţie $f : X \to R, \quad X \subset R^n$ ***diferenţiala*** este:

$\mathrm{d} f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \mathrm{d}x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \mathrm{d}x_n$, iar ***operatorul de diferenţiere*** este $\mathrm{d} = \frac{\partial}{\partial x_1} \cdot \mathrm{d}x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \cdot \mathrm{d}x_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} \cdot \mathrm{d}x_n$.

2) Pentru o funcție vectorială $f : X \to R^m, \quad X \subset R^n$ ***diferențiala*** este:

$$\mathrm{d}\, f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \mathrm{d}\, x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \mathrm{d}\, x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \mathrm{d}\, x_n .$$

Exemplu

Funcția $f : R^3 \to R, \quad f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ este derivabilă parțial pe $R^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ şi:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

de unde rezultă $\mathrm{d}\, f = \dfrac{x \cdot \mathrm{d}\, x + y \cdot \mathrm{d}\, y + z \cdot \mathrm{d}\, z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ diferențiala funcției f pe $R^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

Definiția 5.2.6. Diferențiala unei funcții de mai multe variabile se numeşte ***diferențiala totală*** a funcției.

Teorema 5.2.7. Condiția necesară şi suficientă pentru ca diferențiala unei funcții $f : I \subset R^2 \to R$ să fie identic nulă pe *I* este ca *f* să fie constantă pe *I*.

Teorema 5.2.8. Fie expresia diferențială $E = P(x, y) \cdot \mathrm{d}\, x + Q(x, y) \cdot \mathrm{d}\, y$, unde funcțiile *P* şi *Q* sunt continue pe $I \subset R^2$. Dacă *E* este diferențiala unei funcții $f : I \subset R^2 \to R$, pentru orice punct $(x, y) \in I$ atunci

$$P(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad Q(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} \quad (\forall)(x, y) \in I .$$

Teorema 5.2.9. Condiția necesară şi suficientă pentru ca diferențiala unei funcții $f : I \subset R^n \to R$ să fie identic nulă pe *I* este ca *f* să fie constantă pe *I*.

Teorema 5.2.10. Fie expresia diferențială:
$P_1(x_1, \ldots, x_n) \cdot \mathrm{d}\, x_1 + P_2(x_1, \ldots, x_n) \cdot \mathrm{d}\, x_2 + \ldots + P_n(x_1, \ldots, x_n) \cdot \mathrm{d}\, x_n$ cu funcțiile componente $P_k(x_1, \ldots, x_n), \quad k = 1,2,\ldots,n$ continue pe $I \subset R^n$. Dacă expresia diferențială este diferențiala unei funcții $f : I \subset R^n \to R$ pentru orice $(x_1, \ldots, x_n) \in I$, atunci $P_1(x_1, \ldots, x_n) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, P_n(x_1, \ldots, x_n) = \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$.

Definiția 5.2.11. Fie funcția $f: X \to R, \quad X \subset R^2$, derivabilă parțial de două ori în *X* şi cu derivatele parțiale de ordinul doi (deci şi cele de ordinul întâi) continue. ***Diferențiala de ordinul doi*** se notează cu $\mathrm{d}^2 f(x,y)$ şi este definită prin :

$$\mathrm{d}^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \mathrm{d}x^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \mathrm{d}y^2.$$

Operatorul

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \cdot \mathrm{d}x^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \cdot \mathrm{d}y^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \mathrm{d}y \right)^{(2)}$$ se numeşte ***operatorul de diferențiere de ordinul doi.***

Definiția 5.2.12. Fie funcția $f: X \to R, \quad X \subset R^2$, care are în *X* toate derivatele parțiale de ordinul *n* continue. ***Diferențiala de ordinul** n* a funcției *f* se notează cu $\mathrm{d}^n f(x,y)$ şi este definită prin :

$$\mathrm{d}^n f(x,y) = \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \cdot \mathrm{d}x^n + C_n^1 \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y} \cdot \mathrm{d}x^{n-1} \cdot \mathrm{d}y + \ldots +$$

$$+ C_n^k \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k} \partial y^k} \cdot \mathrm{d}x^{n-k} \cdot \mathrm{d}y^k + \ldots + C_n^n \frac{\partial^n f}{\partial y^n} \cdot \mathrm{d}y^n$$

Operatorul $\mathrm{d}^n = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \mathrm{d}y \right)^{(n)}$ se numeşte ***operatorul de diferențiere de ordinul** n*.

Derivatele şi diferențialele funcțiilor compuse

1) Dacă funcțiile $u, v: X \subset R \to R$ au derivate continue pe *X* şi dacă funcția $f: Y \subset R^2 \to R$ are derivate parțiale continue pe *Y*, atunci funcția $F(x) = f(u(x), v(x)), \quad (\forall)\, x \in X$ are derivata continuă pe *X*, dată de:

$$\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$

2) Dacă funcțiile $u, v: X \subset R^2 \to R$ au derivate parțiale continue pe *X* şi dacă funcția $f: Y \subset R^2 \to R$ are derivate parțiale continue pe *Y*, atunci funcția $F(x,y) = f[u(x,y), v(x,y)]$ are derivate parțiale continue pe *X*, date de:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

3) Diferențiala funcției F este dată de:

$$\mathrm{d}F=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\mathrm{d}x+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\mathrm{d}y$$

Exemplu

Fie $F(x,y)=f\left(x^2+y^2,1+xy\right)$ definită pe R^2. Considerând:

$u(x,y)=x^2+y^2,\quad v(x,y)=1+xy$ avem:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2x+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot y$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2y+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot x.$$

Diferențiala funcției F este

$$\mathrm{d}F=\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2x+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot y\right)\cdot\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2y+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot x\right)\cdot\mathrm{d}y.$$

Observație

Derivatele parțiale și diferențialele de ordin superior se calculează astfel:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)=$$
$$=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+$$
$$+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right),\quad\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right).$$
$$\mathrm{d}^2F=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot\mathrm{d}x^2+2\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\cdot\mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}y+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cdot\mathrm{d}y^2$$

Formula lui Taylor. Fie funcția $f:X\to R,\quad X\subset R^2$, derivabilă de $n+1$ ori pe X, cu toate derivatele mixte egale și fie (a,b) un punct interior lui X. Se consideră funcția $F(t)=f[a+(x-a)\cdot t,b+(y-b)\cdot t],\quad (x,y)\in X,t\in[0,1]$.

Deoarece *f* are derivate până la ordinul $n+1$ pe *X*, rezultă că şi *F* este derivabilă până la ordinul $n+1$ pe intervalul $[0,1]$, iar funcţiei *F* i se poate aplica formula lui Taylor stabilită pentru funcţiile de o variabilă. Rezultă că :

$$F(1)=F(0)+\frac{1}{1!}\cdot F'(0)+\frac{1}{2!}\cdot F''(0)+...+\frac{1}{n!}\cdot F^{(n)}(0)+R_n,$$

unde restul $R_n=\frac{1}{(n+1)!}\cdot F^{(n+1)}(\theta),\quad \theta\in(0,1).$

Având în vedere că $F(1)=f(x,y),\ \ F(0)=f(a,b),\ \ F(t)=f(x(t),y(t))$, unde $x(t)=a+(x-a)\cdot t,\ \ y(t)=b+(y-b)\cdot t$ şi calculând derivatele de ordin superior ale lui F în punctul 0, se obţine formula :

$$f(x,y)=f(a,b)+\frac{1}{1!}\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)\cdot f(a,b)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\cdot f(a,b)+...+$$

$$+\frac{1}{n!}\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^n\cdot f(a,b)+R_n$$

unde restul

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}\cdot f(a+\theta(x-a),b+\theta(y-b)),\text{ cu}$$

$\theta\in(0,1)$.

5.3 Extremele libere ale funcţiilor de mai multe variabile

Definiţia 5.3.1. Fie funcţia $f:X\to R,\quad X\subset R^n$ şi punctul $x_0\in X$. Funcţia *f* are un ***minim local*** în x_0, dacă există o vecinătate *V* a lui x_0, astfel încât $f(x)\geq f(x_0),\quad (\forall)\,x\in V$.

Punctul x_0 este punct de ***maxim local*** pentru funcţia *f*, dacă $f(x)\leq f(x_0),\quad (\forall)\,x\in V$.

Teorema 5.3.2. Fie funcţia $f:X\to R,\quad X\subset R^n$ şi $(a_1,a_2,...,a_n)$ un punct interior lui *X*. Dacă :

1) funcţia *f* are un extremum în punctul $(a_1,a_2,...,a_n)$,

2) funcţia *f* are derivate parţiale în punctul $(a_1,a_2,...,a_n)$,

atunci derivatele parţiale ale lui *f* se anulează în punctul $(a_1,a_2,...,a_n)$.

Observația 5.3.3. Punctele în care funcția *f* poate avea extreme sunt date de soluțiile sistemului :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \\ \ldots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \end{cases}$$

Soluțiile sistemului se numesc ***puncte critice***, sau ***puncte staționare***.
Pentru $x_0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ punct critic pentru funcția *f*, se notează :

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right).$$

Atunci :

1. Dacă toți determinanții

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ sunt pozitivi, funcția *f* are un minim în punctul respectiv.

2. Dacă toți determinanții $\Delta_1^* = -\Delta_1, \Delta_2^* = \Delta_2, \ldots, \Delta_n^* = (-1)^n \cdot \Delta_n$ sunt pozitivi, funcția *f* are un maxim în punctul respectiv.

Se poate preciza dacă un punct critic este de extrem, folosind semnul diferențialei de ordinul doi.
Astfel :

1. Dacă $\mathrm{d}^2 f\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right) > 0$ punctul este de minim.
2. Dacă $\mathrm{d}^2 f\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right) < 0$ punctul este de maxim.

Exemple

1) Fie funcția $f : R^2 \to R, \quad f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - 2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y \end{aligned}$$, deci punctul $(1,0)$ este punct critic pentru funcția *f*.

Având în vedere că $\mathrm{d}^2 f(1{,}0) = 2\cdot \mathrm{d}x^2 + 2\cdot \mathrm{d}y^2 > 0$ rezultă că punctul $(1{,}0)$ este punct de minim.

2) Fie funcția $f: R^2 \to R,\quad f(x,y) = x^2 - y^2 + 2x$.

Pentru aceasta avem: $\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y \end{array}$, deci punctul $(-1{,}0)$ este punct critic.

Având în vedere că $\mathrm{d}^2 f(-1{,}0) = 2\cdot \mathrm{d}x^2 - 2\cdot \mathrm{d}y^2$ nu are semn constant, punctul nu este de extrem.

5.4 Funcții implicite

Definiția 5.4.1. Fie ecuația $F(x,y) = 0$, unde $F: X \subset R^2 \to R$. O funcție $y = f(x)$ definită pe mulțimea $A \subset R$, astfel încât pentru orice $x \in A$, $(x, f(x)) \in X$ se numeşte ***soluție în raport cu y a ecuației*** $F(x,y) = 0$ pe mulțimea *A*, dacă $F(x, f(x)) \equiv 0$ pentru $x \in A$.

Definiția 5.4.2. Funcțiile $y = f(x)$ definite cu ajutorul ecuațiilor $F(x,y) = 0$ se numesc ***funcții implicite***, sau ***funcții definite implicit***.

Observație. O ecuație $F(x,y) = 0$ poate să aibă pe *A* mai multe soluții, sau nici una.

Exemple

1) Ecuația $x^2 + y^2 - 1 = 0$ are în raport cu *y* o infinitate de soluții definite pe $[-1,+1]$ de $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \alpha \le x \le \beta,\ \alpha \ge -1,\ \beta \le 1 \\ -\sqrt{1-x^2} & x \in [-1,+1] \setminus [\alpha,\beta] \end{cases}$, deoarece fiecare verifică ecuația $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Se observă că soluțiile nu sunt continue în punctul $x = \alpha$, sau $x = \beta$.

2) Ecuația $x^4 + y^4 + 1 = 0,\quad (x,y) \in R^2$ nu are nici o soluție reală.

3) Ecuația $2x - 3y + 5 = 0,\quad (x,y) \in R^2$ are o singură soluție:

$$f(x) = \frac{5}{3} + \frac{2}{3}\cdot x,\quad x \in R\ .$$

Teorema 5.4.3. Fie funcția $F: X \times Y \to R,\quad X \subset R, Y \subset R$ şi (x_0, y_0) un punct interior lui $X \times Y$. Dacă:

1) $F(x_0, y_0) = 0$,

2) $F(x,y)$, $F'_x(x,y)$, $F'_y(x,y)$ sunt continue pe o vecinătate $U \times V \subset X \times Y$ a lui (x_0, y_0),

3) $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$,

atunci:

i) există o vecinătate $U_0 \subset U$ a lui x_0 şi o vecinătate $V_0 \subset V$ a lui y_0 şi există o unică funcție $y = f(x): U_0 \to V_0$, astfel încât $f(x_0) = y_0$ şi $F(x, f(x)) \equiv 0$ pentru $x \in U_0$;

ii) funcția $f(x)$ are derivata continuă pe U_0, dată de:

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)};$$

iii) dacă $F(x,y)$ are derivatele parțiale de ordinul *k* continue pe $U \times V$, atunci $f(x)$ are derivata de ordinul *k* continuă pe U_0.

Definiția 5.4.4. Fie ecuația $F(x_1, x_2, ..., x_n, y) = 0$ unde $F(x_1, x_2, ..., x_n, y)$ este o funcție reală de $n+1$ variabile, definită pe o mulțime $X \subset R^{n+1}$.

