CAPÍTULO 12

Diferenciación parcial

Soy un experto en materias matemáticas,
Entiendo ecuaciones simples y cuadráticas,
Reboso de noticias sobre el teorema binomial,
Y de muchas cosas alegres sobre el cuadrado de la hipotenusa.

William Schenck Gilbert (1564-1642)
de *The Pirates of Penzance*

Introducción Este capítulo trata sobre la ampliación de la idea de derivada de funciones reales al caso de variables vector, es decir, a funciones que dependen de varias variables reales. Aunque la diferenciación se realiza sobre una variable cada vez, la relación entre las derivadas con respecto a diferentes variables hace que el análisis de estas funciones sea mucho más complicado y sutil que en el caso de una sola variable.

12.1 Funciones de varias variables

La notación $y = f(x)$ se utiliza para indicar que la variable y depende de la única variable real x, es decir, que y es función de x. El dominio de esa función f es un conjunto de números reales. Existen muchas magnitudes que dependen de más de una variable real y, por tanto, que son funciones de más de una variable. Por ejemplo, el volumen de un cilindro circular de radio r y altura h se expresa como $V = \pi r^2 h$; se dice que V es función de dos variables: r y h. Si denominamos f a esta función, entonces expresaremos $V = f(r, h)$, siendo

$$f(r, h) = \pi r^2 h, \qquad (r \geqslant 0, \quad h \geqslant 0)$$

Así, f es una función de dos variables cuyo *dominio* es el conjunto de puntos del plano rh cuyas coordenadas (r, h) cumplen $r \geqslant 0$ y $h \geqslant 0$. De forma similar, la relación $w = f(x, y, z) = x + 2y - 3z$ define w como función de las variables x, y y z, cuyo dominio es $\mathbb{R}^3$ completo, o, si se indica explícitamente, algún subconjunto particular de $\mathbb{R}^3$.

Por analogía con la correspondiente definición de funciones de una variable, definiremos una función de n variables de la siguiente forma:

DEFINICIÓN 1

Una **función** f de n variables reales es una regla que asigna un *único* número real $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ a cada punto $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de algún subconjunto $\mathcal{D}(f)$ de $\mathbb{R}^n$. $\mathcal{D}(f)$ se denomina **dominio** de f. El conjunto de números reales $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ obtenido a partir de los puntos del dominio se denomina **rango** de f.

Como en el caso de funciones de una variable, la **convención del dominio** especifica que el dominio de una función de n variables es el máximo conjunto de puntos $(x_1, x_2, ..., x_n)$ para el que $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ tiene sentido como número real, a menos que el dominio se establezca explícitamente como un conjunto menor.

La mayoría de los ejemplos que consideraremos de aquí en adelante serán funciones de dos o tres variables independientes. Cuando una función f depende de dos variables, en general llamaremos a dichas variables independientes x e y, y utilizaremos z para indicar la variable dependiente que representa el valor de la función; es decir, $z = f(x, y)$. En general utilizaremos x, y y z como variables independientes de una función de tres variables, y en ese caso expresaremos el valor de la función como $w = f(x, y, z)$. Daremos algunas definiciones, y plantearemos (y demostraremos) algunos teoremas sólo en el caso de dos variables, pero su extensión al caso de tres o más variables en general será obvia.

Representaciones gráficas

La gráfica de una *función* f de una variable (es decir, la gráfica de la *ecuación* $y = f(x)$) es el conjunto de puntos del plano xy cuyas coordenadas son $(x, f(x))$, siendo x perteneciente al dominio de f. De forma similar, la gráfica de una *función* f de dos variables (es decir, la gráfica de la *ecuación* $z = f(x, y)$) es el conjunto de puntos del espacio tridimensional cuyas coordenadas son $(x, y, f(x, y))$, donde (x, y) pertenece al dominio de f. Esta gráfica es una superficie en $\mathbb{R}^3$, que está situada por encima (si $f(x, y) > 0$) o por debajo (si $f(x, y) < 0$) del dominio de f en el plano xy (*véase* la Figura 12.1). La gráfica de una función de tres variables es una *hipersuperficie* tridimensional en el espacio tetradimensional $\mathbb{R}^4$. En general, la gráfica de una función de n variables será una *superficie* n-dimensional en $\mathbb{R}^{n+1}$. No intentaremos dibujar gráficas de funciones de más de dos variables.

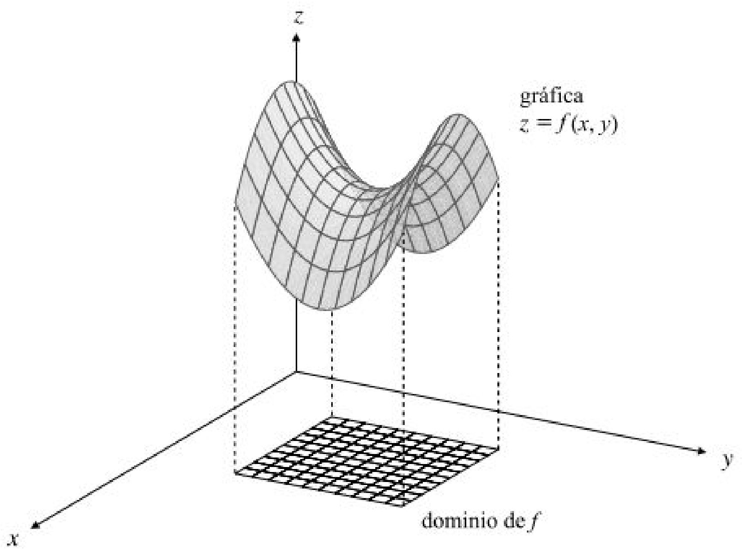


Figura 12.1 La gráfica de $f(x, y)$ es la superficie de ecuación $z = f(x, y)$ definida en los puntos (x, y) del dominio de f.

Ejemplo 1 Considere la función

$$f(x, y) = 3\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{4}\right), \qquad (0 \leqslant x \leqslant 2, \quad 0 \leqslant y \leqslant 4 - 2x)$$

La gráfica de f es la superficie plana triangular cuyos vértices son (2, 0, 0), (0, 4, 0) y (0, 0, 3) (*véase* la Figura 12.2). Si el dominio de f no se hubiera indicado explícitamente como un conjunto particular del plano xy, la gráfica hubiera sido todo el plano que pasa por esos tres puntos.

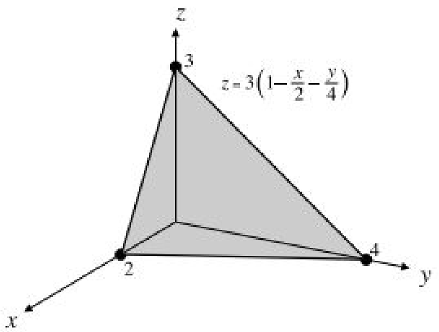


Figura 12.2

Ejemplo 2 Considere $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. La expresión bajo la raíz cuadrada no puede ser negativa, por lo que el dominio es el disco $x^2 + y^2 \leqslant 9$ en el plano xy.

Si elevamos al cuadrado la ecuación $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, podemos expresar el resultado en la forma $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Esta ecuación representa una esfera de radio 3 centrada en el origen. Sin embargo, la gráfica de f es sólo el hemisferio superior, donde $z \geqslant 0$ (*véase* la Figura 12.3).

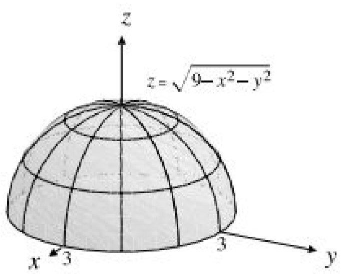


Figura 12.3

Como es necesario proyectar la superficie $z = f(x, y)$ en una hoja bidimensional, la mayoría de esas gráficas son difíciles de dibujar sin un considerable talento artístico y entrenamiento. Sin embargo, siempre es conveniente intentar visualizar estas gráficas y dibujarlas lo mejor posible. Algunas veces es conveniente dibujar sólo parte de una gráfica, por ejemplo, la parte que está en el primer octante. También sirve de ayuda determinar (y dibujar) las intersecciones de la gráfica con diversos planos, especialmente con los planos coordenados, y con planos paralelos a los planos coordenados (*véase* la Figura 12.1).

Existen algunos paquetes de software matemático que producen dibujos de gráficas tridimensionales, y que nos pueden ayudar a adquirir sensibilidad sobre el comportamiento de las correspondientes funciones. La Figura 12.1 es un ejemplo de una gráfica dibujada por computador, como la Figura 12.4. Junto con la mayoría de las otras gráficas matemáticas de este texto, ambas se han realizado utilizando el paquete de software para gráficos matemáticos **MG**. Más adelante en esta sección presentaremos la forma de utilizar Maple para generar gráficas.

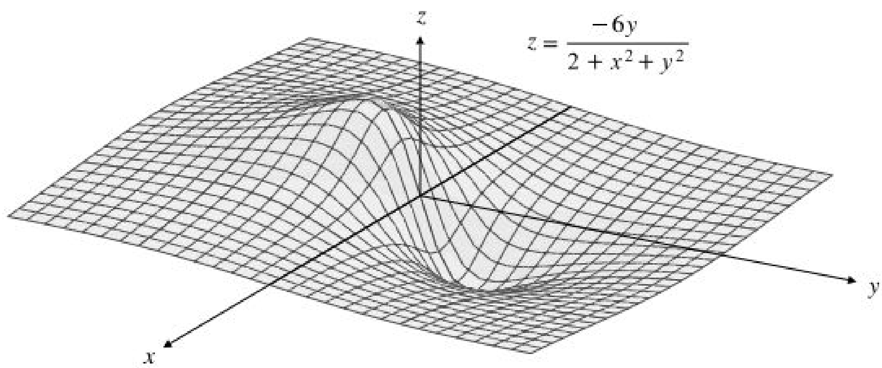


Figura 12.4 La gráfica de $z = \dfrac{-6y}{2 + x^2 + y^2}$.

Otra forma de representar gráficamente la función $f(x, y)$ es elaborar un *mapa topográfico* bidimensional de la superficie $z = f(x, y)$. En el plano xy se dibujan las curvas $f(x, y) = C$ para varios valores de la constante C. Estas curvas se denominan **curvas de nivel** de f porque son las proyecciones verticales en el plano xy de las curvas en las que la gráfica $z = f(x, y)$ corta a los planos horizontales (de nivel) $z = C$. La gráfica de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ y algunas de sus curvas de nivel se muestran en la Figura 12.5. La gráfica es un paraboloide circular en el espacio tridimensional. Las curvas de nivel son circunferencias centradas en el origen del plano xy.

Las curvas de contorno en el mapa topográfico de la Figura 12.6 muestran las elevaciones, en incrementos de 100 m sobre el nivel del mar, de parte de la isla de Nelson en la costa de la

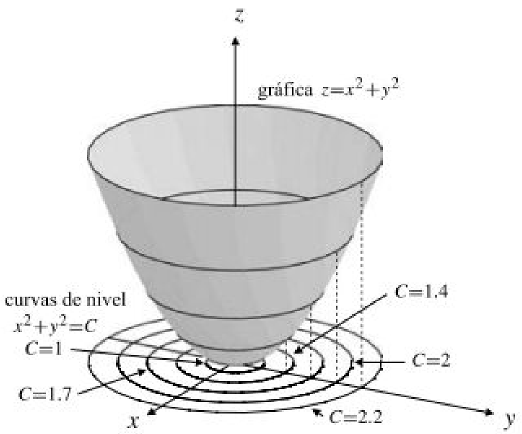


Figura 12.5 La gráfica de $f(x, y) = x^2 + y^2$ y algunas curvas de nivel de f.

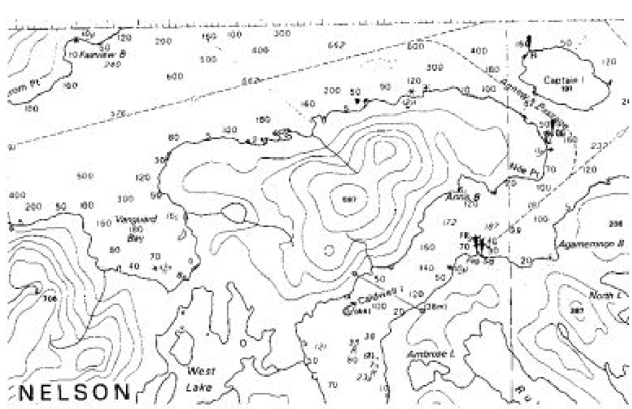


Figura 12.6 Curvas de nivel (contornos) que representan la elevación en un mapa topográfico.

Columbia Británica. Como estos contornos se dibujan para valores equiespaciados de C, el espaciado de los propios contornos lleva información sobre la pendiente en diversos lugares de las montañas; la tierra está más inclinada donde las líneas de contorno están más juntas. Obsérvese también que las corrientes de agua cruzan las líneas de contorno formando ángulos rectos. Indican la ruta de la máxima pendiente. Las isotermas (curvas de temperatura constante) y las isobaras (curvas de presión constante) en los mapas del tiempo son también ejemplos de curvas de nivel.

Ejemplo 3 Las curvas de nivel de la función $f(x, y) = 3\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{4}\right)$ del Ejemplo 1 son los segmentos de las rectas

$$3\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{4}\right) = C \quad \text{o} \quad \frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1 - \frac{C}{3}, \qquad (0 \leqslant C \leqslant 3)$$

que está en el primer cuadrante. La Figura 12.7(a) muestra varias curvas de nivel. Corresponden a valores equiespaciados de C, y como tienen igual separación, indican una pendiente uniforme de la gráfica de f de la Figura 12.2.

