8.6 Pendientes, áreas y longitudes de arco de curvas en polares

Existe una fórmula simple que se puede utilizar para calcular la dirección de la tangente a una curva en polares $r = f(\theta)$ en un punto $P = [r, \theta]$ distinto del origen. Sea Q un punto de la curva cercano a P y cuyo ángulo en polares es $\theta + h$. Sea S un punto en OQ y sea PS perpendicular a OQ. Obsérvese que $PS = f(\theta)\operatorname{sen} h$ y $SQ = OQ - OS = f(\theta + h) - f(\theta)\cos h$. Si la tangente a $r = f(\theta)$ en P forma un ángulo ψ (letra griega «psi») con la recta radial OP, como se muestra en la Figura 8.50, entonces ψ es el límite del ángulo SQP cuando $h \to 0$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\tan\psi &= \lim_{h\to 0}\frac{PS}{SQ} = \lim_{h\to 0}\frac{f(\theta)\operatorname{sen} h}{f(\theta+h) - f(\theta)\cos h} \qquad \left[\frac{0}{0}\right] \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(\theta)\cos h}{f'(\theta+h) + f(\theta)\operatorname{sen} h} \qquad \text{(por la Regla de l'Hôpital)} \\
&= \frac{f(\theta)}{f'(\theta)} = \frac{r}{dr/d\theta}
\end{aligned}$$

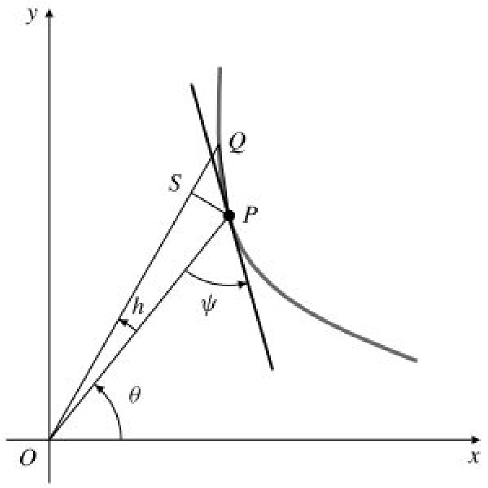

Figura 8.50 El ángulo ψ es el límite del ángulo SQP cuando $h \to 0$.

Dirección tangente a una curva en polares

En cualquier punto P de una curva en polares $r = f(\theta)$ distinto del origen, el ángulo ψ entre la recta radial desde el origen a P y la tangente a la curva se expresa como

$$\tan\psi = \frac{f(\theta)}{f'(\theta)}$$

En particular, $\psi = \pi/2$ si $f'(\theta) = 0$.

Si $f(\theta_0) = 0$ y la curva tiene una tangente en θ_0, entonces la ecuación de dicha tangente es $\theta = \theta_0$.

La fórmula anterior se puede utilizar para calcular los puntos donde una gráfica en polares tiene tangente horizontal o vertical:

$$\psi + \theta = \pi, \quad \text{por lo que } \tan\psi = -\tan\theta \qquad \text{para una tangente horizontal}$$

$$\psi + \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \text{por lo que } \tan\psi = \cot\theta \qquad \text{para una tangente vertical}$$

Observación Como en las curvas paramétricas las tangentes horizontales y verticales corresponden a $dy/dt = 0$ y $ds/dt = 0$, respectivamente, en general es más fácil obtener los puntos críticos de $y = f(\theta)\,\text{sen}\,\theta$ para el caso de tangentes horizontales y $x = f(\theta)$ para el caso de tangentes verticales.

Ejemplo 1 Calcule los puntos de la cardioide $r = 1 + \cos\theta$ donde sus tangentes son horizontales o verticales.

Solución Tenemos que $y = (1 + \cos\theta)\,\text{sen}\,\theta$ y $x = (1 + \cos\theta)\cos\theta$. Para el caso de tangentes horizontales

$$\begin{aligned} 0 = \frac{dy}{d\theta} &= -\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta + \cos\theta \\ &= 2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 \\ &= (2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1) \end{aligned}$$

Las soluciones son $\cos\theta = \frac{1}{2}$ y $\cos\theta = -1$, es decir, $\theta = \pm\pi/3$ y $\theta = \pi$. Existen tangentes horizontales en $[\frac{3}{2}, \pm\frac{\pi}{3}]$. En $\theta = \pi$ tenemos $r = 0$. La curva no tiene tangente en el origen (sino un vértice). Véase la Figura 8.51.

Para el caso de tangentes verticales

$$0 = \frac{dx}{d\theta} = -\text{sen}\,\theta - 2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta = -\text{sen}\,\theta\,(1 + 2\cos\theta)$$

las soluciones son $\text{sen}\,\theta = 0$ y $\cos\theta = -\frac{1}{2}$, es decir, $\theta = 0, \pi, \pm 2\pi/3$. Existen tangentes verticales en $[2, 0]$ y $[\frac{1}{2}, \pm\frac{2\pi}{3}]$.

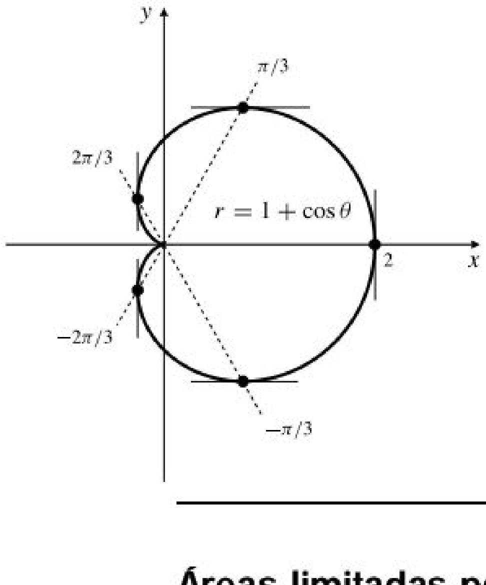

Figura 8.51 Tangentes horizontales y verticales a una cardioide.

Áreas limitadas por curvas en polares

El problema básico del área en coordenadas polares es el de calcular el área A de la región R limitada por la gráfica en polares $r = f(\theta)$ y por los dos rayos $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$. Se supone que $\beta > \alpha$ y que f es continua para $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$. *Véase* la Figura 8.52.

Un elemento de área adecuado en este caso es un sector angular de anchura $d\theta$, como se muestra en la citada figura. Para $d\theta$ infinitesimal, es un sector de una circunferencia de radio $f = f(\theta)$:

$$dA = \frac{d\theta}{2\pi}\,\pi r^2 = \frac{1}{2}\,r^2\,d\theta = \frac{1}{2}\,(f(\theta))^2\,d\theta$$

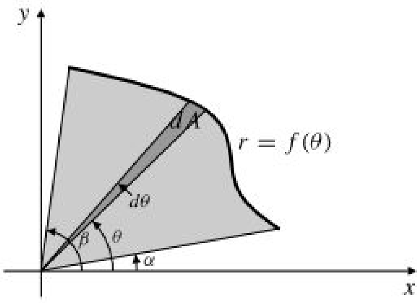

Figura 8.52 Un elemento de área en coordenadas polares.

Área en coordenadas polares

El área de la región limitada por $r = f(\theta)$ y los rayos $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$, $(\alpha < \beta)$ es

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (f(\theta))^2\, d\theta$$

Ejemplo 2 Calcule el área encerrada por la cardioide $r = a(1 + \cos\theta)$, como se muestra en la Figura 8.53.

Solución Por simetría, el área total será el doble del área de la mitad superior:

$$\begin{aligned} A &= 2 \times \frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1 + \cos\theta)^2\, d\theta \\ &= a^2 \int_0^{\pi} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta \\ &= a^2 \int_0^{\pi} \left(1 + 2\cos\theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right) d\theta \\ &= a^2\left(\frac{3}{2}\theta + 2\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta\right)\bigg|_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi a^2 \text{ unidades al cuadrado} \end{aligned}$$

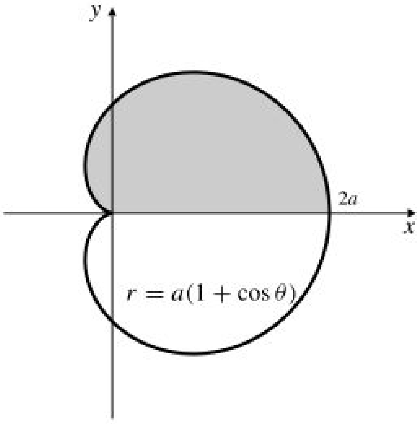

Figura 8.53

Ejemplo 3 Calcule el área de la región que pertenece simultáneamente al interior de la circunferencia $r = \sqrt{2}\operatorname{sen}\theta$ y de la lemniscata $r^2 = \operatorname{sen} 2\theta$.

Solución La región se muestra sombreada en la Figura 8.54. Además de en el origen, las curvas se cortan en el punto del primer cuadrante que cumple

$$2\operatorname{sen}^2\theta = \operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

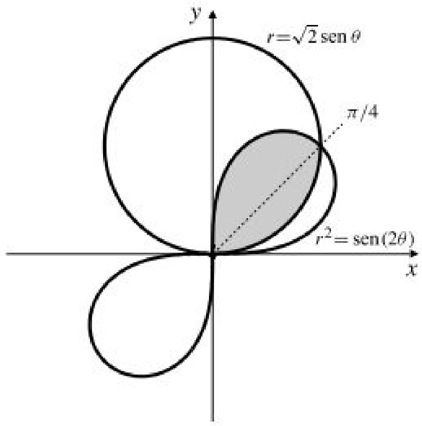

Figura 8.54

Por tanto, $\mathrm{sen}\,\theta = \cos\theta$ y $\theta = \pi/4$. El área pedida es

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} 2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\, \mathrm{d}\theta + \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \mathrm{sen}\,2\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta - \frac{1}{4}\cos 2\theta\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,2\theta\Big|_0^{\pi/4} + \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8} \quad \text{unidades al cuadrado}$$

Longitudes de arco de curvas en polares

El elemento de arco de la curva en polares $r = f(\theta)$ se puede determinar a partir del triángulo diferencial que se muestra en la Figura 8.55. El cateto $r\,d\theta$ se calcula como la longitud de arco de un arco circular de radio r que abarca un ángulo $d\theta$ en el origen. Tenemos que

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 = \left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right](d\theta)^2$$

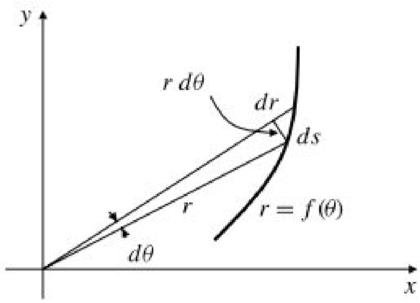

Figura 8.55 Elemento de longitud de arco de una curva en polares.

por lo que se obtiene la siguiente fórmula:

Longitud de un elemento de arco de una curva en polares

El elemento de longitud de arco de la curva en polares $r = f(\theta)$ es

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}\, d\theta = \sqrt{(f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2}\, d\theta$$

La expresión del elemento de arco se puede obtener también a partir del de una curva paramétrica. *Véase* el Ejercicio 26 al final de esta sección.

Ejemplo 4 Calcule la longitud total de la cardioide $r = a(1 + \cos\theta)$.

Solución La longitud total será dos veces la longitud desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \pi$ (*véase* la Figura 8.53). Como para la cardioide $dr/d\theta = -a\,\text{sen}\,\theta$, la longitud de arco es

$$s = 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2\,\text{sen}^2\,\theta + a^2(1+\cos\theta)^2}\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sqrt{2a^2 + 2a^2\cos\theta}\,d\theta \qquad (\text{pero } 1+\cos\theta = 2\cos^2(\theta/2))$$

$$= 2\sqrt{2}a\int_2^{\pi} \sqrt{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta$$

$$= 4a\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 8a\,\text{sen}\frac{\theta}{2}\bigg|_0^{\pi} = 8a \text{ unidades}$$

Ejercicios 8.6

En los Ejercicios 1-11, dibuje las regiones R dadas en polares y calcule sus áreas.

1. R está entre el origen y la espiral $r = \sqrt{\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

2. R está entre el origen y la espiral $r = a^2\cos 2\theta$.

3. R está limitada por la curva $r^2 = a^2\cos 2\theta$.

4. R es una hoja de la curva $r = \text{sen}\,3\theta$.

5. R está limitada por la curva $r = \cos 4\theta$.

6. R está en el interior de las circunferencias $r = a$ y $r = 2a\cos\theta$.

7. R está dentro de la cardioide $r = 1 - \cos\theta$ y fuera de la circunferencia $r = 1$.

8. R está dentro de la cardioide $r = a(1 - \text{sen}\,\theta)$ y dentro de la circunferencia $r = a$.

9. R está dentro de la cardioide $r = 1 + \cos\theta$ y fuera de la circunferencia $r = 3\cos\theta$.

10. R está limitada por la lemniscata $r^2 = 2\cos 2\theta$ y está fuera de la circunferencia $r = 1$.

11. R está limitada por el lazo más pequeño de la curva $r = 1 + 2\cos\theta$.

Calcule las longitudes de las curvas en polares de los Ejercicios 12-14.

12. $r = \theta^2$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

13. $r = e^{a\theta}$, $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$

14. $r = a\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

15. Demuestre que la longitud de arco total de la lemniscata $r^2 = \cos 2\theta$ es $4\displaystyle\int_0^{\pi/4}\sqrt{\sec 2\theta}\,d\theta$.

16. Una hoja de la lemniscata $r^2 = \cos 2\theta$ se rota (a) alrededor del eje x y (b) alrededor del eje y. Calcule el área de la superficie generada en cada caso.

***17.** Determine los ángulos a los que la recta $\theta = \pi/4$ corta a la cardioide $r = 1 + \text{sen}\,\theta$.

***18.** ¿En qué puntos se cortan las curvas $r^2 = 2\,\text{sen}\,2\theta$ y $r = 2\cos\theta$? ¿Con qué ángulos se cortan las curvas en cada uno de esos puntos?

***19.** ¿En qué puntos se cortan las curvas $r = 1 - \cos\theta$ y $r = 1 - \text{sen}\,\theta$? ¿Con qué ángulos se cortan las curvas en cada uno de esos puntos?

En los Ejercicios 20-25, calcule todos los puntos de las curvas dadas donde la tangente es horizontal, vertical o no existe.

***20.** $r = \cos\theta + \text{sen}\,\theta$

***21.** $r = 2\cos\theta$

***22.** $r^2 = \cos 2\theta$

***23.** $r = \text{sen}\,2\theta$

***24.** $r = e^{\theta}$

***25.** $r = 2(1 - \text{sen}\,\theta)$

26. La curva en polares $r = f(\theta)$, $(\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta)$ se puede parametrizar:

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta = f(\theta)\,\text{sen}\,\theta$$

Obtenga la fórmula del elemento de longitud de arco de la curva en polares a partir del de la curva paramétrica.