O funcție $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ definită pe mulțimea $A \subset R^n$ este ***soluție în raport cu*** *y* a acestei ecuații, dacă pentru $(x_1, x_2, ..., x_n) \in A$ avem:

$F(x_1, x_2, ..., x_n, f(x_1, x_2, ..., x_n)) \equiv 0$.

Teorema 5.4.5. Fie $F(x_1, x_2, ..., x_n, y)$ o funcție reală definită pe $X \times Y$, $X \subset R^n, Y \subset R$, $x_0 = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$ un punct interior lui *X* şi y_0 un punct interior lui *Y*. Dacă:

1) $F(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}, y_0) = 0$,

2) funcția $F(x_1, x_2, ..., x_n, y)$ este continuă împreună cu derivatele parțiale $F'_{x_1}, F'_{x_2}, ..., F'_{x_n}, F'_y$ pe o vecinătate $U \times V$ a punctului $(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}, y_0)$,

3) $F'_y(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}, y_0) \neq 0$,

atunci:

i) există o vecinătate $U_0 \subset U$ a lui $x_0 = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$, o vecinătate $V_0 \subset V$ a lui y_0 şi o unică funcție $y = f(x_1, x_2, ..., x_n): U_0 \to V_0$ astfel încât $f(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}) = y_0$ şi $F(x_1, x_2, ..., x_n, f(x_1, x_2, ..., x_n)) \equiv 0$ pentru $x \in U_0$;

ii) funcția $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ are derivate parțiale continue în raport cu x_i, $i = 1,2,...,n$ pe U_0 date de $f'_{x_i} = -\dfrac{F'_{x_i}(x_1, x_2, ..., x_n)}{F'_y(x_1, x_2, ..., x_n)}$, $i = 1,2,...,n$;

iii) dacă $F(x_1, x_2, ..., x_n, y)$ are derivate parțiale de ordinul *k* continue pe $U \times V$, atunci funcția implicită $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ are derivate parțiale de ordinul *k* continue pe U_0

5.5 Dependență funcțională

Definiția 5.5.1. Fie $y_k = f_k(x_1, x_2, ..., x_n)$, $k = 1,2,...,m$ m funcții reale definite pe o mulțime $X \subset R^n$. O funcție reală $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ definită pe X ***depinde de funcțiile*** $f_1, f_2, ..., f_m$ pe mulțimea X, dacă există o funcție reală de m variabile $\Phi(y_1, y_2, ..., y_m)$ definită pe o mulțime $Y \subset R^m$, astfel încât pentru $x \in X$ să avem $F(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv \Phi(f_1(x_1, x_2, ..., x_n), ..., f_m(x_1, x_2, ..., x_n))$.

Exemplu

Fie funcțiile $f, g, h : R^3 \to R$ definite prin:

$$f(x, y, z) = x + y + z$$

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 .$$

$$h(x, y, z) = xy + yz + zx$$

Avem $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \Rightarrow g \equiv f^2 + 2h$, deci g depinde de funcțiile f și h.

Definiția 5.5.2. Funcțiile $y_k = f_k(x_1, x_2, ..., x_n)$, $k = 1,2,...,m$ definite pe o mulțime $X \subset R^n$ sunt ***în dependență funcțională pe o mulțime*** $A \subset X$, dacă cel puțin una dintre ele depinde de celelalte pe mulțimea A.

Teorema 5.5.3. Condiția necesară și suficientă pentru ca n funcții de n variabile independente $y_k = f_k(x_1, x_2, ..., x_n)$, $k = 1,2,...,n$ definite pe o mulțime $X \subset R^n$, cu derivate parțiale continue pe X, să fie independente funcțional pe $A \subset X$ este ca determinantul funcțional:

$$\frac{D(y_1, y_2, ..., y_n)}{D(x_1, x_2, ..., x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$ să fie identic nul pe A.

Definiția 5.5.4. Funcțiile $f_1(x_1, ..., x_n), f_2(x_1, ..., x_n), ..., f_n(x_1, ..., x_n)$ definite pe o mulțime $X \subset R^n$ se spune că sunt ***independente*** într-un punct $(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}) \in X$ dacă nici una din funcții nu depinde de celelalte într-o vecinătate a lui $(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}) \in X$.

Funcțiile $f_1(x_1,...,x_n), f_2(x_1,...,x_n),..., f_n(x_1,...,x_n)$ sunt ***independente*** pe *X* dacă sunt independente în orice punct interior al mulțimii *X*.

5.6 Extreme cu legături

Fie $y = f(x_1, x_2,..., x_n)$ o funcție reală definită pe o mulțime $X \subset R^n$ şi un sistem de $p < n$ ecuații de forma:

$$\begin{aligned} &F_1(x_1, x_2,..., x_n) = 0 \\ &F_2(x_1, x_2,..., x_n) = 0 \\ &... \\ &F_p(x_1, x_2,..., x_n) = 0 \end{aligned} \qquad (5.6.1)$$

funcțiile reale $F_1, F_2,..., F_p$ fiind definite pe aceeaşi mulțime $X \subset R^n$.

Definiția 5.6.2. Extremele funcției $y = f(x_1, x_2,..., x_n)$ când punctul $(x_1, x_2,..., x_n)$ parcurge numai mulțimea *A* a soluțiilor sistemului (5.6.1) se numesc ***extremele funcției f condiționate de sistemul*** (5.6.1).

Teorema 5.6.3. Fie funcția $\Phi(x_1, x_2,..., x_n; \lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_p)$ de $n + p$ variabile definită de:

$$\Phi = f(x_1,..., x_n) + \lambda_1 \cdot F_1(x_1,..., x_n) + ... + \lambda_p \cdot F_p(x_1,..., x_n)$$

şi $(a_1, a_2,..., a_n; \mu_1, \mu_2,..., \mu_p)$ un punct staționar liber al funcției Φ. Punctul $(a_1, a_2,..., a_n)$ este punct staționar al funcției $y = f(x_1, x_2,..., x_n)$ cu legăturile $F_1 = 0, F_2 = 0,..., F_p = 0$.

Observație. Numerele $\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_p$ se numesc ***multiplicatorii lui Lagrange***.

Pentru a determina punctele de extrem ale unei funcții $y = f(x_1, x_2,..., x_n)$ cu legăturile $F_1 = 0, F_2 = 0,..., F_p = 0$ se procedează astfel:

1) Se formează funcția ajutătoare:

$\Phi = f(x_1,..., x_n) + \lambda_1 \cdot F_1(x_1,..., x_n) + ... + \lambda_p \cdot F_p(x_1,..., x_n)$, cu $\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_p$ parametri.

2) Se rezolvă sistemul: $\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 0, \quad \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 0, ... \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_n} = 0 \\ F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_p = 0 \end{cases}$ cu $n + p$ ecuații şi $n + p$ necunoscute.

3) Dacă $(a_1, a_2, ..., a_n; \mu_1, \mu_2, ..., \mu_p)$ este o soluţie a acestui sistem, punctul $(a_1, a_2, ..., a_n)$ este punct staţionar condiţionat al funcţiei $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Punctele de extrem condiţionat ale funcţiei *f* se găsesc printre punctele staţionare condiţionate.

Pentru a stabili dacă punctele staţionare condiţionate sunt de extrem se studiază diferenţa $f(x_1, x_2, ..., x_n) - f(a_1, a_2, ..., a_n)$ pentru punctele care verifică sistemul $F_1 = 0, F_2 = 0, ..., F_p = 0$, de unde rezultă că avem:

$f(x_1, x_2, ..., x_n) - f(a_1, a_2, ..., a_n) = \Phi(x_1, x_2, ..., x_n) - \Phi(a_1, a_2, ..., a_n)$, adică se studiază diferenţa:

$E = \Phi(x_1, x_2, ..., x_n) - \Phi(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Aplicând formula lui Taylor funcţiei $\Phi(x_1, ..., x_n)$ în punctul $(a_1, a_2, ..., a_n)$ avem $E = \frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2 \Phi(a_1, ..., a_n)}{\partial x_i \partial x_j} \mathrm{d}x_i \,\mathrm{d}x_j + R$, unde $x_i - a_i = \mathrm{d}x_i$, $i = 1, 2, ..., n$.

Semnul diferenţei *E* este dat de semnul formei pătratice :

$$d^2\Phi(a_1, ..., a_n) = \sum \frac{\partial^2 \Phi(a_1, ..., a_n)}{\partial x_i \partial x_j} \mathrm{d}x_i \,\mathrm{d}x_j .$$

5.7 Aplicaţii

$\boxed{\textbf{5.7.1}}$ Se consideră funcţia $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. Să se calculeze limitele iterate $\lim\limits_{x \to 0}\left(\lim\limits_{y \to 0} f(x, y)\right)$ şi $\lim\limits_{y \to 0}\left(\lim\limits_{x \to 0} f(x, y)\right)$.

Indicaţie de rezolvare :

$$\lim_{x \to 0}\left(\lim_{y \to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) = \lim_{x \to 0} 1 = 1, \quad \lim_{y \to 0}\left(\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) = \lim_{y \to 0}(-1) = -1.$$

$\boxed{\textbf{5.7.2}}$ Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to k}}\left(1 + \frac{y}{x}\right)^x$.

Indicaţie de rezolvare :

Se calculează limitele iterate şi ambele sunt egale cu e^k.

$\boxed{\textbf{5.7.3}}$ Fie funcția $f : R^2 \to R$, definită prin

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x\cdot y^2+\sin\left(x^3+y^5\right)}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & , \ (x,y)=(0,0) \end{cases}.$$

Să se arate că, deşi funcția are limite iterate în punctul $(0,0)$, ea nu are limită în acest punct.

Indicație de rezolvare :

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x\cdot y^2+\sin\left(x^3+y^5\right)}{x^2+y^4}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^3}{x^2}=0 \text{ şi}$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot y^2+\sin\left(x^3+y^5\right)}{x^2+y^4}\right)=0\text{, deci limitele iterate există.}$$

Pentru a se arăta că f nu are limită în origine, se consideră două perechi de şiruri convergente la zero, de forma :

(x_n, y_n), $x_n = y_n^2$ şi $\left(x_n^1, y_n^1\right)$, $x_n^1 = 2\cdot y_n^1$. Pentru acestea avem :

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n)=\dfrac{1}{2}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n^1, y_n^1\right)=\dfrac{2}{5}$, deci cele două limite sunt diferite.

$\boxed{\textbf{5.7.4}}$ Să se arate că funcția $f : R^2 \to R$, definită prin :

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$ este continuă pe R^2.

Indicație de rezolvare

Se demonstrează că pentru $(\forall)\varepsilon>0$, $(\exists)\delta(\varepsilon)>0$, astfel încât pentru $(\forall)(x,y)\in R^2$ pentru care $\|(x,y)-(0,0)\|<\delta(\varepsilon)$, să rezulte $|f(x,y)-f(0,0)|<\varepsilon$.

$\|(x,y)-(0,0)\|=\sqrt{x^2+y^2}<\delta(\varepsilon)\Leftrightarrow |x|<\delta(\varepsilon)$ şi $|y|<\delta(\varepsilon)$.Rezultă

$$|f(x,y)-f(0,0)|=\left|\frac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2}\right|=\left|\frac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^3+y^3}\right|\cdot\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|\leq\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|=$$

$$=\left|\frac{(x+y)\left(x^2+y^2-xy\right)}{x^2+y^2}\right|=|x+y|\cdot\left|1-\frac{xy}{x^2+y^2}\right|\leq\frac{1}{2}|x+y|\leq\frac{1}{2}|x|+\frac{1}{2}|y|<\delta(\varepsilon)<\varepsilon$$

$\boxed{\textbf{5.7.5}}$ Fie funcția $f : R^2 \to R$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{y^2} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{|x|}{y^2}} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$. Să se studieze continuitatea în punctul $(0,0)$.

Indicație de rezolvare

Se consideră şirurile $(x_n)_{n \in N}$ şi $(y_n)_{n \in N}$, astfel încât $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} y_n = 0$, de forma $x_n = y_n^2$, $(\forall) n \in N$. Pentru acestea $\lim\limits_{n \to \infty} f\left(y_n^2, y_n\right) = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \neq 0$, deci *f* nu este continuă în origine.

$\boxed{\textbf{5.7.6}}$ Fie funcția $f : R^2 \to R$, definită prin :

$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x \cdot y}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Să se arate că *f* este continuă în raport cu *x* şi cu *y* în $(0,0)$, dar nu este continuă în raport cu ansamblul variabilelor în acest punct.

Indicație de rezolvare

$\lim\limits_{x \to 0} f(x,0) = 0 = f(0,0)$ şi $\lim\limits_{y \to 0} f(0,y) = 0 = f(0,0)$, deci *f* este continuă în raport cu fiecare variabilă în parte.

Pentru a demonstra că *f* nu este continuă în raport cu ansamblul variabilelor, se consideră şirurile $x_n = \dfrac{1}{n} \to 0$ şi $y_n = \dfrac{k}{n} \to 0$, pentru *k* real fixat.

Rezultă $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n, y_n) = \dfrac{k}{1 + k^2}$, limită care depinde de *k*, deci *f* nu este continuă pe R^2.

$\boxed{\textbf{5.7.7}}$ Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întâi pentru următoarele funcții :

a) $z = \mathrm{e}^{x - y^2}$; **b)** $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$; **c)** $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$;

d) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$; **e)** $z = x^y$; **f)** $z = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sin\dfrac{x}{y}$;

g) $u = x^y + y^z - 2 \cdot z^x$; **h)** $u = \mathrm{e}^{x^2 + y^2} \cdot \sin^2 z$.