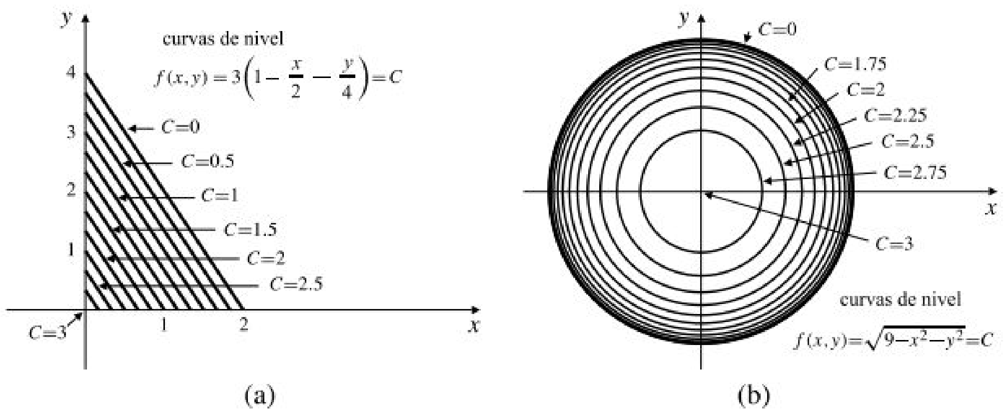


Figura 12.7
(a) Curvas de nivel de $3\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x}{4}\right)$.
(b) Curvas de nivel de $\sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

Ejemplo 4 Las curvas de nivel de la función $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ del Ejemplo 2 son las circunferencias concéntricas

$$\sqrt{9 - x^2 - y^2} = C \quad \text{o} \quad x^2 + y^2 = 9 - C^2, \qquad (0 \leqslant C \leqslant 3)$$

Obsérvese el espaciado de estas circunferencias en la Figura 12.7(b). Se muestran para varios valores equiespaciados de C. El acercamiento de las circunferencias cuando $C \to 0+$ indica que la superficie hemisférica correspondiente a la gráfica de f se va haciendo cada vez más abrupta (*véase* la Figura 12.3).

Una función determina sus curvas de nivel con cualquier espaciado dado entre valores consecutivos de C. Sin embargo, las curvas de nivel sólo determinan la función si *todas ellas* son conocidas.

Ejemplo 5 Las curvas de nivel de la función $f(x, y) = x^2 - y^2$ se corresponden con las curvas $x^2 - y^2 = C$. Para $C = 0$ la «curva» de nivel es la pareja de rectas $x = y$ y $x = -y$. Para otros valores de C, las curvas de nivel son hipérbolas rectangulares cuyas asíntotas son esas rectas (*véase* la Figura 12.8(a)). La gráfica de f es el paraboloide hiperbólico con forma de silla de montar que se muestra en la Figura 12.8(b).

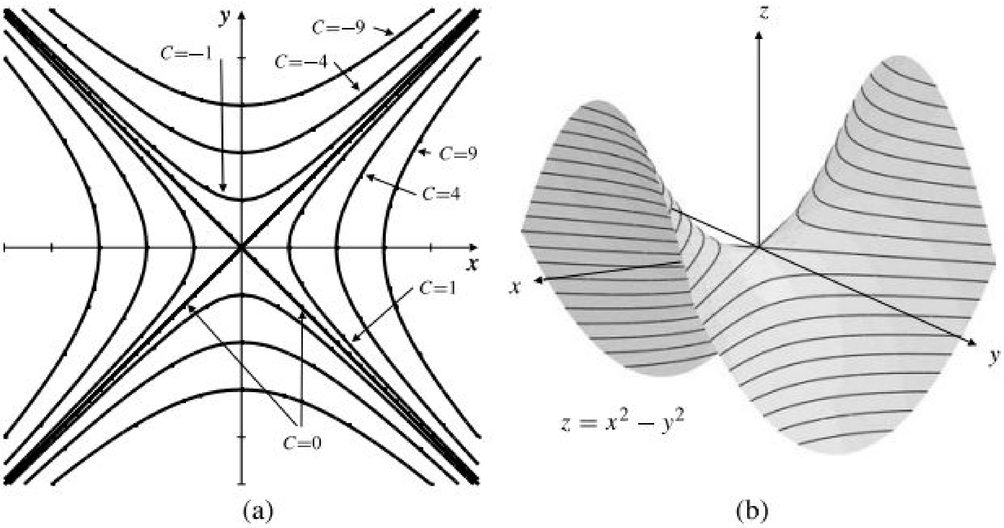


Figura 12.8
(a) Curvas de nivel de $x^2 - y^2$.
(b) Gráfica de $x^2 - y^2$.

Ejemplo 6 Describa y dibuje algunas curvas de nivel de la función $z = g(x, y)$, definida como $z \geqslant 0$, $x^2 + (y - z)^2 = 2z^2$. Dibuje también la gráfica de g.

Solución La ecuación de la curva de nivel $z = g(x, y) = C$ (siendo C una constante positiva) es $x^2 + (y - C)^2 = 2C^2$, que corresponde a una circunferencia de radio $\sqrt{2C}$, centrada en $(0, C)$. La Figura 12.9(a) muestra las curvas de nivel para incrementos de C de 0.1, desde 0 hasta 1. Estas curvas de nivel cortan a rayos que salen del origen con igual espaciado (aunque el espaciado es diferente para diferentes rayos), lo que indica que la superficie $z = g(x, y)$ es un cono oblicuo. *Véase* la Figura 12.9(b).

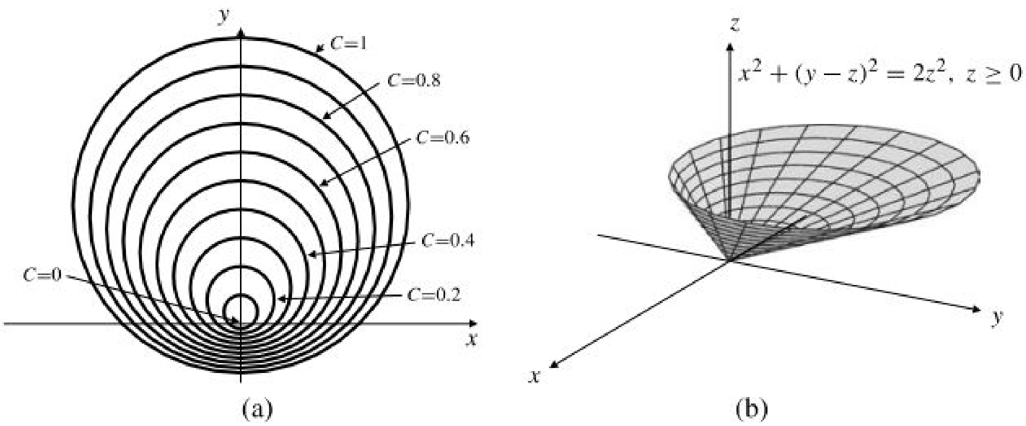


Figura 12.9
(a) Curvas de nivel de $z = g(x, y)$ en el Ejemplo 6.
(b) Gráfica de $z = g(x, y)$.

Aunque la *gráfica* de una función $f(x, y, z)$ de tres variables no se puede dibujar fácilmente (es una *hipersuperficie* tridimensional en un espacio tetradimensional), una función de este tipo tiene **superficies de nivel** en el espacio tridimensional que quizá se pueden dibujar. Estas superficies de nivel corresponden a las ecuaciones $f(x, y, z) = C$ para diversos valores de la constante C. Por ejemplo, las superficies de nivel de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ son esferas concéntricas centradas en el origen. La Figura 12.10 muestra algunas superficies de nivel de la función $f(x, y, z) = x^2 - z$. Son cilindros parabólicos.

Uso de gráficos en Maple

Como muchos paquetes de software matemático, Maple dispone de varias rutinas gráficas que nos pueden ayudar a visualizar el comportamiento de funciones de dos y tres variables. Mencio-

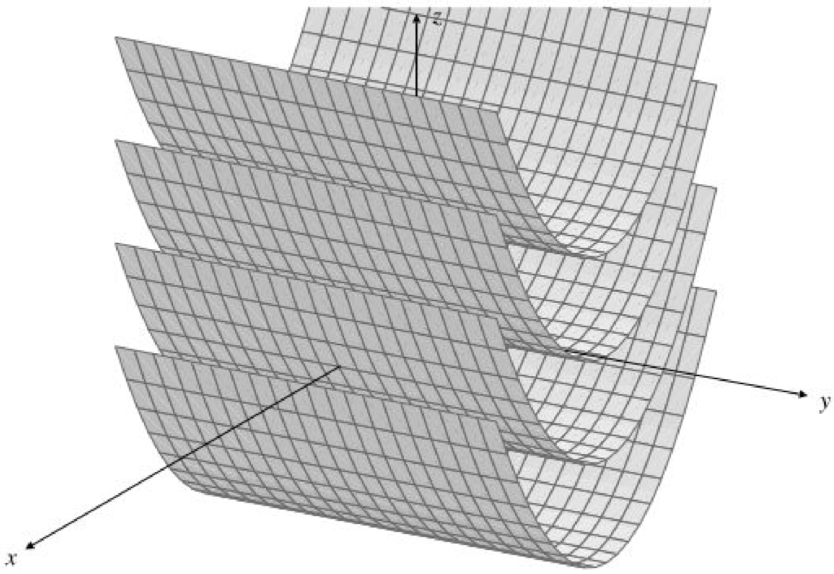


Figura 12.10 Superficies de nivel de $f(x, y, z) = x^2 - z$.

naremos aquí sólo unas pocas; hay muchas más. La mayoría de la rutinas gráficas están en el paquete **plots**, por lo que cualquier sesión de Maple donde queramos utilizar dichas rutinas gráficas deberá empezar con la entrada

```
> with(plots) :
```

Para ahorrar espacio, no mostraremos las salidas gráficas. Posiblemente necesitaremos hacer modificaciones a los comandos gráficos para obtener el tipo de gráfica deseada.

La gráfica de una función $f(x, y)$ de dos variables (o de una expresión en x e y) se puede dibujar en un rectángulo del plano xy llamando a la rutina **plot3d**. Por ejemplo,

```
> f := -6*y/ (2+x^2+y^2) ;

> plot3d(f, x=-6..6, y=-6..6) ;
```

dibujará una superficie similar a la de la Figura 12.4, pero sin ejes y vista desde un ángulo más alto. Se pueden añadir muchas opciones al comando para cambiar el aspecto de la salida. Por ejemplo,

```
> plot3d(f, x=-6..6, y=-6..6, axes=boxed,

    orientation=[30, 70]) ;
```

dibujará la misma superficie dentro de una caja rectangular tridimensional con escalas en tres de sus lados, que indican los valores de las coordenadas (si hubiéramos escrito `axes=normal`, habríamos obtenido los ejes de coordenadas habituales en el origen, pero éstos tienden a ser más difíciles de ver contra el fondo de la superficie, por lo que en general es preferible la opción `axes=boxed`). La opción `orientation=[30, 70]` hace que la gráfica se vea desde una dirección que forma un ángulo de 70º con el eje z y que está en un plano que contiene al eje z y forma un ángulo de 30º con el plano xz (si no se especifica esta opción, el valor por defecto de la orientación es [45, 45]). Por defecto, la superficie que dibuja la rutina plot3d está graduada mediante dos familias de curvas, que representan su intersección con planos verticales $x = a$ e $y = b$ para varios valores equiespaciados de a y b, y está coloreada de forma que las partes ocultas no se muestran.

En vez de plot3d se puede usar **contourplot3d**, que muestra la superficie graduada mediante contornos en los que el valor de la función es constante. Si no se obtienen suficientes contornos por defecto, se puede incluir la opción `contours=n` para especificar el número deseado.

```
> contourplot3d(f, x=-6..6, y=-6..6, axes=boxed,
   contours=24) ;
```

Los contornos son las proyecciones de las curvas de nivel sobre la gráfica de la superficie. De forma alternativa, se puede obtener una gráfica bidimensional de las curvas de nivel utilizando la rutina **contourplot**:

```
> contourplot(f, x=-6..6, y=-6..6, axes=normal,
   contours=24) ;
```

Otras opciones que puede ser interesante incluir en las funciones plot3d y contourplot3d son:

(a) `view=zmin..zmax` para especificar el intervalo de valores de la función (es decir, de z) a mostrar en la gráfica.
(b) `grid=[m, n]` para especificar el número de valores de x e y donde evaluar la función. Si la gráfica no es lo suficientemente suave, se puede probar con los valores $m = n = 20$ o 30, o incluso valores más altos.

La gráfica de una ecuación, $f(x, y) = 0$, en el plano xy se puede generar sin necesidad de resolver la ecuación en x o y previamente, utilizando **implicitplot**.

```
> implicitplot(x^3-y^2-5*x*y-x-5, x=-6..7, y=-5..6) ;
```

dibujará la gráfica de $x^3 - y^2 - 5xy - x - 5 = 0$ en el rectángulo $-6 \leqslant x \leqslant 7$, $-5 \leqslant y \leqslant 6$. Existe también una rutina **implicitplot3d** que permite dibujar la superficie en el espacio tridimensional cuya ecuación es de la forma $f(x, y, z) = 0$. En esta rutina se deben especificar los intervalos de las tres variables.

```
> implicitplot3d(x^2+y^2-z^2-1, x=-4..4, y=-4..4,
   z=-3..3, axes=boxed) ;
```

dibuja el hiperboloide $z^2 = x^2 + y^2 - 1$.

Finalmente, hay que observar que Maple no es más capaz que nosotros de dibujar gráficas de funciones de tres o más variables, ya que no dispone de capacidades de dibujo en cuatro dimensiones. Lo mejor que podemos hacer es dibujar una serie de superficies de nivel:

```
> implicitplot3d({z-x^2-2, z-x^2, z-x^2+2}, x=-2..2,
   y=-2..2, z=-2..5, axes=boxed) ;
```

Es posible construir una secuencia de *estructuras gráficas* y asignarlas, por ejemplo, a los elementos de una variable de lista sin dibujarlas realmente. De esa forma se pueden trazar todas las gráficas simultáneamente utilizando la función **display**.

```
> for c from -1 to 1 do
   p[c] := implicitplot3d(z^2-x^2-y^2-2*c, x=-3..3,
   y=-3..3, z=0..2, color=COLOR(RGB, (1+c)/2, (1-c) /2,1))
   od:
> display([seq(p[c], c=-1..1)], axex=boxed,
   orientation=[30, 40]) ;
```

Nótese que el comando que crea las gráficas se termina con dos puntos en vez de con punto y coma habitual. Si no se suprime la salida de esta forma, se obtendrá una gran cantidad de información numérica sin sentido mientras se construyen las gráficas. La opción `color=...` intenta dar a las tres gráficas un color diferente de forma que se puedan distinguir entre sí.

