61. $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{2x^2+3}\,\mathrm{sen}\,(x^2) - \dfrac{(2x^2+3)^{3/2}\cos(x^2)}{x}\right)\Bigg|_{x=\sqrt{\pi}}$

$*$**62. (Continuidad del seno y el coseno)**

(a) Demuestre que

$$\lim_{\theta\to 0} \mathrm{sen}\,\theta = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 1$$

de la siguiente forma: utilice el hecho de que la longitud de la cuerda AP es menor que la longitud del arco AP en la Figura 2.24 para demostrar que

$$\mathrm{sen}^2\,\theta + (1-\cos\theta)^2 < \theta^2$$

Deduzca a continuación que $0 \leqslant |\mathrm{sen}\,\theta| < |\theta|$ y que $0 \leqslant |1-\cos\theta| < |\theta|$. Utilice ahora el Teorema del Sándwich de la Sección 1.2.

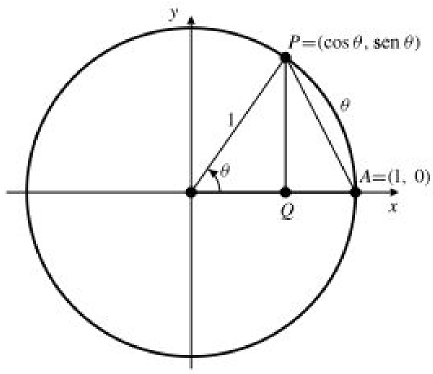

Figura 2.24

(b) El apartado (a) indica que $\mathrm{sen}\,\theta$ y $\cos\theta$ son continuas en $\theta = 0$. Utilice ahora las fórmulas de suma para deducir que son por tanto continuas para todo θ.

2.6 El Teorema del Valor Medio

Si salimos en un coche a las 13:00 horas y llegamos a una cuidad a 150 km de distancia del punto de partida a las 15:00 horas, habremos viajado a una velocidad media de $150/2 = 75$ km/h. Aunque no hayamos viajado a esa velocidad constante, debemos haber viajado a 75 km/h ***al menos un instante*** en nuestro trayecto, porque si nuestra velocidad hubiera sido siempre inferior a 75 km/h hubiéramos recorrido menos de 150 km en dos horas, y si nuestra velocidad hubiera sido siempre superior a 75 km/h, habríamos recorrido más de 150 km en dos horas. Para pasar de un valor inferior a 75 km/h a un valor superior a 75 km/h nuestra velocidad, que es una función continua con el tiempo, debe pasar por el valor de 75 km/h en algún instante intermedio.

La conclusión de que la velocidad media en un intervalo de tiempo debe ser igual a la velocidad instantánea en algún instante de ese intervalo es un ejemplo de principio matemático importante. En términos geométricos indica que si A y B son dos puntos de una curva suave, entonces hay al menos un punto C en la curva entre A y B donde la recta tangente es paralela a la cuerda AB. *Véase* la Figura 2.25.

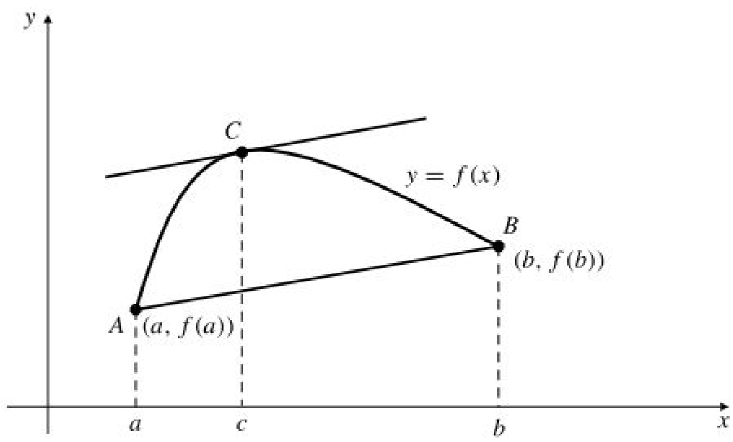

Figura 2.25 Existe un punto C en la curva donde la tangente es paralela a AB.

El siguiente teorema postula de forma más precisa el principio anterior.

TEOREMA 11 **Teorema del Valor Medio**

Sea una función F continua en el intervalo cerrado finito $[a, b]$, y diferenciable en el intervalo abierto (a, b). Existe un punto c en el intervalo abierto (a, b) tal que

$$\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)}$$

Esto indica que la pendiente de la cuerda que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ es igual a la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(c, f(c))$, por lo que las dos rectas son paralelas.

Más adelante en esta sección demostraremos el Teorema del Valor Medio. Por el momento, realizaremos algunas observaciones.

1. Todas las hipótesis del Teorema del Valor Medio son necesarias para que se cumpla su conclusión: si f no es continua en todo punto del intervalo $[a, b]$ o no es diferenciable en un solo punto de (a, b), entonces puede no haber ningún punto en el que la tangente sea paralela a la secante AB (*véase* la Figura 2.26).

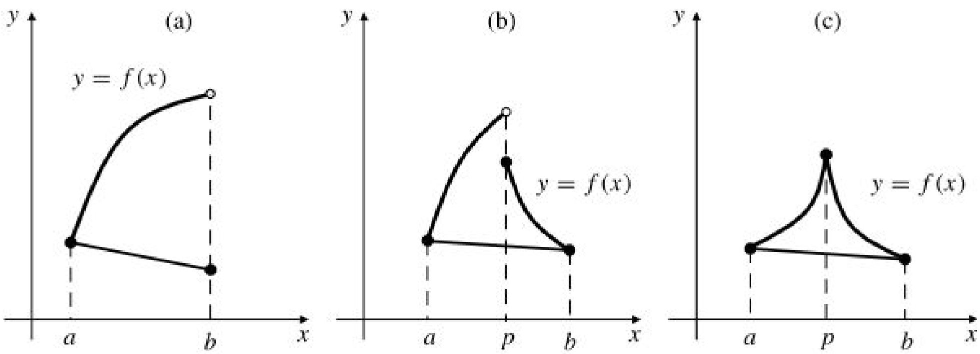

Figura 2.26 Funciones que no satisfacen las hipótesis del Teorema del Valor Medio, y por tanto, su conclusión es falsa:
(a) f es discontinua en el extremo b.
(b) f es discontinua en p.
(c) f no es diferenciable en p.

2. El Teorema del Valor Medio no ofrece ninguna indicación de cuántos puntos C existen en la curva entre A y B donde la tangente es paralela a AB. Si la curva es en realidad una línea recta, entonces todos sus puntos tendrán la propiedad requerida. En general, puede haber más de un punto (*véase* la Figura 2.27), pero el Teorema del Valor Medio sólo asegura que debe existir al menos uno.

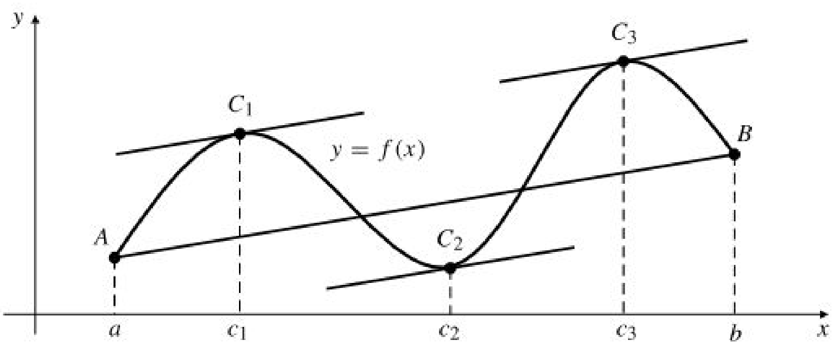

Figura 2.27 En esta curva hay tres puntos C donde la tangente es paralela a la cuerda AB.

3. El Teorema del Valor Medio no da ninguna información sobre cómo encontrar el punto c. Sólo indica que este punto debe existir. En algunas funciones simples es posible encontrar c (*véase* el ejemplo que sigue), pero hacerlo así no suele tener valor práctico. Como veremos posteriormente, la importancia del Teorema del Valor Medio reside en su uso como herra-

mienta teórica. Pertenece a la clase de teoremas denominados ***teoremas de existencia***, como el Teorema Max-Min o el Teorema del Valor Intermedio (Teoremas 8 y 9 de la Sección 1.4).

Ejemplo 1 Verifique la conclusión del Teorema del Valor Medio para $f(x) = \sqrt{x}$ en el intervalo $[a, b]$, siendo $0 \leqslant a < b$.

Solución El teorema dice que debe existir un número c en el intervalo (a, b) tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{b - a} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}$$

Por tanto, $2\sqrt{c} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ y $c = \left(\frac{\sqrt{b} + \sqrt{a}}{2}\right)^2$. Como $a < b$, tenemos que

$$a = \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{a}}{2}\right)^2 < c < \left(\frac{\sqrt{b} + \sqrt{b}}{2}\right)^2 = b$$

por lo que c está en el intervalo (a, b). ■

Los dos ejemplos siguientes son más representativos de cómo se usa realmente el Teorema del Valor Medio.

Ejemplo 2 Demuestre que $\operatorname{sen} x < x$ para todo $x > 0$.

Solución Si $x > 2\pi$, entonces $\operatorname{sen} x \leqslant 1 < 2\pi < x$. Si $0 < x \leqslant 2\pi$ entonces, por el Teorema del Valor Medio, existe un c en el intervalo abierto $(0, 2\pi)$ tal que

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 0}{x - 0} = \frac{d}{dx} \operatorname{sen} x \bigg|_{x=c} = \cos c < 1$$

Por tanto, $\operatorname{sen} x < x$ también en este caso. ■

Ejemplo 3 Demuestre que $\sqrt{1 + x} < 1 + \frac{x}{2}$ para $x > 0$ y para $-1 \leqslant x < 0$.

Solución Si $x > 0$, se aplica el Teorema del Valor Medio a $f(x) = \sqrt{1 + x}$ en el intervalo $[0, x]$. Existe entonces un valor c en $(0, x)$ tal que

$$\frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{1 + c}} < \frac{1}{2}$$

La última inecuación se cumple porque $c > 0$. Multiplicando por el número positivo x y pasando el -1 al otro lado se obtiene $\sqrt{1 + x} < 1 + \frac{x}{2}$.

Si $-1 \leqslant x < 0$, se aplica el Teorema del Valor Medio a $f(x) = \sqrt{1 + x}$ en el intervalo $[x, 0]$. Existe entonces un valor c en $(x, 0)$ tal que

$$\frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x} = \frac{1 - \sqrt{1 + x}}{-x} = \frac{f(0) - f(x)}{0 - x} = f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{1 + c}} > \frac{1}{2}$$

ya que $0 < 1 + c < 1$. Ahora hay que multiplicar por el número negativo x, con lo que se invierte la inecuación, $\sqrt{1 + x} - 1 < \frac{x}{2}$, y el resultado se obtiene pasando el -1 al otro lado. ■

Funciones crecientes y decrecientes

Los intervalos en los que la gráfica de una función f tiene pendiente positiva o negativa proporcionan información de utilidad sobre el comportamiento de f. El Teorema del Valor Medio permite determinar esos intervalos considerando el signo de la derivada de f.

DEFINICIÓN 5 **Funciones crecientes y decrecientes**

Sea una función f definida en un intervalo abierto I, y sean x_1 y x_2 dos puntos pertenecientes a I.

(a) Si $f(x_2) > f(x_1)$ siempre que $x_2 > x_1$, se dice que f es **creciente** en I.

(b) Si $f(x_2) < f(x_1)$ siempre que $x_2 > x_1$, se dice que f es **decreciente** en I.

(c) Si $f(x_2) \geqslant f(x_1)$ siempre que $x_2 > x_1$, se dice que f es **no decreciente** en I.

(d) Si $f(x_2) \leqslant f(x_1)$ siempre que $x_2 > x_1$, se dice que f es **no creciente** en I.

La Figura 2.28 ilustra estos términos. Nótese la distinción entre *creciente* y *no decreciente*. Si una función es creciente (o decreciente) en un intervalo, debe tomar valores diferentes en puntos diferentes (una función así se denomina **uno a uno**). Una función no decreciente (o no creciente) puede ser constante en un subintervalo de su dominio, y por tanto no puede ser uno a uno. Una función creciente es no decreciente, pero no toda función no decreciente es creciente.

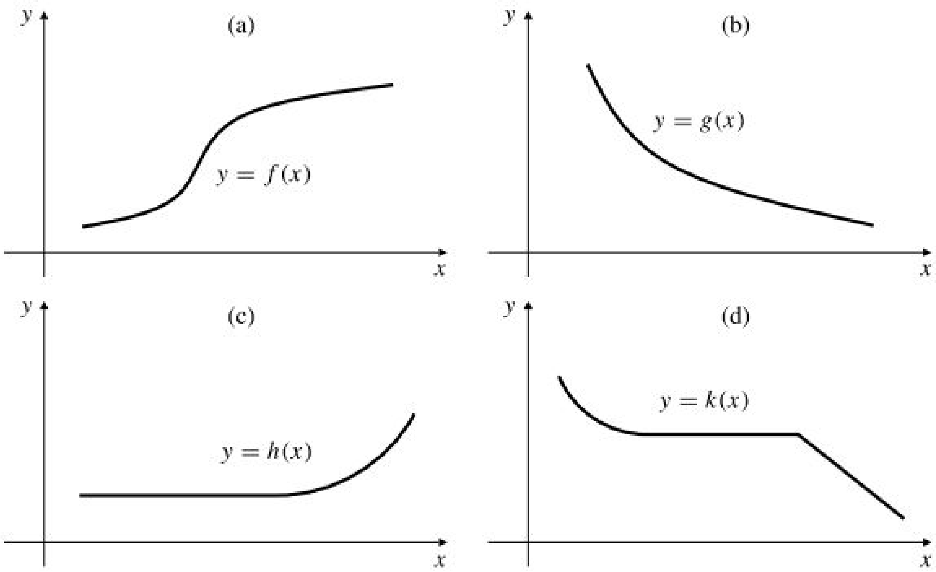

Figura 2.28 (a) La función f es creciente.
(b) La función g es decreciente.
(c) La función h es no decreciente.
(d) La función k es no creciente.

TEOREMA 12 Sea J un intervalo abierto, y sea I un intervalo que contiene a todos los puntos de J, y posiblemente uno de sus extremos, o ambos. Sea f una función continua en I y diferenciable en J.

(a) Si $f'(x) > 0$ para todo x perteneciente a J, entonces f es creciente en I.

(b) Si $f'(x) < 0$ para todo x perteneciente a J, entonces f es decreciente en I.

(c) Si $f'(x) \geqslant 0$ para todo x perteneciente a J, entonces f es no decreciente en I.

(d) Si $f'(x) \leqslant 0$ para todo x perteneciente a J, entonces f es no creciente en I.

DEMOSTRACIÓN Sean x_1 y x_2 dos puntos pertenecientes a I, con $x_2 > x_1$. Por el Teorema del Valor Medio, existe un punto c en (x_1, x_2) (y por tanto en J) tal que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

y por tanto, $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c)$. Como $x_2 - x_1 > 0$, la diferencia $f(x_2) - f(x_1)$ debe ser del mismo signo que $f'(c)$, y debe ser cero si $f'(c)$ es cero. Por tanto, se deducen todas las conclusiones de las partes correspondientes de la Definición 5.

Observación A pesar de lo que dice el Teorema 12, $f'(x_0) > 0$ en un solo punto x_0 ***no*** implica que la función sea creciente en ***cualquier*** intervalo que contenga a x_0. ***Véase*** el Ejercicio 20 al final de esta sección, donde se presenta un contraejemplo.

Ejemplo 4 ¿En qué intervalos es creciente la función $f(x) = x^3 - 12x + 1$? ¿En qué intervalos es decreciente?

Solución Tenemos que $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x-2)(x+2)$. Obsérvese que $f'(x) > 0$ si $x < -2$ o $x > 2$, y $f'(x) < 0$ para $-2 < x < 2$. Por tanto, f es creciente en los intervalos $(-\infty, -2)$ y $(2, \infty)$, y es decreciente en el intervalo $(-2, 2)$. ***Véase*** la Figura 2.29.

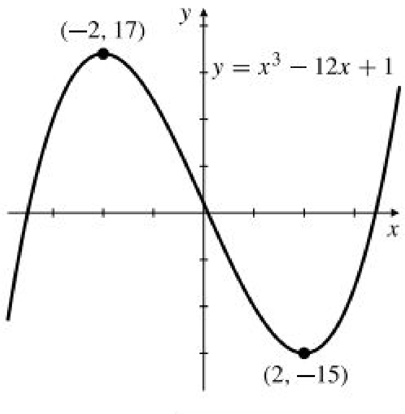

Figura 2.29

Una función f cuya derivada cumple que $f'(x) \geqslant 0$ en un intervalo puede ser todavía creciente en ese intervalo, en vez de ser sólo no decreciente como asegura el Teorema 12(c). Esto ocurre cuando $f'(x) = 0$ en una serie de puntos aislados, con tal que f sea creciente en los intervalos situados a la izquierda y a la derecha de esos puntos.

Ejemplo 5 Demuestre que $f(x) = x^3$ es creciente en cualquier intervalo.

Solución Sean x_1 y x_2 dos números reales, con $x_2 > x_1$. Como $f'(x) = 3x^2 > 0$, excepto en $x = 0$, el Teorema 12(a) nos dice que $f(x_2) > f(x_1)$ si $x_1 < x_2 \leqslant 0$ o si $0 \leqslant x_1 < x_2$. Si $x_1 < 0 < x_2$, entonces $f(x_1) < 0 < f(x_2)$. Por tanto, f es creciente en cualquier intervalo.

Si una función es constante en un intervalo, entonces su derivada será cero en dicho intervalo. El Teorema del Valor Medio nos permite demostrar la afirmación recíproca.