Indicații de rezolvare

a) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \mathrm{e}^{x-y^2}$, $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = -2 \cdot y \cdot \mathrm{e}^{x-y^2}$;

b) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}$, $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2y}{x^2 + y^2}$;

d) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}$, $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$;

g) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y \cdot x^{y-1} - 2 \cdot z^x \cdot \ln z$,

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = z \cdot y^{z-1} + x^y \ln x$, $\quad \dfrac{\partial u}{\partial z} = y^2 \ln y - 2x \cdot z^{x-1}$;

h)

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x \cdot \mathrm{e}^{x^2+y^2} \cdot \sin^2 z$, $\quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y \cdot \mathrm{e}^{x^2+y^2} \cdot \sin^2 z$,

$\dfrac{\partial u}{\partial z} = \mathrm{e}^{x^2+y^2} \cdot \sin 2z$

5.7.8 Pornind de la definiție, să se calculeze :

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\dfrac{\pi}{4}, 0\right)$, $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$, dacă $f(x, y) = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y}$;

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0)$, dacă $f(x, y) = \mathrm{e}^{\sin x \cdot y}$;

c) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)$, dacă $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$;

d) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)$, $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,1)$, dacă $f(x, y) = x \cdot y \cdot \ln x$, $\quad x \neq 0$;

e) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-2,2)$, $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(-2,2)$, $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-2,2)$, dacă $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 \cdot y}$;

f) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\dfrac{\pi}{4}, 0\right)$, dacă $f(x, y) = x \cdot \sin(x + y)$.

Indicații de rezolvare

a)

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{4},0\right)=\lim_{x\to\pi/4}\frac{f(x,0)-f\left(\frac{\pi}{4},0\right)}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sin x-\sin\frac{\pi}{4}}{x-\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)=0,\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0)=0$;

c) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(1,1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,1)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)}{x-1}$, unde :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(x,1)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}},\quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Rezultă că $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{x-1}=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$;

d) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(1,1)=1$;

e) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-2,2)=-\dfrac{2}{3},\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(-2,2)=\dfrac{1}{3},\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(-2,2)=-\dfrac{1}{9}$;

f) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\dfrac{\pi}{4},0\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

$\boxed{\textbf{5.7.9}}$ Să se arate că derivatele parțiale ale funcției :

$$\omega=\ln\left(x^3+y^3+z^3-3\cdot x\cdot y\cdot z\right)$$

verifică ecuația :

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial y}+\frac{\partial\omega}{\partial z}=\frac{3}{x+y+z}.$$

Indicație de rezolvare

Avem identitatea

$x^3+y^3+z^3-3\cdot x\cdot y\cdot z=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz\right)$, de unde

$\omega=\ln(x+y+z)+\ln\left(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz\right)$ va avea derivatele parțiale

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}=\frac{1}{x+y+z}+\frac{2x-y-z}{x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz}$$
$$\frac{\partial \omega}{\partial y}=\frac{1}{x+y+z}+\frac{2y-x-z}{x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz}$$
$$\frac{\partial \omega}{\partial z}=\frac{1}{x+y+z}+\frac{2z-x-y}{x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz}$$
care înlocuite în ecuația dată, o verifică.

5.7.10 Să se arate că funcția $f(x,y)=\begin{cases}1 & x\neq 0,\ y\neq 0\\ 0 & x=0, \text{ sau } y=0\end{cases}$ nu este continuă în origine, dar admite derivate parțiale în origine.

Indicație de rezolvare
Funcția *f* nu este continuă în origine, deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} f(x,y)=1\neq f(0,0)=0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0.$$

5.7.11 Pornind de la definiție, să se arate că următoarele funcții sunt diferențiabile în punctele indicate :

a) $f(x,y)=x^3+x\cdot y+y^2$ în punctul $(1,1)$;

b) $f(x,y)=(x-2)^2+(y-1)^2$ în punctul $(2,1)$.

Indicații de rezolvare

a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3\cdot x^2+y\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=4$ şi

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x+2\cdot y\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=3$;

b) $\frac{\partial f}{\partial x}(2,1)=\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)=0$ şi se caută o funcție $\omega: R^2\to R$ continuă şi nulă în punctul $(2,1)$, pentru care :

$f(x,y)-f(2,1)=\omega(x,y)\cdot\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}$.

Rezultă $\omega(x,y)=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}$, care este continuă pe R^2 şi $\omega(2,1)=0$, deci funcția *f* este diferențiabilă în punctul $(2,1)$.

5.7.12 Fie funcția $f : R^2 \to R$, definită prin :

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x\cdot |y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Să se arate că *f* admite derivate parțiale în origine, dar *f* nu este diferențiabilă în acest punct.

Indicație de rezolvare

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0.$$

Dacă *f* este diferențiabilă în punctul $(0,0)$, atunci există o funcție $\omega : R^2 \to R$ continuă şi nulă în acest punct şi care verifică :

$$f(x,y)-f(0,0)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot(x-0)+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot(y-0)+\omega(x,y)\cdot\sqrt{x^2+y^2}.$$

De aici, rezultă $\omega(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x\cdot |y|}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$, care nu este continuă în origine. Deci, *f* nu este diferențiabilă în origine.

5.7.13 Să se arate că funcția $f : R^2 \to R$, definită prin :

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

este continuă şi admite derivate parțiale în origine, dar nu este diferențiabilă în acest punct.

5.7.14 Să se arate că derivatele parțiale de ordinul doi mixte ale funcției $f : R^2 \to R,\ f(x,y)=\begin{cases} y^2\cdot\ln\left(1+\dfrac{x^2}{y^2}\right) & y\neq 0 \\ 0 & y=0 \end{cases}$ nu sunt continue în origine şi totuşi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$.

Indicație de rezolvare

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4\cdot x^3\cdot y}{\left(x^2+y^2\right)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$ şi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x^3 y}{\left(x^2+y^2\right)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

de unde rezultă că derivatele parțiale mixte sunt egale.
Pentru a demonstra că nu sunt continue, se consideră şirurile de numere reale, convergente la zero $(x_n)_n$, $(y_n)_n$, de forma $x_n = y_n$, $(\forall) n \in N$.

Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4\cdot x_n^4}{\left(2\cdot x_n^2\right)^2}=1\neq 0$.

$\boxed{\textbf{5.7.15}}$ Să se calculeze diferențialele de ordinul întâi şi al doilea pentru funcțiile :

a) $f(x,y)=\mathrm{e}^x\cdot\cos y$;

b) $f(x,y,z)=x\cdot y\cdot z$.

Indicații de rezolvare

a) $\mathrm{d} f=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\mathrm{d} x+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\mathrm{d} y=\mathrm{e}^x\cdot\cos y\cdot\mathrm{d} x-\mathrm{e}^x\cdot\sin y\cdot\mathrm{d} y$ şi

$$\mathrm{d}^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\mathrm{d} x^2+2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot\mathrm{d} x\cdot\mathrm{d} y+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\mathrm{d} y^2=$$

$$=\mathrm{e}^x\cos y\cdot\mathrm{d} x^2-2\mathrm{e}^x\sin y\cdot\mathrm{d} x\cdot\mathrm{d} y-\mathrm{e}^x\cos y\cdot\mathrm{d} y^2$$

b) $\mathrm{d} f=y\cdot z\cdot\mathrm{d} x+x\cdot z\cdot\mathrm{d} y+x\cdot y\cdot\mathrm{d} z$ şi

$\mathrm{d}^2 f=2\cdot z\cdot\mathrm{d} x\mathrm{d} y+2\cdot x\cdot\mathrm{d} y\mathrm{d} z+2\cdot y\cdot\mathrm{d} x\mathrm{d} z$.

$\boxed{\textbf{5.7.16}}$ Să se calculeze derivatele parțiale şi diferențiala de ordinul n pentru funcția $f(x,y)=\mathrm{e}^{ax+by}$.

Indicație de rezolvare

$$f(x,y)=\mathrm{e}^{ax}\cdot\mathrm{e}^{by}\Rightarrow\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,y)=a^k\cdot\mathrm{e}^{ax}\cdot\mathrm{e}^{by},$$

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^k\partial y^{n-k}}(x,y)=a^k\cdot b^{n-k}\cdot f(x,y)$$

Rezultă diferențiala de ordinul n: $\mathrm{d}^n f=\mathrm{e}^{ax+by}\cdot(a\cdot\mathrm{d}x+b\cdot\mathrm{d}y)^n$.

$\boxed{\textbf{5.7.17}}$ Să se calculeze $\mathrm{d}f(1{,}1)$ şi $\mathrm{d}^2 f(1{,}1)$ pentru funcțiile :

a) $f(x,y)=x^2-x\cdot y+2\cdot y^2+3\cdot x-5\cdot y+7$;

b) $f(x,y)=\mathrm{e}^{x\cdot y}$;

c) $f(x,y)=\ln x\cdot y$.

Indicații de rezolvare

a) $\mathrm{d}f=\dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y\Rightarrow\mathrm{d}f(1{,}1)=4\cdot\mathrm{d}x-2\cdot\mathrm{d}y$

$$\mathrm{d}^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}y+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\mathrm{d}y\cdot\mathrm{d}x+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2\Rightarrow\ ;$$

$$\Rightarrow\mathrm{d}^2 f(1{,}1)=2\,\mathrm{d}x^2-2\,\mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}y+4\,\mathrm{d}y^2$$

b) $\mathrm{d}f(1{,}1)=\mathrm{e}\cdot(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$, $\quad\mathrm{d}^2 f(1{,}1)=\mathrm{e}\cdot\left(\mathrm{d}x^2+4\,\mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}y+\mathrm{d}y^2\right)$;

c) $\mathrm{d}f(1{,}1)=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$, $\quad\mathrm{d}^2 f(1{,}1)=-\mathrm{d}x^2-\mathrm{d}y^2$.

$\boxed{\textbf{5.7.18}}$ Să se calculeze $\mathrm{d}f(3{,}4{,}5)$, dacă $f(x,y,z)=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Indicație de rezolvare

$\mathrm{d}f=\dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\dfrac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$, unde $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=-\dfrac{x\cdot z}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$,

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=-\dfrac{y\cdot z}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\dfrac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}}$.

Rezultă $\mathrm{d}f(3{,}4{,}5)=0{,}04(3\,\mathrm{d}x+4\,\mathrm{d}y-5\,\mathrm{d}z)$.

$\boxed{\textbf{5.7.19}}$ Să se calculeze $\dfrac{\mathrm{d}\, f}{\mathrm{d}\, x}$, ştiind că $f = f(u,v)$, $u = u(x)$, $v = v(x)$, pentru funcţiile :

a) $f(u,v) = u^v$; **b)** $f(u,v) = \sqrt{u^2 + v^2}$; **c)** $f(u,v) = \operatorname{arctg}\dfrac{u}{v}$.

Indicaţii de rezolvare

a) Se foloseşte regula de derivare a funcţiilor compuse, adică :

$$\frac{\mathrm{d}\, f}{\mathrm{d}\, x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}\, u}{\mathrm{d}\, x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}\, v}{\mathrm{d}\, x} = v\cdot u^{v-1}\cdot u' + u^v\cdot \ln u\cdot v';$$

b) $\dfrac{\mathrm{d}\, f}{\mathrm{d}\, x} = \dfrac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\cdot(u\cdot u' + v\cdot v');$

c) $\dfrac{\mathrm{d}\, f}{\mathrm{d}\, x} = \dfrac{1}{u^2+v^2}\cdot(v\cdot u' - u\cdot v').$

$\boxed{\textbf{5.7.20}}$ Să se calculeze $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ pentru funcţiile :

a) $f(u,v) = \ln(u^2 + v)$, unde $u(x,y) = \mathrm{e}^{x+y^2}$, $v(x,y) = x^2 + y$;

b) $f(u,v) = \operatorname{arctg}\dfrac{u}{v}$, unde $u(x,y) = x\cdot \sin y$, $v(x,y) = x\cdot\cos y$.

Indicaţii de rezolvare

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}$, de unde rezultă :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2u}{u^2+v}\cdot\left(u^2 + x\right) \text{ şi } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{u^2+v}\cdot\left(4u^2 y + 1\right);$$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 1$.

$\boxed{\textbf{5.7.21}}$ Să se arate că funcţiile următoare verifică ecuaţiile indicate :

a) $f(x,y) = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ verifică ecuaţia $x\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\cdot\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$;

b) $f(x,y,z) = \varphi\left(x\cdot y, x^2 + y^2 - z^2\right)$ verifică ecuaţia

$$xz\frac{\partial f}{\partial x} - yz\frac{\partial f}{\partial y} + \left(x^2 - y^2\right)\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Indicații de rezolvare

a) Se consideră funcția $u(x,y)=\dfrac{y}{x}$, de unde rezultă că $f(x,y)=\varphi(u(x,y))$ și deci $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{d\varphi}{du}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}=\varphi'\cdot\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{d\varphi}{du}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}=\varphi'\cdot\dfrac{1}{x}$;

Înlocuind derivatele parțiale ale funcției f în ecuația dată, aceasta este verificată.

b) Se consideră funcțiile $u(x,y,z)=x\cdot y$, $v(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$, de unde $f(x,y,z)=\varphi(u(x,y,z),v(x,y,z))$ și deci :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=y\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u}+2x\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=x\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u}+2y\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}=-2z\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}$$

Înlocuind derivatele parțiale ale funcției *f* în ecuația dată, ea este verificată.

5.7.22 Fie $f=f(u,v)$, unde $u=x\cdot y$ și $v=\dfrac{x}{y}$. Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul doi ale funcției *f*.