Repaso del capítulo

Ideas clave

- **¿Qué significa lo siguiente?**
  - ◇ Sección cónica ◇ Elipse
  - ◇ Parábola ◇ Hipérbola
  - ◇ Curva paramétrica ◇ Parametrización de una curva
  - ◇ Curva suave ◇ Curva en polares
- **¿Cuál es la definición foco-directriz de una cónica?**
- **¿Cómo se puede calcular la pendiente de una curva paramétrica?**
- **¿Cómo se puede calcular la longitud de una curva paramétrica?**
- **¿Cómo se puede calcular la longitud de una curva en polares?**
- **¿Cómo se puede calcular el área encerrada por una curva en polares?**

Ejercicios de repaso

En los Ejercicios 1-4, describa las cónicas que tienen las ecuaciones dadas. Calcule sus focos y ejes principales y, si son hipérbolas, sus asíntotas.

1. $x^2 + 2y^2 = 2$ **2.** $9x^2 - 4y^2 = 36$

3. $x + y^2 = 2y + 3$ **4.** $2x^2 + 8y^2 = 4x - 48y$

Identifique las curvas paramétricas de los Ejercicios 5-10.

5. $x = t,\ y = 2 - t,\ (0 \leqslant t \leqslant 2)$

6. $x = 2\,\text{sen}\,3t,\ y = 2\cos 3t,\ (0 \leqslant t \leqslant 1/2)$

7. $x = \cosh t,\ y = \text{senh}^2\, t$

8. $x = e^t,\ y = e^{-2t},\ (-1 \leqslant t \leqslant 1)$

9. $x = \cos(t/2),\ y = 4\,\text{sen}\,(t/2),\ (0 \leqslant t \leqslant \pi)$

10. $x = \cos t + \text{sen}\, t,\ y = \cos t - \text{sen}\, t,\ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$

En los Ejercicios 11-14, determine los puntos donde las curvas paramétricas dadas tienen tangentes horizontales y verticales, y dibuje dichas curvas.

11. $x = \dfrac{4}{1 + t^2},\ y = t^3 - 3t$

12. $x = t^3 - 3t,\ y = t^3 + 3t$

13. $x = t^3 - 3t,\ y = t^3$

14. $x = t^3 - 3t,\ y = t^3 - 12t$

15. Calcule el área limitada por la parte de la curva $x = t^3 - t,\ y = |t^3|$ que forma un lazo cerrado.

16 Calcule el volumen del sólido generado rotando el lazo cerrado del Ejercicio 15 alrededor del eje y.

17. Calcule la longitud de la curva $x = e^t - t,\ y = 4e^{t/2}$ desde $t = 0$ hasta $t = 2$.

18. Calcule el área de la superficie que se obtiene rotando el arco del Ejercicio 17 alrededor del eje x.

Dibuje las gráficas en polares de las ecuaciones de los Ejercicios 19-24.

19. $r = \theta,\ (-\frac{3\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{3\pi}{2})$ **20.** $r = |\theta|,\ (-2\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$

21. $r = 1 + \cos 2\theta$ **22.** $r = 2 + \cos 2\theta$

23. $r = 1 + 2\cos 2\theta$ **24.** $r = 1 - \text{sen}\, 3\theta$

25. Calcule el área de uno de los dos lazos mayores de la curva del Ejercicio 23.

26. Calcule el área de uno de los dos lazos menores de la curva del Ejercicio 23.

27. Calcule el área del más pequeño de los dos lazos encerrados por la curva $r = 1 + \sqrt{2}\,\text{sen}\,\theta$.

28. Calcule el área de la región que está dentro de la cardioide $r = 1 + \cos\theta$ y a la izquierda de la recta $x = 1/4$.

Problemas avanzados

1. Un vaso con forma de cilindro circular de radio 4 cm se rellenan más de la mitad con agua. Si el vaso se inclina a un ángulo θ de la vertical, siendo θ lo suficientemente pequeño para que no se derrame el agua, calcule el área de la superficie del agua.

2. Demuestre que un plano que no es paralelo al eje de un cilindro circular corta al cilindro formando una elipse. *Sugerencia*: Se puede utilizar el mismo método empleado en el Ejercicio 27 de la Sección 8.1.

3. Dados dos puntos F_1 y F_2 que son los focos de una elipse, y un tercer punto P en dicha elipse, describa un método geométrico (utilizando una regla y un compás) para construir la tangente a la elipse en P. *Sugerencia*: Piense en la propiedad de reflexión de las elipses.

4. Sea C una parábola de vértice V, y sea P un punto cualquiera de dicha parábola. Sea R el punto donde la tangente a la parábola en P corta a su eje (por tanto, dicho eje es la recta RV). Sea Q el punto de RV tal que PQ es perpendicular a RV. Demuestre que V divide en dos mitades iguales el segmento RQ. ¿Cómo puede sugerir este resultado un método geométrico para construir una tangente a una parábola en un punto de ésta, sabiendo el eje y el vértice de la parábola?

5. Un barril tiene la forma de un sólido de revolución obtenido rotando alrededor de su eje mayor la parte de una elipse que está entre dos rectas que cruzan a sus focos, y son perpendiculares a dicho eje mayor. El barril tiene 4 pies de altura y 2 pies de radio en su parte central. ¿Cuánto vale su volumen?

6. (a) Demuestre que cualquier recta que no pasa por el origen se puede expresar en forma polar como

$$r = \frac{a}{\cos(\theta - \theta_0)}$$

siendo a y θ_0 constantes. ¿Cuál es el significado geométrico de estas constantes?

(b) Sea $r = g(\theta)$ la ecuación en polares de una recta que no pasa por el origen. Demuestre que

$$g^2 + 2(g')^2 - gg'' = 0$$

(c) Sea $r = f(\theta)$ la ecuación en polares de una curva, siendo f'' continua y $r \neq 0$ en algún intervalo de valores de θ. Sea

$$F = f^2 + 2(f')^2 - ff''$$

Demuestre que la curva se dirige hacia el origen si $F > 0$ y se aleja del origen si $F < 0$. *Sugerencia*: Sea $r = g(\theta)$ la ecuación en polares de una recta tangente a la curva; utilice el apartado (b). ¿Cómo se relacionan f, f' y f'' con g, g' y g'' en el punto de tangencia?

7. **(Un viaje rápido, pero un poco caluroso)** Si se supone que la densidad de la tierra es uniforme en su interior, entonces se puede suponer que la aceleración de la gravedad a una distancia $r \leqslant R$ de su centro está dirigida hacia dicho centro, y tiene un valor de $a(r) = rg/R$, siendo g la aceleración normal de la gravedad en la superficie de la tierra ($g \approx 32$ pies/s^2) y R el radio de la tierra ($R \approx 3960$ mi). Suponga que se excava un túnel AB directo a través de la tierra entre los puntos A y B de superficie, por ejemplo Atlanta y Bagdad (*véase* la Figura 8.56).

Suponga que se construye un vehículo que se puede deslizar sin rozamiento ni resistencia del aire a través de este túnel. Demuestre que ese vehículo, si se liberara en un extremo del túnel, oscilaría entre A y B, ejecutando un movimiento armónico simple de periodo $2\pi\sqrt{R/g}$ ¿Cuántos minutos duraría cada vuelta? Lo que es sorprendente en este caso es que este periodo no depende de dónde están A y B ni de la distancia entre ellos. *Sugerencia*: Suponga el eje x a lo largo del túnel, con el origen en el punto más cercano al centro de la tierra. Cuando el vehículo está en la posición de coordenada x $x(t)$ su aceleración a lo largo del túnel es la componente de la aceleración gravitatoria a lo largo de dicho túnel, es decir, $-a(r)\cos\theta$, siendo θ el ángulo entre la línea del túnel y la recta que va del vehículo al centro de la tierra.

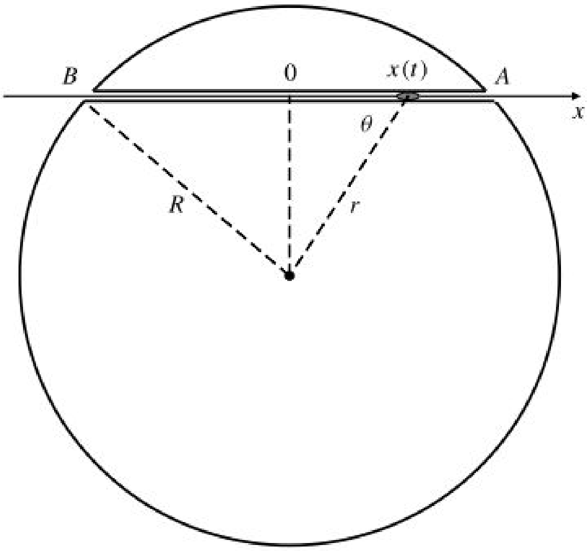

Figura 8.56

***8.** **(Búsqueda y rescate)** Dos estaciones de la Guardia Costera reciben una señal de desastre de un barco y utilizan radiolocalización para situarla. La estación O observa que la señal de desastre proviene del noreste (45° noreste) y la estación P, que está 100 millas al norte de la estación O, observa que la señal proviene del este. La precisión en la radiolocalización de cada estación es de $\pm 3°$.

(a) ¿Cuál es la amplitud del área de océano donde deberán buscar las aeronaves de rescate para asegurarse que encuentran al barco con problemas?

(b) Si la precisión de la radiolocalización es $\pm\varepsilon$, ¿qué sensibilidad tiene el área de búsqueda con cambios en ε cuando $\varepsilon = 3°$? Exprese su respuesta en millas al cuadrado por grado.

9. La Figura 8.57 muestra las gráficas de la curva paramétrica $x = \operatorname{sen} t$, $y = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ y de la curva en polares $r^2 = \cos(2\theta)$. Ambas tienen la forma de un «∞». ¿Cuál es cada curva? Calcule el área encerrada entre la curva externa y el exterior de la curva interna.

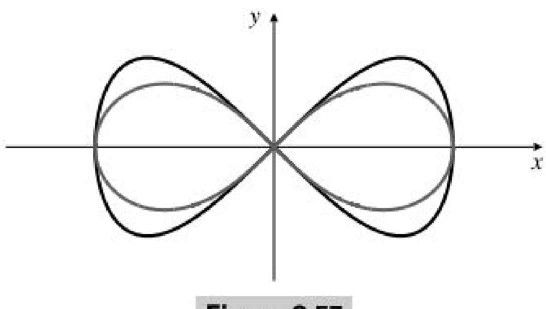

Figura 8.57

CAPÍTULO 9

Secuencias, series y series de potencias

—Entonces dices lo que piensas —siguió la Liebre de Marzo.

—Sí —dijo Alicia apresuradamente—, al menos... al menos pienso lo que digo... que es lo mismo, como sabes.

—¡De ninguna manera es lo mismo! —dijo el Sombrerero—. ¡Entonces, podrías también decir que ''yo veo lo que como'' es lo mismo que decir ''yo como lo que veo''!

Lewis Carrol (Charles Lutwidge Dodgson, 1832-1898)
de *Alicia en el País de las Maravillas*

Introducción Una serie infinita es una suma en la que intervienen infinitos términos. Como las sumas se realizan de dos en dos números, el cálculo de la suma de una serie infinita requiere necesariamente el cálculo de un límite. Las funciones complicadas $f(x)$ se pueden expresar frecuentemente como series de funciones más simples. Por ejemplo, una buena parte de las funciones trascendentes que ya hemos estudiado, se pueden expresar como series de potencias de x que se parecen a polinomios de grado infinito. Estas series se pueden diferenciar e integrar término a término y tienen un papel muy importante en el estudio del cálculo.

9.1 Secuencias y convergencia

Por **secuencia** (o **secuencia infinita**) queremos decir una lista ordenada que tiene un primer elemento, pero no un último elemento. A nuestros efectos, los elementos (denominados **términos**) de una secuencia serán siempre números reales, aunque una buena parte de nuestra presentación se puede aplicar también a números complejos. Unos ejemplos de secuencias pueden ser:

$\{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$, la secuencia de los enteros positivos.

$\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ...\right\}$ la secuencia de enteros positivos que son potencias de $-\frac{1}{2}$.

Los términos de la secuencia generalmente se encierran entre llaves, tal como se indica. Los puntos suspensivos (...) quieren decir «y así sucesivamente».

Una secuencia infinita es una clase especial de función, cuyo dominio es una serie de enteros que van desde algún entero inicial hasta el infinito. El entero inicial es generalmente 1, por lo que el dominio es el conjunto de los enteros positivos. La secuencia $\{a_1, a_2, a_3, a_4, ...\}$ es la función f que toma el valor $f(n) = a_n$ en cada entero positivo n. Una secuencia se puede especificar de tres formas:

(i) Se pueden indicar unos cuantos términos del principio seguidos por ... *si el patrón de la secuencia es obvio.*
(ii) Se puede dar la fórmula del **término general** a_n en función de n.
(iii) Se puede dar la fórmula para calcular el término a_n en función de términos anteriores $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$, y especificar los suficientes términos al comienzo de la secuencia para poder comenzar el cálculo de los términos posteriores.

En todos los casos, debe ser posible determinar cualquier término de la secuencia, aunque puede ser necesario calcular primero todos los términos anteriores.

Ejemplo 1 **(Algunos ejemplos de secuencias)**

(a) $\{n\} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

(b) $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ...\right\}$

(c) $\left\{\frac{n-1}{n}\right\} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ...\right\}$

(d) $\{(-1)^{n-1}\} = \{\cos((n-1)\pi)\} = \{1, -1, 1, -1, 1, ...\}$

(e) $\left\{\frac{n^2}{2^n}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, 1, \frac{25}{32}, \frac{36}{64}, \frac{49}{128}, ...\right\}$

(f) $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\} = \left\{2, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \left(\frac{5}{4}\right)^4, ...\right\}$

(g) $\left\{\frac{\cos(n\pi/2)}{n}\right\} = \left\{0, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{8}, 0, ...\right\}$

(h) $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}, (n = 1, 2, 3, ...)$

En este caso $\{a_n\} = \{1, \sqrt{7}, \sqrt{6+\sqrt{7}}, ...\}$ Nótese que no hay una fórmula *obvia* para a_n como función explícita de n, pero todavía se puede calcular a_n para cualquier valor deseado de n calculando primero todos los valores anteriores $a_2, a_3, ..., a_{n-1}$.

(i) $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}, (n = 1, 2, 3, ...)$

En este caso $\{a_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...\}$. Esta secuencia se denomina **secuencia de Fibonacci**. Cada uno de sus términos, después del segundo, es la suma de los dos términos anteriores.

