Teoria alegerii raţionale în condiţii incerte

Dr. Iulian Stoleriu

Facultatea de Matematică
Universitatea "Al. I. Cuza", Iaşi
iulian.stoleriu@uaic.ro, *stoleriu@yahoo.com*

[14–Ian–2010]

Introducere

- ⋆ *Utilitatea* este o măsură a gradului de satisfacţie.
- ⋆ Punctul de plecare al teoriei este *Paradoxul de la St. Petersburg*. D. Bernoulli (1738) introduce o funcţie de preferinţele utilizatorului de capital.
- ⋆ *Paradoxul de la Sankt Petersburg*: Se aruncă o monedă ideală până apare faţa cu banul (aruncări independente). Dacă la prima aruncare apare stema, jucătorul primeşte £2, dacă la primele două aruncări au apărut steme, va primi £4, dacă la primele trei aruncări au apărut steme, va primi £8 etc. Suma primită se va dubla pentru fiecare nouă apariţie a stemei.
  Q: *Ce primă ar fi dispus să plătească cineva pentru a putea participa la acest joc?*
- ⋆ Idei propuse: $\mathbb{E}(X)$, o limitare a averii totale a cazinoului (Poisson si Condorcet), Buffon introduce un prag de probabilitate, Daniel Bernoulli şi Gabriel Cramer au introdus ideea de utilitate a câştigului.
- ⋆ Datorită numărului mare de aplicaţii, a fost considerată una dintre cele mai de succes teorii în analiza economică, ce are o fundamentare axiomatică solidă.
- ⋆ Ulterior, au apărut diverse critici importante aduse teoriei şi s-au dezvoltat teorii alternative (non-EU).

Relaţia de preferinţă

- $\star$ Fie Ω o mulţime finită de entităţi (*stări*, *obiective* sau *premii*) şi $\succcurlyeq$ o relaţie binară pe Ω.
- $\star$ Relaţia $\succcurlyeq$ se numeşte *relaţie completă* dacă $(\forall)x,\, y \in \Omega,\quad$ ori $x \succcurlyeq y$, ori $y \succcurlyeq x$.
- $\star$ Relaţia $\succcurlyeq$ se numeşte *relaţie tranzitivă* dacă $(\forall)x,\, y,\, z \in \Omega,\quad x \succcurlyeq y$ şi $y \succcurlyeq z$ implică $x \succcurlyeq z$.
- $\star$ Numim *relaţie de preferinţă* (sau *relaţia raţională*) o relaţie completă şi tranzitivă.
- $\star$ Numim *relaţie de strictă preferinţă* (notăm $x \succ y$) o relaţie pentru care $x \succcurlyeq y$ şi $y \not\succcurlyeq x$.
- $\star$ Numim *relaţie de indiferenţă* (notăm $x \sim y$) o relaţie pentru care $x \succcurlyeq y$ şi $y \succcurlyeq x$.
- $\star$ Spunem că o relaţie de preferinţă $\succcurlyeq$ poate fi reprezentată printr-o funcţie u (de utilitate) dacă:

$$x \succcurlyeq y \iff u(x) \geq u(y), \quad \forall x,\, y \in \Omega.$$

Utilitate în condiţii certe

- $\star$ Pp. că deţinem un capital F pe care îl investim în mai multe obiective simultan, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, astfel încât să confere o satisfacţie cât mai mare. Preţurile obiectivelor sunt π_i, iar suma maximă ce o putem plăti este P.

$$\mathcal{M}ax\, U(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad \text{astfel încât}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = F; \\ \pi_1 x_1 + \pi_2 x_2 + \cdots + \pi_n x_n = P; \\ x_j \in \Omega, \;\; j = \overline{1,\, n}, \;\; t \in A \subset \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