Indicație de rezolvare

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=y\cdot\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=x\cdot\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{x}{y^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(y\cdot\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(y\cdot\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial v}\left(y\cdot\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=y^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\frac{1}{y^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=$$

$$=\frac{u}{v}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\frac{v}{u}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v^2};$$

Similar, se obțin rezultatele :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = u \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{v^2}{u} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{v}{u} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = uv \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2v^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{v^3}{u} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{2v^2}{u} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}.$$

5.7.23 Să se calculeze $\frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d} x}$, dacă $f(x) = \varphi(u(x), v(x))$, pentru :

a) $\varphi(u,v) = u + uv, \quad u(x) = \cos x, \quad v(x) = \sin x$;

b) $\varphi(u,v) = \mathrm{e}^{u-2v}, \quad u(x) = x^2, \quad v(x) = x^2 - 2$;

c) $\varphi(u,v) = u^v, \quad u(x) = \sin x, \quad v(x) = \cos x$.

Indicații de rezolvare

a) $\frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d} x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\mathrm{d} u}{\mathrm{d} x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\mathrm{d} v}{\mathrm{d} x} = (1+v) \cdot (-\sin x) + u \cdot \cos x = \cos 2x - \sin x$;

b) $\frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d} x} = (-2x) \cdot \mathrm{e}^{-x^2+4}$;

c) $\frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d} x} = (\sin x)^{\cos x - 1} \cdot \left(\cos^2 x - \sin^2 x \cdot \ln(\sin x)\right)$.

5.7.24 Să se calculeze $\frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d} x}$, dacă $f(x) = \varphi(u(x), v(x), w(x))$, pentru :

a) $\varphi(u,v,w) = uvw, \quad u(x) = x^2 + 1, \quad v(x) = \ln x, \quad w(x) = tgx$;

b) $\varphi(u,v,w) = \frac{w}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad u(x) = R\cos x, \quad v(x) = R\sin x, \quad w(x) = h$.

Indicații de rezolvare

a) $\frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d} x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\mathrm{d} u}{\mathrm{d} x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\mathrm{d} v}{\mathrm{d} x} + \frac{\partial \varphi}{\partial w} \cdot \frac{\mathrm{d} w}{\mathrm{d} x} =$
$= 2x \cdot \ln x \cdot \mathrm{tg}\, x + \left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot \mathrm{tg}\, x + \frac{\ln x}{\cos^2 x} \cdot \left(x^2 + 1\right)$

b) $\frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d} x} = 0$.

5.7.25 Să se calculeze $\frac{\partial f}{\partial x}, \ \frac{\partial f}{\partial y}$ pentru $f(x,y) = \varphi(u(x,y), v(x,y))$, unde :

a) $f = \varphi(u,v), \quad u(x,y) = x + y, \quad v(x,y) = x^2 + y^2$;

b) $f=\varphi(u,v),\quad u(x,y)=x^2-y^2,\quad v(x,y)=\mathrm{e}^{x\cdot y}$.

Indicații de rezolvare

a)

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial \varphi}{\partial u}+2x\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial v}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial \varphi}{\partial u}+2y\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x\cdot\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}+yv\cdot\dfrac{\partial \varphi}{\partial v},\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}=-2y\cdot\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}+xv\cdot\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}.$

5.7.26 Să se calculeze $\mathrm{d}\,f$ şi $\mathrm{d}^2 f$, dacă :

a) $f(x,y)=\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$;

b) $f(x,y)=\varphi(x+y,x-y)$;

c) $f(x,y,z)=\varphi\left(x+y+z,x^2+y^2+z^2\right)$.

Indicații de rezolvare

a) Fie $u(x,y)=\dfrac{x}{y},\quad v(x,y)=x\cdot y$.

Rezultă că $\mathrm{d}\,f=\dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}\,x+\dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}\,y$, unde :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{1}{y}+y\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\left(-\frac{x}{y^2}\right)\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial u}+x\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

şi deci $\mathrm{d}\,f=\left(\dfrac{1}{y}\mathrm{d}\,x-\dfrac{x}{y^2}\mathrm{d}\,y\right)\cdot\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}+\left(y\,\mathrm{d}\,x+x\,\mathrm{d}\,y\right)\cdot\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}$, iar diferențiala de ordinul doi este :

$$\mathrm{d}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot \mathrm{d}x^2 + 2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot \mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\mathrm{d}y^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{y^2}\mathrm{d}x^2 - \frac{2x}{y^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{x^2}{y^4}\mathrm{d}y^2\right)\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + 2\left(\mathrm{d}x^2 - \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}y^2\right)\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} +$$

$$+\left(y^2\,\mathrm{d}x^2 + 2xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + x^2\,\mathrm{d}y^2\right)\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} + \frac{2}{y^3}(-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y)\mathrm{d}y\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u} + 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}$$

5.7.27 Să se arate că :

a) $f(x,y) = y\cdot\varphi\left(x^2 - y^2\right)$ verifică ecuația : $\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{y}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y^2}\cdot f$.

b) $f(x,y) = x\cdot y + x\cdot\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ verifică ecuația : $x\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + y\cdot\frac{\partial f}{\partial y} = x\cdot y + f$.

Indicații de rezolvare

a) Se consideră $u(x,y) = x^2 - y^2$, de unde rezultă că :

$\frac{\partial f}{\partial x} = y\cdot\frac{d\varphi}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = y\cdot\varphi'\cdot(2x)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \varphi + y\cdot\varphi'\cdot(-2y)$, derivate parțiale ale funcției f care înlocuite în ecuația dată, conduc la :

$2y\cdot\varphi' - 2y\cdot\varphi' + \frac{\varphi}{y} = \frac{1}{y}\cdot\varphi$, deci ecuația este verificată.

5.7.28 Ce devine ecuația $x^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$,

dacă $f(x,y) = \varphi\left(xy, \frac{y}{x}\right)$?

Indicație de rezolvare

Se consideră $u(x,y) = xy$, $v(x,y) = \frac{y}{x}$, de unde rezultă că :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} - 2\cdot\frac{y^2}{x^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} + \frac{y^2}{x^4}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} + 2\cdot\frac{y}{x^3}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + 2\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} + \frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}$$

şi ecuaţia devine $-2u\cdot\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}=0$.

5.7.29 Să se scrie formula lui Taylor pentru funcţia $f(x,y)=\mathrm{e}^{x+y}$ în punctul $(1,-1)$.

Indicaţie de rezolvare

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^k\partial y^{n-k}}=\mathrm{e}^{x+y},\quad (\forall)\,k=1,2,\ldots\Rightarrow\frac{\partial^n f}{\partial x^k\partial y^{n-k}}(1,-1)=1.$$

Rezultă $\mathrm{d}^n f(1,-1)=(h+k)^n$, $\mathrm{d}^{n+1} f(1+\theta\cdot h,-1+\theta\cdot k)=(h+k)^{n+1}\cdot\mathrm{e}^{\theta(h+k)}$, deci pentru $\theta\in(0,1)$, se obţine dezvoltarea :

$$f(1+h,-1+k)=1+\frac{1}{1!}(h+k)+\frac{1}{2!}(h+k)^2+\ldots+\frac{1}{n!}(h+k)^n+$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}(h+k)^{n+1}\,\mathrm{e}^{\theta(h+k)}$$

5.7.30 Să se scrie formula lui Taylor pentru :

a) $f(x,y)=-x^2+2\cdot x\cdot y+3\cdot y^2-6\cdot x-2\cdot y-4$ în punctul $(-2,1)$;

b) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2\cdot x\cdot y-y\cdot z-4\cdot x-3\cdot y-z+4$ în punctul $(1,1,1)$.

Indicaţii de rezolvare

a)

$$f(-2,1)=1,\quad \frac{\partial f}{\partial x}=-2x+2y-6\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(-2,1)=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2x+6y-2\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(-2,1)=0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=2,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6$$

Rezultă dezvoltarea :

$$f(x,y)=1-(x+2)^2+2(x+2)(y-1)+3(y-1)^2;$$

b)

$$f(x,y,z)=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+2(x-1)(y-1)-(y-1)(z-1).$$

5.7.31 Folosind formula lui Taylor de ordinul doi, să se calculeze valoarea aproximativă pentru :

a) $\sqrt{1{,}03}\cdot\sqrt[3]{0{,}98}$; **b)** $(0{,}95)^{2{,}01}$; **c)** $1{,}02\cdot 2{,}01^2\cdot 3{,}03^3$.

Indicații de rezolvare

a) Se consideră funcția $f(x,y)=x^{1/2}\cdot y^{1/3}$, care se dezvoltă după formula lui Taylor în punctul $(1,1)$ pentru h=0,03 şi k=-0,02.

Rezultă $\sqrt{1{,}03}\cdot\sqrt[3]{0{,}98}=f(1+h,1+k)=f(1,1)+\frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\cdot h+\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\cdot k\right)+$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)\cdot h^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1)\cdot hk+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)\cdot k^2\right)+R_2\approx 1{,}0081;$$

b) Se consideră funcția $f(x,y)=x^y$ care se dezvoltă după formula lui Taylor în punctul $(1,2)$. Rezultă $h=-0{,}05,\quad k=0{,}01$ şi $f(0{,}95;2{,}01)\approx 0{,}902$;

c) Se consideră funcția $f(x,y,z)=x\cdot y^2\cdot z^3$, care se dezvoltă după formula lui Taylor în punctul $(1,2,3)\Rightarrow h=0{,}02,\quad k=0{,}01,\quad l=0{,}03$ şi $f(1{,}02;\,2{,}01;\,3{,}03)\approx 114{,}6159$.

5.7.32 Considerând $|x|,\ \ |y|,\ \ |z|$ suficient de mici, să se aproximeze funcția $f(x,y,z)=(1+x)^{1/2}\cdot(1+y)^{-1/2}\cdot(1+z)^{-1/2}$.

5.7.33 Să se găsească punctele de extrem local pentru funcțiile :

a) $f(x,y)=x^3+y^3-3\cdot x\cdot y,\quad (x,y)\in R^2$;

b) $f(x,y)=3\cdot x\cdot y^2-x^3-15\cdot x-36\cdot y+9,\quad (x,y)\in R^2$;

c) $f(x,y)=y^4-8\cdot y^3+18\cdot y^2-8\cdot y+x^3-3\cdot x^2-3\cdot x,\quad (x,y)\in R^2$;

d) $f(x,y)=\sin x\cdot\sin y\cdot\sin(x+y),\quad 0<x<2\pi,\quad 0<y<2\pi$;

e) $f(x,y)=(x+1)(y+1)(x+y),\quad (x,y)\in R^2$;

f) $f(x,y)=a\cdot x^2+2b\cdot x\cdot y+c\cdot y^2-e\cdot x-f\cdot y,\quad (x,y)\in R^2$;

g) $f(x,y)=x\cdot y\cdot\ln(x^2+y^2),\quad (x,y)\in R^2\setminus\{(0,0)\}$;

h) $f(x,y)=\sin x+\sin y+\sin(x+y),\quad x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\quad y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Indicații de rezolvare

a) Se determină punctele critice, care sunt soluțiile sistemului :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot x^2 - 3 \cdot y = 0 \\ 3 \cdot y^2 - 3 \cdot x = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0,0), \quad B(1,1) \text{ sunt punctele critice.}$$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -3$, de unde rezultă, pentru punctul critic $A(0,0)$: $\mathrm{d}^2 f(0,0) = -6dxdy$, deci punctul nu este de extrem.

Pentru punctul critic $B(1,1)$: $\mathrm{d}^2 f(1,1) = 6\,\mathrm{d}x^2 + 6\,\mathrm{d}y^2 - 6\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y > 0$, deci punctul este de minim;

b) Punctele critice sunt $A(2,3)$ şi $B(-2,-3)$ şi nici unul dintre acestea nu este de extrem, deoarece $\Delta_1 = -6x$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -6x & 6y \\ 6y & 6x \end{vmatrix}$. Rezultă $\Delta_2 < 0$ pentru ambele puncte critice, deci ele nu sunt de extrem;

c) Punctele critice sunt

$M_1\left(1+\sqrt{2},2\right)$, $M_2\left(1+\sqrt{2},2+\sqrt{3}\right)$, $M_3\left(1+\sqrt{2},2-\sqrt{3}\right)$,
$M_4\left(1-\sqrt{2},2\right)$, $M_5\left(1-\sqrt{2},2+\sqrt{3}\right)$, $M_6\left(1-\sqrt{2},2-\sqrt{3}\right)$.

Dintre acestea, M_2 şi M_3 sunt puncte de minim, M_4 este punct de maxim, iar celelalte nu sunt puncte de extrem;

d)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \sin y \cdot \sin(2x + y) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \sin x \cdot \sin(x + 2y) = 0$$

Rezolvând sistemul, se obțin punctele critice $A(\pi, \pi)$, $B\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Pentru punctul B : $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, deci este punct de maxim.

Pentru punctul A : $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$, şi de asemenea, diferențialele de ordinul întâi şi al doilea sunt zero, deci nu putem şti, utilizând aceste metode, dacă punctul este sau nu de extrem.

Astfel, se calculează diferențiala de ordinul trei , care ia atât valori pozitive, cât şi negative, deci punctul nu este de extrem;

e) $A\left(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$ este punct de minim;

f) Dacă $a \cdot c - b^2 > 0$ f are un punct de extrem. Dacă $a > 0$ punctul este de minim, iar dacă $a < 0$ punctul este de maxim.