En los apartados (a)-(g) del Ejemplo 1, las fórmulas de los miembros izquierdos definen el término general de cada secuencia $\{a_n\}$ como una función explícita de n. En los apartados (h) e (i) se dice que la secuencia $\{a_n\}$ se define **recursivamente** o **inductivamente**; cada término se debe calcular a partir de los anteriores en vez de calcularse como una función directa de n.

Presentamos a continuación la terminología utilizada para describir diversas propiedades de las secuencias.

DEFINICIÓN 1 Términos utilizados para describir las secuencias

(a) La secuencia $\{a_n\}$ está **acotada inferiormente** por L, y L es una **cota inferior** de $\{a_n\}$, si $a_n \geqslant L$ para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$ La secuencia está **acotada superiormente** por M, y M es una **cota superior**, si $a_n \leqslant M$ para todo n entero positivo.
La secuencia $\{a_n\}$ está **acotada** si está acotada inferiormente y superiormente. En este caso, existe una constante K tal que $|a_n| \leqslant K$ para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$ (podemos tomar K como el mayor de los enteros $-L$ y M).

(b) La secuencia $\{a_n\}$ es **positiva** si está acotada inferiormente por cero, es decir, si $a_n \geqslant 0$ para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$; es **negativa** si $a_n \leqslant 0$ para todo n.

(c) La secuencia $|a_n\}$ es **creciente** si $a_{n+1} \geqslant a_n$ para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$; es **decreciente** si $a_{n+1} \leqslant a_n$ para todo n entero positivo. Se dice que una secuencia es **monótona** si no es creciente ni decreciente (la terminología en este caso es algo más relajada que la utilizada para funciones, donde utilizábamos las expresiones *no decreciente* y *no creciente* para describir este comportamiento. La distinción entre $a_{n+1} > a_n$ y $a_{n+1} \geqslant a_n$ no es tan importante en el caso de secuencias como lo es en el caso de funciones definidas en intervalos).

(d) La secuencia $\{a_n\}$ es **alternante** si $a_n a_{n+1} < 0$ para todo $n = 1, 2, \ldots$, es decir, si dos términos consecutivos cualesquiera tienen signo opuesto. Nótese que esta definición requiere $a_n \neq 0$ para todo n.

Ejemplo 2 **(Descripción de algunas secuencias)**

(a) La secuencia $\{n\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ es positiva, creciente y acotada inferiormente. Un límite inferior de esta secuencia es 1 o cualquier número más pequeño. La secuencia no está acotada superiormente.

(b) $\left\{\dfrac{n-1}{n}\right\} = \left\{0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \ldots\right\}$ es positiva, acotada y creciente. En este caso 0 es una cota inferior y 1 es una cota superior.

(c) $\left\{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\} = \left\{-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, \ldots\right\}$ es acotada y alternante. En este caso $-1/2$ es una cota inferior y $1/4$ es una cota superior.

(d) $\{(-1)^n n\} = \{-1, 2, -3, 4, -5, \ldots\}$ es alternante pero no está acotada ni superiormente ni inferiormente.

Cuando se desea demostrar que una secuencia es creciente, se puede intentar demostrar que se cumple la inecuación $a_{n+1} - a_n \geqslant 0$ para $n \geqslant 1$. Pero una forma alternativa, si $a_n = f(n)$ para una función diferenciable $f(x)$, es demostrar que f es una función no decreciente en $[1, \infty)$, demostrando que $f'(x) \geqslant 0$ en dicho intervalo. Se puede utilizar un método similar para demostrar que una secuencia es decreciente.

Ejemplo 3 Si $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$, demuestre que la secuencia $\{a_n\}$ es decreciente.

Solución Como $a_n = f(n)$, siendo $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ y

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)(1) - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \leqslant 0 \qquad \text{para } x \geqslant 1$$

La función $f(x)$ es decreciente en $[1, \infty)$; por tanto, $\{a_n\}$ es una secuencia decreciente.

La secuencia $\left\{\dfrac{n^2}{2^n}\right\} = \left\{\dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{9}{8}, 1, \dfrac{25}{32}, \dfrac{36}{64}, \dfrac{49}{128}, \ldots\right\}$ es positiva y, por tanto, acotada inferiormente. Parece claro que a partir del cuarto término en adelante, todos los términos se van haciendo más pequeños. Sin embargo, $a_2 > a_1$ y $a_3 > a_2$. Como $a_{n+1} \leqslant a_n$, sólo si $n \geqslant 3$ se dice que la secuencia es **definitivamente decreciente**. El adverbio *definitivamente* se utiliza para describir cualquier propiedad de los términos de la secuencia desde algún punto en adelante, pero no necesariamente al principio de la secuencia. Por tanto, la secuencia

$$\{n - 100\} = \{-99, -98, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

es *definitivamente positiva*, incluso aunque los 99 primeros términos sean negativos y la secuencia

$$\left\{(-1)^n + \frac{4}{n}\right\} = \left\{3, 3, \frac{1}{3}, 2, -\frac{1}{5}, \frac{5}{3}, -\frac{3}{7}, \frac{3}{2}, \ldots\right\}$$

es *definitivamente alternante*, aun cuando algunos términos iniciales no alternen.

Convergencia de secuencias

La noción de convergencia es fundamental en el estudio de secuencias. El concepto de límite de una secuencia es un caso especial del concepto de límite de una función $f(x)$ cuando $x \to \infty$. Se dice que la secuencia $\{a_n\}$ **converge al límite** L, y se expresa como $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, siempre que la distancia desde a_n a L sobre la recta real tienda a cero cuando n tiende a ∞. Expresaremos esta definición de manera más formal:

DEFINICIÓN 2 Límite de una secuencia

Se dice que la secuencia $\{a_n\}$ converge al límite L, y se expresa como $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, si para todo número real positivo ϵ existe un entero N (que puede depender de ϵ) tal que si $n \geqslant N$, entonces $|a_n - L| < \epsilon$.

Esta definición se ilustra en la Figura 9.1.

Ejemplo 4 Demuestre que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{c}{n^p} = 0$ para todo número real c y cualquier $p > 0$.

Solución Sea $\epsilon > 0$. Entonces

$$\left|\frac{c}{n^p}\right| < \epsilon \qquad \text{si} \qquad n^p > \frac{|c|}{\epsilon}$$

Es decir, si $n \geqslant N$, el mínimo entero mayor que $(|c|/\epsilon)^{1/p}$. Por tanto, por la Definición 2, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{c}{n^p} = 0$.

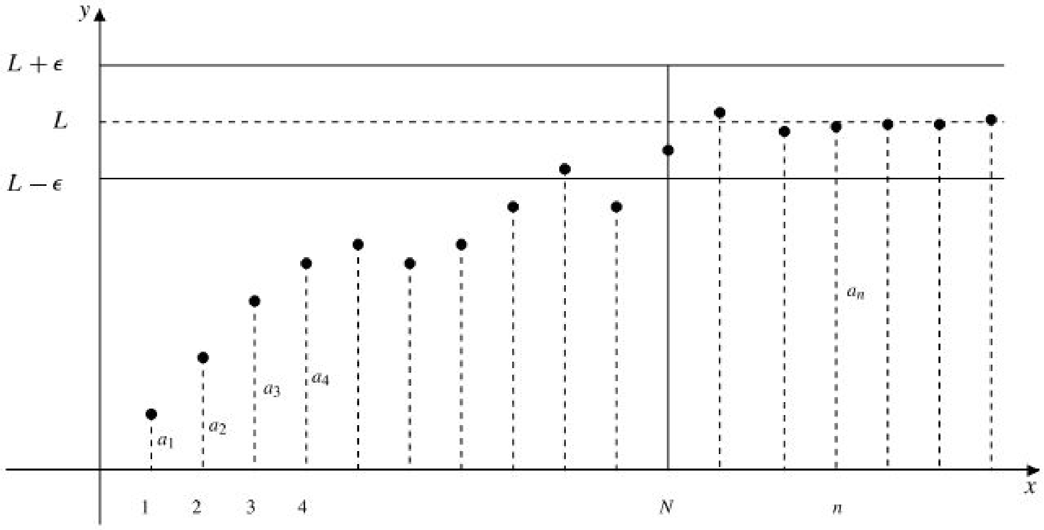

Figura 9.1 Una secuencia convergente.

Toda secuencia $\{a_n\}$ debe **converger** a un límite finito L o **divergir**. Es decir, o $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ existe (es un número real) o $\lim_{n\to\infty} a_n$ no existe. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, se puede decir que la secuencia diverge a infinito; si $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, se puede decir que diverge a $-\infty$. Si $\lim_{n\to\infty} a_n$ simplemente no existe (pero no es ∞ ni $-\infty$), sólo se puede decir que la secuencia diverge.

Ejemplo 5 **(Ejemplos de secuencias convergentes y divergentes)**

(a) $\{(n-1)/n\}$ converge a 1; $\lim_{n\to\infty} (n-1)/n = \lim_{n\to\infty} (1-(1/n)) = 1$.

(b) $\{n\} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ diverge a ∞.

(c) $\{-n\} = \{-1, -2, -3, -4, ...\}$ diverge a $-\infty$.

(d) $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, -1, ...\}$ simplemente diverge.

(e) $\{(-1)^n n\} = \{-1, 2, -3, 4, -5, ...\}$ diverge (pero no a ∞ ni a $-\infty$, aun cuando $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$).

El límite de una secuencia es equivalente al límite de una función cuando su argumento tiende infinito:

$$\text{Si} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \text{y} \quad a_n = f(n), \quad \text{entonces} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Debido a esto, las reglas estándar de los límites de funciones (Teoremas 2 y 4 de la Sección 1.2) se pueden aplicar también para límites de secuencias, con los cambios apropiados de notación. Es decir, si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ convergen, entonces

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = c \lim_{n\to\infty} a_n$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} \qquad \text{suponiendo } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$$

Si $a_n \leqslant b_n$ definitivamente, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

Si $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ definitivamente, y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$

Los límites de muchas secuencias definidas explícitamente se pueden calcular utilizando estas propiedades, de modo similar a los métodos utilizados para límites de la forma $\lim_{x\to\infty} f(x)$ en la Sección 1.3.

Ejemplo 6 Calcule los límites de las secuencias

(a) $\left\{\dfrac{2n^2-n-1}{5n^2+n-3}\right\}$, (b) $\left\{\dfrac{\cos n}{n}\right\}$, y (c) $\{\sqrt{n^2+2n}-n\}$

Solución

(a) Se divide el numerador y el denominador de la expresión de a_n por la máxima potencia de n en el denominador, es decir, por n^2:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-n-1}{5n^2+n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-(1/n)-(1/n^2)}{5+(1/n)-(3/n^2)}=\frac{2-0-0}{5+0-0}=\frac{2}{5}$$

ya que $\lim_{n\to\infty} 1/n=0$ y $\lim_{n\to\infty} 1/n^2=0$. La secuencia converge y su límite es 2/5.

(b) Como $|\cos n|\leqslant 1$ para todo n, tenemos que

$$-\frac{1}{n}\leqslant\frac{\cos n}{n}\leqslant\frac{1}{n}\quad\text{para}\quad n\geqslant 1$$

En este caso, $\lim_{n\to\infty} -1/n=0$ y $\lim_{n\to\infty} 1/n=0$. Por tanto, por la versión para secuencias del Teorema del Sándwich, $\lim_{n\to\infty} (\cos n)/n=0$. La secuencia dada converge a 0.

(c) En esta secuencia multiplicamos el numerador y el denominador (que es 1) por el conjugado de la expresión del numerador:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n)&=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}{\sqrt{n^2+2n}+n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+(2/n)}+1}=1\end{aligned}$$

La secuencia converge a 1.

■

Ejemplo 7 Calcule $\lim_{n\to\infty} n\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Solución En este ejemplo, es mejor sustituir el término n-ésimo de la secuencia por la correspondiente función de una variable real x y tomar el límite cuando $x\to\infty$. Utilizaremos la Regla del l'Hôpital:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\tan^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)&=\lim_{x\to\infty} x\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}\qquad\left[\frac{0}{0}\right]\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{1+(1/x^2)}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}{-\left(\dfrac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}=1\end{aligned}$$

■

TEOREMA 1 Si $\{a_n\}$ converge, entonces $\{a_n\}$ está acotada.

DEMOSTRACIÓN Supongamos que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. De acuerdo con la Definición 2, para $\epsilon = 1$ existe un número N tal que si $n > N$, entonces $|a_n - L| < 1$; por lo tanto, $|a_n| < 1 + |L|$ para ese n (¿por qué es esto cierto?). Si K indica el máximo de los números $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_N|$ y $1 + |L|$, entonces $|a_n| \leqslant K$ para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$ Por lo tanto, $\{a_n\}$ está acotada.

Lo contrario del Teorema 1 es falso; la secuencia $\{(-1)^n\}$ está acotada pero no converge.

La *propiedad de completitud* del sistema de los números reales (*véase* la Sección P.1) se puede reformular en términos de secuencias como sigue:

Las secuencias monótonas acotadas convergen

Si la secuencia $\{a_n\}$ está acotada superiormente y es (definitivamente) creciente, entonces converge. La misma conclusión se mantiene si $\{a_n\}$ está acotada inferiormente y es (definitivamente) decreciente.

Por tanto, una secuencia acotada y definitivamente monótona es convergente (*véase* la Figura 9.2).

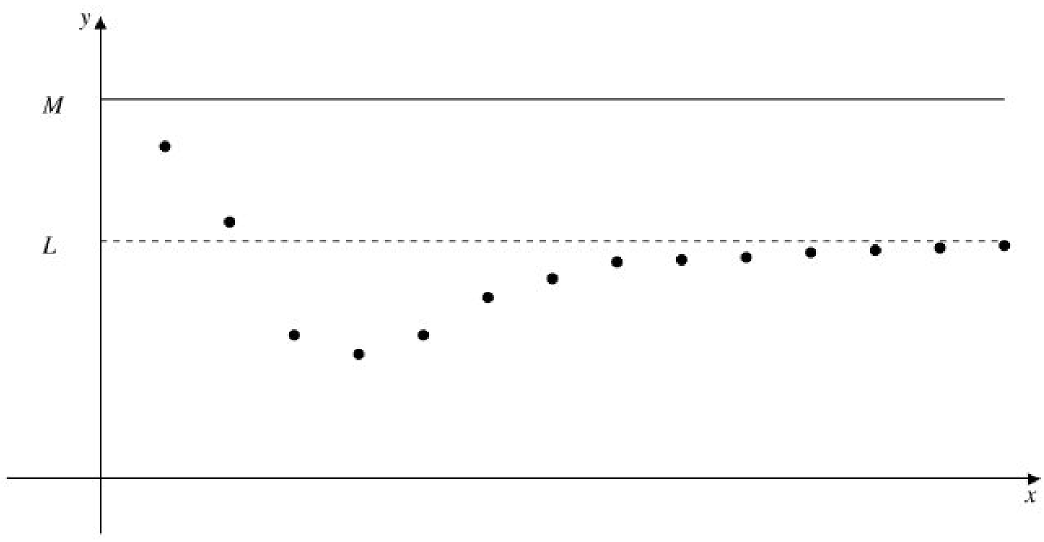

Figura 9.2 Una secuencia definitivamente creciente que está acotada superiormente.