Ejercicios 12.1

En los Ejercicios 1-10, especifique los dominios de las funciones.

1. $f(x, y) = \dfrac{x+y}{x-y}$ **2.** $f(x, y) = \sqrt{xy}$

3. $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ **4.** $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2-y^2}$

5. $f(x, y) = \sqrt{4x^2+9y^2-36}$

6. $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$ **7.** $f(x, y) = \ln(1+xy)$

8. $f(x, y) = \operatorname{sen}^{-1}(x+y)$

9. $f(x, y, z) = \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$

10. $f(x, y, z) = \dfrac{e^{xyz}}{\sqrt{xyz}}$

Dibuje las gráficas de las funciones de los Ejercicios 11-18.

11. $f(x, y) = x, \quad (0 \leqslant x \leqslant 2, \quad 0 \leqslant y \leqslant 3)$

12. $f(x, y) = \operatorname{sen} x, \quad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1)$

13. $f(x, y) = y^2, \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1, \quad -1 \leqslant y \leqslant 1)$

14. $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2, \quad (x^2 + y^2 \leqslant 4,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$

15. $f(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}$ **16.** $f(x, y) = 4 - x^2$

17. $f(x, y) = |x| + |y|$ **18.** $f(x, y) = 6 - x - 2y$

En los Ejercicios 19-26, dibuje algunas de las curvas de nivel de las funciones.

19. $f(x, y) = x - y$ **20.** $f(x, y) = x^2 + 2y^2$

21. $f(x, y) = xy$ **22.** $f(x, y) = \dfrac{x^2}{y}$

23. $f(x, y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ **24.** $f(x, y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$

25. $f(x, y) = xe^{-y}$ **26.** $f(x, y) = \sqrt{\dfrac{1}{y} - x^2}$

Los Ejercicios 27 y 28 se refieren a la Figura 12.11, que muestra los contornos de una región montañosa con las alturas dadas en metros.

27. ¿En cuál de los puntos A o B es más abrupto el paisaje? ¿Cómo lo sabe?

28. Describa la topografía de la región próxima al punto C.

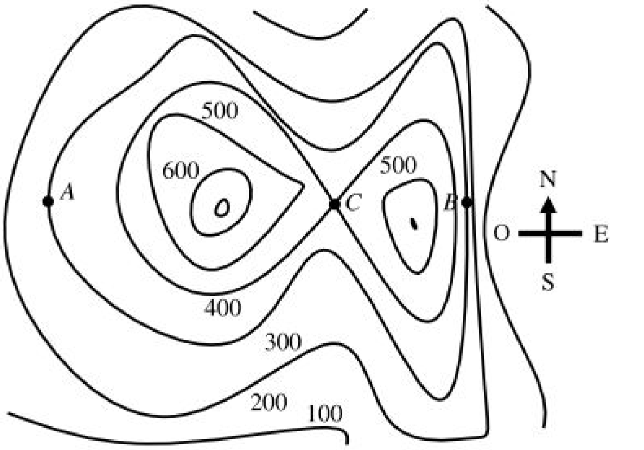


Figura 12.11

Describa las gráficas de las funciones $f(x, y)$ para las que se muestran las familias de curvas de nivel $f(x, y) = C$ en las figuras a las que se refieren los Ejercicios 29-32. Asuma que cada familia corresponde a valores equiespaciados de C y que el comportamiento de la familia es representativo de todas las posibles familias de la función.

29. *Véase* la Figura 12.12(a).

30. *Véase* la Figura 12.12(b).

31. *Véase* la Figura 12.12(c).

32. *Véase* la Figura 12.12(d).

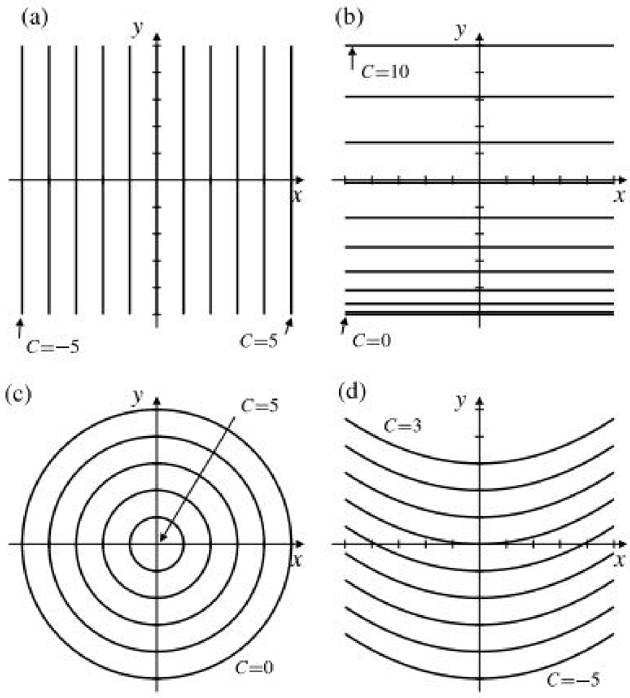


Figura 12.12

33. ¿Son las curvas $y = (x - C)^2$ curvas de nivel de alguna función $f(x, y)$? ¿Qué propiedad debe tener una familia de curvas de una región del plano xy pará que pueda ser una familia de curvas de nivel de una función definida en dicha región?

34. Si se supone que $z \geqslant 0$, la ecuación $4z^2 = (x - z)^2 + (y - z)^2$ define z como función de x e y. Dibuje algunas curvas de nivel de esta función. Describa su gráfica.

35. Calcule $f(x, y)$ si cada una de sus curvas de nivel $f(x, y) = C$ es una circunferencia centrada en el origen y con radio

(a) C (b) C^2 (c) $\sqrt{C}$ (d) $\ln C$

36. Obtenga $f(x, y, z)$ si para toda constante C la superficie de nivel $f(x, y, z) = C$ es un plano que corta a los ejes x, y y z en los valores C^3, $2C^3$ y $3C^3$, respectivamente.

Describa las superficies de nivel de las funciones especificadas en los Ejercicios 37-41.

37. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

38. $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$

39. $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ **40.** $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 + y^2}{z^2}$

41. $f(x, y, z) = |x| + |y| + |z|$

42. Describa las «hipersuperficies de nivel» de la función

$$f(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$$

Utilice Maple u otro software de gráficos por computador para dibujar las gráficas y las curvas de nivel de las funciones de los Ejercicios 43-48.

43. $\dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$ **44.** $\dfrac{\cos x}{1 + y^2}$

45. $\dfrac{y}{1 + x^2 + y^2}$ **46.** $\dfrac{x}{(x^2 - 1)^2 + y^2}$

47. xy **48.** $\dfrac{1}{xy}$

12.2 Límites y continuidad

Antes de abordar esta sección convendría revisar los conceptos de entorno, conjuntos abiertos y cerrados, y puntos interior y frontera que se presentaron en la Sección 10.1.

El concepto de límite de una función de varias variables es similar al de funciones de una variable. Por claridad presentaremos la definición sólo para el caso de funciones de dos variables; el caso general es similar.

Podríamos decir que $f(x, y)$ se aproxima al límite L cuando el punto (x, y) se aproxima al punto (a, b), y escribiríamos

$$\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y) = L$$

si todos los puntos de un entorno de (a, b), excepto posiblemente el propio punto (a, b), pertenecen al dominio de f, y si $f(x, y)$ se aproxima a L cuando (x, y) se aproxima a (a, b). Sin embargo, es más cómodo definir el límite de forma que (a, b) pueda ser también un punto frontera del dominio de f. Por tanto, nuestra definición formal generalizará también la noción unidimensional de límite unilateral.

DEFINICIÓN 2 Definición de límite

Se dice que $\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y) = L$, cuando:

(i) Todo entorno de (a, b) contiene puntos del dominio de f diferentes de (a, b).
(ii) Para todo entero positivo ϵ existe un número positivo $\delta = \delta(\epsilon)$ tal que $|f(x, y) - L| < \epsilon$ se cumple siempre que (x, y) esté en el dominio de f y satisfaga

$$0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta$$

La condición (i) se incluye en la Definición 2 porque no es apropiado considerar límites en puntos *aislados* del dominio de f, es decir, en puntos con entornos que no contengan ningún otro punto del dominio.

Si existe límite es único. En el caso de una función de una sola variable f, la existencia de $\lim_{x\to a} f(x)$ implica que $f(x)$ se acerca al mismo número finito cuando x tiende a a, bien por la izquierda, bien por la derecha. De forma similar, en el caso de una función de dos variables, podemos tener $\lim_{(x,\ y)\to(a,\ b)} f(x, y) = L$ sólo si $f(x, y)$ se aproxima al mismo número L sin importar la forma en que (x, y) se acerca a (a, b) en el dominio de f. En particular, (x, y) se puede aproximar a (a, b) siguiendo cualquier curva que esté en $\mathcal{D}(f)$. No es necesario que $L = f(a, b)$, incluso aunque $f(a, b)$ esté definido. Los ejemplos posteriores ilustran estas afirmaciones.

Todas las leyes habituales de los límites se extienden al caso de funciones de varias variables de forma obvia. Por ejemplo, si $\lim_{(x,\ y)\to(a,\ b)} f(x, y) = L$, $\lim_{(x,\ y)\to(a,\ b)} g(x, y) = M$ y todo entorno de (a, b) contiene puntos de $\mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$ distintos de (a, b), entonces

$$\lim_{(x,\ y)\to(a,\ b)} (f(x, y) \pm g(x, y)) = L \pm M$$

$$\lim_{(x,\ y)\to(a,\ b)} f(x, y)g(x, y) = LM$$

$$\lim_{(x,\ y)\to(a,\ b)} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{L}{M}, \qquad \text{suponiendo que } M \neq 0$$

Además, $F(t)$ es continua en $t = L$, entonces

$$\lim_{(x,\ y)\to(a,\ b)} F(f(x, y)) = F(L)$$

Ejemplo 1 (a) $\displaystyle\lim_{(x,\ y)\to(2,\ 3)} 2x - y^2 = 4 - 9 = -5$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,\ y)\to(a,\ b)} x^2y = a^2b$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,\ y)\to(\pi/3,\ 2)} y\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{y}\right) = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$

■

Ejemplo 2 La función $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ tiene como límite $f(a, b)$ en todos los puntos (a, b) de su dominio, el disco *cerrado* $x^2 + y^2 \leqslant 1$, y por tanto se considera que es *continua* en su dominio. Por supuesto, (x, y) sólo se puede aproximar a los puntos de la circunferencia frontera $x^2 + y^2 = 1$ desde el interior del disco.

■

Los siguientes ejemplos muestran que el requisito de que $f(x, y)$ se acerque al mismo límite sin importar cómo (x, y) se acerca a (a, b) puede ser muy restrictivo, y hace que los límites en dos o más variables sean mucho más sutiles que en el caso de una sola variable.

Ejemplo 3 Investigue el comportamiento límite de $f(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$.

Solución Nótese que $f(x, y)$ está definido para todos los puntos del plano xy excepto el origen $(0, 0)$. Podemos preguntarnos todavía si existe $\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} f(x, y)$. Si hacemos que (x, y) tienda a $(0, 0)$ a lo largo del eje x $(y = 0)$, entonces $f(x, y) = f(x, 0) \to 0$ (ya que $f(x, 0) = 0$ idénticamente). Por lo tanto, $\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} f(x, y)$ debe ser 0, si es que existe. De forma similar, para todos los puntos del eje y tenemos que $f(x, y) = f(0, y) = 0$. Sin embargo, en los puntos de la recta $x = y$, f tiene un valor constante diferente: $f(x, x) = 1$. Como el límite de $f(x, y)$ es 1 cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$ por esta recta, se deduce que $f(x, y)$ no puede tener un límite único en el origen. Es decir,

$$\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2} \qquad \text{no existe}$$

Obsérvese que $f(x, y)$ tiene un valor constante siguiendo cualquier rayo que salga del origen (por el rayo $y = kx$ el valor es $2k/(1 + k^2)$), pero los valores son diferentes para rayos diferentes. Las curvas de nivel de f son rayos que parten del origen (excluido el propio origen). Es difícil dibujar las gráficas de f cerca del origen. La parte de la gráfica correspondiente al primer octante es la superficie con forma de «capucha» que se muestra en la Figura 12.13(a).

Ejemplo 4 Investigue el comportamiento límite de $f(x, y) = \dfrac{2x^2y}{x^4 + y^2}$ cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$.

Solución Como en el Ejemplo 3, $f(x, y)$ se hace cero en los ejes coordenados, por lo que $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y)$ debe ser 0, si es que existe. Si examinamos $f(x, y)$ en todos los puntos del rayo $y = kx$, obtenemos

$$f(x, kx) = \frac{2kx^3}{x^4 + k^2x^2} = \frac{2kx}{x^2 + k^2} \to 0, \qquad \text{cuando } x \to 0 \quad (k \neq 0)$$

Por tanto, $f(x, y) \to 0$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$ siguiendo *cualquier* recta que pase por el origen. Podríamos tener la tentación de concluir, por tanto, que $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y) = 0$, pero esto es incorrecto. Obsérvese el comportamiento de $f(x, y)$ a lo largo de la curva $y = x^2$:

$$f(x, x^2) = \frac{2x^4}{x^4 + x^4} = 1$$

Es decir, $f(x, y)$ no tiende a 0 cuando (x, y) se acerca al origen siguiendo esta curva, por lo que no existe $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y)$. Las curvas de nivel de f son parejas de parábolas con la forma $y = kx^2$, $y = x^2/k$, excluido el origen. *Véase* la Figura 12.13(b), donde se muestra la parte del primer octante de la gráfica de f.