Dacă $a \cdot c - b^2 = 0$ şi $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{e}{f}$, *f* are un punct de extrem. Pentru $a > 0$ punctul este de minim, iar pentru $a < 0$ este de maxim.
În celelalte cazuri funcția nu are extreme;

g) $M_1\left((2\mathrm{e})^{-1/2}, (2\mathrm{e})^{-1/2}\right)$, $M_2\left(-(2\mathrm{e})^{-1/2}, -(2\mathrm{e})^{-1/2}\right)$ sunt puncte de minim, iar $M_3\left((2e)^{-1/2}, -(2e)^{-1/2}\right)$, $M_4\left(-(2e)^{-1/2}, (2e)^{-1/2}\right)$ sunt puncte de maxim;

h) $A\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ este punct de maxim.

$\boxed{\textbf{5.7.34}}$ Să se determine punctele de extrem pentru funcțiile :

a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2 \cdot x + 4 \cdot y - 6 \cdot z, \quad (x, y, z) \in R^3$;

b)
$f(x, y, z) = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z),$
$(x, y, z) \in (0, \pi) \times (0, \pi) \times (0, \pi)$;

c) $f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{16}, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0$;

d) $f(x, y, z) = a \cdot x^2 - b \cdot x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z, \quad (x, y, z) \in R^3$.

Indicații de rezolvare

a)

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2 \cdot x + 2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2 \cdot y + 4 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 2 \cdot z - 6 = 0 \end{cases}$$

Rezolvând sistemul, se obține punctul critic $A(-1, -2, 3)$.

Diferențiala de ordinul doi este $\mathrm{d}^2 f = 2 \cdot \mathrm{d}x^2 + 2 \cdot \mathrm{d}y^2 + 2 \cdot \mathrm{d}z^2$, deci este pozitiv definită, iar punctul critic este punct de minim;

b)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \cos x - \cos(x+y+z) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \cos y - \cos(x+y+z) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = \cos z - \cos(x+y+z) = 0 \end{cases}$$

Rezultă că $\cos x = \cos y = \cos z = \cos(x+y+z) \Rightarrow x = y = z$ în intervalul de definiție şi se obține un singur punct critic $A\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Diferențiala de ordinul doi în acest punct fiind negativ definită, punctul este de maxim;

c) $(2,4,8)$ este punct de minim;

d) f nu are puncte de extrem.

$\boxed{\textbf{5.7.35}}$ Fiind dată capacitatea $V = \dfrac{a^3}{2}$ pentru un bazin paralelipipedic, să se determine dimensiunile sale astfel încât să se întrebuințeze minim de material (suprafață minimă) pentru construcția sa.

Indicație de rezolvare

Fie x,y şi z dimensiunile bazinului, z fiind înălțimea acestuia. Rezultă că $x \cdot y \cdot z = \dfrac{a^3}{2}$, iar suprafața $S = 2 \cdot x \cdot z + 2 \cdot y \cdot z + x \cdot y = \dfrac{a^3}{y} + \dfrac{a^3}{x} + x \cdot y$.

Se consideră, astfel, funcția $f(x,y) = \dfrac{a^3}{x} + \dfrac{a^3}{y} + x \cdot y$, care are un minim pentru $x = y = a$, de unde rezultă dimensiunile bazinului $x = a,\ y = a,\ z = \dfrac{a}{2}$.

$\boxed{\textbf{5.7.36}}$ Să se înscrie într-un con circular drept un paralelipiped dreptunghic de volum maxim.

Indicație de rezolvare

Fie r raza bazei conului şi h înălțimea acestuia. Dreptunghiurile care constituie bazele paralelipipedului sunt înscrise în cercurile de bază ale unui cilindru circular drept înscris în conul dat.

Se consideră x şi y dimensiunile bazei paralelipipedului. Atunci, volumul său va fi dat de $V = \frac{h}{2 \cdot r} \cdot x \cdot y \left(2 \cdot r - \sqrt{x^2 + y^2}\right)$ şi este maxim pentru $x = y = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot r$, şi înălțimea $\frac{h}{3}$.

$\boxed{\textbf{5.7.37}}$ Să se determine extremele funcției :

a) $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12 \cdot x \cdot y + 2 \cdot z, \quad (x, y, z) \in R^3$;

b) $f(x, y, z) = x \cdot y^2 \cdot z^3 \cdot (7 - x - 2 \cdot y - 3 \cdot z), \quad x \cdot y \cdot z \neq 0$;

c) $f(x, y, z) = \left(x + z^2\right) \cdot \mathrm{e}^{x\left(y^2 + z^2 + 1\right)}, \quad (x, y, z) \in R^3$.

Indicații de rezolvare

a)

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3 \cdot x^2 + 12 \cdot y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2 \cdot y + 12 \cdot x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 2 \cdot z + 2 = 0 \end{cases}$$

Rezolvând sistemul, se obțin punctele critice $A(0,0,-1), \quad B(24,-144,-1)$.

Diferențiala de ordinul doi pentru funcția f este :

$\mathrm{d}^2 f = 6 \cdot x \cdot \mathrm{d}x^2 + 2 \cdot \mathrm{d}y^2 + 2 \cdot \mathrm{d}z^2 + 24 \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y$ şi cum

$\mathrm{d}^2 f(24,-44,-1) > 0$, rezultă că punctul B este punct de minim.

Punctul A nu este de extrem;

b) $A(1,1,1)$ este punct de maxim;

c) $A(-1,0,0)$ este punct de minim.

$\boxed{\textbf{5.7.38}}$ Să se calculeze $f'(1), \quad f''(1)$ pentru funcția implicită $y = f(x)$, definită prin ecuația $\left(x^2 + y^2\right)^3 - 3 \cdot \left(x^2 + y^2\right) - 2 = 0$, satisfăcând condiția $f(1) = 1$.

Indicație de rezolvare

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{x}{y} \Rightarrow f'(1) = -1$$

$$f''(x)=\frac{\partial f'(x)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{y}\right)=-\frac{y-x\cdot y'}{y^2}=-\frac{1}{y^2}\left(y+\frac{x^2}{y}\right)\Rightarrow f''(1)=-2\,.$$

$\boxed{\textbf{5.7.38}}$ Se consideră funcția $y=f(x)$, definită implicit prin relația $x^2+y^2+2\cdot a\cdot x\cdot y=0,\quad a>1$. Să se arate că $f''(x)=0$.

Indicație de rezolvare

Deoarece $y=f(x)$ trebuie să verifice $x^2+y^2+2\cdot a\cdot x\cdot y=0,\quad a>1$, rezultă că $x^2+f^2(x)+2a\cdot x\cdot f(x)=0$. Derivând aceasta vom obține :

$$2\cdot x+2f(x)\cdot f'(x)+2a\cdot f(x)+2a\cdot x\cdot f'(x)=0\Rightarrow f'(x)=-\frac{x+a\cdot f(x)}{a\cdot x+f(x)}.$$

Derivând ultima relație obținută, rezultă :

$$f''(x)=\frac{a^2-1}{[a+f(x)]^3}\cdot\left[x^2+f^2(x)+2a\cdot x\cdot f(x)\right]=0\Rightarrow f''(x)=0\,.$$

$\boxed{\textbf{5.7.39}}$ Să se determine punctele de extrem pentru funcțiile implicite $y=f(x)$ definite prin :

a) $x^2-2\cdot x\cdot y+5\cdot y^2-2\cdot x+4\cdot y+1=0$;

b) $x^3+y^3-3\cdot x^2\cdot y-3=0$;

c) $y^2+2\cdot y\cdot x^2-4\cdot x-3=0$;

d) $y^3+x^2-x\cdot y-3\cdot x-y+4=0$;

e) $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\cdot\left(x^2-y^2\right)$.

Indicații de rezolvare

a) $f'(x)=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=-\dfrac{2x-2y-2}{-2x+10y+4}$, unde s-a considerat

$F(x,y)=x^2-2\cdot x\cdot y+5\cdot y^2-2\cdot x+4\cdot y+1$ **.**

Se obține sistemul :

$$\begin{cases}2x-2y-2=0\\ x^2-2xy+5y^2-2x+4y+1=0\end{cases}.$$

care are soluțiile $A(1,0),\quad B\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

În acelaşi timp, $f''(x)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{2x-2y-2}{2x-10y-4}\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x-y-1}{x-5y-2}\right)=$

$$=\frac{(1-f'(x))(x-5f(x)-2)-(x-f(x)-1)(1-5f'(x))}{(x-5f(x)-2)^2}\Rightarrow f''(1)=-1<0,$$ deci

punctul 1 este de maxim, iar $f''\left(\dfrac{1}{2}\right)=1>0$, deci punctul $\dfrac{1}{2}$ este de minim;

b) $f'(x)=-\dfrac{3x^2-6xy}{3y^2-3x^2}\Rightarrow\begin{cases}3x^2-6xy=0\\ x^3+y^3-3x^2y-3=0\end{cases}\Rightarrow A(0,\sqrt[3]{3}),\quad B(-2,-1)$

sunt soluțiile sistemului.

$$f''(x)=\frac{2y^3+2x^2y-2xy^2+2x\left(x\cdot y-x^2-y^2\right)\cdot y'}{\left(x^2-y^2\right)^2}\Rightarrow f''(0)=\frac{2}{\sqrt[3]{3}},\quad f''(-2)=-\frac{2}{3}$$

deci, 0 este punct de minim, iar -2 este punct de maxim;

c) Fie $F(x,y)=y^2+2yx^2-4x-3\Rightarrow f'(x)=-\dfrac{2xy-2}{y+x^2}$, de unde se obține

sistemul : $\begin{cases}xy=1\\ y^2+2yx^2-4x-3=0\end{cases}$ cu soluțiile $A(-1,-1),\quad B\left(\dfrac{1}{2},2\right)$.

$$f''(x)=-2\cdot\frac{(f(x)+xf'(x))\left(f(x)+x^2\right)-(xf(x)-1)(f'(x)+2x)}{\left(f(x)+x^2\right)^2}$$ şi deoarece

$f''\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$, rezultă că punctul $x=\dfrac{1}{2}$ este de maxim.

Punctul $x=-1$ nu este de extrem, deoarece diferențiala de ordinul doi a lui F este $\mathrm{d}^2F(-1,-1)=-4\,\mathrm{d}x^2-2\,\mathrm{d}y^2-8x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ nu păstrează semn constant;

d) $x=\dfrac{5}{8}$ este de maxim .

$\boxed{\textbf{5.7.40}}$ Să se calculeze $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0),\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0)$ pentru funcția $z=f(x,y)$ definită implicit prin $x\cos y+y\cos z+z\cos x-1=0$, satisfăcând condiția $f(1,0)=0$.

Indicație de rezolvare

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)},\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)},$$ de unde rezultă :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\frac{\cos y - z\sin x}{-y\sin z+\cos x},\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{-x\sin y+\cos z}{-y\sin z+\cos x},$$ deci

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)=-\frac{1}{\cos 1},\quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)=-\frac{1}{\cos 1}.$$

$\boxed{\textbf{5.7.41}}$ Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întâi şi doi ale funcției implicite $z=f(x,y)$, definite prin :

a) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0$;

b) $x^2+y^2+z^2-1=0$.

Indicații de rezolvare

a) Fie $F(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1$.

Rezultă $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{x}{z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{c^2}{b^2}\cdot\frac{y}{z}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{x}{z}\right)=\frac{c^4}{a^2\cdot b^2}\frac{\left(y^2-b^2\right)}{z^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{c^2}{b^2}\cdot\frac{y}{z}\right)=\frac{c^4}{a^2\cdot b^2}\cdot\frac{\left(x^2-a^2\right)}{z^3};$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{c^2}{b^2}\cdot\frac{y}{z}\right)=-\frac{c^4}{a^2\cdot b^2}\cdot\frac{x\cdot y}{z^3};$$

b)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{z}{x},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y^2-1}{z^3},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^2-1}{z^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{x\cdot y}{z^3}$$

$\boxed{\textbf{5.7.42}}$ Să se calculeze $\mathrm{d}\,z$, $\mathrm{d}^2\,z$ pentru funcția implicită $z = f(x, y)$, definită prin :

a) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$;

b) $\dfrac{x}{z} - \ln\dfrac{z}{y} = 0$;

c) $\ln z = x + y + z - 1$.

Indicații de rezolvare

a) Fie $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 \Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{x}{z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{y}{z}$, de unde rezultă

$$\mathrm{d}\,z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}\,x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}\,y = -\frac{1}{z}\cdot(x\cdot\mathrm{d}\,x + y\cdot\mathrm{d}\,y).$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{z}\right) = \frac{y^2 - a^2}{z^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{z}\right) = \frac{x^2 - a^2}{z^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{z}\right) = -\frac{xy}{z^3}$$

de unde rezultă :

$$\mathrm{d}^2\,z = \frac{y^2 - a^2}{z^3}\cdot\mathrm{d}\,x^2 - 2\frac{xy}{z^3}\cdot\mathrm{d}\,x\cdot\mathrm{d}\,y + \frac{x^2 - a^2}{z^3}\cdot\mathrm{d}\,y^2;$$

c) $\mathrm{d}\,z = z\cdot\dfrac{\mathrm{d}\,x + \mathrm{d}\,y}{1 - z}$, $\mathrm{d}^2\,z = z\cdot\dfrac{(\mathrm{d}\,x + \mathrm{d}\,y)^2}{(1 - z)^3}$.

$\boxed{\textbf{5.7.43}}$ Să se determine extremele funcției $z = f(x, y)$, definită implicit prin

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2\cdot x + 4\cdot y - 6\cdot z - 11 = 0$;

b) $x^2 + y^2 + z^2 - x\cdot z - y\cdot z + 2\cdot x + 2\cdot y + 2\cdot z - 2 = 0$.

Indicații de rezolvare

a) Fie $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2\cdot x + 4\cdot y - 6\cdot z - 11$.