Ejemplo 8 Sea a_n una secuencia definida recursivamente como

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Demuestre que $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe y calcule su valor.

Solución Obsérvese que $a_2 = \sqrt{6+1} = \sqrt{7} > a_1$. Si $a_{k+1} > a_k$, entonces $a_{k+2} = \sqrt{6 + a_{k+1}} > > \sqrt{6 + a_k} = a_{k+1}$, por lo que $\{a_n\}$ es creciente, por inducción. Obsérvese ahora que $a_1 = 1 < 3$. Si $a_k < 3$, entonces $a_{k+1} = \sqrt{6 + a_k} < \sqrt{6+3} = 3$, por lo que $a_n < 3$ para todo n por inducción. Como $\{a_n\}$ es creciente y acotada superiormente, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ existe, por completitud. Como $\sqrt{6 + x}$ es una función continua de x, tenemos que

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{6 + a_n} = \sqrt{6 + \lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{6 + a}$$

Entonces $a^2 = 6 + a$ o $a^2 - a - 6 = 0$, o $(a-3)(a+2) = 0$. Las raíces de esta ecuación de segundo grado son $a=3$ y $a=-2$. Como $a_n \geqslant 1$ para todo n, debemos tener $a \geqslant 1$. Por tanto, $a=3$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$. ■

Hay que notar un punto sutil en esta solución. Demostrar que $\{a_n\}$ es creciente es bastante obvio, pero ¿cómo hemos sabido que había que probar con 3 (en vez de cualquier otro número) para demostrar que era una cota superior? La respuesta es que realmente hicimos primero la última parte y demostramos que *si* $\lim a_n = a$ existe, *entonces* $a = 3$. Por tanto, tiene sentido probar con 3 y demostrar que $a_n < 3$ para todo n.

Ejemplo 9 ¿Converge o diverge la secuencia $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$?

Solución Podríamos hacer un esfuerzo para demostrar que la secuencia dada es, de hecho, creciente y acotada superiormente (*véase* el Ejercicio 32 al final de esta sección). Sin embargo, ya conocemos la respuesta. La secuencia converge por el Teorema 6 de la Sección 3.4:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^1 = e$$

■

TEOREMA 2 Si $\{a_n\}$ es (definitivamente) creciente, entonces, o está acotada superiormente, y por tanto es convergente, o no está acotada superiormente y diverge a infinito.

La demostración de este teorema se deja como ejercicio. Se puede plantear un resultado equivalente para secuencias (definitivamente) decrecientes.

El siguiente teorema calcula dos límites importantes de frecuente aplicación en el estudio de series.

TEOREMA 3 (a) Si $|x| < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$.

(b) Si x es un número real cualquiera, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.

DEMOSTRACIÓN Para el apartado (a), obsérvese que

$$\lim_{n\to\infty} \ln|x|^n = \lim_{n\to\infty} n\ln|x| = -\infty$$

ya que $\ln|x| < 0$ cuando $|x| < 1$. De acuerdo con esto, como e^x es continua,

$$\lim_{n\to\infty} |x|^n = \lim_{n\to\infty} e^{\ln|x|^n} = e^{\lim_{n\to\infty}\ln|x|^n} = 0$$

Como $-|x|^n \leqslant x^n \leqslant |x|^n$, tenemos que $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ por el Teorema del Sándwich.

Para el apartado (b), escójase cualquier x y sea N un entero tal que $N > |x|$. Si $n > N$ tenemos que

$$\begin{aligned}\left|\frac{x^n}{n!}\right| &= \frac{|x|}{1}\frac{|x|}{2}\frac{|x|}{3}\cdots\frac{|x|}{N-1}\frac{|x|}{N}\frac{|x|}{N+1}\cdots\frac{|x|}{n}\\ &< \frac{|x|^{N-1}}{(N-1)!}\frac{|x|}{N}\frac{|x|}{N}\frac{|x|}{N}\cdots\frac{|x|}{N}\\ &= \frac{|x|^{N-1}}{(N-1)!}\left(\frac{|x|}{N}\right)^{n-N+1} = K\left(\frac{|x|}{N}\right)^n\end{aligned}$$

donde $K = \frac{|x|^{N-1}}{(N-1)!}\left(\frac{|x|}{N}\right)^{1-N}$ es una constante independiente de n. Como $|x|/N < 1$, tenemos que en $\lim_{n\to\infty} (|x|/N)^n = 0$ por el apartado (a). Así, $\lim_{n\to\infty} |x^n/n!| = 0$ y, por consiguiente, $\lim_{n\to\infty} x^n/n! = 0$.

Ejemplo 10 Calcule $\lim_{n\to\infty} \frac{3n + 4^n + 5^n}{5^n}$.

Solución $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + 4^n + 5^n}{5^n} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n + 1\right] = 0 + 0 + 1 = 1$, por el Teorema 3(a).

Ejercicios 9.1

En los Ejercicios 1-13, determine si la secuencia dada es (a) acotada (superiormente o inferiormente), (b) (definitivamente) positiva o negativa, (c) creciente, decreciente o alternante, y (d) convergente, divergente o divergente a ∞ o $-\infty$.

1. $\left\{\frac{2n^2}{n^2+1}\right\}$

2. $\left\{\frac{2n}{n^2+1}\right\}$

3. $\left\{4 - \frac{(-1)^n}{n}\right\}$

4. $\left\{\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right\}$

5. $\left\{\frac{n^2-1}{n}\right\}$

6. $\left\{\frac{e^n}{\pi^n}\right\}$

7. $\left\{\frac{e^n}{\pi^{n/2}}\right\}$

8. $\left\{\frac{(-1)^n n}{e^n}\right\}$

9. $\left\{\frac{2^n}{n^n}\right\}$

10. $\left\{\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right\}$

11. $\left\{n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\}$

12. $\left\{\frac{\operatorname{sen} n}{n}\right\}$

13. $\{1, 1, -2, 3, 3, -4, 5, 5, -6, \ldots\}$

En los Ejercicios 14-29 calcule, siempre que sea posible, los límites de las secuencias $\{a_n\}$.

14. $a_n = \frac{5-2n}{3n-7}$

15. $a_n = \frac{n^2-4}{n+5}$

16. $a_n = \frac{n^2}{n^3+1}$

17. $a_n = (-1)^n \frac{n}{n^3+1}$

18. $a_n = \frac{n^2 - 2\sqrt{n} + 1}{1 - n - 3n^2}$

19. $a_n = \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}}$

20. $a_n = n\operatorname{sen}\frac{1}{n}$

21. $a_n = \left(\frac{n-3}{n}\right)^n$

22. $a_n = \frac{n}{\ln(n+1)}$

23. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

24. $a_n = n - \sqrt{n^2 - 4n}$

25. $a_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-1}$

26. $a_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$

27. $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

28. $a_n = \frac{n^2 2^n}{n!}$

29. $a_n = \frac{\pi^n}{1 + 2^{2n}}$

30. Sea $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = \sqrt{1 + 2a_n}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) Demuestre que $\{a_n\}$ es creciente y acotada superiormente. *Sugerencia*: Demuestre que 3 es una cota superior. A partir de aquí, concluya que la secuencia converge y obtenga su límite.

***31.** Repita el Ejercicio 30 para la secuencia definida por $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \sqrt{15 + 2a_n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Esta vez tendrá que buscar una cota superior.

***32.** Sea $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, de forma que $\ln a_n = n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Utilice las propiedades de la función logaritmo para demostrar que (a) $\{a_n\}$ es creciente y (b) e es una cota superior de $\{a_n\}$.

***33.** Demuestre el Teorema 2. Formule además un teorema análogo correspondiente a secuencias definitivamente decrecientes.

34. Si $\{|a_n|\}$ está acotada, demuestre que $\{a_n\}$ está acotada.

35. Si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, demuestre que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

***36.** ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas? Justifique sus respuestas.

(a) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = L > 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$.

(b) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = 0$.

(c) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$.

(d) Si no convergen $\{a_n\}$ ni $\{b_n\}$, entonces $\{a_n b_n\}$ no converge.

(e) Si $\{|a_n|\}$ converge, entonces $\{a_n\}$ converge.

9.2 Series infinitas

Una **serie infinita**, denominada también simplemente **serie**, es una suma formal de infinitos términos; por ejemplo, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$ es una serie formada sumando los términos de la secuencia $\{a_n\}$. Esta serie se puede expresar también como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$

Por ejemplo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \cdots$$

Algunas veces es necesario o útil empezar la suma con un índice distinto de 1:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \cdots$$

Nótese que la última serie no tendría sentido si hubiéramos empezado la suma desde $n = 1$, ya que entonces el primer término habría quedado indefinido.

Cuando sea necesario, se puede cambiar el índice de la suma para que empiece en un valor diferente. Esto se hace realizando un cambio como se ilustra en el Ejemplo 3 de la Sección 5.1. Por ejemplo, utilizando el cambio $n = m - 2$, se puede reformular $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en la forma $\sum_{m=3}^{\infty} a_{m-2}$. Ambas sumas se desarrollan de la misma forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{m=3}^{\infty} a_{m-2}$$

La suma es una operación que se realiza con dos números cada vez. Si se desea calcular la suma finita $a_1 + a_2 + a_3$, se puede proceder sumando $a_1 + a_2$ y después sumando a_3 al resultado; o bien se puede sumar primero $a_2 + a_3$ y después sumar a_1 al resultado. Por supuesto, la propiedad asociativa de la suma nos asegura que obtendremos el mismo resultado de las dos formas. Esta es la razón de que la expresión simbólica $a_1 + a_2 + a_3$ tenga sentido; si no, habría que haber escrito $(a_1 + a_2) + a_3$ o $a_1 + (a_2 + a_3)$. Este razonamiento se puede ampliar a cualquier suma $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ de un número finito de términos, pero no es obvio qué queremos decir en una suma con infinitos términos:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$

No podemos asegurar que los términos que no se sumen en el mismo orden producirán el mismo resultado. De hecho, veremos en la Sección 9.4 que, en ciertas circunstancias, cambiar el orden de los términos en una serie puede cambiar realmente la suma de la serie. La interpretación que haremos de la suma infinita es la de sumar de izquierda a derecha, como sugiere el agrupamiento

$$\cdots((((a_1 + a_2) + a_3) + a_4) + a_5) + \cdots$$

Realizaremos esto definiendo una nueva secuencia $\{s_n\}$, denominada **secuencia de sumas parciales** de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, de forma que s_n es la suma de los n primeros términos de la serie:

$$\begin{aligned}
s_1 &= a_1 \\
s_2 &= s_1 + a_2 = a_1 + a_2 \\
s_3 &= s_2 + a_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\
&\vdots \\
s_n &= s_{n-1} + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Definiremos entonces la suma de una serie infinita como el límite de esta secuencia de sumas parciales.

DEFINICIÓN 3 Convergencia de una serie

Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge a la suma** s, y se escribe como

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

si $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, siendo s_n la suma parcial n-ésima de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$$

Por tanto, una *serie* converge si y sólo si la *secuencia* de sus sumas parciales converge.

De forma similar, se dice que una serie diverge a infinito, diverge a menos infinito o simplemente diverge si su secuencia de sumas parciales lo hace. Hay que hacer hincapié en que la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ depende de la convergencia de la secuencia $\{s_n\} = \{\sum_{j=1}^{n} a_j\}$, *no* de la secuencia $\{a_n\}$.

Serie geométrica

DEFINICIÓN 4 Serie geométrica

Una serie de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$, cuyo término n-ésimo es $a_n = ar^{n-1}$ se denomina **serie geométrica**. El número a es su primer término. En número r se denomina **razón común** de la serie, ya que es el valor de la razón entre el término $(n + 1)$ y el término n para todo $n \geqslant 1$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{ar^n}{ar^{n-1}} = r, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

La suma parcial n-ésima s_n de una serie geométrica se calcula como sigue:

$$s_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1}$$
$$rs_n = \qquad ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$$

La segunda ecuación se obtiene multiplicando la primera por r. Restando esas dos ecuaciones (nótense las cancelaciones), se obtiene $(1-r)s_n = a - ar^n$. Si $r \neq 1$ se puede dividir por $1-r$ y obtener una fórmula para s_n.

Sumas parciales de una serie geométrica

Si $r = 1$, entonces la n-ésima suma parcial de una serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ es $s_n = a + a + \cdots + a = na$. Si $r \neq 1$, entonces

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

Si $a = 0$, entonces $s_n = 0$ para todo n, y $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$. Supongamos ahora que $a \neq 0$. Si $|r| < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$, por lo que $\lim_{n\to\infty} s_n = a/(1-r)$. Si $r > 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$ y $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ si $a > 0$, o $\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$ si $a < 0$. Se mantiene la misma conclusión si $r = 1$, ya que en este caso $s_n = na$. Si $r \leqslant -1$, $\lim_{n\to\infty} r^n$ no existe, y tampoco existe $\lim_{n\to\infty} s_n$. Por tanto, se concluye que

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \begin{cases} \text{converge a } 0 & \text{si } a = 0 \\ \text{converge a } \dfrac{a}{1-r} & \text{si } |r| < 1 \\ \text{diverge a } \infty & \text{si } r \geqslant 1 \text{ y } a > 0 \\ \text{diverge a } -\infty & \text{si } r \geqslant 1 \text{ y } a < 0 \\ \text{diverge} & \text{si } r \leqslant -1 \text{ y } a \neq 0 \end{cases}$$

La representación de la función $1/(1-x)$ como suma de una serie geométrica,

$$\frac{1}{1-x} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad \text{para } -1 < x < 1$$

será importante en la presentación de las series de potencias posteriormente en este capítulo.

Ejemplo 1 **(Ejemplos de series geométricas y sus sumas)**

(a) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$. En este caso $a = 1$ y $r = \frac{1}{2}$.

Como $|r| < 1$, la serie converge.

(b) $\pi - e + \frac{e^2}{\pi} - \frac{e^3}{\pi^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \pi\left(-\frac{e}{\pi}\right)^{n-1}$. En este caso $a = \pi$ y $r = -\frac{e}{\pi}$.

$$= \frac{\pi}{1 - \left(-\frac{e}{\pi}\right)} = \frac{\pi^2}{\pi + e}.$$

La serie converge ya que $\left|-\frac{e}{\pi}\right| < 1$.