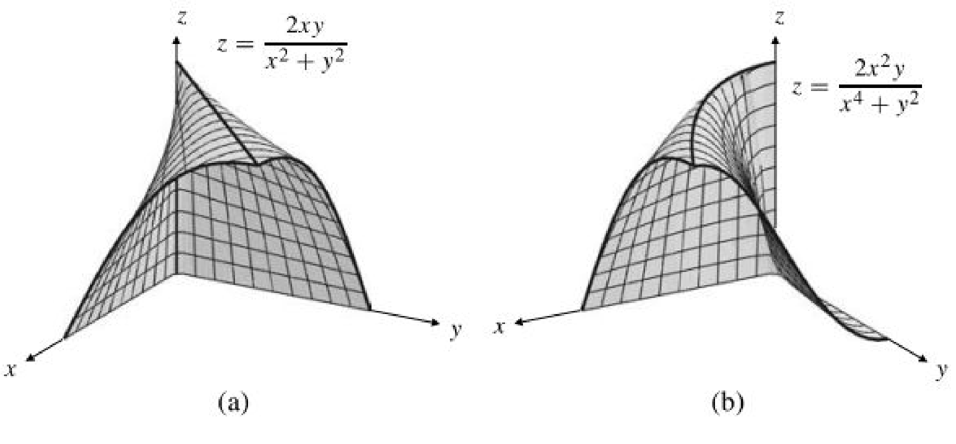


Figura 12.13
(a) $f(x, y)$ tiene límites diferentes cuando $(x, y) \to (0, 0)$ siguiendo diferentes rectas.
(b) $f(x, y)$ tiene el mismo límite 0 cuando $(x, y) \to (0, 0)$ siguiendo cualquier recta, pero tiene límite 1 cuando $(x, y) \to (0, 0)$ siguiendo la curva $y = x^2$.

Ejemplo 5 Demuestre que la función $f(x, y) = \dfrac{x^2y}{x^2 + y^2}$ tiene límite en el origen; concretamente,

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{x^2y}{x^2 + y^2} = 0$$

Solución Esta función está también definida en todo punto excepto el origen. Obsérvese que como $x^2 \leqslant x^2 + y^2$, tenemos que

$$|f(x, y) - 0| = \left|\frac{x^2y}{x^2 + y^2}\right| \leqslant |y| \leqslant \sqrt{x^2 + y^2}$$

que tiende a cero cuando $(x, y) \to (0, 0)$ (*véase* la Figura 12.14). Formalmente, si se da $\epsilon > 0$ y se toma $\delta = \epsilon$, entonces $|f(x, y) - 0| < \epsilon$ siempre que $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, por lo que $f(x, y)$ tiene límite 0 cuando $(x, y) \to (0, 0)$ por la Definición 2.

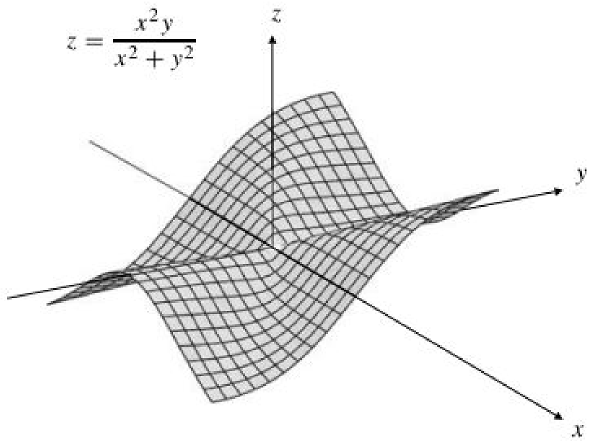


Figura 12.14 $\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$

Como en el caso de funciones de una variable, la continuidad de una función f en un punto de su dominio se define directamente en función del límite (*véase*, por ejemplo, el Ejemplo 2).

DEFINICIÓN 3

La función $f(x, y)$ es continua en el punto (a, b) si

$$\lim_{(x,\ y)\to(a,\ b)} f(x, y) = f(a, b)$$

Sigue siendo cierto que las sumas, diferencias, productos, cocientes y composiciones de funciones continuas son continuas. Las funciones de los Ejemplos anteriores 3 y 4 son continuas en todos los puntos donde están definidas, es decir, en todos los puntos excepto el origen. No hay posibilidad de definir $f(0, 0)$ de forma que estas funciones sean continuas en origen. Esto muestra que la continuidad de las funciones de una sola variable $f(x, b)$ en $x = a$ y $f(a, y)$ en $y = b$ *no* implica que $f(x, y)$ sea continua en (a, b). De hecho, incluso si $f(x, y)$ fuera continua siguiendo cualquier recta que pase por (a, b), podría no ser continua en (a, b) (*véanse* los Ejercicios 16-17 posteriores). Nótese, sin embargo, que la función $f(x, y)$ del Ejemplo 5, aunque no está definida en el origen, admite una extensión continua en ese punto. Si extendiéramos el dominio de f en ese caso definiendo $f(0, 0) = \lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} f(x, y) = 0$, entonces f sería continua en todo el plano xy.

Como en el caso de funciones de una variable, la existencia del límite de una función en un punto no implica que la función sea continua en ese punto. La función

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

cumple que $\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} f(x, y) = 0$, que no es igual a $f(0, 0)$, por lo que f no es continua en $(0, 0)$. Por supuesto, podemos *hacer* que f sea continua en $(0, 0)$ redefiniendo su valor a 0 en dicho punto.

Ejercicios 12.2

En los Ejercicios 1-12, calcule los límites indicados o explique por qué no existen.

1. $\displaystyle\lim_{(x,\ y)\to(2,\ -1)} xy + x^2$

2. $\displaystyle\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \sqrt{x^2 + y^2}$

3. $\displaystyle\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \frac{x^2 + y^2}{y}$

4. $\displaystyle\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \frac{x}{x^2 + y^2}$

5. $\displaystyle\lim_{(x,\ y)\to(1,\ \pi)} \frac{\cos(xy)}{1 - x - \cos y}$

6. $\displaystyle\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 1)} \frac{x^2(y-1)^2}{x^2 + (y-1)^2}$

7. $\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \dfrac{y^3}{x^2+y^2}$

8. $\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \dfrac{\operatorname{sen}(x-y)}{\cos(x+y)}$

9. $\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{x^2+y^2}$

10. $\lim_{(x,\ y)\to(1,\ 2)} \dfrac{2x^2-xy}{4x^2-y^2}$

11. $\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4}$

12. $\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \dfrac{x^2y^2}{2x^4+y^4}$

13. ¿Cómo se puede definir la función

$$f(x, y) = \frac{x^2+y^2-x^3y^3}{x^2+y^2}, \qquad (x, y) \neq (0, 0)$$

en el origen, de forma que sea continua en todos los puntos del plano xy?

14. ¿Cómo se puede definir la función

$$f(x, y) = \frac{x^3-y^3}{x-y}, \qquad (x \neq y)$$

siguiendo la recta $x = y$, de forma que la función resultante sea continua en todo el plano xy?

15. ¿Cuál es el dominio de

$$f(x, y) = \frac{x-y}{x^2-y^2}?$$

¿Tiene $f(x, y)$ límite cuando $(x, y) \to (1, 1)$? ¿Se puede extender el dominio de f de forma que la función resultante sea continua en $(1, 1)$? ¿Se puede extender el dominio de forma que la función resultante sea continua en todo punto del plano xy?

16. Dada una función $f(x, y)$ y un punto (a, b) de su dominio, defina dos funciones de una sola variable g y h como sigue:

$$g(x) = f(x, b), \qquad h(y) = f(a, y)$$

Si g es continua en $x = a$ y h es continua en $y = b$, ¿se puede decir que f es continua en (a, b)? A la inversa, ¿garantiza la continuidad de f en (a, b) la continuidad de g en a y de h en b? Justifique sus respuestas.

*17. Sea $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ un vector unitario, y sea

$$f_{\mathbf{u}}(t) = f(a + tu, b + tv)$$

la función de una sola variable que se obtiene restringiendo el dominio de $f(x, y)$ a puntos de la recta que pasa por (a, b) y es paralela a $\mathbf{u}$. Si $f_{\mathbf{u}}(t)$ es continua en $t = 0$ para todo vector unitario $\mathbf{u}$, ¿se puede deducir que f es continua en (a, b)? A la inversa, ¿garantiza la continuidad de f en (a, b) la continuidad de $f_{\mathbf{u}}(t)$ en $t = 0$? Justifique sus respuestas.

*18. ¿Qué condición deben cumplir los enteros no negativos m, n y p para garantizar que existe $\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} x^m y^n/(x^2+y^2)^p$? Demuestre su respuesta.

*19. ¿Qué condición deben cumplir las constantes a, b y c para garantizar que existe $\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} xy/(ax^2+bxy+cy^2)$? Demuestre su respuesta.

*20. ¿Se puede definir la función $f(x, y) = \dfrac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen}^3 y}{1-\cos(x^2+y^2)}$ en $(0, 0)$ de forma que sea continua en ese punto? Si es así, ¿cómo?

21. Utilice software de gráficos matemáticos en dos o tres dimensiones para examinar la gráfica y las curvas de nivel de la función $f(x, y)$ del Ejemplo 3 en la región $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$, $(x, y) \neq (0, 0)$. ¿Cómo describiría el comportamiento de la gráfica cerca de $(x, y) = (0, 0)$?

22. Utilice software de gráficos matemáticos en dos o tres dimensiones para examinar la gráfica y las curvas de nivel de la función $f(x, y)$ del Ejemplo 4 en la región $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$, $(x, y) \neq (0, 0)$. ¿Cómo describiría el comportamiento de la gráfica cerca de $(x, y) = (0, 0)$?

23. La gráfica de una función de una sola variable $f(x)$ que es continua en un intervalo es una curva sin *interrupciones* en dicho intervalo y que corta sólo una vez a cualquier línea vertical que pasa por un punto en dicho intervalo. ¿Qué afirmación análoga se puede hacer sobre la gráfica de una función de dos variables $f(x, y)$ que es continua en una región del plano xy?

12.3 Derivadas parciales

En esta sección empezaremos el proceso de ampliación de los conceptos y técnicas de cálculo de una variable a funciones de más de una variable. Es conveniente empezar considerando la tasa de cambio de estas funciones con respecto a una variable cada vez.

Así, una función de n variables tiene n *derivadas parciales de primer orden*, una con respecto a cada una de sus variables independientes. En el caso de una función de dos variables, precisaremos esta idea en la siguiente definición:

DEFINICIÓN 4

Las **primeras derivadas parciales** de la función $f(x, y)$ **con respecto a las variables** x e y son las funciones $f_1(x, y)$ y $f_2(x, y)$ dadas por

$$f_1(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_2(x, y) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{k}$$

suponiendo que esos límites existen.

Cada una de las dos derivadas parciales es el límite de un cociente de Newton en una de las variables. Obsérvese que $f_1(x, y)$ es exactamente la primera derivada ordinaria de $f(x, y)$ considerada como si fuera sólo una función de x, e y fuera un parámetro constante. De forma similar, $f_2(x, y)$ es la primera derivada de $f(x, y)$ considerada como una función de y, con x fija.

Ejemplo 1 Si $f(x, y) = x^2 \operatorname{sen} y$, entonces

$$f_1(x, y) = 2x \operatorname{sen} y \quad \text{y} \quad f_2(x, y) = x^2 \cos y$$

Los subíndices 1 y 2 en las notaciones de las derivadas parciales se refieren a la primera y segunda variable de f. En el caso de funciones de una variable, utilizamos la notación f' para indicar la derivada; la *prima* (′) indica diferenciación con respecto a la única variable de la que depende f. En el caso de funciones f de dos variables, utilizamos f_1 o f_2 para indicar la variable de diferenciación. No hay que confundir estos subíndices con los subíndices utilizados para otros propósitos, por ejemplo, para indicar las componentes de vectores.

La derivada parcial $f_1(a, b)$ mide la tasa de cambio de $f(x, y)$ con respecto a x en $x = a$, mientras y permanece fija en b. En términos gráficos, la superficie $z = f(x, y)$ corta al plano vertical $y = b$ en una curva. Si trazamos una recta horizontal y otra vertical por el punto $(0, b, 0)$, como ejes de coordenadas en el plano $y = b$, entonces la ecuación de la curva es $z = f(x, b)$, y su pendiente en $x = a$ es $f_1(a, b)$ (*véase* la Figura 12.15). De forma similar, $f_2(a, b)$ representa la tasa de cambio de f con respecto a y en $y = b$, cuando x permanece fija en a. La superficie $z = f(x, y)$ corta al plano vertical $x = a$ en una curva $z = f(a, y)$, cuya pendiente en $y = b$ es $f_2(a, b)$ (*véase* la Figura 12.16).

Para indicar las derivadas parciales de $z = f(x, y)$, consideradas como funciones de x e y se pueden utilizar varias notaciones:

Notaciones para las primeras derivadas parciales

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = f_1(x, y) = D_1 f(x, y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = f_2(x, y) = D_2 f(x, y)$$

El símbolo $\partial/\partial x$ debe leerse como «derivada parcial con respecto a x», por lo que $\partial z/\partial x$ debe leerse como «derivada parcial de z con respecto a x». La razón para distinguir ∂ de la d de las derivadas ordinarias de funciones de una sola variable se aclarará más adelante.

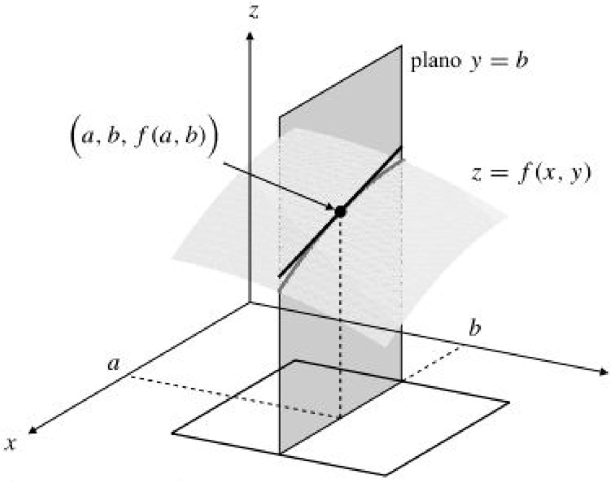


Figura 12.15 $f_1(a, b)$ es la pendiente de la curva de intersección de $z = f(x, y)$ con el plano vertical $y = b$ en $x = a$.