Atunci $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \dfrac{1 - x}{z - 3}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\dfrac{y + 2}{z - 3}$, de unde se obțin punctele $A(1,-2,8)$, $B(1,-2,-2)$.

$$\mathrm{d}^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\mathrm{d}\,x^2 + 2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\mathrm{d}\,x\cdot \mathrm{d}\,y + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\mathrm{d}\,y^2, \text{ unde}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1-x}{z-3}\right) = \frac{-(z-3)^2-(1-x)^2}{(z-3)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y+2}{z-3}\right) = \frac{-(z-3)^2-(y+2)^2}{(z-3)^3}$$

şi $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{y+2}{z-3}\right) = -\dfrac{(y+2)^2}{(z-3)^3}$.

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,-2,8) = -\dfrac{1}{5}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1,-2,8) = -\dfrac{1}{5}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,-2,8) = 0 \Rightarrow \mathrm{d}^2 z(1,-2,8) < 0$,

deci punctul este de maxim.

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,-2,-2) = \dfrac{1}{5}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1,-2,-2) = \dfrac{1}{5}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,-2,-2) = 0 \Rightarrow \mathrm{d}^2 z(1,-2,-2) > 0$,

deci punctul este de minim;

b) $A\left(-3-\sqrt{6}, -3-\sqrt{6}, -4-2\sqrt{6}\right)$ este punct de minim.

$B\left(-3+\sqrt{6}, -3+\sqrt{6}, -4+2\sqrt{6}\right)$ este punct de maxim.

5.7.44 Să se arate că dacă funcția $z = f(x, y)$ este definită implicit prin $(y+z)\cdot \sin z - y\cdot(x+z) = 0$, atunci este satisfăcută ecuația $z\cdot \sin z \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} - y^2 \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Indicație de rezolvare

Fie $F(x,y,z) = (y+z)\cdot \sin z - y\cdot(x+z) \Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{-y}{(y+z)\cos z + \sin z - y}$

şi $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\sin z - x - z}{(y+z)\cos z + \sin z - y}$. Înlocuind derivatele parțiale în ecuația dată, aceasta este verificată.

5.7.45 Funcțiile $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$ sunt definite implicit prin relațiile $u + v = x + y$, $x\cdot u + y\cdot v = 1$. Să se calculeze $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

Indicație de rezolvare

Derivând în raport cu *x* cele două relații, obținem :

$$\frac{\partial}{\partial x}(u+v)=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}=1, \quad \frac{\partial}{\partial x}(x\cdot u+y\cdot v)=u+x\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{u+y}{y-x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{u+x}{x-y}$$

Derivând cele două relații în raport cu y, obținem :

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{v+y}{y-x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{v+x}{x-y}.$$

$\boxed{\textbf{5.7.46}}$ Fie funcția compusă $z=f(x,y)$, definită de $z=u^3+v^3$, în care funcțiile $u(x,y)$ și $v(x,y)$ sunt definite implicit prin relațiile $u+v^2=x, \quad u^2+v^2=y$. Să se calculeze $\frac{\partial z}{\partial x}, \ \frac{\partial z}{\partial y}$.

Indicație de rezolvare

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=3u^2\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+3v^2\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=3u^2\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+3v^2\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

Diferențiind relațiile de definiție, obținem :

$$\mathrm{d}u+2\cdot v\cdot\mathrm{d}v=\mathrm{d}x, \quad 2\cdot u\cdot\mathrm{d}u+2\cdot v\cdot\mathrm{d}v=\mathrm{d}y\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\mathrm{d}u=\frac{1}{1-2u}(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y), \quad \mathrm{d}v=-\frac{u}{v(1-2u)}\cdot\mathrm{d}x+\frac{1}{2v(1-2u)}\cdot\mathrm{d}y.$$

Rezultă $\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1-2u}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{1-2u}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{u}{v(1-2u)}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{2v(1-2u)}$ și deci

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3u(u-v)}{1-2u}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3}{(1-2u)}\cdot\left(-3\cdot u^2+\frac{3}{2}\cdot v\right).$$

$\boxed{\textbf{5.7.47}}$ Să se calculeze dz, dacă $z=u\cdot v, \quad x=\mathrm{e}^{u+v}, \quad y=\mathrm{e}^{u-v}$.

Indicație de rezolvare

$$\mathrm{d}z=\mathrm{d}(u\cdot v)=v\cdot\mathrm{d}u+u\cdot\mathrm{d}v.$$

Diferențiind relațiile care definesc pe $u(x,y)$ și $v(x,y)$, obținem :

$$\mathrm{d}x=(\mathrm{d}u+\mathrm{d}v)\cdot\mathrm{e}^{u+v}, \quad \mathrm{d}y=(\mathrm{d}u-\mathrm{d}v)\cdot\mathrm{e}^{u-v}.$$

Rezultă $\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\frac{1}{y}\mathrm{d}y\right), \quad \mathrm{d}v=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\mathrm{d}x-\frac{1}{y}\mathrm{d}y\right)$, de unde :

$$\mathrm{d}\,z = \frac{1}{2x}(u+v)\mathrm{d}\,x + \frac{1}{2y}(v-u)\mathrm{d}\,y\,.$$

$\boxed{\textbf{5.7.48}}$ Fie funcția $z = f(x, y)$ definită implicit prin $z \cdot \mathrm{e}^z = x \cdot \mathrm{e}^x + y \cdot \mathrm{e}^y$. Să se calculeze $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, dacă $u = \dfrac{x+z}{y+z}$.

Indicație de rezolvare

Diferențiind relația de definiție a funcției implicite $z = f(x, y)$, obținem

$$(z+1)\cdot \mathrm{e}^z \cdot \mathrm{d}\,z = (x+1)\cdot \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{d}\,x + (y+1)\cdot \mathrm{e}^y \cdot \mathrm{d}\,y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}\,z = \frac{x+1}{z+1}\cdot \mathrm{e}^{x-z}\cdot \mathrm{d}\,x + \frac{y+1}{z+1}\cdot \mathrm{e}^{y-z}\cdot \mathrm{d}\,y$$

În acelaşi timp, avem $\mathrm{d}\,u = \mathrm{d}\left(\dfrac{x+z}{y+z}\right) = \dfrac{(y+z)(\mathrm{d}\,x+\mathrm{d}\,z)-(x+z)(\mathrm{d}\,y+\mathrm{d}\,z)}{(y+z)^2} =$

$$\frac{1}{(y+z)^2}\left\{\left[(y+z)+(y-x)\frac{x+1}{z+1}\cdot \mathrm{e}^{x-z}\right]\cdot \mathrm{d}\,x + \left[-(x+z)+(y-z)\frac{y+1}{z+1}\cdot \mathrm{e}^{y-z}\right]\cdot \mathrm{d}\,y\right\}$$

Rezultă $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{(y+z)^2}\left[(y+z)+(y-x)\dfrac{x+1}{z+1}\cdot \mathrm{e}^{x-z}\right]$ şi

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{(y+z)^2}\left[-(x+z)+(y-z)\frac{y+1}{z+1}\cdot \mathrm{e}^{y-z}\right].$$

$\boxed{\textbf{5.7.49}}$ Fie funcțiile $f(x,y,z) = x+y+z$, $\quad g(x,y,z) = x-y+z$ şi $h(x,y,z) = 4\cdot(x\cdot y + y\cdot z)$ definite pe R^3. Să se cerceteze dependența funcțională a acestor funcții.

Indicație de rezolvare

Matricea funcțională a lui Jacobi : $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial z} \\ \dfrac{\partial h}{\partial x} & \dfrac{\partial h}{\partial y} & \dfrac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4y & 4(x+z) & 4y \end{pmatrix}$ are rangul doi, deci cele trei funcții sunt dependente funcțional . Două dintre funcții f şi g sunt independente funcțional, iar a treia, h, este dependentă funcțional de acestea.

$\boxed{\textbf{5.7.50}}$ Fie funcțiile $f(x,y,z)=(x+y+z)^2$, $g(x,y,z)=2\cdot x+y-2\cdot z$ şi $h(x,y,z)=3\cdot x^2+2\cdot x\cdot y-12\cdot x\cdot z-18\cdot z\cdot y$ definite pe R^3. Să se arate că :

a) funcțiile *f*, *g* şi *h* nu sunt independente în origine.

b) există o vecinătate a punctului $M_0(-1,0,1)$ pe care *f* depinde de *g* şi *h*.

Indicație de rezolvare

a) Matricea lui Jacobi este :

$$\begin{pmatrix} 2(x+y+z) & 2(x+y+z) & 2(x+y+z) \\ 2 & 1 & -2 \\ 6x+2y-12z & 2x-18z & -12x-18y \end{pmatrix}.$$

În origine, rangul matricei este 1, deci funcțiile nu sunt independente funcțional;

b) În punctul $M_0(-1,0,1)$, rangul matricei este 2, ultimele două linii ale matricei fiind liniar independente în acest punct. Rezultă că există o vecinătate a lui $M_0(-1,0,1)$ în care *f* depinde de *g* şi *h*.

$\boxed{\textbf{5.7.51}}$ Să se arate că funcțiile

$y_1=x+y+z$, $y_2=x^3+y^3+z^3+6\cdot x\cdot y\cdot z$ şi

$y_3=x\cdot y(x+y)+y\cdot z(y+z)+z\cdot x(z+x)$ sunt dependente funcțional pe R^3. Care este relația de dependență ?

Indicație de rezolvare

$y_1^3=y_2+3\cdot y_3$.

$\boxed{\textbf{5.7.52}}$ Să se cerceteze dependența funcțională a funcțiilor :

a) $y_1=\dfrac{a\cdot x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $y_2=\dfrac{b\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ definite pe $R^2\setminus\{(0,0)\}$;

b) $y_1=x+y+z$, $y_2=x^2+y^2+z^2-x\cdot y-y\cdot z-x\cdot z$ şi

$y_3=x^3+y^3+z^3-3\cdot x\cdot y\cdot z$ definite pe R^3 ;

c)

$$y_1=\frac{1}{(x-y)(x-z)},\quad y_2=\frac{1}{(y-z)(y-x)},\quad y_3=\frac{1}{(z-x)(z-y)},\quad x\neq y\neq z.$$

Indicații de rezolvare

a) Matricea lui Jacobi este :

$$\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\begin{pmatrix} ay^2 & -axy \\ -bxy & bx^2 \end{pmatrix}, \text{ şi ea are rangul 1.}$$

Funcțiile sunt dependente funcțional : $\left(\frac{y_1}{a}\right)^2+\left(\frac{y_2}{b}\right)^2=1$;

b) $y_3=y_1\cdot y_2$;

c) $y_1+y_2+y_3=0$.

5.7.53 Să se determine extremele funcției $f(x,y)=x^2+y^2-y-x$ condiționate de $x+y=1$.

Indicație de rezolvare

Se consideră funcția lui Lagrange :

$L(x,y)=f(x,y)+\lambda\cdot g(x,y)$, unde $g(x,y)=x+y-1$.

$L(x,y)=x^2+y^2-y-x+\lambda\cdot(x+y-1)$.

Se rezolvă sistemul de forma :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}=2\cdot x-1+\lambda=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=2\cdot y-1+\lambda=0 \\ x+y=1 \end{cases}$$, de unde se obțin soluțiile : $\lambda=0,\quad x=y=\frac{1}{2}$.

Deoarece $d^2L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=2\cdot dx^2+2\cdot dy^2>0$, punctul $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ este de minim.

5.7.54 Să se determine extremele funcției $f(x,y)$ cu legăturile indicate :

a) $f(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y},\quad \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{a^2}$; **b)** $f(x,y)=x^2+y^2,\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}-=0$;

c) $f(x,y)=(x-1)^2+y^2,\quad x^2-y^2=1$; **d)** $f(x,y)=x\cdot y,\quad x+y=1$;

e) $f(x,y)=x+2\cdot y,\quad x^2+y^2=5$.

Indicații de rezolvare

a) Se consideră $L(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\lambda\cdot\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{a^2}\right)$ şi se rezolvă sistemul :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=0\\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{a^2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2\cdot\lambda}{x^3}=0\\ -\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{2\cdot\lambda}{y^3}=0\\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{a^2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-2\lambda\\ y=-2\lambda\\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{a^2}\end{cases} \Rightarrow \frac{1}{4\lambda^2}+\frac{1}{4\lambda^2}=\frac{1}{a^2}.$$

Rezultă $\lambda_1=-\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\Rightarrow A\left(a\sqrt{2},a\sqrt{2}\right)$, $\lambda_2=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\Rightarrow B\left(-a\sqrt{2},-a\sqrt{2}\right)$.

$$\mathrm{d}^2 L=\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2+2\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2 .$$

Rezultă $\mathrm{d}^2 L=\left(\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{6\lambda}{x^4}\right)\mathrm{d}x^2+\left(\dfrac{2}{y^3}+\dfrac{6\lambda}{y^4}\right)\mathrm{d}y^2$ şi deci punctul A este de maxim, iar B de minim;

b) $\lambda=-2\cdot a^2\cdot b^2\left(a^2+b^2\right)^{-1}\Rightarrow A\left(\dfrac{ab^2}{a^2+b^2},\dfrac{a^2b}{a^2+b^2}\right)$ este punct de minim;

c) $\lambda=0\Rightarrow A(1,0)$ este punct de minim;

d) $\lambda=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow A\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ este punct de maxim;

e) $\lambda_1=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow A(1,2)$ este punct de maxim şi $\lambda=\dfrac{1}{2}\Rightarrow B(-1,-2)$ este punct de minim.