(c) $1 + 2^{1/2} + 2 + 2^{3/2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2})^{n-1}$. Esta serie diverge a ∞ ya que $a = 1 > 0$ y $r = \sqrt{2} > 1$.

(d) $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$. Esta serie diverge ya que $r = -1$.

(e) Sea $x = 0{,}32\ 32\ 32 \cdots = 0{,}\overline{32}$; entonces,

$$x = \frac{32}{100} + \frac{32}{100^2} + \frac{32}{100^3} + = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{32}{100}\left(\frac{1}{100}\right)^{n-1} = \frac{32}{100}\frac{1}{1 - \dfrac{1}{100}} = \frac{32}{99}.$$

Ésta es una alternativa al método del Ejemplo 1 de la Sección P.1 para representar decimales repetidos como cocientes de enteros.

Ejemplo 2 Si el dinero produce un interés con una tasa efectiva constante del 5% anual, ¿cuánto habría que poner ahora en una anualidad que produjera (a) 1000 € al final de cada uno de los 10 años siguientes y (b) 1000 € al final de cada año de aquí en adelante?

Solución Un pago de 1000 € que se va a recibir n años desde ahora tiene un valor en este momento de $1000 \times \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^n$ € (ya que A € crecería hasta valer $A(1{,}05)^n$ € en n años). Por tanto, los pagos de 1000 € al final de cada uno de los n años siguientes valen s_n € en este momento, siendo

$$\begin{aligned}
s_n &= 1000\left[\frac{1}{1{,}05} + \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^n\right] \\
&= \frac{1000}{1{,}05}\left[1 + \frac{1}{1{,}05} + \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{n-1}\right] \\
&= \frac{1000}{1{,}05}\,\frac{1 - \left(\dfrac{1}{1{,}05}\right)^n}{1 - \dfrac{1}{1{,}05}} = \frac{1000}{0{,}05}\left[1 - \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^n\right]
\end{aligned}$$

(a) El valor actual de los 10 pagos futuros es s_{10} € = 7721,73 €.

(b) El valor actual de los pagos futuros continuando para siempre es

$$\lim_{n\to\infty} s_n \text{ €} = \frac{1000 \text{ €}}{0{,}05} = 20\,000 \text{ €}$$

Series telescópicas y series armónicas

Ejemplo 3 Demuestre que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \frac{1}{4\times 5} + \cdots$$

converge y calcule su suma.

Solución Como $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, se puede escribir la suma parcial s_n en la forma

$$\begin{aligned}
s_n &= \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots
\end{aligned}$$

$$\cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

Por tanto, $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$ y la serie converge a 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Esto es un ejemplo de **serie telescópica**, denominada así porque las sumas parciales se convierten en una forma simple cuando los términos se descomponen en fracciones simples. En los ejercicios al final de esta sección se pueden encontrar otros ejemplos. Como muestran estos ejemplos, el método de descomposición en fracciones simples puede ser una herramienta de utilidad para series además de para integrales. ■

Ejemplo 4 Demuestre que la **serie armónica**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

diverge a infinito.

Solución Si s_n es la suma parcial n-ésima de la serie armónica, entonces

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$=$ suma de áreas de los rectángulos sombreados en la Figura 9.3

$>$ área bajo $y = \dfrac{1}{x}$ desde $x = 1$ hasta $x = n + 1$

$$= \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1)$$

Ahora $\lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$. Por tanto, $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \qquad \text{diverge a infinito}$$

Como la serie geométrica, la serie armónica aparecerá a menudo en las secciones siguientes.

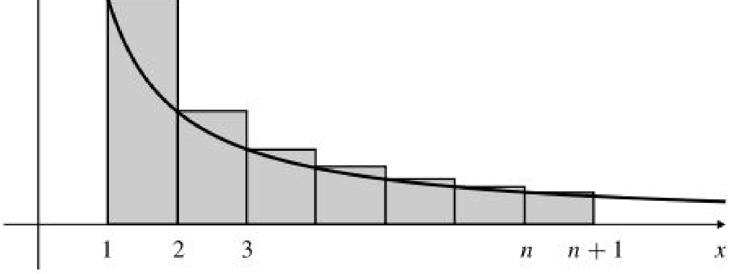

Figura 9.3 Suma parcial de la serie armónica. ■

Algunos teoremas sobre series

TEOREMA 4 Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

DEMOSTRACIÓN Si $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, entonces $s_n - s_{n-1} = a_n$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ existe, y $\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s$. Entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = s - s = 0$.

Observación El Teorema 4 es *muy importante* para la comprensión de las series infinitas. Los estudiantes muchas veces se equivocan u olvidan que *una serie no puede converger si sus términos no tienden a cero* o confunden este resultado con su *inverso*, que es falso. El inverso diría que, si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ debe converger. La serie armónica es un contraejemplo que muestra la falsedad de esta afirmación:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \text{pero} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge a infinito}$$

Al considerar si una serie dada converge, la primera cuestión a plantearse es la siguiente: «¿Tiende el término n-ésimo a 0 cuando n tiende a ∞?». Si la respuesta es *no*, entonces la serie *no* converge. Si la respuesta es *sí*, entonces la serie *puede converger o no converger*. Si la secuencia de términos $\{a_n\}$ tiende a un límite L distinto de cero, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge a infinito si $L > 0$ y diverge a menos infinito si $L < 0$.

Ejemplo 5

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$ diverge a infinito ya que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = 1/2 > 0$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \operatorname{sen}(1/n)$ un diverge, ya que

$$\lim_{n\to\infty} \left|(-1)^n n \operatorname{sen}\frac{1}{n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/n)}{1/n} = \lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \neq 0$$

El siguiente teorema afirma que es sólo el comportamiento *definitivo* de $\{a_n\}$ lo que determina si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Se puede eliminar cualquier número de términos desde el comienzo de la serie sin afectar a su convergencia; ésta depende sólo de la *cola* de la serie. Por supuesto, la suma real de la serie depende de todos sus términos.

TEOREMA 5 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ converge para cualquier entero $N \geqslant 1$.

TEOREMA 6 Si $\{a_n\}$ es definitivamente positiva, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ debe, o bien converger (si sus sumas parciales están acotadas superiormente), o bien divergir a infinito (si sus sumas parciales no están acotadas superiormente).

Las demostraciones de estos dos teoremas se dejan como ejercicios al final de esta sección. El teorema siguiente es simplemente una reformulación de las leyes estándares de los límites.

TEOREMA 7 Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergen a A y B, respectivamente, entonces
(a) $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ converge a cA (siendo c una constante cualquiera);
(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ converge a $A \pm B$;
(c) Si $a_n \leqslant b_n$ para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$, entonces $A \leqslant B$.

Ejemplo 6 Calcule la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^{n+1}}{3^n}$.

Solución La serie dada es la suma de dos series geométricas,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1/3}{1-(1/3)} = \frac{1}{2} \quad \text{y}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{4/3}{1-(2/3)} = 4$$

Por tanto, su suma es $\frac{1}{2} + 4 = \frac{9}{2}$, por el Teorema 7(b).

Ejercicios 9.2

En los Ejercicios 1-18, calcule las sumas de las series dadas, o demuestre que divergen (posiblemente a infinito o a menos infinito). Los Ejercicios 11-14 son series telescópicas y, por tanto, deben resolverse mediante descomposición en fracciones simples, como sugiere el Ejemplo 3 de esta sección.

1. $\displaystyle \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$

2. $\displaystyle 3 - \frac{3}{4} + \frac{3}{16} - \frac{3}{64} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} 3\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

3. $\displaystyle \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(2+\pi)^{2n}}$

4. $\displaystyle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{10^{3n}}$

5. $\displaystyle \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-5)^n}{8^{2n}}$

6. $\displaystyle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^n}$

7. $\displaystyle \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+3}}{e^{k-3}}$

8. $\displaystyle \sum_{j=1}^{\infty} \pi^{j/2} \cos(j\pi)$

9. $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+2^n}{2^{n+2}}$

10. $\displaystyle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3+2^n}{3^{n+2}}$

11. $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{1\times 3} + \frac{1}{2\times 4} + \frac{1}{3\times 5} + \cdots$

12. $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{1\times 3} + \frac{1}{3\times 5} + \frac{1}{5\times 7} + \cdots$

13. $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{1\times 4} + \frac{1}{4\times 7} + \frac{1}{7\times 10} + \cdots$

***14.** $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{1\times 2\times 3} + \frac{1}{2\times 3\times 4} + \frac{1}{3\times 4\times 5} + \cdots$

15. $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

16. $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}$

17. $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}$

18. $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n+1}$

19. Obtenga una expresión simple para las sumas parciales s_n de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, y utilícela para demostrar que la serie diverge.

20. Calcule la suma de la serie

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \cdots$$

21. Cuando se deja caer, una pelota elástica se eleva hasta una altura tres cuartos de la altura inicial. Si dicha altura inicial es de 2 m y se permite que la pelota rebote indefinidamente, ¿cuál es la distancia total que viaja antes de pararse?

22. Si un banco paga en una cuenta un 10% de interés simple anual, ¿cuál es el estado de la cuenta tras ocho años, si se depositan 1000 € al comienzo de cada uno de esos ocho años? Suponga que inicialmente la cuenta está vacía.

***23.** Demuestre el Teorema 5.

***24.** Demuestre el Teorema 6.

***25.** Plantee un teorema análogo al Teorema 6, pero para una secuencia negativa.

En los Ejercicios 26-31, decida si las afirmaciones dadas son verdaderas o falsas. Si son verdaderas, demuéstrelas. Si son falsas, dé un contraejemplo para demostrar su falsedad.

***26.** Si $a_n = 0$ para todo n, entonces $\sum a_n$ converge.

***27.** Si $\sum a_n$ converge, entonces $\sum (1/a_n)$ diverge a infinito.

***28.** Si tanto $\sum a_n$ como $\sum b_n$ divergen, entonces también diverge $\sum (a_n + b_n)$.

***29.** Si $a_n \geqslant c > 0$ para todo n, entonces $\sum a_n$ diverge a infinito.

***30.** Si $\sum a_n$ diverge y $\{b_n\}$ está acotada, entonces $\sum a_n b_n$ diverge.

***31.** Si tanto $a_n > 0$ como $\sum a_n$ convergen, entonces $\sum (a_n)^2$ converge.

9.3 Tests de convergencia para series positivas

En la sección anterior hemos visto algunos ejemplos de series convergentes (geométricas y telescópicas) cuyas sumas se pueden determinar de forma exacta, ya que las sumas parciales s_n se pueden expresar en forma cerrada como funciones explícitas de n cuyos límites cuando $n \to \infty$ se pueden calcular. En general, no es posible hacer siempre esto para una serie dada y por tanto, en general, no es posible determinar de forma exacta la suma de una serie. Sin embargo existen muchas técnicas para determinar si una serie dada converge y, si lo hace, para aproximar su suma con cualquier grado deseado de precisión.

En esta sección consideraremos exclusivamente *series positivas*, es decir, series de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

siendo $a_n \geqslant 0$ para todo $n \geqslant 1$. Como se indicó en el Teorema 6, una serie convergerá si su suma parcial está acotada superiormente y divergirá a infinito en otro caso. Todos nuestros resultados se aplican también a series *definitivamente* positivas, ya que la convergencia o divergencia depende sólo de las *colas* de las series.

El test de la integral

El test de la integral proporciona una forma de determinar si una serie definitivamente positiva converge o diverge, comparándola con una integral impropia de comportamiento similar.

El Ejemplo 4 de la Sección 9.2 es un ejemplo del uso de esta técnica. Formalizaremos el método con el siguiente teorema.

TEOREMA 8 El test de la integral

Supongamos que $a_n = f(n)$, siendo f positiva, continua y no decreciente en un intervalo $[N, \infty)$ para algún entero positivo N. Entonces,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{y} \quad \int_N^{\infty} f(t)\,dt$$

ambas convergen o divergen a infinito.

DEMOSTRACIÓN Sea $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Si $n > N$, tenemos que

$$\begin{aligned} s_n &= s_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots + a_n \\ &= s_N + f(N+1) + f(N+2) + \cdots + f(n) \\ &= s_N + \text{suma de las áreas de los rectángulos sombreadas en la Figura 9.4(a)} \\ &\leqslant s_N + \int_N^{\infty} f(t)\,dt \end{aligned}$$

Si la integral impropia $\int_N^\infty f(t)\,dt$ converge, entonces la secuencia $\{s_n\}$ está acotada superiormente y $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge.

A la inversa, supongamos que $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge a la suma s. Entonces,

$$\begin{aligned}\int_N^\infty f(t)\,dt &= \text{área bajo } y = f(t), \text{ por encima de } y = 0 \text{ y desde } t = N \text{ hasta } t = \infty\\ &\leqslant \text{suma de las áreas de los rectángulos sombreados en la Figura 9.4(b)}\\ &= a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots\\ &= s - s_{N-1} < \infty\end{aligned}$$

por lo que la integral impropia representa un área finita y, por tanto, es convergente (omitiremos los detalles restantes para demostrar que $\lim_{R\to\infty} \int_N^R f(t)\,dt$ existe; como en el caso de las series, el argumento se basa en la completitud de los números reales).

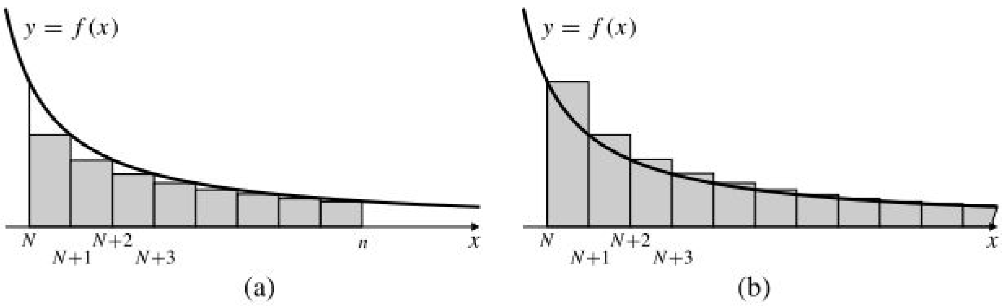

Figura 9.4

Observación Si $a_n = f(n)$, siendo f una función positiva, continua y no decreciente en el intervalo $[1, \infty)$, entonces el Teorema 8 nos asegura que $\sum_{n=1}^\infty a_n$ y $\int_1^\infty f(x)\,dx$ convergen ambas o divergen ambas a infinito. *No* nos dice que la suma de las series sea igual al valor de la integral. Probablemente no tendrán el mismo valor en el caso de convergencia. Sin embargo, como veremos posteriormente, las integrales pueden ayudarnos a aproximar la suma de una serie.