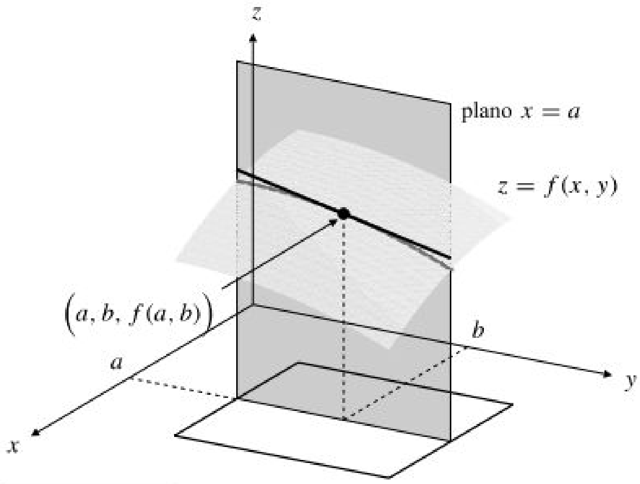


Figura 12.16 $f_2(a, b)$ es la pendiente de la curva de intersección de $z = f(x, y)$ con el plano vertical $x = a$ en $y = b$.

Se pueden utilizar notaciones similares para indicar los valores de las derivadas parciales en un punto concreto (a, b):

Valores de las derivadas parciales

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(a,\, b)} = \left.\left(\frac{\partial}{\partial x}\, f(x, y)\right)\right|_{(a,\, b)} = f_1(a, b) = D_1\, f(a, b)$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(a,\, b)} = \left.\left(\frac{\partial}{\partial y}\, f(x, y)\right)\right|_{(a,\, b)} = f_2(a, b) = D_2\, f(a, b)$$

Algunos autores prefieren utilizar f_x, $D_x f$ o $\partial f/\partial x$, y f_y, $D_y f$ o $\partial f/\partial y$ en vez de f_1 y f_2. Sin embargo, esto puede causar problemas de ambigüedad cuando aparecen composiciones de funciones. Por ejemplo, supongamos que $f(x, y) = x^2 y$. Por $f_1(x^2, xy)$ queremos decir claramente

$$\left.\left(\frac{\partial}{\partial u}\, f(u, v)\right)\right|_{u = x^2,\, v = xy} = 2uv\Big|_{u = x^2,\, v = xy} = (2)(x^2)(xy) = 2x^3 y$$

¡¡ ATENCIÓN !!

El argumento del párrafo anterior es un tanto sutil. Intenta explicar por qué, al menos por el momento, utilizamos los subíndices 1 y 2 en vez de los subíndices x e y para indicar las derivadas parciales de $f(x, y)$. Después, y especialmente cuando hablemos de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales o al hablar de funciones vectoriales en las que los subíndices numéricos representan normalmente a sus componentes, preferiremos utilizar subíndices de letras para indicar las derivadas parciales.

Pero ¿significa $f_x(x^2, xy)$ lo mismo? Se podría argumentar que $f_x(x^2, xy)$ podría significar

$$\frac{\partial}{\partial x}\,(f(x^2, xy)) = \frac{\partial}{\partial x}\,((x^2)^2(xy)) = \frac{\partial}{\partial x}\,(x^5 y) = 5x^4 y$$

Para evitar estas ambigüedades, en general preferiremos utilizar f_1 y f_2 en vez de f_x y f_y (sin embargo, en algunas situaciones en las que no es probable que aparezca confusión utilizaremos todavía las notaciones f_x y f_y, y también $D_x f$, $D_y f$, $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$).

Todas las reglas estándar de la diferenciación de sumas, productos, inversos y cocientes se pueden aplicar a las derivadas parciales.

Ejemplo 2 Calcule $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ si $z = x^3y^2 + x^4y + y^4$.

Solución $\partial z/\partial x = 3x^2y^2 + 4x^3y$ y $\partial z/\partial y = 2x^3y + x^4 + 4y^3$.

Ejemplo 3 Calcule $f_1(0, \pi)$ si $f(x, y) = e^{xy}\cos(x + y)$.

Solución

$$f_1(x, y) = ye^{xy}\cos(x + y) - e^{xy}\operatorname{sen}(x + y)$$
$$f_1(0, \pi) = \pi e^0\cos(\pi) - e^0\operatorname{sen}(\pi) = -\pi$$

La versión de una variable de la Regla de la Cadena también se puede aplicar en el caso de $f(g(x, y))$, siendo f una función de una sola variable con derivada f':

$$\frac{\partial}{\partial x} f(g(x, y)) = f'(g(x, y))g_1(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y} f(g(x, y)) = f'(g(x, y))g_2(x, y)$$

Desarrollaremos versiones de la Regla de la Cadena para composiciones más complejas de funciones de varias variables en la Sección 12.5.

Ejemplo 4 Si f es una función de una variable diferenciable en todas partes, demuestre que $z = f(x/y)$ cumple la *ecuación diferencial en derivadas parciales*

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Solución Aplicando la Regla de la Cadena (de una sola variable),

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{1}{y}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{-x}{y^2}\right)$$

Entonces,

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = f'\left(\frac{x}{y}\right)\left(x \times \frac{1}{y} + y \times \frac{-x}{y^2}\right) = 0$$

La Definición 4 se puede extender en la forma obvia para considerar funciones de más de dos variables. Si f es una función de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, entonces f tiene n derivadas parciales primeras, $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ..., $f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, una con respecto a cada variable.

Ejemplo 5

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2xy}{1 + xz + yz}\right) = -\frac{2xy}{(1 + xz + yz)^2}(x + y)$$

De nuevo, todas las reglas de la diferenciación estándar se pueden aplicar al cálculo de las derivadas parciales.

Observación Si una función de una sola variable $f(x)$ tiene derivada $f'(a)$ en $x = a$, entonces dicha función es necesariamente continua en $x = a$. Esta propiedad *no* se puede extender al caso de las derivadas parciales. Aunque todas las derivadas parciales primeras de una función de varias variables existieran en un punto, la función puede no ser continua en dicho punto. *Véase* el Ejercicio 36 posterior.

Planos tangentes y rectas normales

Si la gráfica de $z = f(x, y)$ es una superficie «suave» cerca del punto P cuyas coordenadas son $(a, b, f(a, b))$, entonces dicha gráfica tendrá un **plano tangente** y una **recta normal** en P. La recta normal es la recta que pasa por P y es perpendicular a la superficie; por ejemplo, una recta que une un punto de una esfera con su centro es normal a dicha esfera. Cualquier vector distinto de cero que sea paralelo a la recta normal en P se denomina vector normal a la superficie en P. El plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en P es aquel que pasa por P y es perpendicular a la recta normal en P.

Supongamos que la superficie $z = f(x, y)$ tiene un plano tangente *no vertical* (y, por tanto, una recta normal *no horizontal*) en el punto P (posteriormente en este capítulo estableceremos condiciones precisas que garantizan que la gráfica de una función tiene un plano tangente no vertical en un punto). El plano tangente corta al plano vertical $y = b$ en una recta que es tangente en P a la curva de intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $y = b$ (*véanse* las Figuras 12.15 y 12.17). La pendiente de esta recta es $f_1(a, b)$, por lo que es paralela al vector $\mathbf{T}_1 = \mathbf{i} + f_1(a, b)\mathbf{k}$. De forma similar, el plano tangente corta al plano vertical $x = a$ en una recta cuya pendiente es $f_2(a, b)$. Por tanto, esta recta es paralela al vector $\mathbf{T}_2 = \mathbf{j} + f_2(a, b)\mathbf{k}$. Se deduce entonces que el plano tangente, y por tanto la propia superficie $z = f(x, y)$, tiene como vector normal

$$\mathbf{n} = \mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & f_2(a, b) \\ 1 & 0 & f_1(a, b) \end{vmatrix} = f_1(a, b)\mathbf{i} + f_2(a, b)\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

Un vector normal $z = f(x, y)$ en $(a, b, f(a, b))$ es

$$\mathbf{n} = f_1(a, b)\mathbf{i} + f_2(a, b)\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

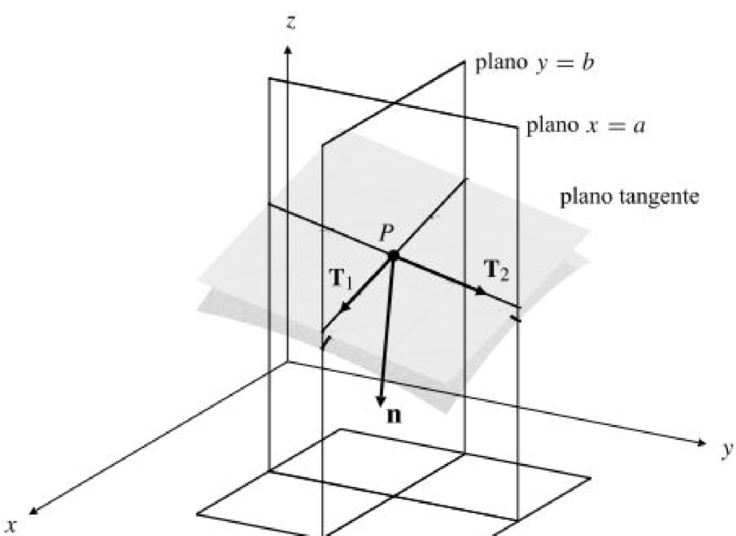


Figura 12.17 El plano tangente y un vector normal $z = f(x, y)$ en $P = (a, b, f(a, b))$.

Como el plano tangente pasa por $P = (a, b, f(a, b))$, su ecuación es

$$f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b) - (z - f(a, b)) = 0$$

o, en otros términos,

Una ecuación del plano tangente a $z = f(x, y)$ en $(a, b, f(a, b))$ es

$$z = f(a, b) + f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b)$$

En la Sección 12.7 obtendremos este resultado por un método diferente.

La recta normal a $z = f(x, y)$ en $(a, b, f(a, b))$ tiene como vector director $f_1(a, b)\mathbf{i} + f_2(a, b)\mathbf{j} - \mathbf{k}$ y, por tanto, sus ecuaciones son

$$\frac{x - a}{f_1(a, b)} = \frac{y - b}{f_2(a, b)} = \frac{z - f(a, b)}{-1}$$

con las modificaciones adecuadas si $f_1(a, b) = 0$ o $f_2(a, b) = 0$.

Ejemplo 6 Obtenga un vector normal y las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a la gráfica de $z = \operatorname{sen}(xy)$ en el punto donde $x = \pi/3$ y $y = -1$.

Solución Las coordenadas del punto en la gráfica son $(\pi/3, -1, -\sqrt{3}/2)$. Entonces,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\cos(xy) \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x\cos(xy)$$

En $(\pi/3, -1)$ tenemos que $\partial z/\partial x = -1/2$ y $\partial z/\partial y = \pi/6$. Por tanto, un vector normal a la superficie es $\mathbf{n} = -(1/2)\mathbf{i} + (\pi/6)\mathbf{j} - \mathbf{k}$ y el plano tangente es

$$z = \frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{6}(y + 1)$$

o, de forma más sencilla, $3x - \pi y + 6z = 2\pi - 3\sqrt{3}$. La ecuación de la recta normal es

$$\frac{x - \frac{\pi}{3}}{\frac{-1}{2}} = \frac{y + 1}{\frac{\pi}{6}} = \frac{z + \frac{\sqrt{3}}{2}}{-1} \quad \text{o} \quad \frac{6x - 2\pi}{-3} = \frac{6y + 6}{\pi} = \frac{6z + 3\sqrt{3}}{-6}$$

Ejemplo 7 ¿Qué plano horizontal es tangente a la superficie

$$z = x^2 - 4xy - 2y^2 + 12x - 12y - 1$$

y cuál es el punto de tangencia?

Solución Un plano es horizontal sólo si su ecuación es de la forma $z = k$, es decir, es independiente de x e y. Por tanto, en el punto de tangencia debe cumplirse $\partial z/\partial x = \partial z/\partial y = 0$. Las ecuaciones

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 4y + 12 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -4x - 4y - 12 = 0$$

tienen como solución $x = -4$, $y = 1$. Para estos valores tenemos que $z = -31$, por lo que la ecuación del plano tangente pedido es $z = -31$, y el punto de tangencia es $(-4, 1, -31)$.

Distancia de un punto a una superficie: un ejemplo geométrico

Ejemplo 8 Calcule la distancia del punto (3, 0, 0) al paraboloide hiperbólico cuya ecuación es $z = x^2 - y^2$.

Solución Se trata de un problema de optimización del tipo que consideraremos de forma más sistemática en el capítulo siguiente. Sin embargo, los problemas que tratan de la minimización de distancias de puntos a superficies se pueden resolver a menudo utilizando métodos geométricos.

Si $Q = (X, Y, Z)$ es el punto de la superficie $z = x^2 - y^2$ más cercano a $P = (3, 0, 0)$, entonces el vector $\overline{PQ} = (X - 3)\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$ debe ser normal a dicha superficie en Q (*véase* la Figura 12.18(a)). Utilizando las derivadas parciales de $z = x^2 - y^2$, sabemos que el vector $\mathbf{n} = 2X\mathbf{i} - 2Y\mathbf{j} - \mathbf{k}$ es normal a la superficie en Q. Por tanto, $\overline{PQ}$ debe ser paralelo a $\mathbf{n}$, y $\overline{PQ} = t\mathbf{n}$ para algún escalar t. Separando esta ecuación vectorial en sus componentes resulta

$$X - 3 = 2Xt, \qquad Y = -2Yt \quad \text{y} \quad Z = -t$$

La ecuación del centro implica que, o bien $Y = 0$, o bien $t = -\frac{1}{2}$. Debemos considerar ambas posibilidades.

CASO I Si $Y = 0$, entonces

$$X = \frac{3}{1 - 2t} \quad \text{y} \quad Z = -t$$

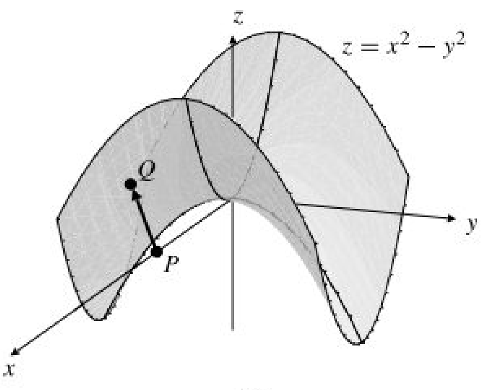
Pero $Z = X^2 - Y^2$, por lo que debemos tener

$$-t = \frac{9}{(1 - 2t)^2}$$

Se trata de una ecuación cúbica en t, que en principio habría que resolver numéricamente, por ejemplo, utilizando el Método de Newton. Sin embargo, si probamos con valores enteros pequeños de t, descubriremos rápidamente que $t = -1$ es una solución. La Figura 12.18(b) muestra los dos miembros de la ecuación. Puede verse que $t = -1$ es la única solución real. Calculando los correspondientes valores de X y Z, se obtiene el punto (1, 0, 1) como candidato a Q. La distancia de este punto a P es $\sqrt{5}$.