Alegere în condiţii incerte

- ⋆ Fiecare acţiune posibilă a unui agent economic poate avea mai multe rezultate. Presupunem că agentul are la îndemână estimări pentru probabilitatea de apariţie a fiecărui rezultat.
- ⋆ Numim *loterie* (sau experiment, alternativă) entitatea $L = (p_1,\, x_1\,;\, p_2,\, x_2\,; \ldots ;\, p_n,\, x_n)$, cu $x_i \in \Omega, \;\; i = \overline{1,\, n}$ şi $P = (p_1,\, p_2,\, \ldots,\, p_n)$ o repartiţie discretă.
  Notăm cu $\mathcal{L}(\Omega)$ mulţimea tuturor loteriilor pe Ω.
- ⋆ În cazul $n = 2,\;\; L = (p,\, x;\, 1 - p,\, y),\;\; p \in [0,\, 1], \quad x,\, y \in \Omega$
  (e.g., aruncarea unei monede ideale: $\;L = (0.5,\, S;\, 0.5,\, B)$).
- ⋆ Loteriile pot fi *simple* sau *compuse* (cu elemente alte loterii).
- ⋆ O loterie compusă este o medie de loterii simple.
  E.g., fie $L = (p_1,\, x_1\,;\, p_2,\, x_2\,; \ldots ;\, p_n,\, x_n)$ şi $L' = (p'_1,\, x_1\,;\, p'_2,\, x_2\,; \ldots ;\, p'_n,\, x_n)$. Atunci, loteria compusă $L'' = (\alpha,\, L;\, 1 - \alpha,\, L')$ poate fi scrisă ca o loterie simplă:

$$L'' = (\alpha p_1 + (1-\alpha)p'_1,\, x_1;\, \alpha p_2 + (1-\alpha)p'_2,\, x_2;\, \ldots;\, \alpha p_n + (1-\alpha)p'_n,\, x_n) \;=\; \alpha L + (1-\alpha)L'.$$

- ⋆ Este necesară o teorie care să ţină cont de preferinţele unui agent economic pentru obiectivele sale şi să poată decide ce loterie (proiect riscant) să aleagă. ($\Longrightarrow$ Expected Utility Theory)

Funcţie de utilitate

- ⋆ O funcţie $U : \mathcal{L}(\Omega) \to \mathbb{R}$ se numeşte *funcţie de utilitate în sens von Neumann & Morgenstern* (asociată relaţiei $\succcurlyeq$) dacă satisface condiţiile:

  (1) $L_1 \succcurlyeq L_2 \iff U(L_1) \geq U(L_2), \quad \forall L_1, L_2 \in \mathcal{L}(\Omega).$

  (2) $U(pL_1 + (1-p)L_2) = pU(L_1) + (1-p)U(L_2), \quad \forall L_1, L_2 \in \mathcal{L}(\Omega), \forall p \in [0, 1].$

- ⋆ O funcţie de utilitate $U : \mathcal{L}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ este funcţie de utilitate vNM dacă şi numai dacă există numerele $u_1, u_2, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $p \in [0, 1]$ avem:

$$U(L) = \sum_{i=1}^{n} p_i u_i.$$

- ⋆ Valorile $u_i = u(x_i) = U(L_i)$ se numesc *utilităţi marginale* sau *utilităţi Bernoulli*.

$$L_i = \{0, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \ldots, 0\}.$$

- ⋆ Din condiţia de reprezentare,

$$L_1 \succcurlyeq L_2 \iff U(L_1) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i) \ \geq \ U(L_2) = \sum_{i=1}^{n} q_i u(x_i), \quad \forall L_1, L_2 \in \mathcal{L}(\Omega).$$

Exemplu

- ⋆ Un investitor raţional din punctul de vedere al teoriei vNM va acţiona ca şi când ar maximiza valoarea aşteptată a unei funţii de utilitate.
- ⋆ **Exemplu:** Unui investitor raţional vNM i se propune proiectul $L = (2/3, 4400; 1/3, -5100)$. Pentru $U(w) = \sqrt{w}$, să se determine dacă investitorul acceptă proiectul. (Pp. că averea actuală a investitorului este de $w_0 = 10000$)
- ⋆ Decizia se ia prin aplicarea principiului maximizării valorii aşteptate a utilităţii,

$$\mathbb{E}[U(w_0 + L)] = \frac{310}{3} \;>\; \mathbb{E}[U(w_0)] = 100.$$

Axiomatica von Neumann & Morgenstern

Axioma 1 Relaţia $\succcurlyeq$ este raţională (completă şi tranzitivă);

Axioma 2 (*axioma de continuitate*) Dacă $L_1 \succcurlyeq L_2 \succcurlyeq L_3$, atunci există $p \in (0,\, 1)$ astfel încât $L_2 \sim p\, L_1 + (1-p)\, L_3$.