TEOREMA 13 Sea f una función continua en un intervalo I, y sea $f'(x) = 0$ en todo punto del interior de I (es decir, en todo punto de I excepto en sus extremos). Entonces $f(x) = C$, una constante, en I.

DEMOSTRACIÓN Sea un punto x_0 de I y sea $C = f(x_0)$. Si x es otro punto de I, entonces el Teorema del Valor Medio dice que debe existir un punto c entre x_0 y x tal que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c)$$

El punto c debe pertenecer a I porque el intervalo contiene a todos los puntos entre los dos citados, y c no puede ser un extremo de I ya que $c \neq x_0$ y $c \neq x$. Como $f'(c) = 0$ para todos esos puntos c, tenemos que $f(x) - f(x_0) = 0$ para todo x en I, y $f(x) = f(x_0) = C$, como queríamos demostrar.

Veremos cómo se puede utilizar el Teorema 13 para obtener identidades sobre nuevas funciones que se verán en capítulos posteriores. También lo utilizaremos al definir las primitivas en la Sección 2.10.

Demostración del Teorema del Valor Medio

El Teorema del Valor Medio es uno de los profundos resultados que se basan en la completitud del sistema de los números reales, mediante el hecho de que una función continua en un intervalo cerrado y finito toma un valor máximo y mínimo en dicho intervalo (Teorema 8 de la Sección 1.4). Antes de dar la demostración, estableceremos dos resultados preliminares.

TEOREMA 14 Si f es una función definida en un intervalo abierto (a, b), y que alcanza un valor máximo (o mínimo) en un punto c de (a, b), y existe $f'(c)$, entonces $f'(c) = 0$. Los valores de x donde $f'(x) = 0$ se denominan **puntos críticos** de la función f.

DEMOSTRACIÓN Supongamos que f tiene un máximo en c. Entonces $f(x) - f(c) \leqslant 0$ para todo x en (a, b). Si $c < x < b$, entonces

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0, \qquad \text{por tanto,} \qquad f'(c) = \lim_{x \to c+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0$$

Análogamente, si $a < x < c$, entonces

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0, \qquad \text{por tanto,} \qquad f'(c) = \lim_{x \to c-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0$$

Por tanto, $f'(c) = 0$. La demostración para un valor mínimo en c es similar.

TEOREMA 15 **Teorema de Rolle**

Suponga una función g continua en un intervalo cerrado y finito $[a, b]$, y diferenciable en el intervalo abierto (a, b). Si $g(a) = g(b)$, entonces existe un punto c en el intervalo abierto (a, b) en el que $g'(c) = 0$.

DEMOSTRACIÓN Si $g(x) = g(a)$ para todo punto x de $[a, b]$, entonces g es una función constante, por lo que $g'(c) = 0$ para todo c perteneciente a (a, b). Por tanto, supongamos que existe un x en (a, b) tal que $g(x) \neq g(a)$. Supongamos que $g(x) > g(a)$ (si $g(x) < g(a)$, la demostración es similar). Por el Teorema Max-Min (Teorema 8 de la Sección 1.4), como es continua en $[a, b]$, g debe tener un valor máximo en algún punto c en

$[a, b]$. Como $g(c) \geqslant g(x) > g(a) = g(b)$, c no puede ser a ni b. Por tanto, c pertenece al intervalo abierto (a, b), por lo que g es diferenciable en c. Por el Teorema 14, c debe ser un punto crítico de g: $g'(c) = 0$.

Observación El Teorema de Rolle es un caso particular del Teorema del Valor Medio en el que la cuerda tiene pendiente 0, por lo que la correspondiente recta tangente paralela debe tener también pendiente 0. Se puede deducir el Teorema del Valor Medio de este caso especial.

Demostración del Teorema del Valor Medio Suponga que f cumple las condiciones del Teorema del Valor Medio. Sea

$$g(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right)$$

(Para $a \leqslant x \leqslant b$, $g(x)$ es un desplazamiento vertical entre la curva $y = f(x)$ y la cuerda

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

que une $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. *Véase* la Figura 2.30).

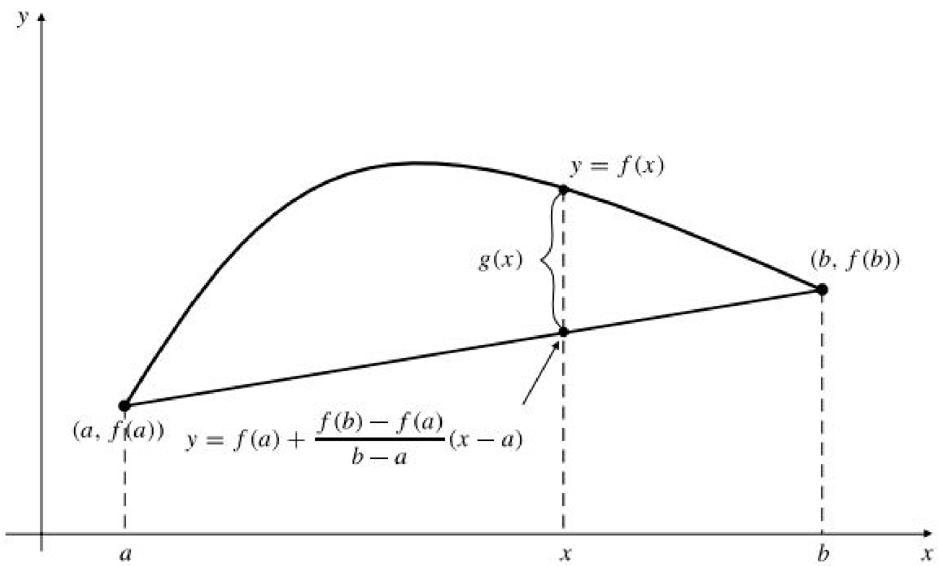

Figura 2.30 $g(x)$ es la distancia vertical entre la gráfica de f y la cuerda.

La función g es también continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b), ya que f posee esas propiedades. Además, $g(a) = g(b) = 0$. Según el Teorema de Rolle, existe un punto c en (a, b) tal que $g'(c) = 0$. Como

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

se deduce que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Muchas de las aplicaciones que haremos en capítulos posteriores del Teorema del Valor Medio usarán la siguiente versión generalizada del mismo.

TEOREMA 16 **Teorema del Valor Medio Generalizado**

Sean f y g funciones continuas en $[a, b]$, y diferenciables en (a, b), y sea $g(x) \neq 0$ para todo x de (a, b). Existe un número c en (a, b) tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

DEMOSTRACIÓN Nótese que $g(b) \neq g(a)$ porque si no, habría un punto de (a, b) y el que $g' = 0$. Por tanto, ningún denominador de la expresión anterior puede ser cero. Aplicando el Teorema del Valor Medio a

$$h(x) = (f(b) - f(a))(g(x) - g(a))(g(b) - g(a))(f(x) - f(a))$$

como $h(a) = h(b) = 0$, existe un c en (a, b) tal que $h'(c) = 0$. Entonces,

$$(f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c) = 0$$

y se llega al resultado deseado sin más que dividir por los fatores en g.

Ejercicios 2.6

En los Ejercicios 1-3, ilustre el Teorema del Valor Medio obteniendo los puntos del intervalo abierto (a, b) donde la recta tangente a $y = f(x)$ es paralela a la cuerda que une $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

1. $f(x) = x^2$ en $[a, b]$ **2.** $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $[1, 2]$

3. $f(x) = x^3 - 3x + 1$ en $[-2, 2]$

4. Aplicando el Teorema del Valor Medio a $f(x) = \cos x + \dfrac{x^2}{2}$ en el intervalo $[0, x]$, y utilizando el resultado del Ejemplo 2, demuestre que

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$$

para $x > 0$. Esta inecuación es también cierta para $x < 0$. ¿Por qué?

5. Demuestre que $\tan x > x$ para $0 < x < \pi/2$.

6. Sea $r > 1$. Si $x > 0$ o $-1 \leqslant x < 0$, demuestre que $(1 + x)^r > 1 + rx$.

7. Sea $0 < r < 1$. Si $x > 0$ o $-1 \leqslant x < 0$, demuestre que $(1 + x)^r < 1 + rx$.

Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones de los Ejercicios 8-15.

8. $f(x) = x^2 + 2x + 2$ **9.** $f(x) = x^3 - 4x + 1$

10. $f(x) = x^3 + 4x + 1$ **11.** $f(x) = (x^2 - 4)^2$

12. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ **13.** $f(x) = x^3(5 - x)^2$

14. $f(x) = x - 2\operatorname{sen} x$ **15.** $f(x) = x + \operatorname{sen} x$

***16.** Si $f(x)$ es diferenciable en un intervalo I y se anula en $n \geqslant 2$ puntos diferentes de I, demuestre que $f'(x)$ debe anularse al menos en $n - 1$ puntos de I.

17. ¿Qué es erróneo en la siguiente «demostración» del Teorema del Valor Medio Generalizado? Por el Teorema del Valor Medio, $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$ para algún valor c entre a y b y, de forma similar, $g(b) - g(a) = (b - a)g'(c)$ para algún c, Por tanto, $(f(b) - f(a))/(g(b) - g(a)) = f'(c)/g'(c)$, como queríamos demostrar.

***18.** Sea $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$. Demuestre que $f'(x)$ existe para todo x, pero que f' no es continua en $x = 0$. Esto demuestra la aseveración (realizada al final de la Sección 2.2) de que una derivada definida en un intervalo no necesita ser continua en dicho intervalo.

***19.** Demuestre la afirmación (hecha al final de la Sección 2.2) de que una derivada definida en un intervalo debe tener la propiedad del valor medio. (*Sugerencia*: Suponga que f' existe en $[a, b]$ y que $f'(a) \neq f'(b)$. Si k está entre $f'(a)$ y $f'(b)$, demuestre que la función g definida como $g(x) = f(x) - kx$ debe tener *o bien* un máximo *o bien* un mínimo en $[a, b]$, en un punto interior c de (a, b). Deduzca entonces que $f'(c) = k$).

***20.** Sea $f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \operatorname{sen}(1/x) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

(a) Demuestre que $f'(0) = 1$. (*Sugerencia*: Utilice la definición de derivada).

(b) Demuestre que todo intervalo que contiene a $x = 0$ contiene también puntos en los que $f'(x) < 0$, por lo que f no puede ser creciente en ese intervalo.

2.7 Aplicación de las derivadas

En esta sección presentaremos algunos ejemplos de la forma en que utilizan las derivadas para interpretar cambios y tasas de cambio en el mundo que nos rodea. Es natural pensar en el cambio como algo que es función del tiempo, como la velocidad de un objeto en movimiento, pero no hay necesidad de ser restrictivos respecto a esto. El cambio con respecto a variables distintas del tiempo se trata de la misma forma. Por ejemplo, un médico puede desear saber cómo afectan pequeños cambios en la dosis en la respuesta del cuerpo a un medicamento. Un economista puede estar interesado en estudiar cómo cambia la inversión extranjera con respecto a los cambios en los tipos de interés en el país. Todas esas cuestiones se pueden formular en términos de tasa de cambio de una función con respecto a una variable.

Aproximación de pequeños cambios

Si una cantidad y es función de otra cantidad x, es decir,

$$y = f(x)$$

en ocasiones se desea conocer cómo afecta un cambio en x, Δx, al valor de y. El cambio exacto en y, Δy, se expresa como

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

pero si el cambio en x es pequeño, se puede aproximar Δy utilizando el hecho de que $\Delta y/\Delta x$ es aproximadamente la derivada dy/dx. Entonces,

$$\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x}\,\Delta x \approx \frac{dy}{dx}\,\Delta x = f'(x)\ \Delta x$$

Algunas veces los cambios en una cantidad se miden con respecto al valor de dicha cantidad. El **cambio relativo** en x es el cociente $\Delta x/x$. El **cambio porcentual** es el cambio relativo expresado como un porcentaje:

$$\text{cambio relativo en } x = \frac{\Delta x}{x}$$

$$\text{cambio porcentual en } x = 100\,\frac{\Delta x}{x}$$

Ejemplo 1 ¿En qué porcentaje aumenta aproximadamente el área del círculo si su radio se incrementa en un 2%?

Solución El área A de un círculo se expresa en función de su radio como $A = \pi r^2$. Entonces,

$$\Delta A \approx \frac{dA}{dr}\,\Delta r = 2\pi r \Delta r$$

Dividiendo esta aproximación por $A = \pi r^2$ se obtiene una aproximación que relaciona los cambios relativos en A y r:

$$\frac{\Delta A}{A} \approx \frac{2\pi r \Delta r}{\pi r^2} = 2\,\frac{\Delta r}{r}$$

Si r se incrementa un 2%, entonces $\Delta r = \dfrac{2}{100}\,r$, por lo que

$$\frac{\Delta A}{A} \approx 2 \times \frac{2}{100} = \frac{4}{100}$$

Por tanto, A se incrementa aproximadamente un 4%. ■

Velocidad de cambio media e instantánea

Recuérdese el concepto de velocidad o tasa media de cambio de una función en un intervalo, presentada en la Sección 1.1. La derivada de la función es el límite de esta tasa media cuando la longitud del intervalo tiende a cero, y por tanto representa la velocidad o tasa de cambio de la función en un valor dado de su variable.

DEFINICIÓN 6

La **velocidad media de cambio** de una función $f(x)$ con respecto a x en el intervalo desde a hasta $a + h$ es

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

La **velocidad de cambio (instantánea)** de f con respecto a x en $x = a$ es la derivada

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

suponiendo que exista dicho límite.

Es habitual utilizar la palabra *instantánea* cuando la variable x no representa tiempo, aunque frecuentemente se omite dicha palabra. Cuando se dice *velocidad de cambio*, significa *velocidad instantánea de cambio.*

Ejemplo 2 ¿Con qué rapidez crece al área A de un círculo con respecto a su radio cuando el radio mide 5 m?

Solución La velocidad de cambio del área con respecto al radio es

$$\frac{dA}{dr} = \frac{d}{dr}(\pi r^2) = 2\pi r$$

Cuando $r = 5$ m, el área cambia con una velocidad de $2\pi \times 5 = 10\pi$ m^2/m. Esto significa que un pequeño cambio Δr m en el radio cuando el radio vale 5 m producirá un cambio de aproximadamente $10\pi\Delta r$ m^2 en el área del círculo.

El ejemplo anterior sugiere que las unidades apropiadas para medir la velocidad de cambio de una cantidad y con respecto a otra cantidad x son unidades de y por unidades de x.

Si $f'(x_0) = 0$, se dice que f es **estacionaria** en x_0 y que x_0 es un **punto crítico** de f. El punto correspondiente $(x_0, f(x_0))$ de la gráfica de f se denomina **punto crítico** de la gráfica. La gráfica tiene tangente horizontal en sus puntos críticos, y f puede tener o no un máximo o mínimo en dichos puntos (*véase* la Figura 2.31). Es posible que f sea creciente o decreciente en un punto crítico (*véase* el punto a en la Figura 2.31).

Ejemplo 3 Suponga que la temperatura en un determinado lugar t horas después del mediodía es de T °C (T grados Celsius), siendo

$$T = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t + 10 \qquad (\text{para } 0 \leqslant t \leqslant 5)$$

¿Con qué velocidad está subiendo o bajando la temperatura a la una de la tarde? ¿Y a las tres de la tarde? ¿En qué instantes la temperatura es estacionaria?

Solución La velocidad de cambio de la temperatura se expresa como

$$\frac{dT}{dt} = t^2 - 6t + 8 = (t-2)(t-4)$$

Si $t = 1$, entonces $\frac{dT}{dt} = 3$, por lo que a la una de la tarde la temperatura está *subiendo* a razón de 3 °C/h.

Si $t = 3$, entonces $\frac{dT}{dt} = -1$, por lo que a las tres de la tarde la temperatura está *bajando* a razón de 1 °C/h.

La temperatura es estacionaria cuando $\frac{dT}{dt} = 0$, es decir, a las dos de la tarde y a las cuatro de la tarde. ■

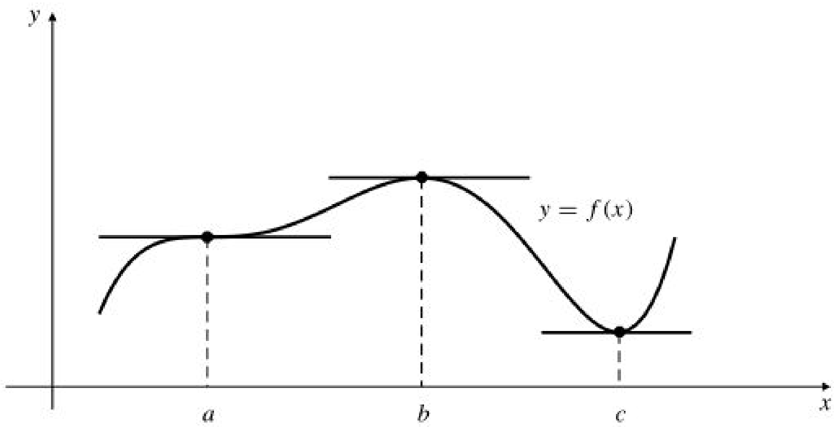

Figura 2.31 Puntos críticos de f.

Sensibilidad a los cambios

Cuando un pequeño cambio en x produce un gran cambio en una función $f(x)$, se dice que esa función es muy **sensible** a los cambios en x. La derivada $f'(x)$ es una medida de la sensibilidad que tiene la dependencia de f con x.