El principal uso del test de la integral es establecer el resultado del siguiente ejemplo, referente a la serie $\sum_{n=1}^\infty n^{-p}$, denominada **serie *p*** Este resultado debe memorizarse; en esta sección y en secciones posteriores compararemos frecuentemente el comportamiento de otras series con la serie p.

Ejemplo 1 **(Serie *p*)** Demuestre que

$$\sum_{n=1}^\infty n^{-p} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} \begin{cases}\text{converge si } p > 1\\ \text{diverge a infinito si } p \leqslant 1\end{cases}$$

Solución Obsérvese que si $p > 0$, entonces $f(x) = x^{-p}$ es positiva, continua y decreciente en el intervalo $[1, \infty)$. Por el test de la integral, la serie p converge para $p > 1$ y diverge para $0 < p \leqslant 1$, por comparación con $\int_1^\infty x^{-p}\,dx$ (*véase* el Teorema 2(a) de la Sección 6.5). Si $p \leqslant 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} (1/n^p) \neq 0$, por lo que en este caso la serie no puede converger. Al ser una serie positiva, debe divergir a infinito.

Observación La serie armónica $\sum_{n=1}^\infty n^{-1}$ (el caso $p = 1$ de serie p) está en la frontera entre la convergencia y la divergencia, aunque de hecho diverge. Si bien sus términos tienden a 0 cuando n crece, no decrecen lo suficientemente rápido para permitir que la suma de la serie sea finita. Si $p > 1$, los términos de $\sum_{n=1}^\infty n^{-p}$ tienden a cero lo suficientemente rápido para que su suma sea finita. Podemos refinar la distinción entre convergencia y divergencia en $p = 1$ utilizando términos que disminuyan más rápido que $1/n$, pero no tan rápido como $1/n^q$ para todo

$q > 1$. Si $p > 0$, los términos $1/(n(\ln n)^p)$ tienen esta propiedad, ya que $\ln n$ crecen más lentamente que cualquier potencia positiva de n cuando n crece. La pregunta que surge ahora es si $\sum_{n=2}^{\infty} 1/(n(\ln n)^p)$ converge. Lo hace, suponiendo de nuevo que $p > 1$; para comprobarlo se puede utilizar el cambio $u = \ln x$

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{du}{u^p}$$

que converge si $p > 1$ y diverge si $0 < p \leqslant 1$. Este proceso de ajuste fino se puede llevar más allá (*véase* el Ejercicio 36 posterior).

Uso de cotas de integrales para estimar la suma de una serie

Supongamos que $a_k = f(k)$ para $k = n + 1,\ n + 2,\ n + 3, \ldots$, siendo f una función positiva, continua y decreciente al menos en el intervalo $[n, \infty)$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} s - s_n &= \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \\ &= \text{suma de las áreas de los rectángulos sombreados en la Figura 9.5(a)} \\ &\leqslant \int_n^{\infty} f(x)\,dx \end{aligned}$$

De forma similar,

$$\begin{aligned} s - s_n &= \text{suma de las áreas de los rectángulos de la Figura 9.5(b)} \\ &\geqslant \int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \end{aligned}$$

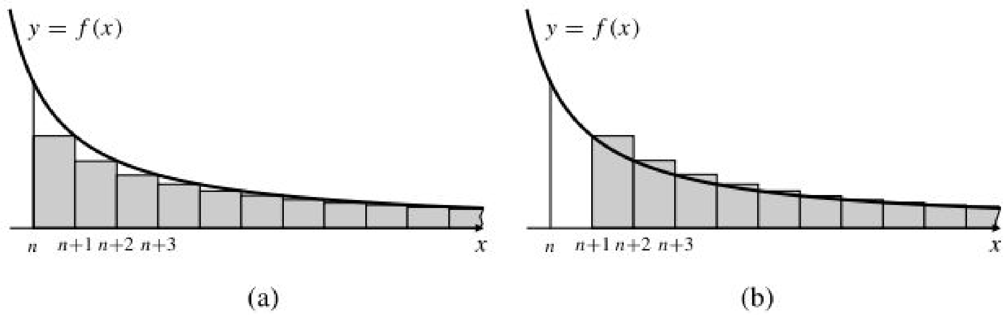

Figura 9.5

Si definimos

$$A_n = \int_n^{\infty} f(x)\,dx$$

entonces podemos combinar las inecuaciones anteriores para obtener

$$A_{n+1} \leqslant s - s_n \leqslant A_n$$

o, en otros términos,

$$s_n + A_{n+1} \leqslant s \leqslant s_n + A_n$$

El error en la aproximación $s \approx s_n$ cumple $0 \leqslant s - s_n \leqslant A_n$. Sin embargo, como s debe pertenecer al intervalo $[s_n + A_{n+1},\ s_n + A_n]$, podemos mejorar la estimación utilizando el punto medio s_n^* de este intervalo como aproximación de s. El error será entonces menor que la mitad de la longitud $A_n - A_{n+1}$ del intervalo:

Una aproximación integral mejorada

El error $|s - s_n^*|$ en la aproximación

$$s \approx s_n^* = s_n + \frac{A_{n+1} + A_n}{2}, \qquad \text{siendo} \qquad A_n = \int_n^\infty f(x)\,dx$$

cumple $|s - s_n^*| \leqslant \dfrac{A_n - A_{n+1}}{2}$.

Siempre que se sabe que una cantidad pertenece un cierto intervalo, el punto medio dicho intervalo se puede utilizar para aproximar dicha cantidad, y el valor absoluto del error no será nunca superior a la semiamplitud del intervalo.

Ejemplo 2 Calcule la mejor aproximación s_n^* a la suma s de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$, haciendo uso de la suma parcial s_n de los n primeros términos. ¿Cuánto tendría que valer n para asegurar que la aproximación $s \approx s_n^*$ tiene un error menor que 0.001 en valor absoluto? ¿Cuánto tendría que valer n para asegurar que la aproximación $s \approx s_n$ tiene un error menor que 0.001 en valor absoluto?

Solución Como $f(x) = 1/x^2$ es positiva, continua y decreciente en el intervalo $[1, \infty)$ para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$, tenemos que

$$s_n + A_{n+1} \leqslant s \leqslant s_n + A_n$$

siendo

$$A_n = \int_n^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\bigg|_n^R = \frac{1}{n}$$

La mejor aproximación a s utilizando s_n es

$$\begin{aligned} s_n^* &= s_n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right) = s_n + \frac{2n+1}{2n(n+1)} \\ &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{2n+1}{2n(n+1)} \end{aligned}$$

El error en esta aproximación cumple

$$|s - s_n^*| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2n(n+1)} \leqslant 0.001$$

suponiendo que $2n(n+1) \geqslant 1/0.001 = 1000$. Se puede comprobar fácilmente que esta condición se cumple si $n \geqslant 22$; la aproximación

$$s \approx s_{22}^* = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{22^2} + \frac{45}{44 \times 23}$$

tendrá un error cuyo valor absoluto no superará 0.001. Si hubiéramos utilizado la aproximación $s \approx s_n$, sólo podríamos haber concluido que

$$0 \leqslant s - s_n \leqslant A_n = \frac{1}{n} < 0.001$$

suponiendo que $n > 1000$; se necesitarían 1000 términos de la serie para obtener la precisión deseada. ■

Tests de comparación

El siguiente test que vamos a considerar para series positivas es análogo al teorema de comparación de integrales impropias (*véase* el Teorema 3 de la Sección 6.5). Hace posible determinar la convergencia o divergencia de una serie comparándola con otra serie de convergencia o divergencia conocida.

TEOREMA 9 **Un test de comparación**

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ secuencias para las que existe una constante positiva K tal que, definitivamente, $0 \leqslant a_n \leqslant Kb_n$.

(a) Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces también lo hace la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(b) Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge a infinito, entonces también lo hace la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

DEMOSTRACIÓN Como una serie converge si y sólo si su cola converge (Teorema 5), podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que la condición $0 \leqslant a_n \leqslant Kb_n$ se cumple para todo $n \geqslant 1$. Sean $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ y $S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$. Entonces $s_n \leqslant KS_n$. Si $\sum b_n$ converge, entonces $\{S_n\}$ es convergente y, por tanto, acotada por el Teorema 1. Por tanto, $\{s_n\}$ está acotada superiormente. Por el Teorema 6, $\sum a_n$ converge. Como la convergencia de $\sum b_n$ garantiza la de $\sum a_n$, si la última serie diverge a infinito, entonces la primera no puede converger, por lo que debe divergir también a infinito.

¡¡ ATENCIÓN !! El Teorema 9 *no* dice que si $\sum a_n$ converge, entonces $\sum b_n$ converge. Es posible que la suma *más pequeña* sea finita y que la suma *más grande* sea infinita (no debe confundirse un teorema con su inverso).

Ejemplo 3 ¿Cuáles de las siguientes series convergen? Justifique sus respuestas.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3+1}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

Solución Para cada caso hay que encontrar una serie de comparación adecuada, que ya sepamos que converge o diverge.

(a) Como $0 < \dfrac{1}{2^n+1} < \dfrac{1}{2^n}$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, y como $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ es una serie geométrica convergente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n+1}$ también converge por comparación.

(b) Obsérvese que $\dfrac{3n+1}{n^3+1}$ se comporta como $\dfrac{3}{n^2}$ para n grande, por lo que podemos comparar esta serie con la serie p convergente $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$. Tenemos, para $n \geqslant 1$,

$$\frac{3n+1}{n^3+1} = \frac{3n}{n^3+1} + \frac{1}{n^3+1} < \frac{3n}{n^3} + \frac{1}{n^3} < \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{4}{n^2}$$

Por tanto, la serie dada converge por el Teorema 9.

(c) Para $n = 2, 3, 4, \ldots$, tenemos que $0 < \ln n < n$. Por tanto, $\dfrac{1}{\ln n} > \dfrac{1}{n}$. Como $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ diverge a infinito (es una serie armónica), también lo hace $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln n}$ por comparación.

El teorema siguiente proporciona una versión del test de comparación que no es tan general como el Teorema 9, pero que muchas veces es más fácil de aplicar en casos específicos.

TEOREMA 10 **Un test de comparación en el límite**

Supongamos que $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son secuencias positivas y que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

Siendo L un número finito no negativo o $+\infty$.

(a) Si $L < \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge.
(b) Si $L > 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge a infinito, entonces también lo hace $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

DEMOSTRACIÓN Si $L < \infty$, entonces para n suficientemente grande, tenemos que $b_n > 0$ y

$$0 \leqslant \frac{a_n}{b_n} \leqslant L + 1$$

por lo que $0 \leqslant a_n \leqslant (L+1)b_n$. Entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, por el Teorema 9(a).

Si $L > 0$, entonces, para n suficientemente grande,

$$\frac{a_n}{b_n} \geqslant \frac{L}{2}$$

por tanto, $0 < b_n \leqslant (2/L) a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y diverge a infinito si lo hace $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, por el Teorema 9(b).

Ejemplo 4 ¿Cuáles de las siguientes series convergen? Justifique sus respuestas.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^3 - 2n + 3}$

Solución De nuevo debemos escoger apropiadamente las series de comparación.

(a) Los términos de esta serie disminuyen como $1/\sqrt{n}$. Obsérvese que

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{1+\sqrt{n}}}{\dfrac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1/\sqrt{n}) + 1} = 1$$

Como la serie p $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge a infinito ($p = 1/2$), también lo hace la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1+\sqrt{n}}$, por la prueba de comparación en el límite.

(b) Para n grande, los términos se comportan como n/n^3, por lo que podemos comparar la serie con la serie p $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$, que sabemos que converge.

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n+5}{n^3 - 2n + 3}}{\dfrac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + 5n^2}{n^3 - 2n + 3} = 1$$

Como $L < \infty$, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^3 - 2n + 3}$ también converge por la prueba de comparación en el límite.

Para aplicar con éxito la versión original del test de comparación (Teorema 9), es importante intuir si la serie dada converge o diverge. La forma de la comparación dependerá de si estamos intentando demostrar la convergencia o la divergencia. Por ejemplo, si no intuimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{100n + 20\,000}$$

diverge a infinito, podríamos intentar demostrar que

$$\frac{1}{100n + 20\,000} < \frac{1}{n} \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Aunque eso es cierto, no sirve de nada. $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverge a infinito; por tanto, el Teorema 9 no nos da información para esta comparación. Por supuesto, podríamos demostrar que

$$\frac{1}{100n + 20\,000} \geqslant \frac{1}{20\,100n} \qquad \text{si } n \geqslant 1$$

y concluir por el Teorema 9 que $\sum_{n=1}^{\infty} (1/(100n + 20\,000))$ diverge a infinito por comparación con la serie divergente $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$. Una forma más fácil es utilizar el Teorema 10 y el hecho de que

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{100n + 20\,000}}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{100n + 20\,000} = \frac{1}{100} > 0$$

Sin embargo, el test de comparación en el límite del Teorema 10 tiene una desventaja cuando se compara con el test de comparación ordinaria del Teorema 9. Puede fallar en ciertos casos porque el límite L puede no existir. En tales casos es posible que el test de comparación ordinario sirva todavía.

Ejemplo 5 Compruebe la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \operatorname{sen} n}{n^2}$.

Solución Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1 + \operatorname{sen} n}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} (1 + \operatorname{sen} n)$$

no existe, el test de comparación en el límite no nos da información. Sin embargo, como $n \leqslant 1$, tenemos que

$$0 \leqslant \frac{1 + \operatorname{sen} n}{n^2} \leqslant \frac{2}{n^2} \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

La serie dada converge, de hecho, por comparación con $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$, utilizando el test de comparación ordinario.

Tests de la razón y de la raíz

TEOREMA 11 **Test la razón**

Supongamos que $a_n > 0$ (definitivamente) y que $\rho = \lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ existe o es $+\infty$.

(a) Si $0 \leqslant \rho < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(b) Si $1 < \rho \leqslant \infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge a infinito.

(c) Si $\rho = 1$, no se tiene información; la serie puede converger o divergir a infinito.

DEMOSTRACIÓN Aquí, ρ es la letra griega «rho» minúscula (que se pronuncia «ro»).

(a) Supongamos que $\rho < 1$. Selecciónese un número r tal que $\rho < r < 1$. Como sabemos que $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = \rho$, tenemos que $a_{n+1}/a_n \leqslant r$ para n suficientemente grande; es decir, $a_{n+1} \leqslant ra_n$ para, por ejemplo, $n \geqslant N$. En particular,

$$\begin{aligned} a_{N+1} &\leqslant ra_N \\ a_{N+2} &\leqslant ra_{N+1} \leqslant r^2 a_N \\ a_{N+3} &\leqslant ra_{N+2} \leqslant r^3 a_N \\ &\vdots \\ a_{N+k} &\leqslant r^k a_N \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots) \end{aligned}$$

Entonces, $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ converge por comparación con la serie geométrica convergente $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$. Se deduce entonces que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{N-1} a_n + \sum_{n=N}^{\infty} a_n$ debe también converger.