$\boxed{\textbf{5.7.55}}$ Să se determine extremele legate pentru funcțiile :

a) $f(x,y,z)=x-2y+2z,\quad x^2+y^2+z^2=9$;

b) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2,\quad \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\quad a>b>c>0$;

c) $f(x,y,z)=x+2y-2z,\quad x^2+y^2+z^2=16$;

d) $f(x,y,z)=x+y+z,\quad x-y+z=2,\quad x^2+y^2+z^2=4$;

e) $f(x,y,z)=x\cdot y\cdot z,\quad x^2+y^2+z^2=1,\quad x+y+z=0$.

Indicații de rezolvare

a) Se consideră $L(x,y,z)=x-2y+2z+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-9\right)$ şi se rezolvă sistemul :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2 \cdot \lambda \cdot x = 0 \\ -2 + 2 \cdot \lambda \cdot y = 0 \\ 2 + 2 \cdot \lambda \cdot z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2\lambda} \\ y = \dfrac{1}{\lambda} \\ z = -\dfrac{1}{\lambda} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}$$

Se obțin punctele $A(1,-2,2)$, $\quad B(-1,2,-2)$.

Se determină $d^2 L = 2\lambda \, d x^2 + 2\lambda \, d y^2 + 2\lambda \, d z^2$, de unde rezultă că punctul A este de maxim, iar B de minim;

b) $\lambda_1 = -a^2 \Rightarrow A(a,0,0), B(-a,0,0)$ sunt puncte de maxim.

$\lambda_2 = -c^2 \Rightarrow C(0,0,c), D(0,0,-c)$ sunt puncte de minim;

c) $\lambda_1 = -\dfrac{3}{8} \Rightarrow A\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{8}{3}, -\dfrac{8}{3}\right)$ este punct de maxim.

$\lambda_2 = \dfrac{3}{8} \Rightarrow B\left(-\dfrac{4}{3}, -\dfrac{8}{3}, \dfrac{8}{3}\right)$ este punct de minim;

d) Se consideră

$L(x,y,z) = x + y + z + \lambda(x - y + z - 2) + \mu(x^2 + y^2 + z^2 - 4)$ şi se rezolvă sistemul :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \lambda + 2\mu \cdot x = 0 \\ 1 - \lambda + 2\mu \cdot y = 0 \\ 1 + \lambda + 2\mu \cdot z = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\lambda + 1}{2\mu} \\ y = \dfrac{\lambda - 1}{2\mu} \\ z = -\dfrac{\lambda + 1}{2\mu} \end{cases}.$$

Rezultă $\lambda_1 = \dfrac{1}{3}, \quad \mu_1 = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow A\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$ punct de maxim şi

$\lambda_2 = -1, \quad \mu_2 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow B(0,-2,0)$ punct de minim;

e) $\lambda_1 = -\frac{\sqrt{6}}{12}, \quad \mu_1 = \frac{1}{6} \Rightarrow A\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right), \quad B\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ şi

$C\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ sunt puncte de maxim.

$\lambda_2 = \frac{\sqrt{6}}{12}, \quad \mu_2 = \frac{1}{6} \Rightarrow D\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right), \quad E\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ şi

$F\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ sunt puncte de minim.

5.7.56 Să se determine valoarea maximă şi valoarea minimă pentru :

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 3 \cdot x - 2 \cdot y + 1, \quad x^2 + y^2 \le 1$;

b) $f(x,y) = 5 \cdot x^2 + 3 \cdot x \cdot y + y^2, \quad x^2 + y^2 \le 1$;

c) $f(x,y) = x^2 + y^2, \quad \left(x - \sqrt{2}\right)^2 + \left(y - \sqrt{2}\right)^2 \le 9$.

Indicații de rezolvare

a) Deoarece funcția *f* este continuă pe domeniul de definiție $x^2 + y^2 \le 1$, rezultă că ea îşi atinge marginile. Se vor determina extremele funcției în interiorul cercului de ecuație $x^2 + y^2 = 1$ şi apoi pe cele de pe frontieră şi se compară valorile obținute.

Rezolvând sistemul $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 0 \\ 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ şi cum $\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1 = \frac{13}{4} > 1$

rezultă că punctele de extrem se situează pe frontiera domeniului de definiție. Astfel, se determină extremele funcției *f* condiționate de $x^2 + y^2 = 1$.

Se va obține punctul $\left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$ de minim pentru *f*;

b) În interiorul cercului de ecuație $x^2 + y^2 = 1$ funcția are minim în origine, valoarea sa fiind zero.

Pe cerc, punctele $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right), \quad \left(\frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ sunt de minim, iar punctele

$\left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right), \quad \left(\frac{-3}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}\right)$ sunt de maxim.

Astfel, valoarea maximă a lui *f* este $\frac{11}{2}$, iar valoarea minimă este 0;

Capitolul 6

SCHIMBĂRI DE VARIABILE

Aplicații

$\boxed{6.1}$ Ce devin ecuațiile următoare dacă se fac schimbările de variabilă indicate ?

a) $x^3 \cdot y''' + x \cdot y' - y = 0, \quad x = \mathrm{e}^t$;

b) $(x+1)^3 \cdot y'' + 3(x+1)^2 \cdot y' + (x+1) \cdot y = \ln(x+1), \quad \ln(x+1) = t$;

c) $\left(1 - x^2\right) \cdot y'' - x \cdot y' + \omega^2 \cdot y = 0, \quad x = \cos t$;

d. $\left(1 + x^2\right)^2 \cdot y'' + 2x\left(1 + x^2\right) \cdot y' + y = 0, \quad x = \operatorname{tg} t$;

e) $x\left(1 + x^2\right) \cdot y'' - \left(1 - x^2 \cdot y \cdot \sqrt{1 + x^2}\right) \cdot y' - x^3 \cdot y^2 = 0, \quad t = \sqrt{1 + x^2}$.

Indicații de rezolvare

a)

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{e}^{-t}, \quad y'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{e}^{-t}\right) \cdot \mathrm{e}^{-t} = \left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) \cdot \mathrm{e}^{-2t}$$

$$y''' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) \cdot \mathrm{e}^{-2t}\right] \cdot \mathrm{e}^{-t} = \left(\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}t^3} - 3\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) \cdot \mathrm{e}^{-3t}$$

Înlocuind derivatele lui y în ecuația dată, se va obține noua ecuație :

$$\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}t^3} - 3\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y = 0;$$

b) $\ln(x+1) = t \Rightarrow x + 1 = \mathrm{e}^t \Rightarrow x = \mathrm{e}^t - 1$.

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{e}^{-t}, \quad y'' = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{e}^{-t}\right) \cdot \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = .$$

$$= \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} \cdot \mathrm{e}^{-2t} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{e}^{-2t}$$

Înlocuind derivatele lui y în ecuația dată, se obține noua ecuație :

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = t \cdot \mathrm{e}^{-t};$$

c) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+\omega^2\cdot y=0$;

d) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+y=0$;

e) $x=\sqrt{t^2-1}\Rightarrow y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{\sqrt{t^2-1}}{t}$.

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\cdot\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}\right)\cdot\frac{1}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}\cdot\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}+$$

$$+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}\cdot\frac{1}{t^2\sqrt{t^2-1}}=\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{t^2-1}{t^2}+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{t^3}$$

Înlociund derivatele lui y în ecuația dată, se va obține noua ecuație :

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y\cdot\frac{dy}{dt}-y^2=0.$$

$\boxed{\textbf{6.2}}$ Ce devin ecuațiile următoare dacă se schimbă funcția după cum urmează

a) $x\cdot y'-y(\ln x\cdot y-1)=0,\quad y=\dfrac{z}{x}$;

b) $x^2\cdot y''+4x\cdot y'+\left(2-x^2\right)\cdot y=4x,\quad y=\dfrac{z}{x^2}$;

c) $x^2\cdot y''+x\cdot y'+\left(x^2-\lambda^2\right)\cdot y=0,\quad y=\dfrac{z}{\sqrt{x}}$.

Indicații de rezolvare

a) $y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{z}{x}\right)=\dfrac{z'\cdot x-z}{x^2}\Rightarrow x\cdot z'-z\ln z=0$;

b) $z''-z=4x$;

c)
$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{z}{\sqrt{x}}\right) = \frac{2x \cdot z' - z}{2x\sqrt{x}},$$
$$y'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{2x \cdot z' - z}{2x\sqrt{x}}\right) = \frac{4x^2\sqrt{x} \cdot z'' - 4x\sqrt{x} \cdot z' + 3z\sqrt{x}}{4x^3}$$

Înlocuind derivatele lui y în ecuația dată, se va obține ecuația :

$$x^2 \cdot z'' + z\left(\frac{1}{4} + x^2 - \lambda^2\right) = 0\,.$$

$\boxed{6.3}$ Ce devine expresia diferențială :

$$E = \left(a^2 + x^2\right)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

dacă se face schimbarea de variabilă $x = a \cdot \mathrm{sh}\, t$?

$\boxed{6.4}$ Ce devine expresia $E = \dfrac{\left(1 - x^2\right) \cdot y'' - x \cdot y'}{\sqrt{1 - x^2} \cdot y' + y}$, dacă se face $x = \sin t$?

Indicație de rezolvare

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{\cos t},$$

$$y'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{\cos t}\right) \cdot \frac{1}{\cos t} = \frac{\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\cos t + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\sin t}{\cos^3 t}.$$

După înlocuirea derivatelor lui y în expresia dată, se va obține :

$$E = \frac{\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y}.$$

$\boxed{6.5}$ În ecuația $y''\left(1 + y^2\right) - 2(1 + y) \cdot (y')^2 - \left(1 + y^2\right) = 0$, unde y este o funcție de x, se face schimbarea $y = \mathrm{tg}\, z$. Să se găsească ecuația verificată de $z(x)$.

$\boxed{6.6}$ Ce devine raza de curbură $R = \dfrac{\left[1+(y')^2\right]^{3/2}}{y''}$ dacă se schimbă rolul variabilelor ?

Indicație de rezolvare

$$y' = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y}} = \frac{1}{x'}, \quad y'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\frac{1}{x'}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y}\left(\frac{1}{x'}\right)\cdot\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y}} = -\frac{x''}{(x')^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \frac{\left(1+(x')^2\right)^{3/2}}{|x''|}$$

$\boxed{6.7}$ Ce devin următoarele ecuații dacă se schimbă rolul variabilelor ?

a) $y'' + x\cdot(y')^3 = 0$;

b) $y'' - (y')^2 + 2x\cdot(y')^3$.

Indicații de rezolvare

a) $y' = \dfrac{1}{x'}, \quad y'' = -\dfrac{x''}{(x')^3} \Rightarrow x'' - x = 0$ este noua ecuație;

b) $x'' + x' - 2x = 0$.

$\boxed{6.8}$ În ecuația $x\cdot y'' - \dfrac{x}{y}\cdot(y')^2 + y' = 0$ se consideră $x = y\cdot \mathrm{e}^z$. Să se afle ecuația pe care o verifică $z(y)$.

Indicație de rezolvare

$$y' = \frac{1}{x'}, \quad y'' = -\frac{x''}{(x')^3}, \text{ unde } x' = \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y}\left(y\cdot \mathrm{e}^z\right) = \mathrm{e}^z + y\cdot z'\cdot \mathrm{e}^z \text{ şi}$$

$$x'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y}\left(\mathrm{e}^z + y\cdot z'\cdot \mathrm{e}^z\right) = 2\cdot z'\cdot \mathrm{e}^z + y\cdot z''\cdot \mathrm{e}^z + y\cdot (z')^2\cdot \mathrm{e}^z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{\mathrm{e}^z(1+y\cdot z')}, \quad y'' = -\frac{\mathrm{e}^z\left(2\cdot z' + y\cdot z'' + y\cdot (z')^2\right)}{\mathrm{e}^{3z}(1+y\cdot z')^3}$$

Înlocuind derivatele lui y şi pe x în ecuaţia dată, se va obţine noua ecuaţie de forma $y \cdot z'' + z' = 0$.

$\boxed{6.9}$ În expresiile diferenţiale următoare, să se facă schimbarea de variabilă şi de funcţie indicate :

a) $E = \dfrac{x \cdot y' - y}{x + y \cdot y'}, \quad \begin{cases} x = \rho\cos t \\ y = \rho\sin t \end{cases}, \quad \rho = \rho(t)$;

b) $E = \dfrac{x \cdot y' - y}{\sqrt{1 + (y')^2}}, \quad \begin{cases} x = \rho\cos t \\ y = \rho\sin t \end{cases}, \quad \rho = \rho(t)$;

c) $E = \dfrac{(y')^2 - y \cdot y''}{y^2}, \quad \begin{cases} x = v - u \\ y = \mathrm{e}^{u+v} \end{cases}, \quad v = v(u)$.

Indicaţii de rezolvare

a) $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho\sin t) \cdot \dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho\sin t) \cdot \dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho\cos t)} = \dfrac{\rho'\sin t + \rho\cos t}{\rho'\cos t - \rho\sin t}$.

Înlocuind în expresia dată, se va obţine noua expresie $E = \dfrac{\rho}{\rho'}$;

b) $E = \dfrac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}}$;

c) $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\mathrm{e}^{u+v}\right) \cdot \dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}(v-u)}{\mathrm{d}u}} = \dfrac{v'+1}{v'-1} \cdot \mathrm{e}^{u+v}$.

$$y'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{v'+1}{v'-1} \cdot \mathrm{e}^{u+v}\right) \cdot \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}(v-u)}{\mathrm{d}u}} = \mathrm{e}^{u+v} \cdot \left[\frac{(v'+1)^2 - 2 \cdot v''}{(v'-1)^2}\right].$$

Efectuând înlocuirile, se obţine expresia $E = \dfrac{2 \cdot v''}{(v'-1)^2}$.