Ejemplo 4 **(Dosis de una medicina)** Un estudio farmacológico de un medicamento en desarrollo para bajar la tensión arterial determina experimentalmente que la disminución R de la tensión que produce una dosis diaria de x mg del medicamento es

$$R = 24{,}2\left(1 + \frac{x-13}{\sqrt{x^2 - 26x + 529}}\right) \qquad \text{mm Hg}$$

(Las unidades son milímetros de mercurio (Hg)). Determine la sensibilidad de R a la dosis x cuando el nivel de la dosis es de 5 mg, 15 mg y 35 mg. ¿En cuál de esos niveles de dosis produce un mayor efecto un incremento de la dosis?

Solución La sensibilidad de R con x es dR/dx. Tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dx} &= 24{,}2\left(\frac{\sqrt{x^2-26x+529}\,(1) - (x-13)\dfrac{x-13}{\sqrt{x^2-26x+529}}}{x^2-26x+529}\right)\\ &= 24{,}2\left(\frac{x^2-26x+529-(x^2-26x+169)}{(x^2-26x+529)^{3/2}}\right)\\ &= \frac{8712}{(x^2-26x+529)^{3/2}}\end{aligned}$$

Cuando la dosis es $x = 5$ mg, 15 mg y 35 mg las sensibilidades son

$$\left.\frac{dR}{dx}\right|_{x=5} = 0{,}998 \text{ mm Hg/mg}$$

$$\left.\frac{dR}{dx}\right|_{x=15} = 1{,}254 \text{ mm Hg/mg}$$

$$\left.\frac{dR}{dx}\right|_{x=35} = 0{,}355 \text{ mm Hg/mg}$$

De los niveles de dosificación, el que tiene mayor sensibilidad es el de 15 mg. Incrementar la dosis de 15 a 16 mg al día se espera reduciría la tensión media aproximadamente 1,25 mm Hg. ∎

Derivadas en economía

Del mismo modo que los físicos utilizan los términos *velocidad* y *aceleración* para referirse a las derivadas de ciertas cantidades, los economistas también tienen su vocabulario especializado para denominar a las derivadas. Las denominan **marginales**. En economía el término **marginal** se refiere a la velocidad o tasa de cambio de una cantidad con respecto a la variable de la que depende. Por ejemplo, el **coste de producción** $C(x)$ en una operación de fabricación es función de x, el número de unidades de producto producidas. El **coste marginal de producción** es la velocidad de cambio de C con respecto de x, y por tanto es dC/dx. Algunas veces el coste marginal de producción corresponde aproximadamente al coste extra de producir una unidad más, es decir,

$$\Delta C = C(x+1) - C(x)$$

Para ver por qué esto es aproximadamente correcto, observemos en la Figura 2.32 que si la pendiente de $C = C(x)$ no varía muy rápidamente cerca de x, entonces el cociente de incrementos $\Delta C/\Delta x$ tomará un valor próximo a su límite, la derivada dC/dx, incluso cuando $\Delta x = 1$.

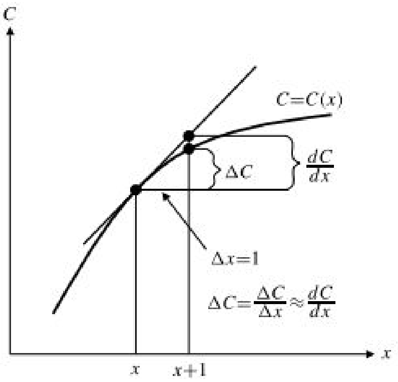

Figura 2.32 El coste marginal dC/dx es aproximadamente el coste extra ΔC de producir $\Delta x = 1$ unidad más.

Ejemplo 5 **(Tasas marginales de impuestos)** Si la tasa marginal de impuestos sobre ingresos es del 35% y los ingresos crecen en 1000 €, habrá que pagar unos 350 € extras en impuestos sobre ingresos. Esto no significa que se pague el 35% de todos los ingresos en impuestos. Significa que en el nivel de ingresos actual, I, la tasa de incremento de los impuestos T con respecto a los ingresos es $dT/dI = 0{,}35$. Es decir, se pagan 0,35 € de impuestos por cada euro extra que se ingresa. Por supuesto, si el nivel de ingresos aumenta mucho, puede pasarse a otro segmento impositivo y aumentar las tasas marginales. ∎

Ejemplo 6 **(Coste marginal de producción)** El coste de producir x toneladas de carbón por día en una mina es $C(x)$ €, siendo

$$C(x) = 4200 + 5.40x - 0.001x^2 + 0.000002x^3$$

(a) ¿Cuál es el coste medio de producir cada tonelada si el nivel diario de producción es de 1000 toneladas? ¿Y si es de 2000 toneladas?
(b) Calcule el coste marginal de producción si la producción diaria es de 1000 toneladas y de 2000 toneladas.
(c) Si el nivel de producción crece ligeramente de las 1000 toneladas o de las 2000 toneladas, ¿qué sucederá con el coste medio por tonelada?

Solución

(a) El coste medio por tonelada de carbón es

$$\frac{C(x)}{x} = \frac{4200}{x} + 5.40 - 0.001x + 0.000002x^2$$

Si $x = 1000$, el coste medio por tonelada es de $C(1000)/1000 = 10.6$/ton. Si $x = 2000$, el coste medio por tonelada es de $C(2000)/2000 = 13.5$ €/ton.
(b) El coste marginal de producción es

$$C'(x) = 5.40 - 0.002x + 0.000006x^2$$

Si $x = 1000$, el coste marginal es de $C(1000) = 9.4$/ton. Si $x = 2000$, el coste marginal es de $C(2000) = 25.4$ €/ton.
(c) Si el nivel de producción se incrementa ligeramente por encima de $x = 1000$, entonces disminuirá el coste medio por tonelada, ya que el coste crece con una tasa menor que el coste medio. En $x = 2000$ ocurre lo contrario. Un incremento en la producción aumentará el coste medio por tonelada. ■

Los economistas prefieren a veces utilizar tasas de cambio relativo, que no depende de las unidades en que se miden las cantidades involucradas. Utilizan el término **elasticidad** para denominar a esos cambios relativos.

Ejemplo 7 **(Elasticidad de la demanda)** La demanda y de un cierto producto (es decir, la cantidad que se puede vender) normalmente depende del precio p aplicado a dicho producto: $y = f(p)$. La demanda marginal $dy/dp = f'(p)$ (que típicamente es negativa) depende de las unidades que se utilicen para medir y y p. La *elasticidad de la demanda* es la cantidad

$$-\frac{p}{y}\frac{dy}{dp} \qquad \text{(el signo «}-\text{» asegura que la elasticidad es positiva)}$$

que es independiente de las unidades y proporciona una buena medida de la sensibilidad de la demanda a los cambios de precio. Para ver esto, supongamos que se utilizan unidades nuevas para la demanda y el precio, que son múltiplos de las unidades antiguas. En las nuevas unidades, la demanda y el precio se expresan como Y y P, siendo

$$Y = k_1 y \quad \text{y} \quad P = k_2 p$$

Es decir, $Y = k_1 f(P/k_2)$ y $dY/dP = (k_1/k_2)f'(P/k_2) = (k_1/k_2)f'(p)$, aplicando la Regla de la Cadena. Por tanto, se deduce que el valor de la elasticidad no cambia:

$$-\frac{P}{Y}\frac{dY}{dP} = -\frac{k_2 p}{k_1 y}\frac{k_1}{k_2}f'(p) = -\frac{p}{y}\frac{dy}{dp}$$

■

Ejercicios 2.7

En los Ejercicios 1-6, calcule los cambios porcentuales aproximados en las funciones $y = f(x)$ dadas que producen un cambio del 2% en el valor de x.

1. $y = x^2$

2. $y = 1/x$

3. $y = 1/x^2$

4. $y = x^3$

5. $y = \sqrt{x}$

6. $y = x^{-2/3}$

7. ¿En qué porcentaje, aproximadamente, crecerá el volumen de una esfera de radio r, ($V = \frac{4}{3}\pi r^3$), si el radio se incrementa en un 2%?

8. ¿En qué porcentaje disminuirá la longitud de la arista de un cubo de hielo si el cubo pierde el 6% de su volumen al fundirse?

9. Calcule la velocidad de cambio del área de un cuadrado con respecto a la longitud de su lado cuando dicho lado mide 4 m.

10. Calcule la velocidad de cambio del lado de un cuadrado con respecto a su área cuando dicha área es de 16 m^2.

11. Calcule la velocidad de cambio del diámetro de un círculo con respecto a su área.

12. Calcule la velocidad de cambio del área de un círculo con respecto a su diámetro.

13. Calcule la velocidad de cambio del volumen de una esfera (dado por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$) con respecto a su radio r cuando el radio mide 2 m.

14. ¿Cuál es la velocidad de cambio del área A de un cuadrado con respecto a la longitud L de su diagonal?

15. ¿Cuál es la velocidad de cambio de la longitud de una circunferencia C con respecto a su área A?

16. Calcule la velocidad de cambio del lado s de un cubo con respecto al volumen V de dicho cubo.

¿Cuáles son los puntos críticos de las funciones de los Ejercicios 17-20? ¿En qué intervalo es cada función creciente o decreciente?

17. $f(x) = x^2 - 4$

18. $f(x) = x^3 - 12x + 1$

19. $y = x^3 + 6x^2$

20. $y = 1 - x - x^5$

21. Demuestre que $f(x) = x^3$ es creciente en toda la recta real aunque $f'(x)$ no sea positiva en todos sus puntos.

22. ¿En qué intervalos es creciente $f(x) = x + 2\,\mathrm{sen}\,x$?

Utilice un programa de gráficos o de matemáticas por computador para calcular los puntos críticos de las funciones de los Ejercicios 23-26, con una precisión de 6 decimales.

23. $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 4}$

24. $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$

25. $f(x) = x - \mathrm{sen}\left(\dfrac{x}{x^2 + x + 1}\right)$

26. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{\cos(x + 0,1)}$

27. El volumen de agua en un tanque t minutos después de empezar a vaciarse se puede expresar como

$$V(t) = 350(20 - t)^2 \text{ L}$$

(a) ¿Con qué velocidad se vacía el tanque tras 5 minutos? ¿Y tras 15 minutos?

(b) ¿Cuál es la velocidad media de vaciado del tanque en el intervalo comprendido entre 5 minutos y 15 minutos?

28. **(Ley de Poiseuille)** La velocidad del flujo F (medido en litros por minuto) de líquido por una tubería es proporcional a la cuarta potencia del radio de la tubería:

$$F = kr^4$$

¿Qué porcentaje aproximado de incremento es necesario en el radio de la tubería para que la velocidad del flujo aumente un 10%?

29. **(Fuerza gravitatoria)** La fuerza gravitatoria F con la que la Tierra atrae a un objeto en el espacio es $F = k/r^2$, siendo k una constante y r la distancia del objeto al centro de la Tierra. Si F disminuye con respecto a r con una velocidad de 1 *newton/km* cuando $r = 7000$ km, ¿con qué rapidez cambia F con respecto a r cuando $r = 10\,000$ km?

30. **(Sensibilidad de los ingresos con el precio)** Los ingresos por ventas R de un determinado producto software dependen del precio p aplicado al distribuidor de acuerdo con la fórmula

$$R = 4000p - 10p^2$$

(a) ¿Qué sensibilidad tiene R con p cuando $p = 100$ €? ¿Y cuando $p = 200$ €? ¿Y cuando $p = 300$ €?

(b) ¿Cuál de los tres es el precio más razonable para aplicar al distribuidor? ¿Por qué?

31. **(Coste marginal)** El coste de fabricar x refrigeradores es de $C(x)$, siendo

$$C(x) = 8000 + 400x - 0,5x^2$$

(a) Calcule el coste marginal si se fabrican 100 refrigeradores.

(b) Demuestre que el coste marginal es aproximadamente la diferencia de fabricar 101 refrigeradores en vez de 100.

32. **(Beneficio marginal)** Si una fábrica de contrachapado produce x planchas al día, su beneficio por día será de $P(x)$ €, siendo

$$P(x) = 8x - 0,005x^2 - 1000$$

(a) Calcule el beneficio marginal. ¿Para qué valores de x es positivo el beneficio marginal? ¿Y negativo?

(b) ¿Cuántas hojas habría que producir cada día para generar un beneficio máximo?

33. El coste C (en euros) de producir n objetos al mes en una fábrica es de

$$C = \frac{80\,000}{n} + 4n + \frac{n^2}{100}$$

Calcule el coste marginal de producción si el número de objetos fabricados cada mes es de (a) 100 y (b) 300.

****34.** En una operación minera el coste C (en euros) de extraer cada tonelada de mineral es de

$$C = 10 + \frac{20}{x} + \frac{x}{1000}$$

siendo x el número de toneladas extraídas al día. Para x pequeño, C se reduce al aumentar x debido a las economías de escala, pero para x grande, C crece con x debido a la sobrecarga de los equipos y de trabajo. Si cada tonelada de mineral se puede vender a 13 €, ¿cuántas toneladas habría que extraer al día para maximizar el beneficio por día de la mina?

****35. (Coste medio y coste marginal)** Si a un fabricante le cuesta $C(x)$ euros producir x productos, entonces su coste medio de producción es de $C(x)/x$ euros por producto. En general, el coste medio es una función decreciente con x para x pequeño, y es creciente con x para x grande (¿por qué?). Demuestre que el valor de x que minimiza el coste medio hace que el coste medio sea igual al coste marginal.

36. (Elasticidad constante) Demuestre que si la demanda y se relaciona con el precio p mediante la ecuación $y = Cp^{-r}$, siendo C y p constantes positivas, entonces la elasticidad de la demanda (*véase* el Ejemplo 7) es la constante r.

2.8 Derivadas de orden superior

Si la derivada $y' = f'(x)$ de una función $y = f(x)$ es también diferenciable en x, se puede calcular *su* derivada, que se denomina **segunda derivada** de f, y se expresa como $y'' = f''(x)$. Como en el caso de las primeras derivadas, las derivadas segundas se pueden expresar de diversas formas en función del contexto. Algunas de las formas más comunes son

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d^2}{dx^2}f(x) = D_x^2 y = D_x^2 f(x)$$

De forma similar se pueden considerar la tercera, cuarta, y en general derivadas de orden n. La notación que utiliza primas es inadecuada para derivadas de orden alto, por lo que el orden se denotará mediante un superíndice encerrado entre paréntesis (para distinguirlo de los exponentes). La n-ésima derivada de $y = f(x)$ es

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d^n}{dx^n}f(x) = D_x^n y = D_x^n f(x)$$

y se define como la derivada de la $(n-1)$-ésima derivada. Para $n = 1$, 2 y 3 se utiliza todavía la notación de las primas: $f^{(2)}(x) = f''(x)$, $f^{(3)}(x) = f'''(x)$. Algunas veces es conveniente denotar como $f^{(0)}(x) = f(x)$, es decir, indicar que una función es su propia derivada de orden cero.

Ejemplo 1 La **velocidad** de un objeto en movimiento es la tasa (instantánea) de cambio de la posición del objeto con respecto al tiempo. Si el objeto se mueve a lo largo del eje x y está en la posición $x = f(t)$ en el instante t, entonces su velocidad en ese instante es

$$v = \frac{dx}{dt} = f'(t)$$

De forma similar, la **aceleración** de un objeto es la tasa de cambio en la velocidad. Por tanto, la aceleración es la *segunda derivada* de la posición:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = f''(t)$$

Más adelante, en la Sección 2.11, investigaremos más a fondo las relaciones entre posición, velocidad y aceleración.

Ejemplo 2 Si $y = x^3$, entonces $y' = 3x^2$, $y'' = 6x$, $y''' = 6$, $y^{(4)} = 0$ y todas las derivadas sucesivas valen cero.

En general, si $f(x) = x^n$ (siendo n un entero positivo), entonces

$$f^{(k)}(x) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))x^{n-k}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!}\, x^{n-k} & \text{si} \quad 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \text{si} \quad k > n \end{cases}$$

donde $n!$ (denominado n **factorial**) se define como

$$\begin{aligned}
0! &= 1 \\
1! &= 0! \times 1 = 1 \times 1 = 1 \\
2! &= 1! \times 2 = 1 \times 2 = 2 \\
3! &= 2! \times 3 = 1 \times 2 \times 3 = 6 \\
4! &= 3! \times 4 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24 \\
&\vdots \\
n! &= (n-1)! \times n = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n
\end{aligned}$$

De lo anterior se deduce que si P es un polinomio de grado n,

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 son constantes, entonces $P^{(k)}(x) = 0$ para $k > n$. Para $k \leqslant n$, $P^{(k)}$ es un polinomio de grado $n - k$. En particular, $P^{(n)}(x) = n!a_n$, es decir, una constante.

Ejemplo 3 Demuestre que si A, B y k son constantes, entonces la función

$$y = A\cos(kt) + B\operatorname{sen}(kt)$$

es la solución de la **ecuación diferencial del movimiento armónico simple** de *segundo orden* (*véase* la Sección 3.7):

$$\frac{d^2y}{dt^2} + k^2y = 0$$

Solución Para ser una solución, la función $y(t)$ debe cumplir la ecuación diferencial, es decir,

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + k^2y(t) = 0$$

debe cumplirse para todo número real t. Esto se puede verificar calculando las dos primeras derivadas de la función $y(t) = A\cos(kt) + B\operatorname{sen}(kt)$, y observando que la segunda derivada mas $k^2y(t)$ vale siempre cero:

$$\frac{dy}{dt} = -Ak\operatorname{sen}(kt) + Bk\cos(kt)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -Ak^2\cos(kt) - Bk^2\operatorname{sen}(kt) = -k^2y(t)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + k^2y(t) = 0$$

Ejemplo 4 Calcule la n-ésima derivada, $y^{(n)}$, de $y = \dfrac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$.