(b) En este caso, supongamos que $\rho > 1$. Selecciónese un número r tal que $1 < r < \rho$. Como $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = \rho$, tenemos que $a_{n+1}/a_n \geqslant r$ para n suficientemente grande, por ejemplo, $n \geqslant N$. Se supone que N se escoge lo suficientemente grande para que $a_N > 0$. Utilizando un argumento similar al del apartado (a), se deduce que $a_{N+k} \geqslant r^k a_N$ para $k = 0, 1, 2, \ldots$, y como $r > 1$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge a infinito.

(c) Si ρ se calcula para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$, se obtiene en ambos casos $\rho = 1$. Como la primera serie diverge a infinito y la segunda converge, la prueba de la razón no puede distinguir entre convergencia y divergencia si $\rho = 1$.

Todas las series p caen en la categoría indefinida de $\rho = 1$, como también $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, siendo a_n cualquier función racional de n. El test de la razón es de mayor utilidad en el caso de series cuyos términos decrezcan como mínimo exponencialmente rápido. La presencia de factoriales en algún término sugiere también que el test de la razón puede ser de utilidad.

Ejemplo 6 Compruebe la convergencia de las siguientes series:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{99^n}{n!}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$, (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

Solución En cada una de ellas utilizaremos el test de la razón.

(a) $\displaystyle\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{99^{n+1}}{(n+1)!}\bigg/\frac{99^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{99}{n+1} = 0 < 1.$

Por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} (99^n/n!)$ converge.

(b) $\displaystyle\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^5}{2^{n+1}}\bigg/\frac{n^5}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^5 = \frac{1}{2} < 1.$

Por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} (n^5/2^n)$ converge.

(c) $$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \Big/ \frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\, n^n}{(n+1)^{n+1}\, n!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1.$$

Por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} (n!/n^n)$ converge.

(d) $$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2} \Big/ \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4 > 1.$$

Por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} (2n)!/(n!)^2$ diverge a infinito.

El teorema siguiente es muy similar al test de la razón, pero se utiliza menos frecuentemente. Su demostración se deja como ejercicio (*véase* el Ejercicio 37). Los Ejercicios 38 y 39 presentan ejemplos de series donde se puede aplicar.

TEOREMA 12 **Test de la raíz**

Supongamos que $a_n > 0$ (definitivamente) y que $\sigma = \lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n}$ existe o es $+\infty$.

(a) Si $0 \leqslant \sigma < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(b) Si $1 < \sigma \leqslant \infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge a infinito.

(c) Si $\sigma = 1$, esta prueba no da información; la serie puede converger o divergir a infinito.

Uso de cotas de la serie geométrica para estimar la suma de una serie

Supongamos que una inecuación de la forma

$$0 \leqslant a_k \leqslant Kr^k$$

se cumple para $k = n+1,\ n+2,\ n+3,\ \ldots$, siendo K y r constantes y $r < 1$. Entonces podemos utilizar una serie geométrica para acotar la cola de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$$0 \leqslant s - s_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} Kr^k$$
$$= Kr^{n+1}(1 + r + r^2 + \cdots)$$
$$= \frac{Kr^{n+1}}{1-r}$$

Como $r < 1$, la serie converge y el error tiende a 0 con una velocidad exponencial cuando n crece.

Ejemplo 7 En la Sección 9.6 demostraremos que

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Recuérdese que $0! = 1$. Estime el error si la suma s_n de los n primeros términos de la serie se utiliza para aproximar el número e. Calcule el valor de e con una precisión de tres cifras decimales utilizando esta serie.

Solución Tenemos que

$$
\begin{aligned}
s_n &= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}
\end{aligned}
$$

Como la serie comienza con el término correspondiente a $n = 0$, el término n-ésimo es $1/(n-1)!$. El error de la aproximación $s \approx s_n$ se puede estimar como sigue:

$$
\begin{aligned}
0 < s - s_n &= \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots \\
&= \frac{1}{n!}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots\right) \\
&< \frac{1}{n!}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots\right)
\end{aligned}
$$

ya que $n + 2 > n + 1$, $n + 3 > n + 1$, y así sucesivamente. La última serie es geométrica, por lo que

$$
0 < s - s_n < \frac{1}{n!} \frac{1}{1 - \dfrac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n!\, n}
$$

Si se desea estimar e con una precisión de tres cifras decimales, entonces hay que asegurar que el error es menor que 5 en la cuarta cifra decimal, es decir, el error es menor que 0.0005. Entonces deseamos que

$$
\frac{n+1}{n} \frac{1}{n!} < 0.0005 = \frac{1}{2000}
$$

Como $7! = 5040$ pero $6! = 720$, se puede utilizar $n = 7$, pero no más pequeño. Tenemos que

$$
\begin{aligned}
e \approx s_7 &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \\
&= 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} \approx 2.718 \text{ con 3 cifras decimales de precisión}
\end{aligned}
$$

■

Es apropiado utilizar series geométricas para acotar las colas de series positivas cuya convergencia se podría demostrar por el test de la razón. Esas series convergerán definitivamente más rápido que cualquier serie p $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$, para la que la razón límite es $\rho = 1$.

Ejercicios 9.3

En los Ejercicios 1-26, determine si las series dadas convergen o divergen utilizando el test apropiado. Las series p y las series geométricas se pueden utilizar para tests de comparación. Tenga cuidado con las series cuyos términos no tienden a cero.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4-2}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+n+1}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\operatorname{sen}\frac{1}{n^2}\right|$

6. $\displaystyle\sum_{n=8}^{\infty} \frac{1}{\pi^n+5}$

7. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^3}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(3n)}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^n - n^\pi}$

10. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n}{2+n}$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^{4/3}}{2+n^{5/3}}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+n\sqrt{n}}$

13. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln n\sqrt{\ln\ln n}}$

14. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^2}$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^4}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{\sqrt{n}}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(n+1)}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n!}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2 e^n}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!6^n}{(3n)!}$

21. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{3^n \ln n}$

22. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{100}2^n}{\sqrt{n!}}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^3}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n!}{(1+n)!}$

25. $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{2^n}{3^n - n^3}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\pi^n n!}$

En los Ejercicios 27-30, utilice s_n y cotas integrales para calcular el mínimo intervalo que pueda asegurar que contiene a la suma s de las series. Si se usa el punto medio de este intervalo s_n^* para aproximar s, ¿cuál debería ser el valor de n para asegurar que el error es menor que 0.001?

27. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$

28. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$

29. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$

30. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+4}$

Para cada una de las series positivas de los Ejercicios 31-34, calcule la mejor cota superior que pueda para el error $s - s_n$ producido si la suma parcial s_n se utiliza para aproximar la suma s de las series. ¿Cuántos términos de cada serie serían necesarios para asegurar que la aproximación tiene un error menor que 0.001?

31. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k k!}$

32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!}$

33. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!}$

34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

35. Utilice el test de la integral para demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ converge. Demuestre que la suma s de la serie es menor que $\pi/2$.

***36.** Demuestre que $\sum_{n=3}^{\infty} (1/(n \ln n (\ln \ln n)^p)$ converge si y sólo si $p > 1$. Generalice este resultado a series de la forma

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln \ln n) \cdots (\ln_j n)(\ln_{j+1} n)^p}$$

siendo $\ln_j n = \underbrace{\ln \ln \ln \ln \cdots \ln}_{j \ln' s} n$.

***37.** Demuestre el test de la raíz. *Sugerencia*: Siga los pasos de la demostración del test de la razón.

38. Utilice el test de la raíz para demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n}$ converge.

***39.** Utilice el test de la raíz para comprobar la convergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

40. Repita el Ejercicio 38, pero utilice el test de la razón en vez del test de la raíz.

***41.** Intente utilizar el test de la razón para determinar si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}$ converge. ¿Qué sucede? Observe ahora que

$$\begin{aligned} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} &= \frac{[2n(2n-2)(2n-4)\cdots 6 \times 4 \times 2]^2}{2n(2n-1)(2n-2)\cdots 4 \times 3 \times 2 \times 1} \\ &= \frac{2n}{2n-1} \times \frac{2n-2}{2n-3} \times \cdots \times \frac{4}{3} \times \frac{2}{1} \end{aligned}$$

¿Converge la serie dada? ¿Por qué o por qué no?

***42.** Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$ converge. *Sugerencia*: Proceda como en el Ejercicio 41. Demuestre que $a_n \geqslant 1/(2n)$.

***43.** (a) Demuestre que si $k > 0$ y n es un entero positivo, entonces $n < \frac{1}{k}(1+k)^n$.

(b) Utilice el resultado de (a) con $0 < k < 1$ para obtener una cota superior de la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n/2^n$. ¿Para qué valor de k es mínima esta cota?

(c) Si se usa la suma s_n de los n primeros términos para aproximar la suma s de la serie del apartado (b), obtenga una cota superior del error $s - s_n$ utilizando la inecuación de apartado (a). Para un n dado, calcule el valor de k que minimiza esta cota superior.

***44.** **(Mejora de la convergencia de una serie)** Sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n(n+1)) = 1$ (*véase* el Ejemplo 3 de la Sección 9.2). Como

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n(n+1)} + c_n, \quad \text{siendo} \quad c_n = \frac{1}{n^2(n+1)}$$

tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n$.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge más rápidamente que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ porque sus términos disminuyen como $1/n^3$. Por tanto, se necesitarán menos términos de esa serie para calcular $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ con cualquier grado deseado de precisión, que los que serían necesarios si se calculara con $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ directamente. Utilizando cotas integrales superior e inferior, determine un valor de n para el que la suma parcial modificada s_n^* de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ se aproxima a la suma de esa serie con error menor que 0,001 en valor absoluto. A partir de aquí, determine $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ con una precisión de 0,001 respecto a su verdadero valor.

La técnica presentada en este ejercicio se conoce con el nombre de *mejora de la convergencia* de una serie. Se puede aplicar para estimar la suma de $\sum a_n$ si se conoce la suma de $\sum b_n$ y si $a_n - b_n = c_n$, cuando $|c_n|$ decrece más rápido que $|a_n|$ cuando n tiende a infinito.

45. Considere la serie $s = \sum_{n=1}^{\infty} 1/(2^n + 1)$, y la suma parcial s_n de sus primeros n términos.

(a) ¿Cuánto tendría que valer n para asegurar que el error de la aproximación $s \approx s_n$ es menor que 0,001 en valor absoluto?

(b) La serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$ converge a 1. Si

$$b_n = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n + 1}$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$, ¿cuántos términos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son necesarios para calcular su suma con una precisión de 0,001?

(c) Utilice el resultado del apartado (b) para calcular $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(2^n + 1)$ con una precisión de 0,001.

9.4 Convergencia absoluta y condicional

Todas las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ consideradas en la sección anterior eran definitivamente positivas; es decir, $a_n \geqslant 0$ para n suficientemente grande. Ahora eliminaremos esta restricción y permitiremos que los términos a_n tomen valores reales arbitrarios. Sin embargo, siempre podemos obtener una serie positiva a partir de cualquier serie dada sustituyendo todos los términos por sus valores absolutos.

DEFINICIÓN 5 Convergencia absoluta

Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **absolutamente convergente** si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

La serie

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - \cdots$$

converge absolutamente ya que

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$$

converge. Parece razonable pensar que la primera serie debe converger, y su suma s debería cumplir $-S \leqslant s \leqslant S$. En general, la cancelación que se produce cuando algunos términos son negativos y otros positivos hace *más fácil* que una serie converja que en el caso de que todos los términos sean del mismo signo. El siguiente teorema permite verificar esta afirmación.

TEOREMA 13 Si una serie converge absolutamente, entonces converge.

DEMOSTRACIÓN Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutamente convergente, y sea $b_n = a_n + |a_n|$ para todo n. Como $-|a_n| \leqslant a_n \leqslant |a_n|$, tenemos que $0 \leqslant b_n \leqslant 2|a_n|$ para todo n. Por lo tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge por el test de comparación. Entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ también converge.

¡¡ ATENCIÓN !! Aunque la convergencia absoluta implica convergencia, la convergencia *no* implica convergencia absoluta.

De nuevo hay que tener cuidado con no confundir la afirmación del Teorema 13 con la afirmación inversa, que es falsa. Pronto demostraremos en esta sección que la **serie armónica alternante**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

converge, aunque no converge absolutamente. Si sustituimos todos los términos por sus valores absolutos, se obtiene la serie armónica divergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \infty$$

DEFINICIÓN 6 Convergencia condicional

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, pero no absolutamente convergente, se dice que es **condicionalmente convergente** o que **converge condicionalmente**.

La serie armónica alternante es un ejemplo de una serie condicionalmente convergente.

Los tests de comparación, el test de la integral y el test de la razón se pueden utilizar para comprobar la convergencia absoluta. Se deben aplicar a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Para el caso del test de la razón se calcula $\rho = \lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|$. Si $\rho < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente. Si $\rho > 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$, por lo que tanto $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ deben divergir. Si $\rho = 1$, no tenemos información; la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ puede converger absolutamente, puede converger condicionalmente o puede divergir.

Ejemplo 1 Compruebe la convergencia absoluta de las series siguientes:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos(n\pi)}{2^n}$.

Solución

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right| \bigg/ \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} > 0$. Como la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)$ diverge a infinito, el test de comparación nos asegura que $\sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^{n-1}/(2n-1))$ no converge absolutamente.

(b) $\displaystyle\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)\cos((n+1)\pi)}{2^{n+1}} \bigg/ \frac{n\cos(n\pi)}{2^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1.$

Obsérvese que $\cos(n\pi)$ no es más que otra forma de escribir $(-1)^n$. Por consiguiente (test de la razón), $\sum_{n=1}^{\infty} ((n\cos(n\pi))/2^n)$ converge absolutamente.

El test de la serie alternante

No podemos utilizar ninguno de los tests desarrollados anteriormente para demostrar que la serie armónica alternante converge; todos esos tests se aplican sólo a series (definitivamente) positivas, por lo que solamente se puede comprobar la convergencia absoluta. Demostrar la convergencia que no es absoluta es en general más difícil. Presentaremos sólo un test que puede servir para comprobar esa convergencia; este test sólo se puede usar en una clase muy especial de series.