CASO II Si $t = -1/2$, entonces $X = 3/2$, $Z = 1/2$ y $Y = \pm\sqrt{X^2 - Z} = \pm\sqrt{7}/2$, y la distancia desde estos puntos a P es $\sqrt{17}/2$.

Como $\frac{17}{4} < 5$, los puntos $(3/2, \pm\sqrt{7}/2, 1/2)$ son los puntos de la superficie $z = x^2 - y^2$ más cercanos a (3, 0, 0), y la distancia de (3, 0, 0) a la superficie es $\sqrt{17}/2$ unidades.



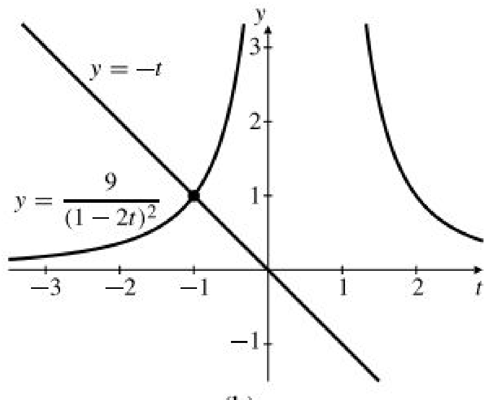


Figura 12.18 (a) Si Q es el punto de la superficie $z = x^2 - y^2$ más cercano a P, entonces $\overline{PQ}$ es normal a dicha superficie. (b) La ecuación $-t = \dfrac{9}{(1 - 2t)^2}$ tiene sólo una raíz real, $t = -1$.

Ejercicios 12.3

En los Ejercicios 1-10, calcule todas las derivadas parciales primeras de las funciones especificadas, y evalúelas en los puntos dados.

1. $f(x, y) = x - y + 2, \quad (3, 2)$

2. $f(x, y) = xy + x^2, \quad (2, 0)$

3. $f(x, y, z) = x^3y^4z^5, \quad (0, -1, -1)$

4. $g(x, y, z) = \dfrac{xz}{y+z}, \quad (1, 1, 1)$

5. $z = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right), \quad (-1, 1)$

6. $w = \ln(1 + e^{xyz}), \quad (2, 0, -1)$

7. $f(x, y) = \operatorname{sen}(x\sqrt{y}), \quad \left(\dfrac{\pi}{3}, 4\right)$

8. $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (-3, 4)$

9. $w = x^{(y \ln z)}, \quad (e, 2, e)$

10. $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = \dfrac{x_1 - x_2^2}{x_3 + x_4^2}, \quad (3, 1, -1, -2)$

En los Ejercicios 11 y 12, calcule las derivadas parciales primeras de las funciones dadas en el punto (0, 0). Tendrá que utilizar la Definición 4.

11. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3 - y^3}{x^2 + 3y^2}, & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

12. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2y^2}{x - y}, & \text{si} \quad x \neq y \\ 0, & \text{si} \quad x = y \end{cases}$

En los Ejercicios 13-22, obtenga ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a las gráficas de las funciones dadas en los puntos con los valores especificados de x e y.

13. $f(x, y) = x^2 - y^2$ en $(-2, 1)$

14. $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$ en $(1, 1)$

15. $f(x, y) = \cos(x/y)$ en $(\pi, 4)$

16. $f(x, y) = e^{xy}$ en $(2, 0)$

17. $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ en $(1, 2)$

18. $f(x, y) = ye^{-x^2}$ en $(0, 1)$

19. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ en $(1, -2)$

20. $f(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ en $(0, 2)$

21. $f(x, y) = \tan^{-1}(y/x)$ en $(1, -1)$

22. $f(x, y) = \sqrt{1 + x^3y^2}$ en $(2, 1)$

23. Calcule las coordenadas de todos los puntos de la superficie $z = x^4 - 4xy^3 + 6y^2 - 2$ donde dicha superficie tiene un plano tangente horizontal.

24. Calcule todos los planos horizontales que son tangentes a la superficie cuya ecuación es $z = xye^{-(x^2+y^2)/2}$. ¿En qué puntos son tangentes?

En los Ejercicios 25-31, demuestre que las funciones dadas satisfacen las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

◆25. $z = xe^y, \quad x\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$

◆26. $z = \dfrac{x + y}{x - y}, \quad x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$

◆27. $z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$

◆28. $w = x^2 + yz, \quad x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} + z\dfrac{\partial w}{\partial z} = 2w$

◆29. $w = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} + z\dfrac{\partial w}{\partial z} = -2w$

◆30. $z = f(x^2 + y^2)$, siendo f cualquier función diferenciable de una variable,

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

◆31. $z = f(x^2 - y^2)$, siendo f cualquier función diferenciable de una variable,

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

32. Enuncie una definición formal de las tres derivadas parciales primeras de la función $f(x, y, z)$.

33. ¿Cuál es la ecuación del «hiperplano tangente» a la gráfica $w = f(x, y, z)$ en $(a, b, c, f(a, b, c))$?

***34.** Calcule la distancia del punto $(1, 1, 0)$ al paraboloide circular cuya ecuación es $z = x^2 + y^2$.

***35.** Calcule la distancia del punto $(0, 0, 1)$ al paraboloide elíptico cuya ecuación es $z = x^2 + 2y^2$.

***36.** Sea $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$

Nótese que f no es continua en (0, 0) (*véase* el Ejemplo 3 de la Sección 12.2). Por tanto, su gráfica no es suave en ese punto. Demuestre, sin embargo, que $f_1(0, 0)$ y $f_2(0, 0)$ existen. A partir de aquí, se puede deducir que la existencia de derivadas parciales no implica que una función de varias variables sea continua. Esto es una diferencia con el caso de una sola variable.

37. Determine $f_1(0, 0)$ y $f_2(0, 0)$ si existen, siendo

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^3 + y)\operatorname{sen}\dfrac{1}{x^2 + y^2}, & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

38. Calcule $f_1(x, y)$ para la función del Ejercicio 37. ¿Es continua $f_1(x, y)$ en (0, 0)?

***39.** Sea $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

Calcule $f_1(x, y)$ y $f_2(x, y)$ en todos los puntos (x, y) del plano. ¿Es f continua en (0, 0)? ¿Son f_1 y f_2 continuas en (0, 0)?

***40.** Sea

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{xy^2z}{x^4 + y^4 + z^4}, & \text{si} \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0, & \text{si} \quad (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}.$$

Calcule $f_1(0, 0, 0)$, $f_2(0, 0, 0)$ y $f_3(0, 0, 0)$. ¿Es f continua en (0, 0, 0)? ¿Son f_1, f_2 y f_3 continuas en (0, 0, 0)?

12.4 Derivadas de orden superior

Las derivadas parciales de orden segundo y superior se calculan tomando las derivadas parciales de otras derivadas parciales ya calculadas previamente. La notación utilizada indica el orden en el que se realizan las diferenciaciones. Si $z = f(x, y)$, se pueden calcular *cuatro* derivadas parciales de segundo orden, concretamente dos derivadas parciales segundas **puras** con respecto a x e y,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} = f_{11}(x, y) = f_{xx}(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y} = f_{22}(x, y) = f_{yy}(x, y)$$

y dos derivadas parciales segundas **mixtas** con respecto a x e y,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = f_{21}(x, y) = f_{yx}(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} = f_{12}(x, y) = f_{xy}(x, y)$$

Recalcamos de nuevo que las notaciones f_{11}, f_{12}, f_{21} y f_{22} son en general preferibles a f_{xx}, f_{xy}, f_{yx} y f_{yy}, aunque estas últimas se utilizan muy a menudo en ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Nótese que f_{12} indica diferenciación de f *primero* con respecto a su primera variable y *después* con respecto a su segunda variable; f_{21} indica el orden de diferenciación inverso. El subíndice más cercano a f indica qué diferenciación se realiza primero.

De forma similar, si $w = f(x, y, z)$, entonces

$$\frac{\partial^5 w}{\partial y \partial x \partial y^2 \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} = f_{32212}(x, y, z) = f_{zyyxy}(x, y, z)$$

Ejemplo 1 Calcule las cuatro derivadas parciales segundas de $f(x, y) = x^3y^4$.

Solución

$$f_1(x, y) = 3x^2y^4, \qquad f_2(x, y) = 4x^3y^3,$$

$$f_{11}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^4) = 6xy^4, \qquad f_{21}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(4x^3y^3) = 12x^2y^3,$$

$$f_{12}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^4) = 12x^2y^3, \qquad f_{22}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(4x^3y^3) = 12x^3y^2$$

Ejemplo 2 Calcule $f_{223}(x, y, z)$, $f_{232}(x, y, z)$ y $f_{322}(x, y, z)$ para la función $f(x, y, z) = e^{x-2y+3z}$.

Solución

$$\begin{aligned}
f_{223}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}e^{x-2y+3z} \\
&= \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}(-2e^{x-2y+3z}) \\
&= \frac{\partial}{\partial z}(4e^{x-2y+3z}) = 12e^{x-2y+3z} \\
f_{232}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}e^{x-2y+3z} \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}(-2e^{x-2y+3z}) \\
&= \frac{\partial}{\partial y}(-6e^{x-2y+3z}) = 12e^{x-2y+3z} \\
f_{322}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}e^{x-2y+3z} \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}(3e^{x-2y+3z}) \\
&= \frac{\partial}{\partial y}(-6e^{x-2y+3z}) = 12e^{x-2y+3z}
\end{aligned}$$

Obsérvese en los dos ejemplos anteriores que las derivadas parciales mixtas tomadas con respecto a las mismas variables pero en orden diferente son iguales. Esto no es una coincidencia. Siempre ocurre para funciones suficientemente suaves. En particular, se requiere que las derivadas parciales mixtas que intervienen sean *continuas*. El siguiente teorema presenta de forma más precisa este importante fenómeno.

TEOREMA 1 **Igualdad de las derivadas parciales mixtas**

Supongamos que dos derivadas parciales mixtas de orden n requieren las mismas diferenciaciones pero en órdenes diferentes. Si esas derivadas parciales son continuas en un punto P, y si f y todas las derivadas parciales de f de orden inferior a n son continuas en un entorno de P, entonces las dos derivadas parciales mixtas son iguales en el punto P.

DEMOSTRACIÓN Demostraremos sólo un caso especial representativo, correspondiente a la igualdad de $f_{12}(a, b)$ y $f_{21}(a, b)$ para una función f de dos variables, suponiendo que f_{12} y f_{21} están definidas, que f_1, f_2 y f son continuas en un disco de radio positivo centrado en (a, b), y que f_{12} y f_{21} son continuas en (a, b). Sean h y k dos números con valor absoluto lo suficientemente pequeño para que el punto $(a + h, b + k)$ esté en dicho disco. Entonces también lo estarán todos los puntos del rectángulo cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados y con vértices diagonalmente opuestos a (a, b) y $(a + h, b + k)$ (*véase* la Figura 12.19).

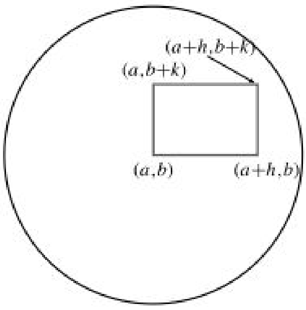


Figura 12.19 Un rectángulo contenido en un disco donde f y ciertas derivadas parciales son continuas.

Sea $Q = f(a + h, b + k) - f(a + h, b) - f(a, b + k) + f(a, b)$ y definamos funciones de una variable $u(x)$ y $v(y)$:

$$u(x) = f(x, b + k) - f(x, b) \quad \text{y} \quad v(y) = f(a + h, y) - f(a, y)$$

Evidentemente, $Q = u(a + h) - u(a)$ y además $Q = v(b + k) - v(b)$. Por el Teorema del Valor Medio (de una variable) existe un número θ_1, con $0 < \theta_1 < 1$, tal que $a + \theta_1 h$ está entre a y $a + h$, de forma que

$$Q = u(a + h) - u(a) = hu'(a + \theta_1 h) = h[f_1(a + \theta_1 h, b + k) - f_1(a + \theta_1 h, b)]$$

Aplicaremos ahora el Teorema del Valor Medio de nuevo, esta vez a f_1 considerada como una función de su segunda variable, para obtener otro número θ_2, con $0 < \theta_2 < 1$, tal que

$$f_1(a + \theta_1 h, b + k) - f_1(a + \theta_1 h, b) = kf_{12}(a + \theta_1 h, b + \theta_2 k)$$

Por tanto, $Q = hkf_{12}(a + \theta_1 h, b + \theta_2 k)$. Dos aplicaciones similares del Teorema del Valor Medio a $Q = v(b + k) - v(b)$ conducen a $Q = hkf_{21}(a + \theta_3 h, b + \theta_4 k)$, siendo θ_3 y θ_4 dos números comprendidos entre 0 y 1. Igualando estas dos expresiones de Q y eliminando el factor común hk, se obtiene

$$f_{12}(a + \theta_1 h, b + \theta_2 k) = f_{21}(a + \theta_3 h, b + \theta_4 k)$$

Como f_{12} y f_{21} son continuas en (a, b), podemos hacer que h y k tiendan a cero para obtener $f_{12}(a, b) = f_{21}(a, b)$, como se quería demostrar.

¡¡ ATENCIÓN !! El Teorema del Valor Medio se utiliza cuatro veces en esta demostración, cada una de ellas para expresar una diferencia de la forma $g(p + m) - g(p)$ como $g'(c)m$, siendo c algún número entre p y $p + m$. Es conveniente expresar c en la forma $p + \theta m$, siendo θ algún número entre 0 y 1.

El Ejercicio 16 posterior desarrolla un ejemplo de una función en la que f_{12} y f_{21} existen pero no son continuas en (0, 0), y para la que $f_{12}(0, 0) \neq f_{21}(0, 0)$.