Solución Comenzamos por calcular unas pocas derivadas:

$$\begin{aligned} y' &= -(1+x)^{-2} \\ y'' &= -(-2)(1+x)^{-3} = 2(1+x)^{-3} \\ y''' &= 2(-3)(1+x)^{-4} = -3!(1+x)^{-4} \\ y^{(4)} &= -3!(-4)(1+x)^{-5} = 4!(1+x)^{-5} \end{aligned}$$

Aparece un patrón obvio. Parece que

$$y^{(n)} = (-1)^n n!(1+x)^{-n-1}$$

En realidad no hemos demostrado que la fórmula anterior es correcta para todo n, aunque lo es para $n = 1$, 2, 3 y 4. Para completar la demostración se utiliza inducción matemática (Sección 2.3). Supongamos que la fórmula es válida para $n = k$, siendo k un entero positivo. Considérese $y^{(k+1)}$:

$$\begin{aligned} y^{(k+1)} &= \frac{d}{dx} y^{(k)} = \frac{d}{dx}((-1)^k k!(1+x)^{-k-1}) \\ &= (-1)^k k!(-k-1)(1+x)^{-k-2} = (-1)^{k+1}(k+1)!(1+x)^{-(k+1)-1} \end{aligned}$$

Esto es lo que la fórmula predice para la derivada de orden $(k+1)$. Por tanto, si la fórmula para $y^{(n)}$ es correcta para $n = k$, es también correcta para $n = k+1$. Como se sabe que la fórmula es verdadera para $n = 1$, debe ser cierta para todo $n \geqslant 1$ *por inducción*.

■

Nótese el uso de $(-1)^n$ para indicar un signo negativo si n es impar y positivo si n es par.

Ejemplo 5 Calcule una fórmula para $f^{(n)}(x)$, siendo $f(x) = \operatorname{sen}(ax+b)$.

Solución Comenzamos por calcular unas pocas derivadas:

$$\begin{aligned} f'(x) &= a\cos(ax+b) \\ f''(x) &= -a^2 \operatorname{sen}(ax+b) = -a^2 f(x) \\ f'''(x) &= -a^3 \cos(ax+b) = -a^2 f'(x) \\ f^{(4)}(x) &= a^4 \operatorname{sen}(ax+b) = a^4 f(x) \\ f^{(5)}(x) &= a^5 \cos(ax+b) = a^4 f'(x) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Aquí también el patrón es bastante obvio. Cada derivada es $-a^2$ veces la segunda derivada anterior. Una fórmula que permite calcular todas las derivadas es

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^k a^n \operatorname{sen}(ax+b) & \text{si} \quad n = 2k \\ (-1)^k a^n \cos(ax+b) & \text{si} \quad n = 2k+1 \end{cases} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

que se puede verificar también por inducción en k.

■

Nuestro ejemplo final ilustra que no siempre es fácil obtener la derivada n-ésima de una función.

Ejemplo 6 Calcule f', f'' y f''' de $f(x) = \sqrt{x^2+1}$. ¿Existe algún patrón que permita predecir cómo será $f^{(4)}$?

Solución Como $f(x) = (x^2+1)^{1/2}$, tenemos que

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}(2x) = x(x^2+1)^{-1/2}$$
$$f''(x) = (x^2+1)^{-1/2} + x(-\tfrac{1}{2})(x^2+1)^{-3/2}(2x)$$
$$= (x^2+1)^{-3/2}(x^2+1-x^2) = (x^2+1)^{-3/2}$$
$$f'''(x) = -\tfrac{3}{2}(x^2+1)^{-5/2}(2x) = -3x(x^2+1)^{-5/2}$$

Aunque la expresión que se obtiene en cada derivada se puede simplificar algo, el patrón subyacente no es (todavía) lo bastante obvio como para permitirnos predecir la fórmula de $f^{(4)}(x)$ sin tener que calcularla. De hecho,

$$f^{(4)}(x) = 3(4x^2-1)(x^2+1)^{-7/2}$$

por lo que el patrón (si es que hay alguno) no aparece claramente en esta etapa. ■

Observación Las derivadas de orden superior se pueden indicar en Maple repitiendo la variable de diferenciación o indicando el orden utilizando el operador `$`:

```
> diff(x^5, x, x) + diff(sin(2*x),x$3) ;
```

$$20x^3 - 8\cos(2x)$$

El operador `D` se puede utilizar también para obtener las derivadas de orden superior de una función (no como una expresión) componiéndolas explícitamente o utilizando el operador `@@`:

```
> f :=x -> x^5; fpp := D(D(f)) ; (D@@3)(f)(a) ;
```

$$f := x \to x^5$$
$$fpp := x \to 20x^3$$
$$60a^2$$

Ejercicios 2.8

Calcule y', y'' e y''' para las funciones de los Ejercicios 1-12.

1. $y = (3-2x)^7$

2. $y = x^2 - \dfrac{1}{x}$

3. $y = \dfrac{6}{(x-1)^2}$

4. $y = \sqrt{ax+b}$

5. $y = x^{1/3} - x^{-1/3}$

6. $y = x^{10} + 2x^8$

7. $y = (x^2+3)\sqrt{x}$

8. $y = \dfrac{x-1}{x+1}$

9. $y = \tan x$

10. $y = \sec x$

11. $y = \cos(x^2)$

12. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

En los Ejercicios 13-23, calcule las suficientes derivadas de las funciones propuestas como para obtener una expresión general de la fórmula de $f^{(n)}(x)$. Verifique después la fórmula obtenida mediante inducción matemática.

13. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

14. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

15. $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$

16. $f(x) = \sqrt{x}$

17. $f(x) = \dfrac{1}{a+bx}$

18. $f(x) = x^{2/3}$

19. $f(x) = \cos(ax)$

20. $f(x) = x\cos x$

21. $f(x) = x\operatorname{sen}(ax)$

***22.** $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$

***23.** $f(x) = \sqrt{1-3x}$

24. Si $y = \tan kx$, demuestre que $y'' = 2k^2y(1+y^2)$.

25. Si $y = \sec kx$, demuestre que $y'' = k^2y(2y^2-1)$.

26. Utilice inducción matemática para demostrar que la n-ésima derivada de $y = \operatorname{sen}(ax+b)$ sigue la fórmula establecida al final del Ejemplo 5.

27. Utilice inducción matemática para demostrar que la n-ésima derivada de $y = \tan x$ es de la forma $P_{n+1}(\tan x)$, siendo P_{n+1} un polinomio de grado $n+1$.

28. Si f y g son funciones diferenciables dos veces, demuestre que $(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$.

∗**29.** Formule y demuestre un resultado análogo al del Ejercicio 28 pero para $(fg)^{(3)}$ y $(fg)^{(4)}$. ¿Podría obtener la fórmula de $(fg)^{(n)}$?

∗**30.** Si $f''(x)$ existe en un intervalo I y f se anula en al menos tres puntos diferentes de I, demuestre que f'' debe anularse al menos en un punto de I.

∗**31.** Generalice el Ejercicio 30 a una función para la que $f^{(n)}$ existe en I, y para la que f se anula en $n+1$ puntos diferentes de I.

∗**32.** Suponga que f es dos veces diferenciable en un intervalo I (es decir, f'' existe en I). Suponga además que los puntos 0 y 2 pertenecen a I y que $f(0) = f(1) = 0$ y $f(2) = 1$. Demuestre que:

(a) $f'(a) = \dfrac{1}{2}$ para algún punto a en I.

(b) $f''(b) > \dfrac{1}{2}$ para algún punto b en I.

(c) $f'(c) = \dfrac{1}{7}$ para algún punto c en I.

2.9 Diferenciación implícita

Ya sabemos calcular la pendiente de una curva que corresponde a la representación gráfica de la función $y = f(x)$ calculando la derivada de f. Pero no todas las curvas corresponden a gráficas de estas funciones. Para ser la gráfica de una función $f(x)$, la curva no debe cruzar cualquier recta vertical en más de un punto.

Las curvas son generalmente ***ecuaciones*** en dos variables. Estas ecuaciones se pueden expresar de la forma

$$F(x, y) = 0$$

donde $F(x, y)$ indica una expresión que involucra a las dos variables x e y. Por ejemplo, la ecuación de una circunferencia con centro en el origen y radio 5 es

$$x^2 + y^2 - 25 = 0$$

por lo que $F(x, y) = x^2 + y^2 - 25$ para esa circunferencia.

A veces es posible despejar y en la ecuación $F(x, y) = 0$ y, por tanto, obtener fórmulas explícitas de una o más funciones $y = f(x)$ definidas por dicha ecuación. Sin embargo, a menudo no es posible resolver la ecuación. No obstante, aún podemos ver la ecuación como una forma de definir ***implícitamente*** y como una o más funciones de x, aunque no podemos obtener ***explícitamente*** esas funciones. Es más, podemos obtener las derivadas dy/dx de las funciones implícitas mediante una técnica denominada **diferenciación implícita**. Se trata de diferenciar la ecuación dada con respecto a x, considerando que y es una función de x con derivada dy/dx, o y'.

Ejemplo 1 Calcule dy/dx si $y^2 = x$.

Solución La ecuación $y^2 = x$ define dos funciones diferenciables de x, que en este caso podemos conocer explícitamente. Son $y_1 = \sqrt{x}$ e $y_2 = -\sqrt{x}$ (Figura 2.33), cuyas derivadas están definidas para $x > 0$:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{y} \quad \frac{dy_2}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

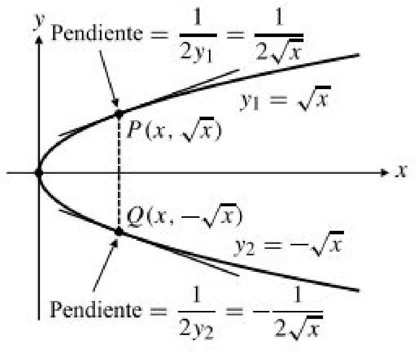

Figura 2.33 La ecuación $y^2 = x$ define dos funciones diferenciables de x en el intervalo $x \geqslant 0$.

Sin embargo, es posible obtener la pendiente de la curva $y^2 = x$ en cualquier punto (x, y) que cumpla la ecuación sin despejar previamente y. Para calcular dy/dx simplemente se diferencian con respecto a x los dos miembros de la ecuación $y^2 = x$, tratando y como una función diferenciable de x y utilizando la Regla de la Cadena para diferenciar y^2:

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(x) \qquad \left(\text{La Regla de la Cadena da } \frac{d}{dx}y^2 = 2y\frac{dy}{dx}\right)$$

$$2y\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$$

Obsérvese que esto coincide con las derivadas calculadas anteriormente para *ambas* soluciones explícitas $y_1 = \sqrt{x}$ e $y_2 = -\sqrt{x}$:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2y_1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{y} \quad \frac{dy_2}{dx} = \frac{1}{2y_2} = \frac{1}{2(-\sqrt{x})} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

■

Ejemplo 2 Calcule la pendiente de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en el punto $(3, -4)$.

Solución La circunferencia no corresponde a la gráfica de una única función de x. De nuevo se combinan las gráficas de dos funciones: $y_1 = \sqrt{25 - x^2}$ e $y_2 = -\sqrt{25 - x^2}$ (Figura 2.34). El punto $(3, -4)$ pertenece a la gráfica de y_2, por lo que la pendiente se puede obtener calculando explícitamente:

$$\left.\frac{dy_2}{dx}\right|_{x=3} = -\left.\frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}}\right|_{x=3} = -\frac{-6}{2\sqrt{25 - 9}} = \frac{3}{4}$$

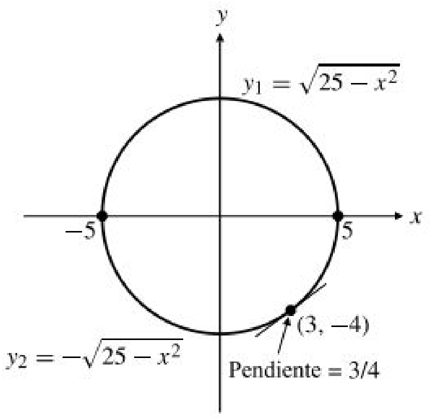

Figura 2.34 La circunferencia combina la gráfica de dos funciones. La gráfica de y_2 es el semicírculo inferior y pasa por el punto $(3, -4)$.

Pero el problema se puede resolver más fácilmente diferenciando implícitamente la ecuación dada de la circunferencia y con respecto a x:

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

La pendiente en $(3, -4)$ es $\left.-\frac{x}{y}\right|_{(3,-4)} = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$.

■

Ejemplo 3 Calcule $\dfrac{dy}{dx}$ si $y\,\mathrm{sen}\,x = x^3 + \cos y$.

Solución Esta vez no se puede despejar la y como una función explícita de x, por lo que ***debemos*** utilizar diferenciación implícita:

$$\frac{d}{dx}(y\,\mathrm{sen}\,x) = \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(\cos y) \qquad \begin{pmatrix}\text{Uso de la Regla del Producto}\\ \text{en el miembro izquierdo.}\end{pmatrix}$$

$$(\mathrm{sen}\,x)\frac{dy}{dx} + y\cos x = 3x^2 - (\mathrm{sen}\,y)\frac{dy}{dx}$$

$$(\mathrm{sen}\,x + \mathrm{sen}\,y)\frac{dy}{dx} = 3x^2 - y\cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - y\cos x}{\mathrm{sen}\,x + \mathrm{sen}\,y}$$

Para calcular dy/dx mediante diferenciación implícita:

1. Se diferencian los dos miembros de la ecuación con respecto a x, teniendo en cuenta que y es función de x y empleando la Regla de la Cadena para diferenciar las funciones de y.
2. Se agrupan los términos dy/dx en un miembro de la ecuación y se despeja dy/dx dividiendo por su coeficiente.

En los ejemplos anteriores, las derivadas dy/dx calculadas por diferenciación implícita dependían de y o de x e y, en vez de depender sólo de x. Esto es normal, ya que una ecuación en x e y puede definir más de una función de x, y la derivada calculada implícitamente debe aplicar a todas ellas. Por ejemplo, en el Ejemplo 2, la derivada $dy/dx = -x/y$ proporciona también la pendiente $-3/4$ en el punto (3, 4) de la circunferencia. Cuando se usa diferenciación implícita para calcular la pendiente de una curva en un punto, en general habrá que conocer las coordenadas de ese punto.

Existen peligros sutiles al calcular derivadas implícitas. Cuando se utiliza la Regla de la Cadena para diferenciar una ecuación en la que y depende de x, se asume automáticamente que la ecuación define y como una función diferenciable de x. Éste no tiene por qué ser el caso. Para ver lo que puede pasar, consideremos el problema de calcular $y' = dy/dx$ de la ecuación

$$x^2 + y^2 = K\,(*)$$

siendo K una constante. Como en el Ejemplo 2 (donde $K = 25$), la diferenciación implícita produce como resultado

$$2x + 2yy' = 0 \quad \text{o} \quad y' = -\frac{x}{y}$$

Esta fórmula proporciona la pendiente de la curva (*) en cualquier punto de dicha curva donde $y \neq 0$. Para $K > 0$, (*) representa una circunferencia centrada en el origen con radio $\sqrt{K}$. Esta circunferencia tiene pendiente finita, excepto en los dos puntos donde cruza al eje x (donde $y = 0$). Si $K = 0$, la ecuación representa un solo punto, el origen, por lo que el concepto de pendiente carece de sentido. Para $K < 0$, no existen puntos reales cuyas coordenadas cumplan la ecuación (*), por lo que y' carece aquí también de sentido. La consecuencia es que poder calcular y' en una ecuación dada aplicando diferenciación implícita no garantiza que y' represente realmente la pendiente de algo.

Si (x_0, y_0) es un punto en la gráfica de la ecuación $F(x, y) = 0$, existe un teorema que puede justificar el uso de la diferenciación implícita para calcular la pendiente de la gráfica en dicho punto. No podemos ofrecer una demostración rigurosa del **teorema de la función implícita** (*véase* la Sección 12.8), pero en términos generales, dice que parte de la gráfica de $F(x, y) = 0$ cerca de (x_0, y_0) es la gráfica de una función de x que es diferenciable en x_0, suponiendo que $F(x, y)$ sea una función «suave» y que la derivada

$$\frac{d}{dy} F(x_0, y)\bigg|_{y=y_0} \neq 0$$

En el caso de la circunferencia $x^2 + y^2 - K = 0$ (siendo $K > 0$) esta condición dice que $2y_0 \neq 0$, que es la condición de que la derivada $y' = -x/y$ debe existir en (x_0, y_0).

Una estrategia útil

Cuando se usa diferenciación implícita para calcular el valor de la derivada en un punto concreto, es mejor sustituir las coordenadas del punto inmediatamente después de realizar la diferenciación y antes de despejar la derivada dy/dx. Es más sencillo resolver una ecuación con números que con expresiones algebraicas.

Ejemplo 4 Calcule la ecuación de la tangente a $x^2 + xy + 2y^3 = 4$ en $(-2, 1)$.

Solución Nótese que $(-2, 1)$ está en la curva dada. Para calcular la pendiente en la tangente se diferencia implícitamente la ecuación con respecto a x. Se utiliza la Regla del Producto para diferenciar el término xy:

$$2x + y + xy' + 6y^2y' = 0$$

Sustituyendo las coordenadas $x = -2$ e $y = 1$ y despejando y':

$$-4 + 1 - 2y' + 6y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{3}{4}$$

La pendiente de la tangente en $(-2, 1)$ es $3/4$ y su ecuación es

$$y = \frac{3}{4}(x + 2) + 1 \qquad \text{o} \qquad 3x - 4y = -10$$

Ejemplo 5 Demuestre que para todo valor de las constantes a y b, las curvas $x^2 - y^2 = a$ y $xy = b$ se cortan formando ángulos rectos, es decir, en cualquier punto donde se corten, sus tangentes son perpendiculares.