Axioma 3 (*axioma de independenţă*) Pentru oricare $L_1,\, L_2 \in \mathcal{L}(\Omega)$,

$$L_1 \succcurlyeq L_2 \iff p\, L_1 + (1-p)\, L_3 \succcurlyeq p\, L_2 + (1-p)\, L_3, \quad \forall p \in (0,\, 1),\ \forall L_3 \in \mathcal{L}(\Omega).$$

<u>**Consecinţe:**</u>

C1: Fie $L_1,\, L_2,\, L_3 \in \mathcal{L}(\Omega)$, date. Dacă $L_1 \sim L_2$, atunci axioma de independenţă implică (luăm $L_3 = L_2$):

$$\begin{aligned} p\, L_1 + (1-p)\, L_2 &\sim p\, L_2 + (1-p)\, L_2, \quad (\forall)\, p \in [0,\, 1] \\ &\sim L_2 \sim L_1. \quad \text{(curbele de indiferenţă sunt segmente)} \end{aligned}$$

C2: Dacă $L_1 \sim L_2$, atunci $p\, L_1 + (1-p)\, L_3 \sim p\, L_2 + (1-p)\, L_3$, $\forall p \in (0,\, 1)$, $\forall L_3 \in \mathcal{L}(\Omega)$, de unde deducem că toate curbele de indiferenţă sunt paralele.

Teorema fundamentală

Teoremă: Dacă o relaţie de preferinţă $\succcurlyeq$ satisface axiomele **1 - 3** de mai sus, atunci există o funcţie de utilitate vNM asociată acesteia.

✍ Etape în demonstraţie:

- $\star$ Considerăm $\overline{L}$ ca fiind cea mai bună loterie posibilă din $\mathcal{L}(\Omega)$ (dă cel mai bun rezultat) şi $\underline{L}$ ca fiind cea mai proastă loterie posibilă (cu cel mai prost rezultat).
  Evident, $\overline{L} \succcurlyeq \underline{L}$.
  Pentru orice $L \in \mathcal{L}(\Omega)$, avem că $\overline{L} \succcurlyeq L \succcurlyeq \underline{L}$. Din axiomele 2 şi 3,

$$\text{există un unic } \alpha_L \in [0,1], \quad \text{astfel încât} \quad L \sim \alpha_L \overline{L} + (1-\alpha_L)\underline{L}.$$

- $\star$ Fie $U : \mathcal{L}(\Omega) \Longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $U(L) = \alpha_L$.
- $\star$ Se arată că U este o funcţie de utilitate vNM
  (i.e., este o reprezentare pentru $\succcurlyeq$ şi este afină). $\boxed{\checkmark}$

Teoremă *(de unicitate până la o funcţie afină)*: Să presupunem că $U : \mathcal{L}(\Omega) \to \mathbb{R}$ este o funcţie de utilitate vNM pentru relaţia $\succcurlyeq$. Atunci $V : \mathcal{L}(\Omega) \to \mathbb{R}$ este tot o funcţie de utilitate vNM pentru relaţia $\succcurlyeq$ dacă şi numai dacă există a, $b \in \mathbb{R}$ $(b > 0)$ astfel încât

$$V(L) = a + b\,U(L), \quad (\forall)L \in \mathcal{L}(\Omega).$$

✍ Implicaţia "$\Longleftarrow$" este imediată.