TEOREMA 14 Test de series alternantes

Supongamos que $\{a_n\}$ es una secuencia cuyos términos satisfacen, para algún entero positivo N,

(i) $a_n a_{n+1} < 0$ para $n \geqslant N$

(ii) $|a_{n+1}| \leqslant |a_n|$ para $n \geqslant N$, y

(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

es decir, los términos son definitivamente alternantes en signo y de tamaño decreciente, y la secuencia tiene como límite cero. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

DEMOSTRACIÓN Podemos asumir sin pérdida de generalidad $N = 1$, ya que la convergencia sólo depende de la cola de la serie. Asumimos también $a_1 > 0$, ya que la demostración si $a_1 < 0$ es similar. Si $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ es la suma parcial n-ésima de la serie, a partir de la alternancia de $\{a_n\}$ se deduce que $a_{2n+1} > 0$ y $a_{2n} < 0$ para todo n. Como los términos disminuyen de tamaño, $a_{2n+1} \geqslant -a_{2n+2}$. Por tanto, $s_{2n+2} = s_{2n} + a_{2n+1} + a_{2n+2} \geqslant s_{2n}$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ Las sumas parciales pares $\{s_{2n}\}$ forman una secuencia creciente. De forma similar, $s_{2n+1} = s_{2n-1} + a_{2n} + a_{2n+1} \leqslant s_{2n-1}$, por lo que las sumas parciales impares $\{s_{2n-1}\}$ forman una secuencia decreciente. Como $s_{2n} = s_{2n-1} + a_{2n} \leqslant s_{2n-1}$, se puede decir, para todo n, que

$$s_2 \leqslant s_4 \leqslant s_6 \leqslant \cdots \leqslant s_{2n} \leqslant s_{2n-1} \leqslant s_{2n-3} \leqslant \cdots \leqslant s_5 \leqslant s_3 \leqslant s_1$$

Por tanto, s_2 es una cota inferior de la secuencia decreciente $\{s_{2n-1}\}$, y s_1 es una cota superior de la secuencia creciente $\{s_{2n}\}$. Por tanto, ambas secuencias convergen por la completitud de los números reales:

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n-1} = s_{\text{impar}}, \qquad \lim_{n\to\infty} s_{2n} = s_{\text{par}}$$

Ahora $a_{2n} = s_{2n-1} - s_{2n}$, por lo que $0 = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} (s_{2n-1} - s_{2n}) = s_{\text{impar}} - s_{\text{par}}$. Por tanto, $s_{\text{impar}} = s_{\text{par}} = s$, por ejemplo. Todas las sumas parciales s_n son de la forma s_{2n-1} o de la forma s_{2n}. Por tanto, $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ existe y la serie $\sum (-1)^{n-1} a_n$ converge a esta suma s.

¡¡ ATENCIÓN !! Lea despacio esta demostración y piense por qué cada afirmación es cierta.

Observación La demostración del Teorema 14 prueba que la suma s de la serie siempre está entre dos sumas parciales consecutivas de la serie:

$$\text{o bien } s_n < s < s_{n+1} \qquad \text{o bien} \qquad s_{n+1} < s < s_n$$

Esto demuestra el siguiente teorema.

TEOREMA 15 **Estimación del error en series alternantes**

Si la secuencia $\{a_n\}$ cumple las condiciones del test de las series alternantes (Teorema 14), de forma que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge a la suma s, entonces el error en la aproximación $s \approx s_n$ (siendo $n \geqslant N$) tiene el mismo signo que el primer término omitido $a_{n+1} = s_{n+1} - s_n$, y su tamaño no es mayor que el de dicho término:

$$|s - s_n| \leqslant |s_{n+1} - s_n| = |a_{n+1}|$$

Ejemplo 2 ¿Cuántos términos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+2^n}$ son necesarios para calcular su suma con un error menor que 0.001?

Solución Esta serie cumple las hipótesis del Teorema 15. Si utilizamos la suma parcial de los n primeros términos para aproximar la suma de la serie, el error cumplirá

$$|\text{error}| \leqslant |\text{primer término emitido}| = \frac{1}{1+2^{n+1}}$$

Este error será menor que 0.001 si $1 + 2^{n+1} > 1000$. Como $2^{10} = 1024$, $n + 1 = 10$ servirá. Serán necesarios 9 términos de la serie para calcular la suma con un margen de 0.001 respecto a su valor real. ■

Cuando se determina la convergencia de una serie dada, es mejor considerar primero si la serie converge absolutamente. Si no lo hace, entonces queda todavía la posibilidad de convergencia condicional.

Ejemplo 3 Compruebe la convergencia absoluta y condicional de las siguientes series:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\ln n}$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^4}$.

Solución Los valores absolutos de los términos de las series (a) y (b) son, respectivamente, $1/n$ y $1/(\ln n)$. Como $1/(\ln n) > 1/n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverge a infinito, ninguna de las series (a) o (b) converge absolutamente. Sin embargo, ambas series cumplen los requisitos del Teorema 14 y, por tanto, ambas convergen. Cada una de esas dos series es condicionalmente convergente.

La serie (c) es absolutamente convergente porque $|(-1)^{n-1}/n^4| = 1/n^4$, y $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4$ es una serie p convergente ($p = 4 > 1$). Podríamos establecer su convergencia utilizando el Teorema 14, pero no hay necesidad de hacerlo ya que toda serie absolutamente convergente es convergente (Teorema 13). ■

Ejemplo 4 ¿Para qué valores de x converge absolutamente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n2^n}$? ¿Para qué valores converge condicionalmente? ¿Para qué valores diverge?

Solución En las series en cuyos términos aparecen funciones de una variable x es mejor, en general, empezar probando la convergencia absoluta con el test de la razón. Tenemos que

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-5)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} \Big/ \frac{(x-5)^n}{n2^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \left| \frac{x-5}{2} \right| = \left| \frac{x-5}{2} \right|$$

La serie converge absolutamente si $|(x-5)/2| < 1$. Esta inecuación es equivalente a $|x-5| < 2$ (la distancia de x a 5 es menor que 2), es decir, $3 < x < 7$. Si $x < 3$ o $x > 7$, entonces $|(x-5)/2| > 1$. La serie diverge; sus términos no tienden a cero.

Si $x=3$, la serie es $\sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^n/n)$, que converge condicionalmente (es una serie armónica alternante); si $x=7$, la serie es la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, que diverge a infinito. Por tanto, la serie dada converge absolutamente en el intervalo abierto (3, 7), converge condicionalmente en $x=3$ y diverge en el resto. ■

Ejemplo 5 ¿Para qué valores de x converge absolutamente la serie de $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 \left(\frac{x}{x+2}\right)^n$? ¿Para qué valores converge condicionalmente? ¿Para qué valores diverge?

Solución Empezaremos de nuevo con el test de la razón.

$$\begin{aligned}\rho &= \lim_{n\to\infty} \left| (n+2)^2 \left(\frac{x}{x+2}\right)^{n+1} \Big/ (n+1)^2 \left(\frac{x}{x+2}\right)^n \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2 \left|\frac{x}{x+2}\right| = \left|\frac{x}{x+2}\right| = \frac{|x|}{|x+2|}\end{aligned}$$

La serie converge absolutamente si $|x|/|x+2| < 1$. Esta condición dice que la distancia desde x hasta 0 es menor que la distancia desde x hasta -2. Entonces $x > -1$. La serie diverge si $|x|/|x+2| > 1$, es decir, si $x < -1$. Si $x = -1$, la serie es $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)^2$, que diverge. Concluimos que la serie converge absolutamente para $x > -1$, no converge condicionalmente en ninguna parte y diverge para $x \leqslant -1$. ■

Cuando se utiliza el test de las series alternantes, es importante verificar (al menos mentalmente) que se cumplen *las tres condiciones* (i)-(iii).

Ejemplo 6 Compruebe la convergencia de las siguientes series:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n}$

(b) $1 - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{5} - \cdots = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, siendo

$$a_n = \begin{cases} 1/n & \text{si} \quad n \text{ es impar} \\ -1/n^2 & \text{si} \quad n \text{ es par} \end{cases}$$

Solución

(a) En este caso, los términos a_n son alternantes y disminuyen de tamaño cuando n crece. Sin embargo, $\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \neq 0$. Por tanto, no se puede aplicar el test de las series alternantes. De hecho, la serie diverge porque sus términos no tienden a 0.

(b) Estas series alternantes y sus términos tienen como límite cero. Sin embargo, los términos no disminuyen de tamaño (ni siquiera definitivamente). No se puede aplicar tampoco el test de las series alternantes. De hecho, como

$$-\frac{1}{4} - \frac{1}{16} - \cdots - \frac{1}{(2n)^2} - \cdots \qquad \text{converge, y}$$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \cdots \qquad \text{diverge a infinito}$$

se puede ver rápidamente que la serie dada diverge a infinito. ■

Reordenación de los términos de una serie

La diferencia básica entre la convergencia absoluta y la condicional es que cuando una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, lo hace porque sus términos $\{a_n\}$ disminuyen de tamaño lo suficientemente rápido para que su suma sea finita aun cuando no se produzca cancelación de términos de signo opuesto. Si se requiere esta cancelación para que la serie converja (porque sus términos decrecen más lentamente), entonces la serie sólo puede converger condicionalmente.

Considere la serie armónica alternante

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

Esta serie converge, pero sólo condicionalmente. Si tomamos la subserie que contiene sólo los términos positivos, se obtiene la serie

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$$

que diverge a infinito. De forma similar, la subserie de los términos negativos

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \cdots$$

diverge a menos infinito.

Si una serie converge absolutamente, la subserie formada por los términos positivos y la subserie formada por los términos negativos deben converger a una suma finita. Si una serie converge condicionalmente, las subseries positiva y negativa pueden divergir, respectivamente, a ∞ y a $-\infty$.

Utilizando estos hechos, se puede responder a una pregunta que surgió al principio de la Sección 9.2. Si reordenamos los términos de una serie convergente, de forma que se sumen en orden diferente, ¿debe converger la serie reordenada, y si lo hace, convergerá a la misma suma que la serie original? La respuesta depende de si la serie original era absolutamente convergente o sólo condicionalmente convergente.

TEOREMA 16 **Convergencia de la reordenación de una serie**

(a) Si los términos de una serie absolutamente convergente se reordenan de forma que su suma se realice en un orden diferente, la serie reordenada convergerá a la misma suma que la serie original.

(b) Si una serie es condicionalmente convergente, y L es un número real cualquiera, entonces los términos de la serie se pueden reordenar de forma que la serie converja (condicionalmente) a la suma L. También se pueden reordenar de forma que diverja a ∞, a $-\infty$ o que simplemente diverja.

El apartado (b) demuestra que la convergencia condicional es un tipo sospechoso de convergencia, ya que depende del orden en que se suman los términos. No presentaremos una demostración formal del teorema, pero daremos un ejemplo que sugiere lo que significa (*véase* también el Ejercicio 30 posterior).

Ejemplo 7 En la Sección 9.5 demostraremos que la serie armónica alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \cdots$$

converge (condicionalmente) a la suma $\ln 2$. Explique cómo se pueden reordenar sus términos para que converja a 8.

Solución Empezaremos por sumar los términos de la subserie positiva

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots$$

continuando hasta que la suma parcial supere 8 (lo que ocurrirá en algún momento ya que la subserie positiva diverge a infinito). Sumamos entonces el primer término $-1/2$ de la subserie negativa

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \cdots$$

Esto reducirá la suma parcial por debajo de 8 de nuevo. Volvemos ahora a sumar términos de la subserie positiva, hasta que la suma parcial vuelva a valer más de 8. Sumamos ahora el segundo término de la subserie negativa y la suma parcial volverá a estar por debajo de 8. Se repite este procedimiento, alternando la suma de términos de la subserie positiva para forzar a que la suma supere 8 y, después, términos de la subserie negativa para forzar a que la suma sea inferior a 8. Como ambas subseries tienen un número infinito de términos y divergen a ∞ y a $-\infty$, respectivamente, al final se incluirán todos los términos de las series originales, y las sumas parciales de las nuevas series oscilarán por encima y por debajo de 8, convergiendo a ese número. Por supuesto, se puede usar cualquier otro número en vez de 8.

Ejercicios 9.4

Determine si las series de los Ejercicios 1-12 convergen absolutamente, convergen condicionalmente o divergen.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n^2 + \ln n}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{(n+1)\ln(n+1)}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{2^n}$

4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}(n^2-1)}{n^2+1}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n}}{n!}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n\pi^n}$

8. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-n}{n^2+1}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{20n^2-n-1}{n^3+n^2+33}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100\cos(n\pi)}{2n+3}$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(-100)^n}$

12. $\displaystyle\sum_{n=10}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n+1/2)\pi}{\ln\ln n}$

En las series de los Ejercicios 13-16, calcule el mínimo entero n que asegura que la suma parcial s_n se aproxima a la suma s de la serie con un error menor que 0,001 en valor absoluto.

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}$

14. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{(2n)!}$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{n}{2^n}$

16. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n}\frac{3n}{n!}$

Determine los valores de x para los que las series de los Ejercicios 17-24 convergen absolutamente, convergen condicionalmente o divergen.

17. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n+1}}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2 2^{2n}}$

19. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\frac{(x-1)^n}{2n+3}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\left(\frac{3x+2}{-5}\right)^n$

21. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \ln n}$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x+1)^n}{n^3}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+3)^n}{n^{1/3}4^n}$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$

***25.** ¿Se puede aplicar directamente el test de las series alternantes a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)\operatorname{sen}(n\pi/2)$? Determine si la serie converge.

***26.** Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente a $a_n = 10/n^2$ para n par y a $a_n = -1/10n^3$ para n impar.

***27.** ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas? Justifique su respuesta en el caso de verdaderas o dé un contraejemplo en el caso de falsas.

(a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.

(b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.

(c) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge absolutamente.

***28.** (a) Utilice un argumento basado en la suma de Riemann para demostrar que

$$\ln n! \geqslant \int_1^n \ln t\,dt = n\ln n - n + 1$$

(b) ¿Para qué valores de x converge absolutamente la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,x^n}{n^n}$? ¿Para qué valores converge condicionalmente? ¿Para qué valores diverge? (*Sugerencia*: Utilice primero el test de la razón. Para probar los casos donde $\rho = 1$, puede resultar de utilidad la inecuación del apartado (a)).

***29.** ¿Para qué valores de x converge absolutamente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n)!\,x^n}{2^{2n}(n!)^2}$? ¿Para qué valores converge condicionalmente? ¿Para qué valores diverge? *Sugerencia*: *Véase* el Ejercicio 42 de la Sección 9.3.

***30.** Desarrolle procedimientos para reordenar los términos de la serie armónica alternante de forma que la serie reordenada (a) diverja a ∞, (b) converja a -2.

9.5 Series de potencias

Esta sección trata de un tipo especial de series infinitas denominadas *series de potencias*, que pueden verse como un polinomio de grado infinito.