Solución La pendiente en cualquier punto de $x^2 - y^2 = a$ se expresa como $2x - 2yy' = 0$, o $y' = x/y$. La pendiente en cualquier punto $xy = b$ se expresa como $y + xy' = 0$, o $y' = -y/x$. Si las dos curvas (que son hipérbolas si $a \neq 0$ y $b \neq 0$) se cortan en (x_0, y_0), las pendientes en ese punto son respectivamente x_0/y_0 y $-y_0/x_0$. Se ve claramente que una pendiente es el inverso cambiado de signo de la otra, por lo que la tangente a una curva es perpendicular a la tangente a la otra en el punto considerado. Por tanto, las curvas se cortan formando ángulos rectos (*véase* la Figura 2.35).

Derivadas de orden superior

Ejemplo 6 Calcule $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ si $xy + y^2 = 2x$.

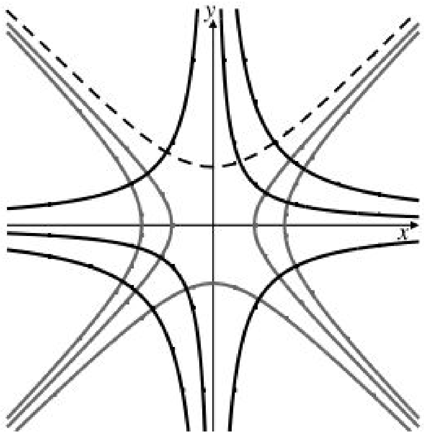

Figura 2.35 Algunas hipérbolas de la familia $x^2 - y^2 = a$ (en discontinua) que se cortan con algunas curvas de la familia $xy = b$ (en continua) formando ángulos rectos.

Solución Diferenciando dos veces los dos miembros de la ecuación dada con respecto a x:

$$y + xy' + 2yy' = 2$$

$$y' + y' + xy'' + 2(y')^2 + 2yy'' = 0$$

Ahora se despejan y' e y'' en las ecuaciones.

$$y' = \frac{2-y}{x+2y}$$

$$\begin{aligned} y'' &= -\frac{2y' + 2(y')^2}{x+2y} = -2\,\frac{2-y}{x+2y}\,\frac{1+\dfrac{2-y}{x+2y}}{x+2y} \\ &= -2\,\frac{(2-y)(x+y+2)}{(x+2y)^3} \\ &= -2\,\frac{2x - xy + 2y - y^2 + 4 - 2y}{(x+2y)^3} = -\frac{8}{(x+2y)^3} \end{aligned}$$

Hemos utilizado la ecuación dada para simplificar el numerador de la línea superior. ■

Observación Maple se puede utilizar para calcular derivadas implícitas siempre que se indique explícitamente la dependencia de las variables. Por ejemplo, se puede calcular el valor de y'' en la curva $xy + y^3 = 3$ en el punto $(2, 1)$ de la siguiente forma. Primero se diferencia la ecuación con respecto a x, y se escribe $y(x)$ para indicar a Maple que y depende de x

```
> deq := diff(x*y(x) + (y(x))^3=3, x) ;
```

$$deq := y(x) + x\left(\frac{\partial}{\partial x}\,y(x)\right) + 3y(x)^2\left(\frac{\partial}{\partial x}\,y(x)\right) = 0$$

Nótese que Maple utiliza el símbolo ∂ en vez de d al expresar la derivada en la notación de Leibniz. Esto es porque la expresión que está diferenciando puede depender de más de una variable: $(\partial/\partial x)y$ indica la derivada de y con respecto a la variable concreta x y no con respecto a las otras variables de las que y puede depender. Se denomina **derivada parcial**. En el Capítulo 12 hablaremos de las derivadas parciales. Por el momento consideremos ∂ como si fuera d.

A continuación se despeja y' en la ecuación resultante:

```
> yp := solve(deq, diff(y(x), x)) ;
```

$$yp := -\frac{y(x)}{x + 3y(x)^2}$$

Ahora se puede diferenciar yp con respecto a x para obtener y''.

```
> ypp := diff(yp, x) ;
```

$$ypp := -\frac{\frac{\partial}{\partial x} y(x)}{x + 3y(x)^2} + \frac{y(x)\left(1 + 6y(x)\left(\frac{\partial}{\partial x} y(x)\right)\right)}{(x + 3y(x)^2)^2}$$

Para obtener una expresión que dependa sólo de x e y hay que sustituir la expresión de la primera derivada en el resultado. Como en el resultado de la sustitución aparecerán fracciones compuestas, simplificaremos dicho resultado.

```
> ypp := simplify(subs(diff(y(x), x)=yp, ypp) ;
```

$$ypp := 2\,\frac{xy(x)}{(x + 3y(x)^2)^3}$$

Esto es y'' expresada en función de x e y. Ahora hay que sustituir las coordenadas $x = 2$, $y(x) = 1$ para obtener el valor de y'' en (2, 1). Hay que tener en cuenta que el orden de las sustituciones es importante. ***Primero*** hay que sustituir $y(x)$ por 1 y ***después*** sustituir x por 2 (si sustituyéramos primero x, habríamos sustituido $y(2)$ en vez de $y(x)$ por 1). El comando `subs` de Maple realiza las sustituciones en el orden en que se escriben.

```
> subs(y(x) = 1, x = 2, ypp) ;
```

$$\frac{4}{125}$$

Regla General de la Potencia

Hasta ahora sólo hemos demostrado la Regla General de la Potencia

$$\boxed{\frac{d}{dx} x^r = rx^{r-1}}$$

para exponentes enteros r y algunos exponentes racionales como $r = 1/2$. Utilizando diferenciación implícita se puede dar una demostración para cualquier exponente racional $r = m/n$, siendo m y n enteros y $n \neq 0$.

Si $y = x^{m/n}$, entonces $y^n = x^m$. Diferenciando implícitamente con respecto a x se obtiene

$$ny^{n-1}\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}, \qquad \text{por tanto,}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m}{n} x^{m-1} y^{1-n} = \frac{m}{n} x^{m-1} x^{(m/n)(1-n)} = \frac{m}{n} x^{m-1+(m/n)-m} = \frac{m}{n} x^{(m/n)-1}$$

Ejercicios 2.9

En los Ejercicios 1-8, calcule dy/dx en función de x e y.

1. $xy - x + 2y = 1$

2. $x^3 + y^3 = 1$

3. $x^2 + xy = y^3$

4. $x^3y + xy^5 = 2$

5. $x^2y^3 = 2x - y$

6. $x^2 + 4(y-1)^2 = 4$

7. $\dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{x^2}{y} + 1$

8. $x\sqrt{x+y} = 8 - xy$

En los Ejercicios 9-16, calcule la ecuación de las tangentes a las curvas en los puntos dados.

9. $2x^2 + 3y^2 = 5$ en $(1, 1)$

10. $x^2y^3 - x^3y^2 = 12$ en $(-1, 2)$

11. $\dfrac{x}{y} + \left(\dfrac{y}{x}\right)^3 = 2$ en $(-1, -1)$

12. $x + 2y + 1 = \dfrac{y^2}{x-1}$ en $(2, -1)$

13. $2x + y - \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,(xy) = \pi/2$ en $\left(\dfrac{\pi}{4}, 1\right)$

14. $\tan\,(xy)^2 = \dfrac{2xy}{\pi}$ en $\left(-\pi, \dfrac{1}{2}\right)$

15. $x\,\mathrm{sen}\,(xy - y^2) = x^2 - 1$ en $(1, 1)$

16. $\cos\left(\dfrac{\pi y}{x}\right) = \dfrac{x^2}{y} - \dfrac{17}{2}$ en $(3, 1)$

En los Ejercicios 17-20, calcule y'' en función de x e y.

17. $xy = x + y$

18. $x^2 + 4y^2 = 4$

***19.** $x^3 - y^2 + y^3 = x$

***20.** $x^3 - 3xy + y^3 = 1$

21. Para $x^2 + y^2 = a^2$ demuestre que $y'' = -\dfrac{a^2}{y^3}$.

22. Para $Ax^2 + By^2 = C$ demuestre que $y'' = -\dfrac{AC}{B^2y^3}$.

Utilice Maple u otro sistema de matemáticas por computador para calcular los valores que se piden en los Ejercicios 23-26.

23. Calcule la pendiente de $x + y^2 + y\,\mathrm{sen}\,x = y^3 + \pi$ en $(\pi, 1)$.

24. Calcule la pendiente de $\dfrac{x + \sqrt{y}}{y + \sqrt{x}} = \dfrac{3y - 9x}{x + y}$ en el punto $(1, 4)$.

25. Si $x + y^5 + 1 = y + x^4 + xy^2$, calcule d^2y/dx^2 en $(1, 1)$.

26. Si $x^3y + xy^3 = 11$, calcule d^3y/dx^3 en $(1, 2)$.

***27.** Demuestre que la elipse $x^2 + 2y^2 = 2$ y la hipérbola $2x^2 - 2y^2 = 1$ se cortan formando ángulos rectos.

***28.** Demuestre que la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ y la hipérbola $x^2/A^2 - y^2/B^2 = 1$ se cortan formando ángulos rectos si $A^2 \leqslant a^2$ y $a^2 - b^2 = A^2 + B^2$ (esto indica que la elipse y la hipérbola tienen los mismos focos).

***29.** Si $z = \tan\dfrac{x}{2}$, demuestre que

$$\frac{dx}{dz} = \frac{2}{1+z^2},\ \mathrm{sen}\,x = \frac{2z}{1+z^2},\ \text{y}\ \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$$

***30.** Utilice diferenciación implícita para calcular y' si $(x-y)/(x+y) = x/y + 1$. Demuestre ahora que, de hecho, la curva no tiene puntos, por lo que la derivada calculada no tiene sentido. Este otro ejemplo demuestra los peligros de calcular algo que no se conoce si existe o no.

2.10 Primitivas y problemas de valor inicial

Hasta el momento en este capítulo nos hemos ocupado de calcular la derivada f' de una función dada f. El problema inverso (dada la derivada f' calcular f) es también de interés e importancia. Este problema se estudia en el *cálculo integral* y en general es más difícil de resolver que el cálculo de derivadas. En esta sección consideraremos este problema de forma preliminar y volveremos sobre él en el Capítulo 5.

Primitivas

Comenzaremos por definir la primitiva de una función f como una función F cuya derivada es f. Es apropiado requerir que $F'(x) = f(x)$ en un *intervalo*.

DEFINICIÓN 7

La **primitiva** de una función f en un intervalo I es otra función F que cumple

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{para } x \text{ en } I$$

Ejemplo 1

(a) $F(x) = x$ es una primitiva de la función $f(x) = 1$ en cualquier intervalo porque $F'(x) = 1 = f(x)$ en todas partes.

(b) $G(x) = \frac{1}{2}x^2$ es una primitiva de la función $g(x) = x$ en cualquier intervalo porque $G'(x) = \frac{1}{2}(2x) = x = g(x)$ en todas partes.

(c) $R(x) = -\frac{1}{3}\cos(3x)$ es una primitiva de $r(x) = \text{sen}\,(3x)$ en cualquier intervalo porque $R'(x) = -\frac{1}{3}(-3\,\text{sen}\,(3x)) = \text{sen}\,(3x) = r(x)$ en todas partes.

(d) $F(x) = -1/x$ es una primitiva de $f(x) = 1/x^2$ en cualquier intervalo que no contenga a $x = 0$ porque $F'(x) = 1/x^2 = f(x)$ en todas partes excepto en $x = 0$.

Las primitivas no son únicas. De hecho, si C es una constante, entonces $F(x) = x + C$ es una primitiva de $f(x) = 1$ en cualquier intervalo. Siempre se puede añadir una constante a la primitiva F de una función f en un intervalo y obtener otra derivada de f. Lo que es más importante, *todas* las primitivas de f en un intervalo se pueden obtener sumando constantes a una primitiva concreta. Si F y G son primitivas de f en un determinado intervalo I, entonces

$$\frac{d}{dx}(G(x) - F(x)) = f(x) - f(x) = 0$$

en dicho intervalo I, de forma que $G(x) - F(x) = C$ (una constante) en I por el Teorema 13 de la Sección 2.6. Por tanto, $G(x) = F(x) + C$ en I.

Nótese que ni esta conclusión ni el Teorema 13 son válidos en un conjunto que no sea un intervalo. Por ejemplo, la derivada de

$$\text{sgn}\,x = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

es 0 para todo $x \neq 0$, pero $\text{sgn}\,x$ no es constante para todo $x \neq 0$, sino que tiene valores constantes *diferentes* en los dos intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$ que forman su dominio.

La integral indefinida

La *primitiva general* de una función $f(x)$ en un intervalo I es $F(x) + C$, siendo $F(x)$ una primitiva concreta de $f(x)$ en I y C una constante. Esta primitiva general se denomina integral indefinida de $f(x)$ en I, y se indica como $\int f(x)\,dx$.

DEFINICIÓN 8

La **integral indefinida** de $f(x)$ en un intervalo I es

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad \text{en } I$$

siempre que $F'(x) = f(x)$ para todo x de I.

El símbolo $\int$ se denomina **signo integral**. Su forma es de una «S» alargada por razones que se verán al estudiar la *integral definida* en el Capítulo 5. De la misma forma que dy/dx se considera un solo símbolo que representa la derivada de y con respecto a x, hay que considerar $\int f(x)\,dx$

como un solo símbolo (primitiva general) de f con respecto a x. La constante C se denomina **constante de integración**.

Ejemplo 2

(a) $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$ en cualquier intervalo.

(b) $\int (x^3 - 5x^2 + 7)\,dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 7x + C$ en cualquier intervalo.

(c) $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx = -\frac{1}{x} + 4\sqrt{x} + C$ en cualquier intervalo a la derecha de $x = 0$.

Las tres fórmulas anteriores se pueden comprobar diferenciando los miembros derechos. ■

El cálculo de primitivas es en general más difícil que el cálculo de derivadas, ya que muchas funciones no tienen primitivas expresables como combinación finita de funciones elementales. Sin embargo, ***toda fórmula de una derivada se puede expresar como una fórmula de una primitiva***. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x; \qquad \text{por tanto,} \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

En capítulos posteriores desarrollaremos varias técnicas para calcular primitivas. Hasta entonces, nos contentaremos con escribir algunas primitivas simples basadas en el conocimiento de las derivadas de funciones elementales:

(a) $\int dx = \int 1\,dx = x + C$	(b) $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$
(c) $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$	(d) $\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$
(e) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + C$	(f) $\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C\ (r \neq -1)$
(g) $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$	(h) $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$
(i) $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$	(j) $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$
(k) $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$	(l) $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$

Obsérvese que las fórmulas (a)-(e) son casos especiales de la fórmula (f). Por el momento, en (f), r debe ser un número racional, pero esta restricción desaparecerá posteriormente.

La regla para diferenciar sumas y múltiplos constantes de funciones se convierte en una regla similar en el caso de las primitivas, como se refleja en los apartados (b) y (c) del Ejemplo 2 anterior.

Las gráficas de las diferentes primitivas de la misma función en el mismo intervalo son versiones desplazadas verticalmente de la misma curva, como se muestra en la Figura 2.36. En general, sólo una de esas curvas pasará por un punto dado, por lo que se puede obtener una primitiva concreta de una función dada exigiendo que dicha primitiva tome un valor determinado en un punto concreto x.

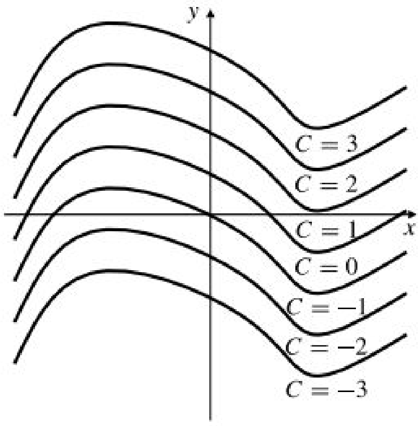

Figura 2.36 Gráficas de varias primitivas de la misma función.

Ejemplo 3 Calcule la función $f(x)$ cuya derivada es $f'(x) = 6x^2 - 1$ para todo real x y tal que $f(2) = 10$.

Solución Como $f'(x) = 6x^2 - 1$, tenemos que

$$f(x) = \int (6x^2 - 1)\,dx = 2x^3 - x + C$$

para alguna constante C. Como $f(2) = 10$, entonces

$$10 = f(2) = 16 - 2 + C$$

Por tanto, $C = -4$ y $f(x) = 2x^3 - x - 4$ (se puede verificar por cálculo directo que $f'(x) = 6x^2 - 1$ y $f(2) = 10$).

Ejemplo 4 Calcule la función $g(t)$ cuya derivada es $\dfrac{t+5}{t^{3/2}}$ y cuya gráfica pasa por el punto (4, 1).

Solución Tenemos que

$$\begin{aligned} g(t) &= \int \frac{t+5}{t^{3/2}}\,dt \\ &= \int (t^{-1/2} + 5t^{-3/2})\,dt \\ &= 2t^{1/2} - 10t^{-1/2} + C \end{aligned}$$

Como la gráfica de $y = g(t)$ debe pasar por el punto (4, 1), se requiere que

$$1 = g(4) = 4 - 5 + C$$

Por tanto, $C = 2$ y

$$g(t) = 2t^{1/2} - 10t^{-1/2} + 2 \qquad \text{para } t > 0$$

Ecuaciones diferenciales y problemas de valor inicial

Una **ecuación diferencial** (ED) es una ecuación en la que aparecen una o más derivadas de una función desconocida. Cualquier función cuyas derivadas cumplan la ecuación diferencial *en un intervalo* se denomina **solución** de la ecuación diferencial en dicho intervalo. Por ejemplo, la función $y = x^3 - x$ es una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 1$$

en toda la recta real. Esta ecuación diferencial tiene más de una solución. De hecho, $y = x^3 - x + C$ es una solución para cualquier valor de la constante C.