"$\Longrightarrow$" : Considerăm $\overline{L}$ şi $\underline{L}$ ca mai sus şi presupunem că $\overline{L} \succ \underline{L}$. Pentru orice $L \in \mathcal{L}(\Omega)$, avem că $\overline{L} \succcurlyeq L \succcurlyeq \underline{L}$. Din axioma de continuitate,

$$(\exists)\alpha_L \in [0,\, 1], \quad \text{astfel încât} \quad L \sim \alpha_L \overline{L} + (1 - \alpha_L)\underline{L},$$

de unde

$$U(L) = \alpha_L U(\overline{L}) + (1 - \alpha_L)U(\underline{L}).$$

Găsim că

$$\alpha_L = \frac{U(L) - U(\underline{L})}{U(\overline{L}) - U(\underline{L})}.$$

Dar, V este o funcţie de utilitate vNM, de unde:

$$V(L) = V(\alpha_L \overline{L} + (1 - \alpha_L)\underline{L}) = \alpha_L V(\overline{L}) + (1 - \alpha_L)V(\underline{L}).$$

Definim:

$$b = \frac{V(\overline{L}) - V(\underline{L})}{U(\overline{L}) - U(\underline{L})} \quad \text{şi} \quad a = V(\underline{L}) - b\,U(\underline{L}), \qquad \boxed{\checkmark}$$

Alte proprietăţi

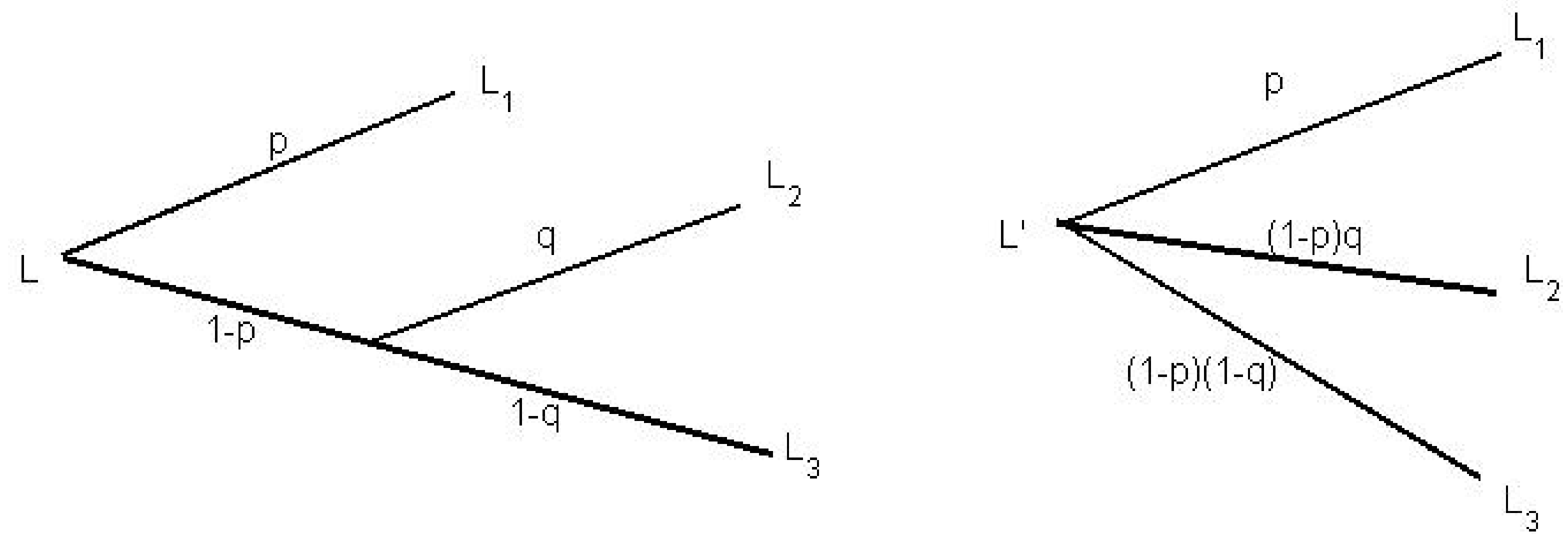
* ⋆ (continuitate arhimedeană) Dacă $L_1 \succcurlyeq L_2 \succcurlyeq L_3$, atunci $(\exists)\ p,\ q \in (0,\ 1)$ astfel încât:

$$p\,L_1 + (1-p)\,L_3 \succcurlyeq L_2 \succcurlyeq q\,L_1 + (1-q)\,L_3.$$

  (i.e. nu există o combinaţie infinit mai bună sau infinit mai proastă)