Observación **Derivadas parciales en Maple** Cuando se utiliza la función de Maple **diff** para calcular una derivada, debe incluirse el nombre de la variable de diferenciación. Por ejemplo, `diff(x^2+y^3, x)` da como resultado $2x$. No importa que la función que se diferencia dependa de más de una variable, ya que estamos indicando a Maple que hay que diferenciar con respecto a x. Si se deseara la derivada con respecto a y, habría que introducir `diff(x^2+y^3, y)`, y la salida sería $3y^2$. En este contexto, no hay distinción entre derivadas ordinarias y derivadas parciales. Existe, sin embargo, una diferencia cuando se desea aplicar un *operador diferencial* a una función f. Si f es una función de la variable, se puede expresar su derivada f' en Maple como `D(f)`. Por ejemplo,

```
> f := x -> sin(2*x) ; fprime := D(f) ;
```

$$f := x \rightarrow \text{sen}\,(2x)$$

$$fprime := x \rightarrow 2\cos\,(2x)$$

La entrada `fprime(Pi/6)` producirá ahora la salida 1, como cabría esperar.

Si f es una función de dos (o más) variables, entonces `D(f)` no tiene sentido; ¿queremos decir f_1 o f_2? Distinguiremos las dos (o más) derivadas parciales primeras utilizando subíndices con D.

```
> f := (x, y) -> exp(3*y)*sen(2*x) ;
```

$$f := (x, y) \rightarrow e^{(3y)} * \text{sen}\,(2x)$$

```
> fone := D[1] (f) ; ftwo := D[2] (f) ;
```

$$fone := (x, y) \rightarrow 2\,e^{(3y)} * \cos\,(2x)$$

$$ftwo := (x, y) \rightarrow 3\,e^{(3y)} * \text{sen}\,(2x)$$

Las derivadas parciales de orden superior se indican con subíndices múltiples (encerrados entre corchetes).

```
> D[1, 1, 2] (f) (Pi/4, 0) ;
```

$$-12$$

No hay que preocuparse por el orden de los subíndices en una derivada parcial mixta. Maple asume que las derivadas parciales son continuas, aun cuando no sepa si la función lo es. Incluso aunque no se hubiera asignado a g ningún significado durante la sesión de Maple actual, la entrada `D[1, 2] (g) (x, y) - D[2, 1] (g) (x, y);` producirá una salida de 0.

Las ecuaciones de Laplace y de onda

Muchos fenómenos importantes e interesantes se modelan mediante funciones de varias variables que satisfacen ciertas *ecuaciones diferenciales en derivadas parciales*. En los ejemplos que siguen presentaremos dos ecuaciones diferenciales en derivadas parciales concretas que surgen frecuentemente en ciencias físicas y matemáticas. Los Ejercicios 17-19 posteriores presentan otra ecuación con importantes aplicaciones.

Ejemplo 3 Demuestre que para cualquier número real k las funciones

$$z = e^{kx}\cos(ky) \quad \text{y} \quad z = e^{kx}\operatorname{sen}(ky)$$

satisfacen la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

en todo punto del plano xy.

Solución Para $z = e^{kx}\cos(ky)$ tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ke^{kx}\cos(ky), \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -ke^{kx}\operatorname{sen}(ky)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = k^2e^{kx}\cos(ky), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -k^2e^{kx}\cos(ky)$$

Entonces,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = k^2e^{kx}\cos(ky) - k^2e^{kx}\cos(ky) = 0$$

El cálculo para $z = e^{kx}\operatorname{sen}(ky)$ es similar. ■

Observación La ecuación diferencial en derivadas parciales del ejemplo anterior se denomina **ecuación de Laplace** (bidimensional). Se dice que una función de dos variables con derivadas parciales segundas continuas en una región del plano es **armónica** si cumple la ecuación de Laplace. Estas funciones tienen un papel fundamental en la teoría de funciones diferenciables de *variable compleja* (*véase* el Apéndice II), y se utilizan para modelar varias magnitudes físicas como las distribuciones de temperatura en estado estacionario, flujos de fluidos y campos electromagnéticos. Las funciones armónicas tienen muchas propiedades interesantes. Tienen derivadas de todos los órdenes, y son *analíticas*, es decir, son sumas de sus series de Taylor (multivariables). Es más, una función armónica sólo puede alcanzar valores máximo y mínimo en la frontera de su dominio. La ecuación de Laplace, y por tanto las funciones armónicas, se pueden considerar en cualquier número de dimensiones (*véanse* los Ejercicios 13 y 14 posteriores).

Ejemplo 4 Si f y g son funciones de una variable diferenciables dos veces, demuestre que

$$w = f(x - ct) + g(x + ct)$$

satisface la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Solución Utilizando la Regla de la Cadena para funciones de una variable se obtiene

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -cf'(x - ct) + cg'(x + ct), \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = f'(x - ct) + g'(x + ct)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2f''(x - ct) + c^2g''(x + ct), \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f''(x - ct) + g''(x + ct)$$

Por tanto, w cumple la ecuación diferencial dada. ■

Observación La ecuación diferencial en derivadas parciales del ejemplo anterior se denomina **función de onda** (unidimensional). Si t representa el tiempo, entonces $f(x - ct)$ representa una onda que viaja hacia la derecha por el eje x con velocidad c (*véase* la Figura 12.20). De forma similar, $g(x + ct)$ representa una onda que viaja hacia la izquierda con velocidad c. A diferencia de las soluciones de la ecuación de Laplace que deben ser diferenciables infinitas veces, las soluciones de la ecuación de onda sólo necesitan tener suficientes derivadas para satisfacer la ecuación diferencial. Por lo demás, f y g son arbitrarias.

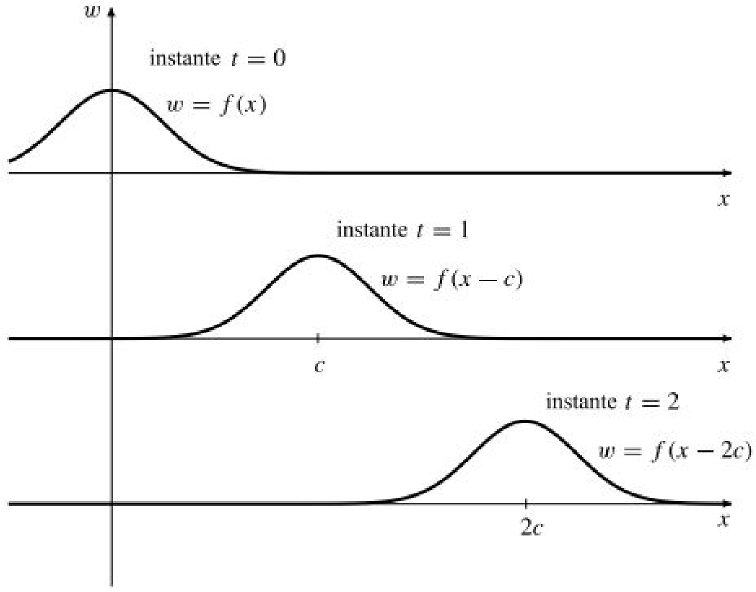


Figura 12.20 $w = f(x - ct)$ representa una onda que se mueve hacia la derecha con velocidad c.

Ejercicios 12.4

En los Ejercicios 1-6, calcule todas las derivadas parciales segundas de las funciones dadas.

1. $z = x^2(1 + y^2)$

2. $f(x, y) = x^2 + y^2$

3. $w = x^3y^3z^3$

4. $z = \sqrt{3x^2 + y^2}$

5. $z = xe^y - ye^x$

6. $f(x, y) = \ln(1 + \operatorname{sen}(xy))$

* **7.** ¿Cuántas derivadas parciales mixtas de orden 3 puede tener una función de tres variables? Si son todas ellas continuas, ¿cuántos valores diferentes pueden tener en un punto? Calcule las derivadas parciales mixtas de orden 3 de $f(x, y, z) = xe^{xy}\cos(xz)$ que requieren dos diferenciaciones con respecto a z y una con respecto a x.

Demuestre que las funciones de los Ejercicios 8-12 son armónicas en las regiones del plano indicadas.

8. $f(x, y) = A(x^2 - y^2) + Bxy$ en todo el plano (A y B son constantes).

9. $f(x, y) = 3x^2y - y^3$ en todo el plano. (¿Puede pensar en otro polinomio de grado 3 en x e y que sea también armónico?).

10. $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ en todas partes excepto en el origen.

11. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ en todas partes excepto en el origen.

12. $\tan^{-1}(y/x)$ excepto en puntos del eje y.

13. Demuestre que $w = e^{3x+4y}\operatorname{sen}(5z)$ es armónica en todo $\mathbb{R}^3$, es decir que satisface en todas partes la ecuación de Laplace tridimensional

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$$

14. Suponga que $f(x, y)$ es armónica en el plano xy. Demuestre que las funciones $zf(x, y)$, $x\,f(y, z)$ e $yf(z, x)$ son armónicas en todo $\mathbb{R}^3$. ¿Qué condición deberían cumplir las constantes a, b y c para asegurar que $f(ax + by, cz)$ es armónica en $\mathbb{R}^3$?

15. Sean las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ con derivadas parciales segundas continuas, tales que satisfacen las **ecuaciones de Cauchy-Riemann**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Demuestre que u y v son armónicas.

***16.** Sea $F(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0\ 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

Calcule $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$, $F_{12}(x, y)$ y $F_{21}(x, y)$ en los puntos $(x, y) \neq (0, 0)$. Calcule también estas derivadas en $(0, 0)$. Observe que $F_{21}(0, 0) = 2$ y $F_{12}(0, 0) = -2$. ¿Contradice este resultado el Teorema 1? Explique por qué.

La ecuación (de difusión) del calor

◆**17.** Demuestre que la función $u(x, t) = t^{-1/2}e^{-x^2/4t}$ satisface la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Esta ecuación se denomina **ecuación del calor unidimensional**, porque modela la difusión del calor en una barra aislada (donde $u(x, t)$ representa la temperatura en la posición x en el instante t) y otros fenómenos similares.

◆**18.** Demuestre que la función $u(x, y, t) = t^{-1}e^{-(x^2+y^2)/4t}$ cumple la **ecuación del calor bidimensional**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

◆**19.** Comparando los resultados de los Ejercicios 17 y 18, plantee una solución a la **ecuación del calor tridimensional**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Verifique su planteamiento (si está perezoso, utilice Maple).

Funciones biarmónicas

Una función $u(x, y)$ con derivadas parciales de cuarto orden continuas se denomina **biarmónica** si $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ es una función armónica.

◆**20.** Demuestre que $u(x, y)$ es biarmónica si y sólo si cumple la ecuación biarmónica

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0$$

21. Verifique que $u(x, y) = x^4 - 3x^2y^2$ es biarmónica.

22. Demuestre que si $u(x, y)$ es armónica, entonces $v(x, y) = xu(x, y)$ y $w(x, y) = yu(x, y)$ son biarmónicas.

Utilice el resultado del Ejercicio 22 para demostrar que las funciones de los Ejercicios 23-25 son biarmónicas.

23. $xe^x \operatorname{sen} y$

24. $y \ln (x^2 + y^2)$

25. $\dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

◆**26.** Proponga una definición de función biarmónica de tres variables, y demuestre resultados análogos a los de los Ejercicios 20 y 22 para funciones biarmónicas $u(x, y, z)$.

27. Utilice Maple para verificar directamente que la función del Ejercicio 25 es biarmónica.

12.5 La Regla de la Cadena

La Regla de la Cadena para funciones de una variable es una fórmula que permite obtener la derivada de una composición $f(g(x))$ de dos funciones f y g:

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

La situación para el caso de varias variables es más complicada. Si f depende de más de una variable, y cualquiera de esas variables puede ser a su vez función de una o más de otras variables, no se puede obtener una fórmula simple de la composición que cubra todos los posibles casos. En este caso debemos ver la Regla de la Cadena como un *procedimiento de diferenciación de composiciones de funciones*, en vez de una fórmula de sus derivadas. Para motivar la formulación de la Regla de la Cadena en el caso de funciones de dos variables, empezaremos con un ejemplo concreto.

Ejemplo 1 Supongamos que estamos realizando una excursión por una región montañosa y tenemos un mapa. Sea (x, y) las coordenadas de nuestra posición en el mapa (es decir, las coordenadas horizontales de nuestra posición real en la región). Sea $z = f(x, y)$ la altura del terreno (por ejemplo, sobre el nivel del mar) en la posición (x, y). Supongamos que caminamos por una senda, de forma que nuestra posición en el instante t se puede expresar como $x = u(t)$ e $y = v(t)$ (son las ecuaciones paramétricas del sendero sobre el mapa). En el instante t nuestra altitud sobre el nivel del mar se expresa mediante la función compuesta

$$z = f(u(t), v(t)) = g(t)$$

que es una función de una sola variable. ¿Con qué rapidez está cambiando nuestra altitud con respecto al tiempo en el instante t?

Solución La respuesta es la derivada de $g(t)$:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(u(t+h),\ v(t+h)) - f(u(t),\ v(t))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(u(t+h),\ v(t+h)) - f(u(t),\ v(t+h))}{h} \\ &\quad + \lim_{h\to 0} \frac{f(u(t),\ v(t+h)) - f(u(t),\ v(t))}{h} \end{aligned}$$

Hemos sumado 0 al numerador del cociente de Newton de una forma creativa, para separar el cociente en una suma de dos cocientes. En el primero de ellos, en la diferencia de valores de f interviene sólo la primera variable de f, y en el segundo, en la diferencia interviene sólo la segunda variable de f. La Regla de la Cadena de una sola variable sugiere que la suma de los dos límites anteriores es

$$g'(t) = f_1(u(t), v(t))\,u'(t) + f_2(u(t), v(t))v'(t)$$

La fórmula anterior es la Regla de la Cadena para $\frac{d}{dt} f(u(t),\ v(t))$. Empleando la notación de Leibniz tenemos

Una versión de la Regla de la Cadena

Si z es función de x e y, y sus derivadas parciales primeras son continuas, y si x e y son funciones diferenciables de t, entonces

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Nótese que hay dos términos en la expresión de dz/dt (o de $g'(t)$) y cada uno de ellos proviene de cada una de las variables de f que depende de t.