Ejemplo 5 Demuestre que para cualquier valor de las constantes A y B, la función $y = Ax^3 + B/x$ es una solución de la ecuación diferencial $x^2y'' - xy' - 3y = 0$ en cualquier intervalo que no contenga el 0.

Solución Si $y = Ax^3 + B/x$, entonces para todo $x \neq 0$ tenemos que

$$y' = 3Ax^2 - B/x^2 \quad \text{y} \quad y'' = 6Ax + 2B/x^3$$

Y, por tanto,

$$x^2y'' - xy' - 3y = 6Ax^3 + \frac{2B}{x} - 3Ax^3 + \frac{B}{x} - 3Ax^3 - \frac{3B}{x} = 0$$

siempre que $x \neq 0$. Esto es lo que queríamos demostrar. ■

El **orden** de una ecuación diferencial es el de la derivada de mayor orden que aparece en dicha ecuación. La ED del Ejemplo 5 es una ED de *segundo orden* ya que en ella interviene y'', y no hay derivadas de y de orden superior. Nótese que en la solución que se ha verificado en el Ejemplo 5 intervienen dos constantes arbitrarias, A y B. Esta solución se denomina **solución general** de la ecuación, ya que se puede demostrar que cualquier solución es de esta forma, dando valores a las constantes A y B. Se obtiene una **solución particular** de la ecuación asignando valores concretos a esas constantes. En la solución general de una ecuación diferencial de orden n aparecen n constantes arbitrarias.

Un **problema de valor inicial** (PVI) está formado por:

(a) una ecuación diferencial (para resolverla encontrando una función desconocida) y
(b) valores de la solución y de un número suficiente de sus derivadas en un punto determinado (el punto inicial) para determinar los valores de todas las constantes arbitrarias en la solución general de la ED y obtener, así, una solución particular.

Observación Es habitual utilizar el mismo símbolo, por ejemplo y, para indicar la variable independiente y la función solución de una ED o de un PVI. Es decir, la función solución se denominará $y = y(x)$, en vez de $y = f(x)$.

Observación La solución de un PVI es válida en el máximo intervalo que contenga a los puntos iniciales donde se define la función solución.

Ejemplo 6 Utilice el resultado del Ejemplo 5 para resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x^2y'' - xy' - 3y = 0 \quad (x > 0) \\ y(1) = 2 \\ y'(1) = -6 \end{cases}$$

Solución Como se demuestra en el Ejemplo 5, la ED $x^2y'' - xy' - 3y = 0$ tiene como solución $y = Ax^3 + B/x$, cuya derivada es $y' = 3Ax^2 - B/x^2$. En $x = 1$ debe cumplirse que $y = 2$ e $y' = -6$, por lo que

$$\begin{aligned} A + B &= 2 \\ 3A - B &= -6 \end{aligned}$$

Despejando A y B en estas dos ecuaciones lineales, se obtiene $A = -1$ y $B = 3$. Por tanto, $y = -x^3 + 3/x$ para $x > 0$ es la solución del PVI. ■

Uno de los tipos más simples de ecuación diferencial es

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

que se puede resolver obteniendo y en función de x. Evidentemente la solución es

$$y = \int f(x)\,dx$$

La posibilidad de obtener la función desconocida $y(x)$ depende de la posibilidad de obtener una primitiva de f.

Ejemplo 7 Resuelva el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = \dfrac{3 + 2x^2}{x^2} \\ y(-2) = 1 \end{cases}$$

¿Dónde es válida la solución?

Solución

$$y = \int \left(\frac{3}{x^2} + 2\right) dx = -\frac{3}{x} + 2x + C$$

$$1 = y(-2) = \frac{3}{2} - 4 + C$$

Por tanto, $C = \frac{7}{2}$ y

$$y = -\frac{3}{x} + 2x + \frac{7}{2}$$

Aunque la función solución parece estar definida para todo valor de x excepto el 0, el PVI sólo tiene solución para $x < 0$. Esto se debe a que $(-\infty, 0)$ es el mayor intervalo que contiene al punto inicial -2 pero no $x = 0$, donde la y está indefinida.

Ejemplo 8 Resuelva el PVI de segundo orden

$$\begin{cases} y'' = \operatorname{sen} x \\ y(\pi) = 2 \\ y'(\pi) = -1 \end{cases}$$

Solución Como $(y')' = y'' = \operatorname{sen} x$, tenemos que

$$y'(x) = \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C_1$$

La condición inicial para y' permite obtener

$$-1 = y'(\pi) = -\cos \pi + C_1 = 1 + C_1$$

de forma que $C_1 = -2$ y $y'(x) = -(\cos x + 2)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} y(x) &= -\int (\cos x + 2)\,dx \\ &= -\operatorname{sen} x - 2x + C_2 \end{aligned}$$

Aplicando la condición inicial sobre y:

$$2 = y(\pi) = -\operatorname{sen} \pi - 2\pi + C_2 = -2\pi + C_2$$

con lo que $C_2 = 2 + 2\pi$. La solución del PVI es

$$y = 2 + 2\pi - \operatorname{sen} x - 2x$$

y es válida para todo x.

Las ecuaciones diferenciales y los problemas de valor inicial son de gran importancia en las aplicaciones del cálculo, especialmente para expresar de forma matemática ciertas leyes de la naturaleza en las que intervienen tasas de cambio de cantidades. Una gran parte del desarrollo matemático de los doscientos últimos años se ha dedicado a este estudio. En general, esto se estudia en cursos separados dedicados a las ecuaciones diferenciales, pero en este texto los presentaremos de vez en cuando, cuando resulte apropiado. A lo largo del libro, excepto en las secciones dedicadas explícitamente a las ecuaciones diferenciales, emplearemos el símbolo ◈ para marcar los ejercicios sobre ecuaciones diferenciales y problemas de valor inicial.

Ejercicios 2.10

En los Ejercicios 1-14, calcule las integrales indefinidas dadas.

1. $\int 5\,dx$ **2.** $\int x^2\,dx$

3. $\int \sqrt{x}\,dx$ **4.** $\int x^{12}\,dx$

5. $\int x^3\,dx$ **6.** $\int (x + \cos x)\,dx$

7. $\int \tan x \cos x\,dx$ **8.** $\int \frac{1 + \cos^3 x}{\cos^2 x}\,dx$

9. $\int (a^2 - x^2)\,dx$ **10.** $\int (A + Bx + Cx^2)\,dx$

11. $\int (2x^{1/2} + 3x^{1/3})\,dx$ **12.** $\int \frac{6(x-1)}{x^{4/3}}\,dx$

13. $\int \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - 1\right)dx$

14. $105 \int (1 + t^2 + t^4 + t^6)\,dt$

En los Ejercicios 15-22, calcule las integrales indefinidas dadas. Esto puede requerir intuir la forma de la primitiva y comprobarlo después por diferenciación. Por ejemplo, podemos sospechar que $\int \cos(5x - 2)\,dx = k \operatorname{sen}(5x - 2) + C$ para algún valor de k. Al diferenciar, se obtiene que $k = 1/5$.

15. $\int \cos(2x)\,dx$ **16.** $\int \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)dx$

***17.** $\int \frac{dx}{(1+x)^2}$ ***18.** $\int \sec(1-x)\tan(1-x)\,dx$

***19.** $\int \sqrt{2x+3}\,dx$ ***20.** $\int \frac{4}{\sqrt{x+1}}\,dx$

21. $\int 2x \operatorname{sen}(x^2)\,dx$ ***22.** $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

Utilice igualdades trigonométricas como $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$, $\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ y $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$ como ayuda para calcular las integrales indefinidas de los Ejercicios 23-26.

***23.** $\int \tan^2 x\,dx$ ***24.** $\int \operatorname{sen} x \cos x\,dx$

***25.** $\int \cos^2 x\,dx$ ***26.** $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx$

Ecuaciones diferenciales

En los Ejercicios 27-42, calcule la solución $y = y(x)$ de los problemas de valor inicial dados. ¿En qué intervalo es válida la solución? (Nótese que los ejercicios referidos a ecuaciones diferenciales están precedidos por el símbolo ◈).

◈27. $\begin{cases} y' = x - 2 \\ y(0) = 3 \end{cases}$ **◈28.** $\begin{cases} y' = x^{-2} - x^{-3} \\ y(-1) = 0 \end{cases}$

◈29. $\begin{cases} y' = 3\sqrt{x} \\ y(4) = 1 \end{cases}$ **◈30.** $\begin{cases} y' = x^{1/3} \\ y(0) = 5 \end{cases}$

◈31. $\begin{cases} y' = Ax^2 + Bx + C \\ y(1) = 1 \end{cases}$ **◈32.** $\begin{cases} y' = x^{-9/7} \\ y(1) = -4 \end{cases}$

◈33. $\begin{cases} y' = \cos x \\ y(\pi/6) = 2 \end{cases}$ **◈34.** $\begin{cases} y' = \operatorname{sen}(2x) \\ y(\pi/2) = 1 \end{cases}$

◈35. $\begin{cases} y' = \sec^2 x \\ y(0) = 1 \end{cases}$ **◈36.** $\begin{cases} y' = \sec^2 x \\ y(\pi) = 1 \end{cases}$

◆**37.** $\begin{cases} y'' = 2 \\ y'(0) = 5 \\ y(0) = -3 \end{cases}$

◆**38.** $\begin{cases} y'' = x^{-4} \\ y'(1) = 2 \\ y(1) = 1 \end{cases}$

◆**39.** $\begin{cases} y'' = x^3 - 1 \\ y'(0) = 5 \\ y(0) = 8 \end{cases}$

◆**40.** $\begin{cases} y'' = 5x^2 - 3x^{-1/2} \\ y'(1) = 2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$

◆**41.** $\begin{cases} y'' = \cos x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

◆**42.** $\begin{cases} y'' = x + \operatorname{sen} x \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

◆**43.** Demuestre que para cualquier valor de las constantes A y B la función $y = y(x) = Ax + B/x$ cumple la *ecuación diferencial de segundo orden* $x^2y'' + xy' - y = 0$ para $x \neq 0$. Calcule una función y que sea solución del problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x^2y'' + xy' - y = 0 \qquad (x > 0) \\ y(1) = 2 \\ y'(1) = 4 \end{cases}$$

◆**44.** Demuestre que para cualquier valor de las constantes A y B la función $y = Ax^{r_1} + Bx^{r_2}$ es una solución, para $x > 0$, de la ecuación diferencial $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$, siendo r_1 y r_2 dos raíces racionales distintas de la ecuación cuadrática $ar(r-1) + br + c = 0$.

Utilice el resultado del Ejercicio 44 para resolver los problemas de valor inicial de los Ejercicios 45-46 en el intervalo $x > 0$.

◆**45.** $\begin{cases} 4x^2y'' + 4xy' - y = 0 \\ y(4) = 2 \\ y'(4) = -2 \end{cases}$

◆**46.** $\begin{cases} x^2y'' - 6y = 0 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$

2.11 Velocidad y aceleración

Velocidad

Supongamos un objeto que se mueve por una línea recta (el eje x) de forma que su posición x es una función del tiempo t, $x = x(t)$ (estamos utilizando x para indicar tanto la variable dependiente como la función). Supongamos que x se mide en metros y t en segundos. La **velocidad media** del objeto en el intervalo temporal $[t, t+h]$ es el cambio en la posición dividido por el cambio en el tiempo, es decir, el cociente de Newton

$$v_{\text{media}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \text{ m/s}$$

La **velocidad** $v(t)$ del objeto en el instante t es el límite de su velocidad media cuando $h \to 0$. Por tanto, es la tasa de cambio (la derivada) de la posición con respecto al tiempo.

$$\text{Velocidad:} \quad v(t) = \frac{dx}{dt} = x'(t)$$

Además de decirnos lo rápido que se mueve un objeto, la velocidad también nos indica en qué dirección se mueve. Si $v(t) > 0$, entonces x aumenta, por lo que el objeto se mueve hacia la derecha. Si $v(t) < 0$, x disminuye, por lo que el objeto se mueve hacia la izquierda. En los puntos críticos de x, es decir, los instantes t en los que $v(t) = 0$, el objeto está en reposo instantáneo: en ese instante no se mueve en ninguna dirección.

Hay que distinguir entre el vector velocidad (que incluye información de la dirección de movimiento) y el módulo de la velocidad, que sólo da cuenta de la tasa y no de la dirección. La velocidad es el módulo del vector velocidad:

$$\text{Velocidad:} \quad s(t) = |v(t)| = \left|\frac{dx}{dt}\right|$$

Un velocímetro nos proporciona la velocidad a la que se mueve un vehículo, pero no su dirección. El velocímetro no muestra valores negativos si el vehículo se da la vuelta y comienza a moverse en dirección contraria.

Ejemplo 1

(a) Determine la velocidad $v(t)$ en el instante t de un objeto que se mueve por el eje x de forma que su posición en t se expresa como

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

siendo v_0 y a constantes.

(b) Dibuje la gráfica de la función $v(t)$ y demuestre que el área encerrada bajo dicha gráfica y por encima del eje t, en el intervalo $[t_1, t_2]$, es igual a la distancia recorrida por el objeto en dicho intervalo.

Solución La velocidad se expresa como

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = v_0 + at$$

Esta gráfica es una recta con pendiente a y ordenada en el origen v_0. El área encerrada bajo la gráfica (zona sombreada en la Figura 2.37) es la suma de las áreas de un rectángulo y un triángulo. Ambos tienen como base $t_2 - t_1$. El rectángulo tiene altura $v(t_1) = v_0 + at_1$, y el triángulo tiene altura $a(t_2 - t_1)$ (¿por qué?). Por tanto, el área sombreada es igual a

$$\begin{aligned}
\text{Área} &= (t_2 - t_1)(v_0 + at_1) + \frac{1}{2}(t_2 - t_1)[a(t_2 - t_1)] \\
&= (t_2 - t_1)\left[v_0 + at_1 + \frac{a}{2}(t_2 - t_1)\right] \\
&= (t_2 - t_1)\left[v_0 + \frac{a}{2}(t_2 + t_1)\right] \\
&= v_0(t_2 - t_1) + \frac{a}{2}(t_2^2 - t_1^2) \\
&= x(t_2) - x(t_1)
\end{aligned}$$

que corresponde a la distancia recorrida por el objeto entre los instantes t_1 y t_2.

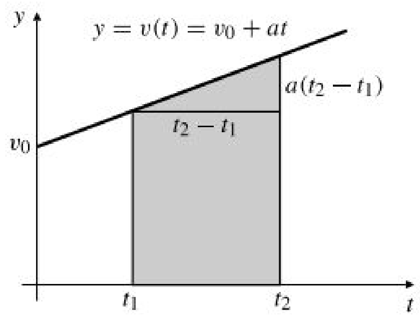

Figura 2.37 El área sombreada es igual a la distancia recorrida entre t_1 y t_2.

Observación En el Ejemplo 1 hemos diferenciado la posición x para obtener la velocidad v y después hemos utilizado el área encerrada bajo la gráfica de la velocidad para obtener información de la posición. Parece que existe una conexión entre calcular áreas y obtener las funciones que tienen derivadas determinadas (es decir, obtener primitivas). Esta conexión, que examinaremos en el Capítulo 5, es quizá la idea más importante del cálculo.

Aceleración

La derivada de la velocidad tiene también una útil interpretación. La tasa de cambio de la velocidad con respecto al tiempo es la **aceleración** del objeto móvil. Se mide en unidades de distancia/tiempo^2. El valor de la aceleración en el instante t es

$$\boxed{\text{Aceleración:} \quad a(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}}$$

La aceleración es la *segunda derivada* de la posición. Si $a(t) > 0$, la velocidad aumenta. Esto no quiere decir necesariamente que el módulo de la velocidad esté aumentando. Si el objeto se mueve hacia la izquierda, entonces $v(t) < 0$, y al acelerar hacia la derecha ($a(t) > 0$), realmente se está moviendo más lentamente. El módulo de la velocidad de un objeto crece sólo cuando la velocidad y la aceleración tienen el mismo signo.

Tabla 2. Velocidad, aceleración y módulo de la velocidad

Si la velocidad es	y la aceleración es	el objeto está	y el módulo de su velocidad está
positiva	positiva	moviéndose a la derecha	aumentando
positiva	negativa	moviéndose a la derecha	disminuyendo
negativa	positiva	moviéndose a la izquierda	disminuyendo
negativa	negativa	moviéndose a la izquierda	aumentando

Si $a(t_0) = 0$, entonces la velocidad y su módulo son estacionarias en t_0. Si $a(t) = 0$ durante un intervalo de tiempo, entonces la velocidad no varía y, por tanto, es constante en ese intervalo.

Ejemplo 2 Un punto P se mueve por el eje x de forma que su posición en el instante t se expresa como

$$x = 2t^3 - 15t^2 + 24t \text{ m}$$

(a) Calcule la velocidad y la aceleración de P en el instante t.
(b) ¿En qué dirección y con qué velocidad se mueve P en $t = 2$ s? En ese instante, ¿su velocidad está aumentando o disminuyendo?
(c) ¿Cuándo está P en reposo instantáneo? ¿Cuándo no cambia instantáneamente el módulo de su velocidad?
(d) ¿Cuándo se mueve P a la izquierda? ¿Y a la derecha?
(e) ¿Cuándo está P acelerando? ¿Y desacelerando?