* ⋆ (compunerea loteriilor) Pentru orice $L_1,\ L_2,\ L_3 \in \mathcal{L}(\Omega)$ şi $p,\ q \in [0,\ 1]$, avem

$$p\,L_1 + (1-p)\,(q\,L_2 + (1-q)\,L_3) \sim p\,L_1 + (1-p)q\,L_2 + (1-p)(1-q)\,L_3.$$



$L = (p, L_1; 1\text{-}p, (q, L_2; 1\text{-}q, L_3))$ $\quad$ $L' = (p, L_1; (1\text{-}p)q, L_2; (1\text{-}p)(1\text{-}q), L_3)$

Loterii monetare

- $\star$ Dacă X mulţime finită, atunci funcţia de utilitate vNM este

$$U(L) = \sum_{i=1}^{n} u(x_i)\, p_i \quad (\equiv \mathbb{E}_L[u(x)]).$$

- $\star$ Considerăm că $X \subset \mathbb{R}$. Atunci, loteriile sunt descrise de densităţi de repartiţie.

- $\star$ În cazul continuu, dacă $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ este o funcţie de repartiţie, atunci funcţia de utilitate vNM este

$$U(F) = \int_{\mathbb{R}} u(x)\, dF(x) \quad (\equiv \mathbb{E}_F[u(x)]).$$

- $\star$ De acum înainte presupunem că funcţia Bernoulli u este continuă şi crescătoare.

- $\star$ $c_u(F)$ este *echivalentul sigur* al unei loterii L dacă $u(c_u) = \mathbb{E}_F[u(x)] = \int_{\mathbb{R}} u(x)\, dF(x)$.

Atitudine faţă de risc

- ⋆ *Riscul* este o nesiguranţă relativă la posibilele stări/investiţii viitoare (e.g., bolnav sau sănătos, sărac sau bogat, război sau pace, soare sau ploaie etc).
- ⋆ Ce aţi alege între un câştig sigur de 1000 `RON` şi o loterie la care puteţi câştiga 2500 `RON` cu $p = 1/2$ sau nimic? ($\Longrightarrow$ aversiune faţă de risc)
- ⋆ În practică, un investitor raţional vNM va investi într-un proiectul riscant doar dacă

$$U(w_0) < \mathbb{E}(U(w_f)).$$

- ⋆ Un investitor A are preferinţele reprezentate de funcţia de utilitate U_A.
  – *Cum determinăm dacă A agreează riscul sau nu?*
  – *Cum determinăm dacă A are o toleranţă mai mare pentru risc decât un alt investitor B, care are U_B?*
- ⋆ O loterie $L = (p,\, x;\, 1-p,\, y)$ se numeşte *loterie cinstită* (sau *joc cinstit*) dacă $\mathbb{E}(L) = 0$.
- ⋆ D.p.d.v. al atitudinii faţă de risc, un investitor poate fi *riscofob*, *riscofil* sau *indiferent (neutru)*

Atitudine faţă de risc

- ⋆ Un investitor este *riscofob* dacă preferă câştigul dat de valoarea aşteptată a loteriei în detrimentul loteriei. În cazul discret, scriem:

$$p\,U(x) + (1-p)\,U(y) \leq U(p\,x + (1-p)\,y), \quad (\forall)\,p \in [0,\,1],\ (\forall)\,x,\,y.$$

- ⋆ Un investitor este *riscofil* dacă preferă loteria câştigului dat de valoarea aşteptată a loteriei. În cazul discret, scriem:

$$p\,U(x) + (1-p)\,U(y) \geq U(p\,x + (1-p)\,y), \quad (\forall)\,p \in [0,\,1],\ (\forall)\,x,\,y.$$