6.10 Să se scrie ecuația razei de curbură din coordonate carteziene ,

$$R = \frac{\left[1+(y')^2\right]^{3/2}}{y''}$$, în coordonate polare.

6.11 Să se treacă de la coordonate carteziene la coordonate polare, în ecuația

$$\left(x^2+y^2\right)\left(x+y\cdot y'\right)=\left(x^2+y^2+x\right)\left(x\cdot y'-y\right).$$

Indicație de rezolvare

Se consideră transformarea : $\begin{cases} x=\rho\cos t \\ y=\rho\sin t \end{cases}, \quad \rho=\rho(t).$

Atunci $y'=\dfrac{\rho'\sin t+\rho\cos t}{\rho'\cos t-\rho\sin t}$ şi, efectuând înlocuirile se va obține ecuația :

$$\rho'=\rho+\cos t.$$

6.12 În ecuația diferențială :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y\left(x^2+y^2+1\right)}{x\left(x^2+y^2-1\right)}$$

să se facă schimbarea $\begin{cases} u=x^2-y^2 \\ v=2\cdot x\cdot y \end{cases}, \quad v=v(u).$

Indicație de rezolvare

Diferențiind formulele care dau schimbarea, obținem :

$\begin{matrix} \mathrm{d}u=2\cdot x\,\mathrm{d}x-2\cdot y\,\mathrm{d}y \\ \mathrm{d}v=2\cdot x\,\mathrm{d}y+2\cdot y\,\mathrm{d}x \end{matrix}$, de unde rezultă $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\dfrac{x\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}x}{x\,\mathrm{d}x-y\,\mathrm{d}y}$.

În acelaşi timp, din ecuația dată, rezultă :

$$\begin{aligned} \frac{x\,\mathrm{d}y}{y\,\mathrm{d}x}&=\frac{x^2+y^2+1}{x^2+y^2-1} \\ \frac{y\,\mathrm{d}y}{x\,\mathrm{d}x}&=\frac{y^2\left(x^2+y^2+1\right)}{x^2\left(x^2+y^2-1\right)} \end{aligned}.$$

Aplicând proprietățile proporțiilor, obținem :

$$x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x = \frac{2y\left(x^2+y^2\right)\cdot \mathrm{d}x}{x^2+y^2-1}$$

$$\frac{1}{x\,\mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}y} = \frac{y\left(x^2+y^2+1\right)}{\left(x^2+y^2\right)\left(x^2-y^2-1\right)}\cdot\frac{1}{\mathrm{d}y}.$$

Prin înmulțirea ultimelor două relații, obținem :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{2\cdot x\cdot y}{x^2-y^2-1} = \frac{v}{u-1}.$$

6.13 În ecuațiile care urmează să se facă schimbările indicate la fiecare

a) $x\cdot y\cdot y'' - x\cdot\left(y'\right)^2 + y^2 = 0,\quad \begin{cases} x = \mathrm{e}^t \\ y = \mathrm{e}^u \end{cases},\quad u = u(t)$;

b) $2\cdot y'' + (x+y)(1-y')^3 = 0,\quad \begin{cases} x - y = u \\ x + y = v(u) \end{cases}$;

c) $\left(1-x^2\right)\cdot y'' - 3\cdot x\cdot y' + \left(a^2-1\right)\cdot y = 0,\quad \begin{cases} x = \sin t \\ y = \dfrac{z}{\cos t} \end{cases},\quad z = z(t)$;

d) $2\cdot y'''(1+y') - 6\cdot\left(y''\right)^2 + y''(y'-1)^2 = 0,\quad \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2} \end{cases},\quad v = v(u).$

Indicații de rezolvare

a) $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^u\right)\cdot\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^t\right)} = \mathrm{e}^{u-t}\cdot u'.$

$$y'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{u-t}\cdot u'\right)\cdot\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{u-2t}\cdot\left[u'' + \left(u'\right)^2 - u'\right].$$

Efectuând înlocuirile obținem ecuația : $u'' - u' + \mathrm{e}^t = 0$;

b) $v'' + v = 0$;

c) $z'' + a^2\cdot z = 0$;

d) $y' = \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,u}\left(\dfrac{u-v}{2}\right)\cdot\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,u}\left(\dfrac{u+v}{2}\right)} = \dfrac{1-v'}{1+v'}$.

$$y'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,u}\left(\frac{1-v'}{1+v'}\right)\cdot\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,u}\left(\dfrac{u+v}{2}\right)} = -4\cdot\frac{v''}{(v'+1)^3}$$

$$y''' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,u}\left(-4\cdot\frac{v''}{(v'+1)^3}\right)\cdot\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,u}\left(\dfrac{u+v}{2}\right)} = -8\cdot\frac{v'''(v'+1)-3\cdot(v'')^2}{(v'+1)^5}$$

Înlocuind, se obține ecuația : $2\cdot v''' + v''\cdot v' = 0$.

$\boxed{\textbf{6.14}}$ Luând u şi v ca noi variabile independente, să se transforme următoarele ecuații :

a) $y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0,\quad u = x,\quad v = x^2 + y^2$;

b) $x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y} - z = 0,\quad u = x,\quad v = \dfrac{y}{x}$;

c) $(x+y)\dfrac{\partial z}{\partial x} - (x-y)\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0,\quad u = \ln\sqrt{x^2+y^2},\quad v = \mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{y}$.

Indicații de rezolvare

a) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x},\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

Rezultă : $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u} + 2\cdot x\dfrac{\partial z}{\partial v},\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2\cdot y\dfrac{\partial z}{\partial v} \Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial u} = 0$ este ecuația transformată ;

b) $u\cdot\dfrac{\partial z}{\partial u} - z = 0$;

c)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{y}{x^2+y^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial v},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{x}{x^2+y^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial v} \Rightarrow .$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

6.15 Să se transforme expresia $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$ considerând : $\begin{cases} x=u\cdot v \\ y=\frac{1}{2}\left(u^2-v^2\right) \end{cases}$.

Indicație de rezolvare

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot v+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot u,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot u-\frac{\partial z}{\partial y}\cdot v$$

Astfel $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{v\frac{\partial z}{\partial u}+u\frac{\partial z}{\partial v}}{u^2+v^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{u\frac{\partial z}{\partial u}-v\frac{\partial z}{\partial v}}{u^2+v^2}$, de unde rezultă expresia transformată :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}{u^2+v^2}.$$

6.16 Să se transforme în coordonate polare, făcând înlocuirile : $x=r\cdot\cos\theta$, $y=r\cdot\sin\theta$, următoarele expresii :

a) $E=x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}$; **b)** $E=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$;

c) $E=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; **d)** $E=x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\cdot x\cdot y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Indicații de rezolvare

a) $\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$, $\frac{\partial z}{\partial \theta}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}$.

Din $\frac{\partial x}{\partial r}=\cos\theta$, $\frac{\partial x}{\partial \theta}=-r\cdot\sin\theta$, $\frac{\partial y}{\partial r}=\sin\theta$, $\frac{\partial y}{\partial \theta}=r\cdot\cos\theta$, rezultă :

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\sin\theta,\quad \frac{\partial z}{\partial\theta}=-r\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\sin\theta+r\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\cos\theta\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial r}\cdot\cos\theta-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial\theta},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial r}\sin\theta+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial\theta}.$$

Înlocuind obținem $E=r\frac{\partial z}{\partial r}\cos 2\theta-\frac{\partial z}{\partial\theta}\sin 2\theta$;

b) $E=\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2\cdot\frac{1}{r^2}$;

c) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial r}\cos\theta-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial\theta},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial r}\sin\theta+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial\theta}$.

Rezultă :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}\cos^2\theta-\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\theta}+\frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}+$$
$$+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial z}{\partial\theta}+\frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}\sin^2\theta+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\theta}+\frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}-$$
$$-\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial z}{\partial\theta}+\frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial r}$$

Deci $E=\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}$;

d) $E=r^2\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}$.

6.17 Luând pe u și v ca noi variabile independente, să se transforme următoarele ecuații :

a) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\quad u=3\cdot x+y,\quad v=x+y$;

b)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\cos x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\sin^2 x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\sin x\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

;

$$\begin{cases} u=\sin x+x-y \\ v=x-\sin x+y \end{cases}$$

c) $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0, \quad \frac{x}{y}=u, \quad x\cdot y=v$;

d) $x\cdot y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}+2\cdot y\frac{\partial z}{\partial y}=0, \quad u=x, \quad v=\frac{y}{x}$;

e) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+4\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0, \quad u=2\cdot x+y, \quad v=y$.

Indicații de rezolvare

a)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=3\cdot\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial u}\left(3\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(3\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=$$

$$=9\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+6\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=3\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+4\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

Înlocuind, se obține ecuația $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$;

b) $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$;

c) $2\cdot v\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-\frac{\partial z}{\partial u}=0$;

d) $v \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial u} = 0$;

e) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0$.

$\boxed{\textbf{6.18}}$ Presupunând pe u şi v ca noi variabile independente şi pe w ca o nouă funcție, să se transforme în noile variabile următoarele ecuații :

a) $y \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} - x \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = (y - x) \cdot z$, dacă $\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \\ w = \ln z - (x + y) \end{cases}$;

b) $x^2 \dfrac{\partial z}{\partial x} + y^2 \dfrac{\partial z}{\partial y} = z^2$, dacă $\begin{cases} u = x \\ v = \dfrac{1}{y} \\ w = \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{x} \end{cases}$;

c) $(x \cdot y + z) \dfrac{\partial z}{\partial x} + \left(1 - y^2\right) \dfrac{\partial z}{\partial y} = x + y \cdot z$, dacă $\begin{cases} u = y \cdot z - x \\ v = x \cdot z - y \\ w = x \cdot y - z \end{cases}$;

d) $\dfrac{\partial z}{\partial y} + \dfrac{1}{2} \cdot y \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{1}{x}$, dacă $\begin{cases} u = \dfrac{x}{y} \\ v = x \\ w = x \cdot z - y \end{cases}$;

e) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, dacă $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \\ w = x \cdot y - z \end{cases}$.

Indicații de rezolvare

a) $\dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{\partial w}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{1}{z} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} - 1$;

Rezultă $\frac{\partial z}{\partial x} = z + 2 \cdot x \cdot z \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{z}{x^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial v}$.

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} - 1;$$

Rezultă $\frac{\partial z}{\partial y} = z + 2 \cdot y \cdot z \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{z}{y^2} \frac{\partial w}{\partial v}$.

Înlocuind în ecuația dată, se obține noua ecuație : $\frac{\partial w}{\partial v} = 0$;

b) $\frac{\partial w}{\partial u} = 0$;

c) $\frac{\partial w}{\partial v} = 0$;

d) $\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = x \frac{\partial z}{\partial y} - 1 \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = x \frac{\partial z}{\partial y} - 1$

Derivând încă o dată în raport cu y, rezultă :

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Înlocuind în ecuația dată, vom obține noua ecuație :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = 0 \;;$$

e) $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = y - \frac{\partial z}{\partial x}$;

Derivând încă o dată în raport cu x, vom obține :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} =$$

$$= -\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

Rezultă $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = -\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

Derivând în raport cu variabila y, vom obține ecuația :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = -\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Pentru calculul derivatei mixte $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, se consideră ecuația $\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = y - \frac{\partial z}{\partial x}$, care se derivează în raport cu y şi se obține :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} =$$

$$= 1 - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

Rezultă $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1 - \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$.

Efectuând înlocuirile în ecuația dată, rezultă noua ecuație :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{1}{2}.$$

6.19 Ce devine expresia $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$ în coordonate sferice $x = r \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta, \quad y = r \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta, \quad z = r \cdot \cos\varphi$?

Indicație de rezolvare

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial r} \ ;$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \theta} \ ;$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \varphi} \ ;$$

Efectuând calculele, obținem :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sin\varphi \cdot \cos\theta \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\varphi \cdot \cos\theta}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\sin\theta}{r \cdot \sin\varphi} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} \ ;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin\varphi \cdot \sin\theta \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\varphi \cdot \sin\theta}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\cos\theta}{r \cdot \sin\varphi} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} \ ;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \cos\varphi \cdot \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

Rezultă $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2$.

$\boxed{6.20}$ **a)** Dacă $f,g\in C^2(R)$ şi $z(x,y)=y\cdot f(x+y)+x\cdot g(x,y)$, atunci $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$;

b) Considerând u şi v ca noi variabile independente şi w ca noua funcție, să se transforme ecuația de la punctul a), dacă:

$$u=x+y,\quad v=\frac{y}{x},\quad w=\frac{z}{x}.$$

Indicație de rezolvare

a) Pentru $u=x+y\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=y\cdot\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+g+x\cdot\frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=y\cdot f'+g+x\cdot g'$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f+y\cdot f'+x\cdot g'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y\cdot f''+2\cdot g'+x\cdot g''$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'+y\cdot f''+g'+x\cdot g''$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2\cdot f'+y\cdot f''+x\cdot g''$$

Înlocuind derivatele parțiale ale lui z în ecuația dată, aceasta este verificată;

b) $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0$.

$\boxed{6.21}$ **a)** Să se arate că funcția $z=z(x,y)$ definită implicit de ecuația $f\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x},\frac{1}{z}-\frac{1}{x}\right)=0,\quad f\in C^1(R^2)$ verifică ecuația $x^2\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$;

b) Să se transforme ecuația $x^2\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$ luând pe u şi v ca noi variabile independente şi pe w ca noua funcție, $x=u,\quad y=\frac{u}{1+u\cdot v}$ şi $z=\frac{u}{1+u\cdot w}$.