Solución

(a) La velocidad y la aceleración de P en el instante t son

$$v = \frac{dx}{dt} = 6t^2 - 30t + 24 = 6(t-1)(t-4) \text{ m/s y}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 12t - 30 = 6(2t-5) \text{ m/s}^2$$

(b) En $t = 2$, tenemos $v = -12$ y $a = -6$. Por tanto, P se mueve hacia la izquierda con una velocidad de 12 m/s, y como la velocidad y la aceleración son negativas, el módulo de su velocidad aumenta.
(c) P está en reposo cuando $v = 0$, es decir, cuando $t = 1$ s o $t = 4$ s. Su velocidad no cambia cuando $a = 0$, es decir, en $t = 5/2$ s.
(d) La velocidad es continua para todo t, por lo que, de acuerdo con el Teorema del Valor Medio, su signo es constante en los intervalos entre los puntos en los que vale 0. Examinando los valores de $v(t)$ en $t = 0$, 2 y 5 (o analizando los signos de los factores $(t-1)$ y $(t-4)$ en la expresión de $v(t)$), se concluye que $v(t) < 0$ (y P se mueve a la izquierda) en el intervalo $(1, 4)$, y $v(t) > 0$ (y P se mueve a la derecha) en los intervalos $(-\infty, 1)$ y $(4, \infty)$.
(e) La aceleración a es negativa para $t < 5/2$ y positiva para $t > 5/2$. La Tabla 3 combina este información con la información de v para mostrar cuándo P está acelerando y decelerando.

Tabla 3. Datos del Ejemplo 2

Intervalo	$v(t)$ es	$a(t)$ es	P está
$(-\infty, 1)$	positiva	negativa	decelerando
$(1, 5/2$	negativa	negativa	acelerando
$(5/2, 4)$	negativa	positiva	decelerando
$(4, \infty)$	positiva	positiva	acelerando

La Figura 2.38 muestra el movimiento de P.

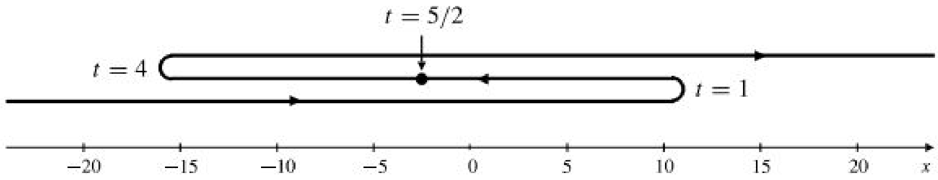

Figura 2.38 Movimiento de P en el Ejemplo 2.

Ejemplo 3 Un objeto se arroja hacia arriba desde el tejado de un edificio de 10 m. Se eleva y posteriormente cae. La expresión de su altura desde el suelo t segundos después de ser arrojado es

$$y = -4.9t^2 + 8t + 10 \text{ m}$$

hasta que cae al suelo. ¿Qué altura máxima sobre el suelo alcanza el objeto? ¿Con qué velocidad golpea el suelo el objeto?

Solución *Véase* la Figura 2.39. La velocidad vertical en el instante t durante el vuelo es

$$v(t) = -2(4.9)t + 8 = -9.8t + 8 \text{ m/s}$$

El objeto se eleva cuando $v > 0$, es decir, cuando $0 < t < 8/9.8$, y cae cuando $t > 8/9.8$. Por tanto, el objeto alcanza su máxima altura en el instante $t = 8/9.8 \approx 0.8163$ s, y su altura máxima es

$$y_{\text{máx}} = -4.9\left(\frac{8}{9.8}\right)^2 + 8\left(\frac{8}{9.8}\right) + 10 \approx 13.27 \text{ m}$$

El instante t en el que el objeto golpea el suelo es la raíz positiva de la ecuación de segundo grado que se obtiene al hacer $y = 0$.

$$-4.9t^2 + 8t + 10 = 0$$

es decir,

$$t = \frac{-8 - \sqrt{64 + 196}}{-9.8} \approx 2.462 \text{ s}$$

La velocidad en ese instante es $v = -(9.8)(2.462) + 8 \approx -16.12$. Por tanto, el objeto golpea el suelo con una velocidad aproximada de 16.12 m/s.

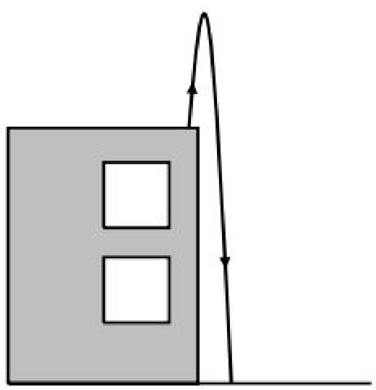

Figura 2.39

Caída libre

De acuerdo con la Segunda Ley del Movimiento de Newton, una roca de masa m sobre la que actúa una fuerza F experimentará una aceleración a proporcional a F y en su misma dirección. Utilizando las unidades apropiadas de fuerza, $F = ma$. Si la roca está en el suelo, sobre ella actúan dos fuerzas: la fuerza de la gravedad hacia abajo, y la reacción del suelo hacia arriba. Las dos fuerzas se equilibran, por lo que la aceleración resultante es nula. Por otra parte, si la roca está en el aire y no se apoya en ningún sitio, la fuerza gravitacional no resulta equilibrada, y la roca experimentará una aceleración hacia abajo. Es decir, caerá.

De acuerdo con la Ley de la Gravitación Universal de Newton, la fuerza con que la Tierra atrae a la roca es proporcional a la masa m de la roca e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r al centro de la Tierra: $F = km/r^2$. Si el cambio relativo $\Delta r/r$ es pequeño, como sucede cuando la roca está cerca de la superficie de la Tierra, entonces $F = mg$, siendo $g = k/r^2$ aproximadamente constante. Se deduce entonces que $ma = F = mg$ y la roca experimenta una aceleración ***constante*** g hacia abajo. Como g no depende de m, todos los objetos experimentan la misma aceleración cuando caen cerca de la superficie de la Tierra, suponiendo que se ignora la resistencia del aire y otras fuerzas que pudieran estar actuando. Las leyes de Newton implican, por tanto, que si la altura a la que está un objeto en el instante t es $y(t)$, entonces

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} = -g}$$

El signo negativo es necesario porque la aceleración gravitacional es hacia abajo, en dirección opuesta a la que crece la y. Los experimentos físicos permiten medir los siguientes valores aproximados de g en la superficie de la Tierra:

$$\boxed{g = 32 \text{ pies/s}^2 \quad \text{o} \quad g = 9.8 \text{ m/s}^2}$$

Ejemplo 4 Una roca en caída libre cerca de la superficie de la Tierra está sujeta a una aceleración constante hacia abajo de valor g, si se desprecia el efecto de la resistencia del aire. Si la altura y la velocidad de la roca son y_0 y v_0 en el instante $t = 0$, calcule la altura $y(t)$ de la roca en cualquier instante posterior hasta que llegue el suelo.

Solución En este ejemplo se pide la solución $y(t)$ al problema de valor inicial de segundo orden:

$$\begin{cases} y''(t) = -g \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = v_0 \end{cases}$$

Tenemos que

$$y'(t) = -\int g\,dt = -gt + C_1$$

$$v_0 = y'(0) = 0 + C_1$$

Por tanto, $C_1 = v_0$.

$$y'(t) = -gt + v_0$$

$$y(t) = \int (-gt + v_0)\,dt = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + C_2$$

$$y_0 = y(0) = 0 + 0 + C_2$$

Con lo que $C_2 = y_0$. Finalmente, por tanto,

$$\boxed{y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0}$$

■

Ejemplo 5 Una pelota se arroja con una velocidad inicial de 20 pies/s desde la cima de un acantilado, y golpea el suelo en el fondo tras 5 s. ¿Qué altura tiene el acantilado?

Solución Aplicaremos el resultado del Ejemplo 4. En este caso $g = 32$ pies/s^2, $v_0 = -20$ pies/s e y_0 es la altura desconocida del acantilado. La altura de la pelota t segundos tras arrojarla es

$$y(t) = -16t^2 - 20t + y_0 \text{ pies}$$

En $t = 5$, la pelota llega al suelo, por lo que $y(5) = 0$:

$$0 = -16(25) - 20(5) + y_0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = 500$$

Por lo que la altura del acantilado es de 500 pies.

Ejemplo 6 **(Distancia de frenado)** Un coche viaja a 72 km/h. En un cierto instante, se aplican los frenos y se produce una deceleración constante de 0.8 m/s^2. ¿Qué distancia recorrerá el coche hasta detenerse?

Solución Sea $s(t)$ la distancia que recorre el coche t segundos después de aplicar los frenos. Entonces $s''(t) = -0.8$ (m/s^2), por lo que la velocidad en el instante t es

$$s'(t) = \int -0.8\,dt = -0.8t + C_1 \text{ m/s}$$

Como $s'(0) = 72$ km/h $= 72 \times 1000/3600 = 20$ m/s, tenemos que $C_1 = 20$. Por tanto,

$$s'(t) = 20 - 0.8t$$

y

$$s(t) = \int (20 - 0.8t)\,dt = 20t - 0.4t^2 + C_2$$

Como $s(0) = 0$, tenemos que $C_2 = 0$ y $s(t) = 20t - 0.4t^2$. Cuando el coche se detenga, su velocidad será 0. Por tanto, el instante de parada es la solución t a la ecuación

$$0 = s'(t) = 20 - 0.8t$$

Es decir, $t = 25$ s. La distancia recorrida durante la deceleración es $s(25) = 250$ m.

Ejercicios 2.11

En los Ejercicios 1-4, un punto se mueve por el eje x de forma que su posición en el instante t está especificada por las funciones dadas. En cada caso, determine lo siguiente:

(a) Los intervalos de tiempo en los que el punto se mueve a la derecha.
(b) Los intervalos de tiempo en los que el punto se mueve a la izquierda.
(c) Los intervalos de tiempo en los que el punto está acelerando hacia la derecha.
(d) Los intervalos de tiempo en los que el punto está acelerando hacia la izquierda.
(e) Los intervalos de tiempo en los que el punto está acelerando.
(f) Los intervalos de tiempo en los que el punto está decelerando.
(g) La aceleración en los instantes en los que la velocidad es cero.
(h) La velocidad media en el intervalo temporal [0, 4].

1. $x = t^2 - 4t + 3$

2. $x = 4 + 5t - t^2$

3. $x = t^3 - 4t + 1$

4. $x = \dfrac{t}{t^2 + 1}$

5. Una pelota se arroja hacia arriba desde el suelo con una velocidad inicial de 9.8 m/s, de forma que su altura en metros tras t segundos se expresa como $y = 9.8t - 4.9t^2$. ¿Cuál es la aceleración de la pelota en cualquier instante t? ¿A qué altura llega la pelota? ¿Con qué velocidad se mueve cuando llega al suelo?

6. Una pelota se tira desde lo alto de una torre de 100 m con una velocidad inicial de 2 m/s. Su altura sobre el suelo t segundos después es $y = 100 - 2t - 4.9t^2$. ¿Cuánto tarda en llegar al suelo? ¿Cuál es la velocidad media durante la caída? ¿En qué instante su velocidad es igual a su velocidad media?

7. **(Distancia de despegue)** La distancia que recorre una aeronave antes de despegar se expresa como $D = t^2$, donde D se mide en metros desde el punto inicial, y t se mide en segundos desde que se sueltan los frenos. Si el avión despega cuando su velocidad llega a 200 km/h ¿Cuánto tardará en despegar, y qué distancia habrá recorrido en el momento del despegue?

8. **(Proyectiles en Marte)** Un proyectil que se dispara hacia arriba en la superficie de la Tierra llega al suelo al cabo de 10 s. ¿Cuánto tardará en caer al suelo si se dispara en Marte con la misma velocidad inicial? $g_{\text{Marte}} = 3{,}72$ m/s^2.

9. Una pelota se arroja hacia arriba con velocidad inicial de v_0 m/s y alcanza una altura máxima de h m. ¿Qué altura alcanzará si su velocidad inicial es de $2v_0$? ¿Con qué velocidad debe lanzarse hacia arriba para que alcance una altura máxima de $2h$ m?

10. ¿Con qué velocidad debería lanzarse hacia arriba la pelota del Ejercicio 9 en Marte para que alcanzara una altura máxima de $3h$ m?

11. Una roca cae desde la cima de un acantilado y llega al suelo en su base con una velocidad de 160 pies/s. ¿Qué altura tiene el acantilado?

12. Una piedra se tira hacia abajo desde la cima de un acantilado con una velocidad inicial de 32 pies/s y llega al suelo en la base del acantilado con una velocidad de 160 pies/s. ¿Qué altura tiene el acantilado?

13. **(Distancia recorrida en frenada)** Cuando se aplican los frenos al máximo, un tren de mercancías puede decelerar de forma constante 1,6 m/s^2. ¿Cuánto viajará el tren frenando hasta detenerse completamente si su velocidad inicial era de 60 km/h?

***14.** Demuestre que si la posición x de un punto en movimiento se expresa mediante la función cuadrática de t, $x = At^2 + Bt + C$, entonces la velocidad media en cualquier intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ es igual a la velocidad instantánea en el punto medio de dicho intervalo.

***15.** **(Movimiento por tramos)** La posición de un objeto que se mueve por el eje x en el instante t se expresa como

$$s = \begin{cases} t^2 & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2 \\ 4t - 4 & \text{si} \quad 2 < t < 8 \\ -68 + 20t - t^2 & \text{si} \quad 8 \leqslant t \leqslant 10 \end{cases}$$

Determine la velocidad y la aceleración en cualquier instante t. ¿Es continua la velocidad? ¿Es continua la aceleración? ¿Cuál es la velocidad máxima y cuándo se alcanza?

(Cohete con combustible limitado) La Figura 2.40 muestra la velocidad v en pies por segundo de un pequeño cohete que se lanza desde lo alto de una torre en el instante $t = 0$ (t en segundos), acelera con aceleración ascendente constante hasta que se acaba el combustible y después cae a tierra a los pies de la torre. El vuelo completo dura 14 s. Los Ejercicios 16-19 se refieren a este cohete.

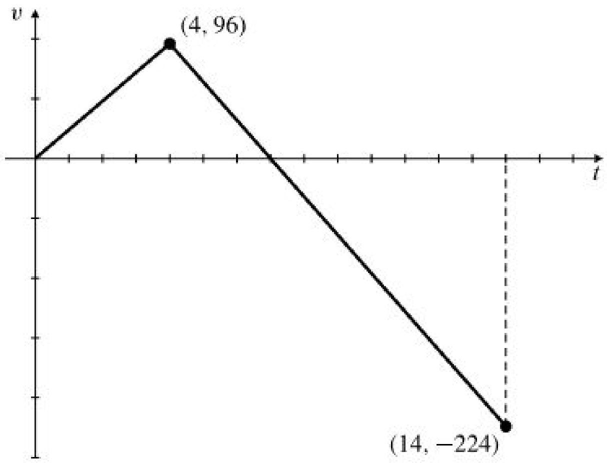

Figura 2.40

16. ¿Cuál era la aceleración del cohete hasta que se gastó el combustible?

17. ¿Cuánto tiempo ha estado ascendiendo el cohete?

***18.** ¿Cuál es la máxima altura sobre el suelo alcanzada por el cohete?

***19.** ¿Qué altura tenía la torre desde la que se lanzó el cohete?

20. Realice de nuevo el Ejemplo 6 con una deceleración constante $s''(t) = -t$ m/s^2.

Repaso del capítulo

Ideas clave

- **¿Qué significan las siguientes frases?**
  - ◇ La recta L es tangente a la curva C en el punto P.
  - ◇ El cociente de Newton de $f(x)$ en $x = a$.
  - ◇ La derivada $f'(x)$ de la función $f(x)$.
  - ◇ f es diferenciable en $x = a$.
  - ◇ La pendiente de la gráfica $y = f(x)$ en $x = a$.
  - ◇ f es creciente (o decreciente) en el intervalo I.

- ◇ f es no creciente (o no decreciente) en el intervalo I.
- ◇ La velocidad (tasa) media de cambio de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$.
- ◇ La velocidad (tasa) de cambio de $f(x)$ en $x = a$.
- ◇ c es un punto crítico de $f(x)$.
- ◇ La segunda derivada de $f(x)$ en $x = a$.
- ◇ Una primitiva de f en un intervalo I.
- ◇ La integral indefinida de f en el intervalo I.
- ◇ Ecuación diferencial.
- ◇ Problema de valor inicial.
- ◇ Velocidad.
- ◇ Módulo de la velocidad.
- ◇ Aceleración.

- **Enuncie las siguientes reglas de diferenciación:**
  - ◇ Regla de diferenciación de la suma de funciones.
  - ◇ Regla de diferenciación del producto de una función por una constante.
  - ◇ Regla del Producto.
  - ◇ Regla de la Inversa.
  - ◇ Regla del Cociente.
  - ◇ Regla de la Cadena.
- **Enuncie el Teorema del Valor Medio.**
- **Enuncie el Teorema del Valor Medio Generalizado.**
- **Enuncie las derivadas de las siguientes funciones:**

◇ x	◇ x^2	◇ $1/x$	◇ $\sqrt{x}$
◇ x^n	◇ $\lvert x\rvert$	◇ $\operatorname{sen} x$	◇ $\cos x$
◇ $\tan x$	◇ $\cot x$	◇ $\sec x$	◇ $\csc x$

- **¿Qué es una demostración por inducción matemática?**

Ejercicios de repaso

Utilice la definición de derivada para calcular las derivadas de los Ejercicios 1-4.

1. $\dfrac{dy}{dx}$ si $y = (3x + 1)^2$

2. $\dfrac{d}{dx}\sqrt{1 - x^2}$

3. $f'(2)$ si $f(x) = \dfrac{4}{x^2}$

4. $g'(9)$ si $g(t) = \dfrac{t - 5}{1 + \sqrt{t}}$

5. Calcule la tangente a $y = \cos(\pi x)$ en $x = 1/6$.

6. Calcule la tangente a $y = \tan(x/4)$ en $x = \pi$.

Calcule las derivadas de las funciones de los Ejercicios 7-12.