- ⋆ Un investitor este *indiferent (neutru)* (în ce priveşte riscul) dacă

$$p\,U(x) + (1-p)\,U(y) = U(p\,x + (1-p)\,y), \quad (\forall)\,p \in [0,\,1],\ (\forall)\,x,\,y.$$

$\star$ Cazul continuu: investitor *riscofob* d.n.d.

$$\text{pentru orice } F, \quad \int_R u(x)\, dF(x) \le u\left(\int_R x\, dF(x)\right).$$

$$\text{investitor: } \begin{cases} \text{- riscofob (aversiune faţă de risc),} & u \text{ este concavă, i.e., } \mathbb{E}(u(W)) \le u(\mathbb{E}(W)) \\ \text{- riscofil (plăcere pentru risc),} & u \text{ este convexă, i.e., } \mathbb{E}(u(W)) \ge u(\mathbb{E}(W)) \\ \text{- indiferent (neutru la risc),} & u \text{ este afină, i.e., } \mathbb{E}(u(W)) = u(\mathbb{E}(W)). \end{cases}$$

$\star$ Un investitor A cu u este *mai riscofob decât* B cu v dacă $c_u(F) \le c_v(F)$, pentru orice F.

$\star$ Un riscofob cu $(u(x) = \sqrt{x})$ preferă câştigul sigur de 36 `RON` unei loterii $(0.5, 100;\ 0.5, -0)$. Avem că $c_u = 0.5 \times \sqrt{100} + 0.5 \times 0 = 5 < 6 = u(36)$.

$\star$ Indici de aversiune faţă de risc (Arrow-Pratt) (pp. $u \in C^2$):

$$IAR(U, w) = -\frac{U''(w)}{U'(w)} > 0 \quad \text{şi} \quad IRR(U, w) = -w\frac{U''(w)}{U'(w)} > 0.$$

$\star$ *premiu de risc* = suma ce ar plăti-o un investitor care doreşte să evite o situaţie riscantă $(w_0 - c_u)$.

Exemple de funcţii de utilitate:

- $\star$ $u(x) = \ln(x)$, $u(x) = \sqrt{x}$ (St. Petersburg)
- $\star$ CRRA (constant relative risk aversion) $u(x) = \dfrac{x^{1-r}}{1-r}$, $r > 0$.
- $\star$ CARA (constant absolute risk aversion) $u(x) = \beta - e^{-Ax}$, $A > 0$.
- $\star$ HARA (hyperbolic absolute risk aversion) $u(x) = \dfrac{r}{1-r}\left(a + \dfrac{b}{r}x\right)$.
- $\star$ Unui investitor cu indicele IAR constant îi pasă de pierderile absolute.
- $\star$ Un investitor cu indicele IRR constant va plăti o parte fixă din averea sa pentru a evita riscul pierderii unei proporţii din avere.

Aplicaţie în asigurări:

- ⋆ Considerăm o poliţă de asigurare în caz de accident pentru care fiecare leu asigurat costă q lei. Un individ riscofob (strict), cu averea iniţială w_0, doreşte să se asigure. Firma de asigurări stabileşte că acesta va suferi un accident cu p, iar accidentul costă D.
  Pentru ce valoare se va asigura individul?

✍ Profitul asiguratorului este: $\Pi = (p,\ (q-1)a;\ 1-p,\ qa)$.
Poliţa de asigurare este cinstită dacă $\mathbb{E}(\Pi) = 0 \Longrightarrow q = p$.
Averea individului ce doreşte să se asigure va fi:

	cu accident (p)	fără accident $(1-p)$
fără asigurare	$W_0 - D$	W_0
cu asigurare	$W_0 - D + a - q\,a$	$W_0 - q\,a$

- ⋆ Problema de maximizare pentru asigurat este:

$$\max_{0\le a\le D}\{p\,u(W_0 - D + (1-q)\,a) + (1-p)\,u(W_0 - q\,a)\}.$$

Poliţă de asigurare corectă

⋆ Pentru $q = p$, avem problema de optim:

$$\max_{0 \le a \le D} \{p\, u(W_0 - D + (1-p)\, a) + (1-p)\, u(W_0 - p\, a)\}.$$

⋆ Condiţiile pentru o soluţie a^* de maxim în intervalul $(0,\, D)$ sunt:

$$u'(W_0 - D + (1-q)\, a^*) - u'(W_0 - p\, a^*) = 0. \qquad \text{fără soluţie!}$$

$$(1-p)\, u''(W_0 - D + (1-p)\, a^*) + p\, u''(W_0 - p\, a^*) < 0.$$

⋆ Pentru fiecare dintre capetele intervalului, prima condiţie de extrem este:

$$u'(W_0 - D) - u'(W_0) \le 0, \qquad \text{pentru } a^* = 0. \qquad \text{fără soluţie!}$$

$$u'(W_0 - p\, D) - u'(W_0 - p\, D) \ge 0, \qquad \text{pentru } a^* = D.$$

⋆ Găsim că $a^* = D$ $\quad$ (asigurare full).

Poliţă de asigurare părtinitoare

- Poliţă incorectă: $q > p$.
- Prima condiţie pentru o soluţie a^* de maxim în $[0,\, D]$ este, în fiecare caz,

$$\begin{aligned} p\,(1-q)\,u'(W_0 - D + (1-q)\,a^*) - (1-p)\,q\,u'(W_0 - q\,a^*) \;&=\; 0, && \text{pentru } 0 < a^* < D. \\ p\,(1-q)\,u'(W_0 - D) - (1-p)\,q\,u'(W_0) \;&\le\; 0, && \text{pentru } a^* = 0. \qquad \text{!!!} \\ p\,(1-q)\,u'(W_0 - q\,D) - (1-p)\,q\,u'(W_0 - q\,D) \;&\ge\; 0, && \text{pentru } a^* = D. \qquad \text{!!!} \end{aligned}$$

- Din prima relaţie găsim că

$$\frac{u'(W_0 - D + (1-q)\,a^*)}{u'(W_0 - q\,a^*)} = \frac{(1-p)\,q}{(1-q)\,p} > 1,$$

de unde $u'(W_0 - D + (1-q)\,a^*) \;>\; u'(W_0 - q\,a^*)$, adică $W_0 - D + (1-q)\,a^* \;<\; W_0 - q\,a^*$,
deci $a^* < D$. (asigurare parţială).

- **Concluzie:** Dacă $q = p$, atunci asigurare full; pentru $q > p$, se va asigura doar parţial.

Asigurare de maşină simplificată:

- $\star$ Un investitor ($u(x) = \sqrt{x}$) are averea iniţială $w_0 = 10000$ şi o maşină în valoare de 2100. O firmă de asigurări determină că, cu probabilitatea $p = 0.1$, maşina i se poate fura.

- $\star$ Averea investitorului în condiţiile date (d.p.d.v. al firmei): $w = (0.9,\ 12100;\ 0.1,\ 10000)$.

- $\star$ Valoarea aşteptată a averii: $\mathbb{E}(w) = 11.890$.

- $\star$ Valoarea aşteptată a utilităţii averii: $\mathbb{E}[u(w)] = 109$.

- $\star$ Pp. că investitorul doreşte să cumpere asigurare pentru maşină. În schimbul unei prime, firma de asigurare îi răscumpără maşina dacă aceasta este furată.
  Cât de mult este dispus individul să plătească pentru poliţa de asigurare?

- $\star$ Notăm valoarea poliţei cu p_a. Avem: $\mathbb{E}[u(w_{asig})] \geq 109 = \mathbb{E}[u(w)]$, de unde $p_a \leq 219$.

- $\star$ *Va profita firma de asigurări de pe urma unui contract cu $p_a = 219$?*

- $\star$ Profitul aşteptat al firmei este $\mathbb{E}(\Pi) = 0.9 \times 219 + 0.1 \times (219 - 2100) = 9 > 0$. DA!