7. $\dfrac{1}{x - \operatorname{sen} x}$

8. $\dfrac{1 + x + x^2 + x^3}{x^4}$

9. $(4 - x^{2/5})^{-5/2}$

10. $\sqrt{2 + \cos^2 x}$

11. $\tan\theta - \theta\sec^2\theta$

12. $\dfrac{\sqrt{1 + t^2} - 1}{\sqrt{1 + t^2} + 1}$

Calcule los límites de los Ejercicios 13-16 interpretándolos como derivadas.

13. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x + h)^{20} - x^{20}}{h}$

14. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x + 1} - 3}{x - 2}$

15. $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{\cos(2x) - (1/2)}{x - \pi/6}$

16. $\lim\limits_{x\to -a}\dfrac{(1/x^2) - (1/a^2)}{x + a}$

En los Ejercicios 17-24, exprese las derivadas de las funciones dadas en función de las derivadas f' y g' de las funciones diferenciables f y g.

17. $f(3 - x^2)$

18. $[f(\sqrt{x})]^2$

19. $f(2x)\sqrt{g(x/2)}$

20. $\dfrac{f(x) - g(x)}{f(x) + g(x)}$

21. $f(x + (g(x))^2)$

22. $f\left(\dfrac{g(x^2)}{x}\right)$

23. $f(\operatorname{sen} x)\, g(\cos x)$

24. $\sqrt{\dfrac{\cos f(x)}{\operatorname{sen} g(x)}}$

25. Calcule la tangente a la curva $x^3y + 2xy^3 = 12$ en el punto $(2, 1)$.

26. Calcule la pendiente de la curva $3\sqrt{2x}\operatorname{sen}(\pi y) + 8y\cos(\pi x) = 2$ en el punto $(\frac{1}{3}, \frac{1}{4})$.

Calcule las integrales indefinidas en los Ejercicios 27-30.

27. $\displaystyle\int \frac{1 + x^4}{x^2}\,dx$

28. $\displaystyle\int \frac{1 + x}{\sqrt{x}}\,dx$

29. $\displaystyle\int \frac{2 + 3\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx$

30. $\displaystyle\int (2x + 1)^4\,dx$

31. Calcule $f(x)$ siendo $f'(x) = 12x^2 + 12x^3$ y $f(1) = 0$.

32. Calcule $g(x)$ si $g'(x) = \operatorname{sen}(x/3) + \cos(x/6)$ y la gráfica de g pasa por el punto $(\pi, 2)$.

33. Diferencie $x\operatorname{sen} x + \cos x$ y $x\cos x - \operatorname{sen} x$. Utilice los resultados para calcular las integrales indefinidas

$$I_1 = \int x\cos x\,dx \quad \text{y} \quad I_2 = \int x\operatorname{sen} x\,dx$$

34. Suponga que $f'(x) = f(x)$ para todo x, y sea $g(x) = xf(x)$. Calcule algunas derivadas sucesivas de g

y plantee una fórmula para la derivada n-ésima $g^{(n)}(x)$. Verifique su fórmula por inducción.

35. Calcule la ecuación de la recta que pasa por el origen y es tangente a la curva $y = x^3 + 2$.

36. Calcule las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto (0, 1) y son tangentes a la curva $y = \sqrt{2 + x^2}$.

37. Demuestre que

$$\frac{d}{dx}$$

$(\operatorname{sen}^n x \operatorname{sen}(nx)) = n \operatorname{sen}^{n-1} x \operatorname{sen}((n+1)x)$. ¿En qué puntos x de $[0, \pi]$ tiene tangente horizontal la gráfica de $y = \operatorname{sen}^n x \operatorname{sen}(nx)$. Suponga que $n \geqslant 2$.

38. Obtenga fórmulas de diferenciación de $y = \operatorname{sen}^n x \cos(nx)$, $y = \cos^n x \operatorname{sen}(nx)$ y $y = \cos^n x \cos(nx)$, análogas a la dada en el Ejercicio 37 para $y = \operatorname{sen}^n x \operatorname{sen}(nx)$.

39. Sea Q el punto (0, 1). Calcule todos los puntos P de la curva $y = x^2$ en los que la recta PQ es normal a $y = x^2$ en P. ¿Cuál es la mínima distancia de Q a la curva $y = x^2$?

40. **(Beneficio medio y marginal)** La Figura 2.41 muestra la gráfica del beneficio $P(x)$ obtenido por un exportador de grano por la venta de x toneladas de trigo. Por tanto, el beneficio medio por tonelada es de $P(x)/x$. Demuestre que el beneficio medio máximo se produce cuando el beneficio medio se hace igual al beneficio marginal. ¿Cuál es el significado geométrico de este hecho en la figura?

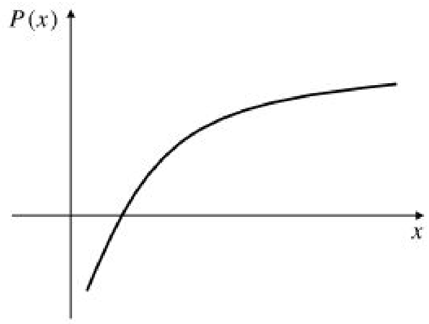

Figura 2.41

41. **(Atracción gravitatoria)** La atracción gravitatoria que ejerce la Tierra sobre una masa m a una distancia r de su centro es una función continua $F(r)$, definida para $r \geqslant 0$ como

$$F(r) = \begin{cases} \dfrac{mgR^2}{r^2} & \text{si} \quad r \geqslant R \\ mkr & \text{si} \quad 0 \leqslant r < R \end{cases}$$

siendo R el radio de la Tierra y g la aceleración debida a la gravedad en la superficie de la Tierra.

(a) Calcule la constante k en función de g y R.

(b) F disminuye a medida que m se aleja de la superficie de la Tierra. Demuestre que F disminuye a medida que r incrementa respecto a R con el doble de velocidad con la que F decrece a medida que r decrece con respecto a R.

42. **(Compresibilidad de un gas)** La compresibilidad isotérmica de un gas es la velocidad relativa de cambio en el volumen V con respecto a la presión P a una temperatura constante T. Es decir, $(1/V)\, dV/dP$. Dada una muestra de un gas ideal, su temperatura, presión y volumen cumplen la ecuación $PV = kT$, siendo k una constante relacionada con el número de moléculas de gas presentes en la muestra. Demuestre que la compresibilidad isotérmica de un gas es el inverso cambiado de signo de la presión.

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dP} = -\frac{1}{P}$$

43. Una pelota se lanza hacia arriba con una velocidad inicial de 10 m/s desde la azotea de un edificio. Una segunda pelota se lanza hacia arriba con una velocidad nicial de 20 m/s desde el suelo. Ambas pelotas alcanzan la misma altura máxima desde el suelo. ¿Qué altura tiene el edificio?

44. Una pelota se deja caer desde la cima de una torre alta en el mismo momento que una segunda pelota se lanza hacia arriba desde la base de la torre. Las pelotas chocan a una altura de 30 metros desde el suelo. ¿Con qué velocidad inicial se lanzó la segunda pelota? ¿Con qué velocidad se mueve cada pelota en el momento en que chocan?

45. **(Distancia de frenada)** Los frenos de un coche pueden disminuir su velocidad en 20 pies/s^2. ¿A qué velocidad puede viajar el coche si debe poder frenar en una distancia de 160 pies?

46. **(Medida de variaciones en g)** El periodo P de un péndulo de longitud L se expresa como $P = 2\pi\sqrt{L/g}$, siendo g la aceleración de la gravedad.

(a) Suponiendo que L es fijo, demuestre que un 1% de incremento en g produce una disminución de aproximadamente el 12% del periodo P (las variaciones en el periodo de un péndulo se pueden utilizar para detectar pequeñas variaciones de g a lo largo de la superficie de la Tierra).

(b) Para g fija, ¿qué porcentaje de cambio en L producirá un 1% de incremento en P?

Problemas avanzados

1. René Descartes, el inventor de la geometría analítica, calculó la tangente a una parábola (o a una circunferencia o a otra curva cuadrática) en un punto dado (x_0, y_0) de la curva buscando la recta que pasa por

(x_0, y_0) que sólo tiene una intersección con la curva. Ilustre el método escribiendo la ecuación de una recta que pasa por el punto (a, a^2) con pendiente arbitraria m, y calculando después el valor de m para el que la recta sólo tiene un punto de intersección con la parábola $y = x^2$. ¿Por qué no funciona este método con curvas más generales?

2. Sabiendo que $f'(x) = 1/x$ y $f(2) = 9$, calcule:

(a) $\lim_{x\to 2} \dfrac{f(x^2+5) - f(9)}{x-2}$ (b) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{f(x)} - 3}{x-2}$

3. Suponga que $f'(4) = 3$, $g'(4) = 7$, $g(4) = 4$ y $g(x) \neq 4$ para $x \neq 4$. Calcule:

(a) $\lim_{x\to 4} (f(x) - f(4))$ (b) $\lim_{x\to 4} \dfrac{f(x) - f(4)}{x^2 - 16}$

(c) $\lim_{x\to 4} \dfrac{f(x) - f(4)}{\sqrt{x} - 2}$ (d) $\lim_{x\to 4} \dfrac{f(x) - f(4)}{(1/x) - (1/4)}$

(e) $\lim_{x\to 4} \dfrac{f(x) - f(4)}{g(x) - 4}$ (f) $\lim_{x\to 4} \dfrac{f(g(x)) - f(4)}{x - 4}$

4. Sea $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x = 1,\ 1/2,\ 1/3,\ 1/4,\ \dots \\ x^2 & \text{en otro caso} \end{cases}$

(a) Calcule todos los puntos para los que f es continua. En particular, ¿es continua en $x = 0$?

(b) ¿Es verdadera o falsa la siguiente afirmación? Justifique su respuesta. Para toda pareja de números reales a y b existe un valor x entre a y b tal que $f(x) = (f(a) + f(b))/2$.

(c) Calcule todos los puntos en los que f es diferenciable. En particular, ¿es diferenciable en $x = 0$?

5. Suponga que $f(0) = 0$ y $|f(x)| > \sqrt{|x|}$ para todo x. Demuestre que no existe $f'(0)$.

6. Suponga que f es una función que cumple las siguientes condiciones: $f'(0) = k$, $f(0) \neq 0$ y $f(x+y) = f(x)f(y)$ para todo x e y. Demuestre que $f(0) = 1$ y que $f'(x) = kf(x)$ para todo x (en el Capítulo 3 estudiaremos funciones con estas propiedades).

7. Suponga que la función g cumple las condiciones $g'(0) = k$ y $g(x+y) = g(x) + g(y)$ para todo x e y. Demuestre que:

(a) $g(0) = 0$, (b) $g'(x) = k$ para todo x, y

(c) $g(x) = kx$ para todo x. *Sugerencia*: Haga $h(x) = g(x) - g'(0)x$.

8. (a) Si f es diferenciable en x, demuestre que

(i) $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x) - f(x-h)}{h} = f'(x)$

(ii) $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x)$

(b) Demuestre que la existencia del límite en (i) garantiza que f es diferenciable en x.

(c) Demuestre que la existencia del límite en (ii) *no* garantiza que f sea diferenciable en x. *Sugerencia*: Considere la función $f(x) = |x|$ en $x = 0$.

9. Demuestre que existe una recta que pasa por $(a, 0)$ y que es tangente a la curva $y = x^3$ en $x = 3a/2$. Si $a \neq 0$, ¿existe otra recta que pase por $(a, 0)$ que sea tangente a la curva? Si (x_0, y_0) es un punto arbitrario, ¿cuál es el máximo número de rectas que pasan por (x_0, y_0) y son tangentes a $y = x^3$? ¿Y el número mínimo?

10. Realice un gráfico que demuestre que existen dos rectas, cada una de ellas tangente a las parábolas $y = x^2 + 4x + 1$ y $y = -x^2 + 4x - 1$. Calcule las ecuaciones de las dos rectas.

11. Demuestre que si $b > 1/2$, existen tres rectas que pasan por $(0, b)$, que son normales a la curva $y = x^2$. ¿Cuántas rectas hay si $b = 1/2$? ¿Y si $b < 1/2$?

12. **(Distancia de un punto a una curva)** Calcule el punto de la curva $y = x^2$ más cercano al punto $(3, 0)$. *Sugerencia*: La recta desde el punto $(3, 0)$ al punto más cercano Q en la parábola es normal a la parábola en Q.

***13.** **(Envolvente de una familia de rectas)** Demuestre que para cada valor del parámetro m, la recta $y = mx - (m^2/4)$ es tangente a la parábola $y = x^2$ (la parábola se denomina *envolvente* de la familia de rectas $y = mx - (m^2/4)$. Calcule $f(m)$ de forma que la familia de rectas $y = mx + f(m)$ tenga como envolvente la parábola $y = Ax^2 + Bx + C$.

***14.** **(Tangentes comunes)** Considere las dos parábolas de ecuaciones $y = x^2$ y $y = Ax^2 + Bx + C$. Se supone que $A \neq 0$ y que si $A = 1$ entonces $B \neq 0$ y $C \neq 0$, de forma que las dos ecuaciones representan parábolas diferentes. Demuestre que:

(a) Las dos parábolas son tangentes entre sí si $B^2 = 4C(A-1)$.

(b) Las dos parábolas tienen rectas tangentes comunes si y sólo si $A \neq 1$ y $A(B^2 - 4C(A-1)) > 0$.

(c) Las parábolas tienen exactamente una tangente común si se cumple que $A = 1$ y $B \neq 0$, o $A \neq 1$ y $B^2 = 4C(A-1)$.

(d) Las parábolas no tienen tangentes comunes si $A = 1$ y $B = 0$, o $A \neq 1$ y $A(B^2 - 4C(A-1)) < 0$.

Realice algunas ilustraciones de las posibilidades anteriores.

15. Sea C la gráfica de $y = x^3$.

(a) Demuestre que si $a \neq 0$ entonces la tangente a C en $x = a$ corta también a C en un segundo punto $x = b$.

(b) Demuestre que la pendiente de C en $x = b$ es cuatro veces la pendiente en $x = a$.

(c) ¿Puede ser una recta tangente a C en más de un punto?

(d) ¿Puede ser una recta tangente a la gráfica de $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ en más de un punto?

*16. Sea C la gráfica de $y = x^4 - 2x^2$.

(a) Calcule todas las rectas horizontales que son tangentes a C.

(b) Una de las rectas obtenidas en (a) es tangente a C en dos puntos diferentes. Demuestre que no existen más rectas con esta propiedad.

(c) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x^4 - 2x^2 + x$ en dos puntos diferentes. ¿Existen más rectas con esa propiedad? ¿Por qué?

17. **(Tangentes dobles)** Una recta tangente a la cuártica (polinomio de cuarto grado) $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ en $x = p$ debe cortar a C en cero, uno o dos puntos. Si corta a C únicamente en sólo algún otro punto $x = q$, debe ser tangente a C en ese punto y, por tanto, es una «doble tangente».

(a) Calcule la condición que deben satisfacer los coeficientes del polinomio de cuarto grado para asegurar que existe esa doble tangente, y demuestre que no puede haber más dobles tangentes. Ilustre su resultado aplicándolo a $y = x^4 - 2x^2 + x - 1$.

(b) Si la recta PQ es tangente a C en dos puntos diferentes $x = p$ y $x = q$, demuestre que PQ es paralela a la recta tangente a C en $x = (p + q)/2$.

(c) Si la recta PQ es tangente a C en dos puntos diferentes $x = p$ y $x = q$, demuestre que C tiene dos puntos de inflexión diferentes R y S y que RS es paralela a PQ.

18. Verifique las siguientes fórmulas para cualquier entero positivo n:

(a) $\dfrac{d^n}{dx^n}\cos(ax) = a^n \cos\left(ax + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

(b) $\dfrac{d^n}{dx^n}\operatorname{sen}(ax) = a^n \operatorname{sen}\left(ax + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

(c) $\dfrac{d^n}{dx^n}(\cos^4 x + \operatorname{sen}^4 x) = 4^{n-1}\cos\left(4x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

19. **(Cohete con paracaídas)** Se dispara un cohete desde lo alto de una torre en el instante $t = 0$. Experimenta una aceleración constante ascendente hasta que se consume el combustible. A partir de ese momento su aceleración es la aceleración descendente de la gravedad hasta que, durante su caída, despliega un paracaídas que produce una aceleración ascendente para ralentizar la caída. El cohete toca tierra cerca de la base de la torre. La Figura 2.42 muestra la velocidad ascendente (en metros por segundo) en función del tiempo. Utilizando la información de la figura, conteste a las siguientes preguntas:

(a) ¿Cuánto duró el combustible?

(b) ¿Cuál fue la altura máxima del cohete?

(c) ¿Cuándo se desplegó el paracaídas?

(d) ¿Cuál era la aceleración ascendente del cohete cuando funcionaba el motor?

(e) ¿Qué altura máxima alcanzó el cohete?

(f) ¿Qué altura tenía la torre desde la que se lanzó el cohete?

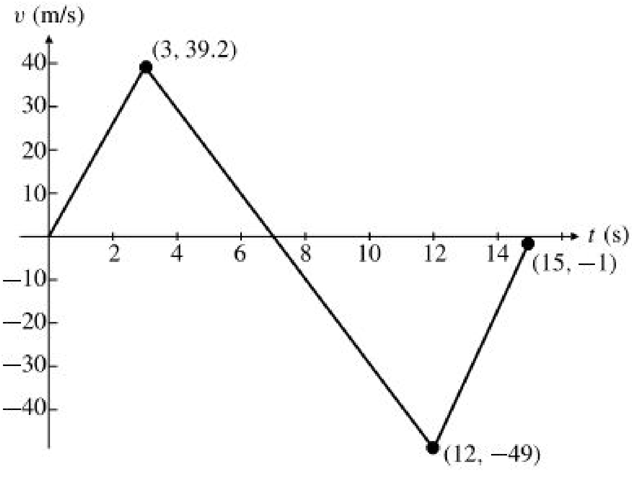

Figura 2.42