O problemă de optimizare a portofoliului

- ⋆ Un investitor neutru la risc, cu averea iniţială w_0, are oportunitatea de a investi în două active financiare: unul sigur (*bond* cu r) şi unul riscant (*share*, cu rata profitului $z \sim F(x)$, $\mathbb{E}_F(z) > r$).
- ⋆ Investiţia este $a\,z + (w_0 - a)\,r$.
- ⋆ principiul maximizării utilităţii aşteptate:

$$\max_a \mathbb{E}_F[u(a\,z + (w_0 - a)\,r)] = \max_a \int_{\mathbb{R}} u(a\,z + (w_0 - a)\,r)\,dF(x).$$

- ⋆ Prima condiţie de optim:

$$\int_{\mathbb{R}} (z - r)\,u'(a^*\,z + (w_0 - a^*)\,r)\,dF(x) = 0.$$

- ⋆ Un investitor *neutru la risc* are $u(x) = \alpha\,x + b$. Condiţia de optim interior devine

$$\alpha \int_{\mathbb{R}} (z - r)\,dF(x) = 0,$$

adică fără soluţie. Rămâne doar $a^* = w_0$ (un investitor neutru la risc va investi doar în shares).

Risk sharing

- $\star$ Doi investitori, A_1 şi A_2, au fiecare funcţia de utilitate $u(w) = \sqrt{w}$.
- $\star$ Amândoi investesc separat în active riscante $L = (0.5, 100; 0.5, 0)$, independent unul de celălalt.
- $\star$ Valoarea câştigului aşteptat de fiecare va fi $\mathbb{E}[U(L)] = 5$.
- $\star$ Dacă aceştia creează un fond mutual, punând în comun activele, atunci fiecare cotă parte este

$$L_m = (0.25, 100;\ 0.5, 50;\ 0.25, 0),$$

de unde $\mathbb{E}[U(L_m)] = 6.0355\ >\ 5\quad$ (!!!).

Critici aduse teoriei

- $\star$ **Paradoxul lui Alais:** Se consideră un joc ce are rezultatul final unul dintre: $\{4000,\ 3000,\ 0\}$. Două scenarii:
  - $\boxed{\text{A}}$ $\quad L_A = (0.8, 4000;\ 0, 3000;\ 0.2, 0)$ şi $L'_A = (0, 4000;\ 1, 3000;\ 0, 0)$;
  - $\boxed{\text{B}}$ $\quad L_B = (0.2, 4000;\ 0, 3000;\ 0.8, 0)$ şi $L'_B = (0, 4000;\ 0.25, 3000;\ 0.75, 0)$

  Ce variantă alegeţi din fiecare scenariu?

  $\boxed{✍}$ Pp. $u(0) = 0$. Majoritatea persoanelor vor alege L'_A şi L_B.
  Din $L'_A \succ L_A$ şi $L_B \succ L'_B$, rezultă că

  $$u(3000) > 0.8\, u(4000) \quad \text{şi} \quad 0.8\, u(4000) > u(3000). \quad !!! \qquad \boxed{\checkmark}$$

- $\star$ **Paradoxul lui William Newcombe**.

- $\star$ **Dilema prizonierului:**

$P_1 \setminus P_2$	`coop`	`non-coop`
`coop`	$(10, 10)$	$(0, 20)$
`non-coop`	$(20, 0)$	$(1, 1)$

Discuţii, critici

- ⋆ Cum alegem p??
- ⋆ Dificil de găsit o măsură cantitativă a gradul de satisfacţie al unui investitor pentru un anumit obiectiv.
- ⋆ Imposibil de determinat utilitatea ordinală (e.g., ce factori a determinat o persoană să cumpere un anumit produs)
- ⋆ Teoria utilităţii aşteptate (EU) generează diverse paradoxuri (observaţii empirice inconsistente cu teoria)
- ⋆ Teorii non-EU au fost introduse şi utilizate ca alternative (e.g., Teoria EU generalizată, Teoria regretului)