Considere ahora una función f de dos variables, x e y, cada una de las cuales es a su vez una función de otras dos variables, s y t:

$$z = f(x, y), \qquad \text{siendo} \qquad x = u(s, t) \quad \text{e} \quad y = v(s, t)$$

Podemos formar la función compuesta

$$z = f(u(s, t), v(s, t)) = g(s, t)$$

Por ejemplo, si $f(x, y) = x^2 + 3y$, siendo $u(s, t) = st^2$ y $v(s, t) = s - t$, entonces $g(s, t) = s^2t^4 + 3(s - t)$.

Supongamos que f, u y v tienen derivadas parciales primeras con respecto a sus respectivas variables, y que las de f son continuas. Entonces las derivadas parciales primeras de g se expresan como

$$\begin{aligned} g_1(s, t) &= f_1(u(s, t), v(s, t))u_1(s, t) + f_2(u(s, t), v(s, t))v_1(s, t) \\ g_2(s, t) &= f_1(u(s, t), v(s, t))u_2(s, t) + f_2(u(s, t), v(s, t))v_2(s, t) \end{aligned}$$

Estas fórmulas se pueden expresar de forma más sencilla utilizando la notación de Leibniz:

Otra versión de la Regla de la Cadena

Si z es función de x e y, y sus derivadas parciales primeras son continuas, y si x e y dependen de s y de t, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Esto se puede deducir de la versión obtenida en el Ejemplo 1 haciendo que u y v dependan de dos variables, pero manteniendo una de ellas fija mientras diferenciamos con respecto a la otra. En la sección siguiente se dará una demostración más formal de este caso simple pero representativo de la Regla de la Cadena.

Las dos ecuaciones de la caja anterior se pueden combinar en una única ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial s} & \dfrac{\partial z}{\partial t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t}\\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial t}\end{pmatrix}$$

Al final de esta sección comentaremos del significado de esta matriz.

En general, si z es una función de varias variables «primarias», y cada una de ellas depende de algunas variables «secundarias», entonces la derivada parcial de z con respecto a una de las variables secundarias tendrá varios términos, siendo cada uno de ellos la contribución a la derivada que proviene de cada una de las variables primarias de las que depende z.

Observación Nótese el significado de los diversos subíndices que indican derivadas parciales en la forma funcional de la Regla de la Cadena:

$$g_1(s,t)=f_1(u(s,t),v(s,t))u_1(s,t)+f_2(u(s,t),v(s,t))v_1(s,t)$$

El «1» en $g_1(s,t)$ indica diferenciación con respecto a x, la primera variable de la que depende g. En cambio, el «1» en $f_1(u(s,t),v(s,t))$ indica diferenciación con respecto a x, la primera variable de la que depende f (estas derivadas se evalúan después en $x=u(s,t)$, $y=v(s,t)$).

Ejemplo 2 Si $z=\operatorname{sen}(x^2y)$, siendo $x=st^2$ y $y=s^2+\dfrac{1}{t}$, calcule $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$.

(a) Mediante sustitución directa y la versión de una variable de la Regla de la Cadena.
(b) Utilizando la versión de dos variables de la Regla de la Cadena.

Solución

(a) Mediante sustitución directa:

$$z=\operatorname{sen}\left((st^2)^2\left(s^2+\frac{1}{t}\right)\right)=\operatorname{sen}(s^4t^4+s^2t^3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=(4s^3t^4+2st^3)\cos(s^4t^4+s^2t^3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=(4s^4t^3+3s^2t^2)\cos(s^4t^4+s^2t^3)$$

(b) Utilizando la Regla de la Cadena:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\\ &= (2xy\cos(x^2y))t^2 + (x^2\cos(x^2y))2s\\ &= \left(2st^2\left(s^2+\frac{1}{t}\right)t^2 + 2s^3t^4\right)\cos(s^4t^4+s^2t^3)\\ &= (4s^3t^4 + 2st^3)\cos(s^4t^4+s^2t^3)\\ \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\\ &= (2xy\cos(x^2y))2st + (x^2\cos(x^2y))\left(\frac{-1}{t^2}\right)\\ &= \left(2st^2\left(s^2+\frac{1}{t}\right)2st + s^2t^4\left(\frac{-1}{t^2}\right)\right)\cos(s^4t^4+s^2t^3)\\ &= (4s^4t^3 + 3s^2t^2)\cos(s^4t^4+s^2t^3)\end{aligned}$$

Nótese que todavía hemos tenido que utilizar sustitución directa en las derivadas obtenidas en (b) para demostrar que los valores son los mismos que los obtenidos en (a).

Ejemplo 3 Calcule $\frac{\partial}{\partial x} f(x^2y,\ x+2y)$ y $\frac{\partial}{\partial y} f(x^2y,\ x+2y)$ en función de las derivadas parciales de f, suponiendo que dichas derivadas parciales son continuas.

Solución Tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} f(x^2y,\ x+2y) &= f_1(x^2y,\ x+2y)\frac{\partial}{\partial x}(x^2y) + f_2(x^2y,\ x+2y)\frac{\partial}{\partial x}(x+2y)\\ &= 2xy\,f_1(x^2y,\ x+2y) + f_2(x^2y,\ x+2y)\\ \frac{\partial}{\partial y} f(x^2y,\ x+2y) &= f_1(x^2y,\ x+2y)\frac{\partial}{\partial y}(x^2y) + f_2(x^2y,\ x+2y)\frac{\partial}{\partial y}(x+2y)\\ &= x^2 f_1(x^2y,\ x+2y) + 2\,f_2(x^2y,\ x+2y)\end{aligned}$$

Ejemplo 4 Exprese las derivadas parciales de $z = h(s,\ t) = f(g(s,\ t))$ en función de la derivada f' de f y de las derivadas parciales de g.

Solución Las derivadas parciales de h se pueden calcular utilizando la versión de una variable de la Regla de la Cadena: si $x = g(s,\ t)$, entonces $z = f(x)$ y

$$h_1(s,\ t) = \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{dz}{dx}\frac{\partial x}{\partial s} = f'(g(s,\ t))g_1(s,\ t)$$

$$h_2(s,\ t) = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{dz}{dx}\frac{\partial x}{\partial t} = f'(g(s,\ t))g_2(s,\ t)$$

El siguiente ejemplo presenta una aplicación híbrida de la Regla de la Cadena a una función que depende directa e indirectamente de la variable de diferenciación.

Ejemplo 5 Calcule dz/dt, siendo $z = f(x, y, t)$, $x = g(t)$ e $y = h(t)$ (suponga que f, g y h tienen derivadas continuas).

Solución Como z depende de t a través de cada una de las tres variables de f, la expresión de la Regla de la Cadena tendrá tres términos:

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial t} \\ &= f_1(x, y, t)g'(t) + f_2(x, y, t)h'(t) + f_3(x, y, t)\end{aligned}$$

Observación En el ejemplo anterior se puede distinguir fácilmente entre los significados de los símbolos dz/dt y $\partial z/\partial t$. Sin embargo, si la situación que hubiéramos tenido fuera

$$z = f(x, y, s, t) \qquad \text{siendo} \qquad x = g(s, t) \quad \text{e} \quad y = h(s, t)$$

entonces el significado del símbolo $\partial z/\partial t$ no estaría claro; podría referirse a la derivada parcial simple de f con respecto a su cuarta variable primaria (es decir, $f_4(x, y, s, t)$), o podría referirse a la derivada de la función compuesta $f(g(s, t), h(s, t), s, t)$. Tres de las cuatro variables primarias de f dependen de t y, por tanto, contribuyen a la tasa de cambio de z con respecto a t. La derivada parcial $f_4(x, y, s, t)$ indica la contribución de sólo una de estas tres variables. Es habitual utilizar $\partial z/\partial t$ para indicar la derivada completa de la función *compuesta* con respecto a la variable secundaria t:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} f(g(s, t), h(s, t), s, t) \\ &= f_1(x, y, s, t)g_2(s, t) + f_2(x, y, s, t)h_2(s, t) + f_4(x, y, s, t)\end{aligned}$$

Cuando sea necesario, podemos indicar la contribución de la variable primaria t como

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{x,y,s} = \frac{\partial}{\partial t} f(x, y, s, t) = f_4(x, y, s, t)$$

En este caso, los subíndices indican las variables primarias de f que se *mantienen fijas*, es decir, cuyas contribuciones a la tasa de cambio de z con respecto a t *se ignoran*. Por supuesto, en la situación descrita anteriormente, $(\partial z/\partial t)_s$ significa lo mismo que $\partial z/\partial t$.

En las aplicaciones, las variables que contribuyen a una derivada parcial concreta, en general estarán claras a partir del contexto. El ejemplo que sigue presenta una aplicación de este tipo. Es un ejemplo de un procedimiento denominado *diferenciación tras el movimiento*.

Ejemplo 6 La temperatura atmosférica depende de la posición y del tiempo. Si la posición se indica mediante tres coordenadas espaciales x, y y z (medidas en kilómetros) y el tiempo se indica como t (medido en horas), entonces la temperatura T °C es una función de cuatro variables, $T(x, y, z, t)$.

(a) Si un termómetro se fija a un globo atmosférico que se mueve siguiendo una trayectoria cuyas ecuaciones paramétricas son $x = f(t)$, $y = g(t)$ y $z = h(t)$, ¿cuál es la tasa de cambio en el instante t de la temperatura T medida por el termómetro?

(b) Calcule la tasa de cambio de la temperatura medida en el instante $t = 1$ si

$$T(x, y, z, t) = \frac{xy}{1 + z}(1 + t)$$

y si el globo se mueve siguiendo la curva

$$x = t, \qquad y = 2t, \qquad z = t - t^2$$

Solución

(a) En este caso, la tasa de cambio de la medida del termómetro depende del cambio en la posición del termómetro, así como del tiempo. Por tanto, ninguna de las cuatro variables de T se puede ignorar en la diferenciación. La tasa se expresa como

$$\frac{dT}{dt}=\frac{\partial T}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial T}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial T}{\partial z}\frac{dz}{dt}+\frac{\partial T}{\partial t}$$

El término $\partial T/\partial t$ se refiere sólo a la tasa de cambio de la temperatura con respecto al tiempo en una posición fija de la atmósfera. Los otros tres términos provienen del movimiento del globo.

(b) Los valores de las tres coordenadas y de sus derivadas en $t=1$ son $x=1$, $y=2$, $z=0$, $dx/dt=1$, $dy/dt=2$ y $dz/dt=-1$. Además, en $t=1$,

$$\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{y}{1+z}(1+t)=4, \qquad \frac{\partial T}{\partial z}=\frac{-xy}{(1+z)^2}(1+t)=-4$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{x}{1+z}(1+t)=2, \qquad \frac{\partial T}{\partial t}=\frac{xy}{1+z}=2$$

Entonces,

$$\left.\frac{dT}{dt}\right|_{t=1}=(4)(1)+(2)(2)+(-4)(-1)+2=14$$

La temperatura medida se incrementa con una tasa de 14 °C/h en el instante $t=1$.

La presentación y los ejemplos anteriores ponen de manifiesto que la Regla de la Cadena puede tomar formas diferentes en el caso de varias variables, dependiendo del número de variables que intervengan en las funciones que se componen. Como ayuda para determinar la forma correcta de la Regla de la Cadena en una situación dada, se puede construir un diagrama que ilustre la dependencia de las variables. En la Figura 12.21 se muestra un ejemplo de diagrama para la función de temperatura del Ejemplo 6. En la aplicación de la Regla de la Cadena para dT/dt interviene un término para cada ruta desde T hasta t que se pueda seguir en el diagrama. Por ejemplo, la ruta desde T que pasa por x y t produce el término $\frac{\partial T}{\partial x}\frac{dx}{dt}$, y así sucesivamente.

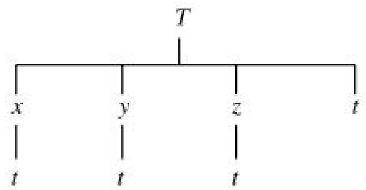


Figura 12.21 Diagrama que muestra la dependencia de T con t en el Ejemplo 6.

Ejemplo 7 Escriba la aplicación de la Regla de la Cadena a $\partial z/\partial x$, donde z depende de u, v y r; u y v dependen de x, y y r; r depende de x e y.

Solución El diagrama apropiado para este ejemplo se muestra en la Figura 12.22. Hay 5 rutas para ir de z a x:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}$$

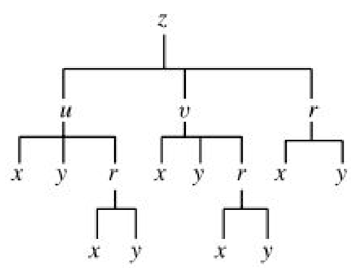


Figura 12.22 Diagrama de dependencia del Ejemplo 7.

Funciones homogéneas

Se dice que una función $f(x_1, \ldots, x_n)$ es **positivamente homogénea de grado *k*** si, para todo punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, de su dominio y todo número real $t > 0$, se cumple que

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, \ldots, x_n)$$

Por ejemplo,

$$\begin{array}{ll} f(x, y) = x^2 + xy - y^2 & \text{es positivamente homogénea de grado } 2 \\ f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} & \text{es positivamente homogénea de grado } 1 \\ f(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{es positivamente homogénea de grado } 0 \\ f(x, y, z) = \dfrac{x - y + 5z}{yz - z^2} & \text{es positivamente homogénea de grado } -1 \\ f(x, y) = x^2 + y & \text{no es positivamente homogénea} \end{array}$$

Obsérvese que una función positivamente homogénea de grado 0 permanece constante a lo largo de rayos que surjan del origen. De forma más general, una función positivamente homogénea crece o decrece a lo largo de dichos rayos proporcionalmente a la k-ésima potencia de la distancia al origen.

TEOREMA 2 **Teorema de Euler**

Si $f(x_1, \ldots, x_n)$ tiene derivadas parciales primeras continuas y es positivamente homogénea de grado k, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f_i(x_1, \ldots, x_n) = k f(x_1, \ldots, x_n)$$

DEMOSTRACIÓN Diferenciando la ecuación $f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, \ldots, x_n)$ con respecto a t se obtiene

$$x_1 f_1(tx_1, \ldots, tx_n) + x_2 f_2(tx_1, \ldots, tx_n) + \cdots + x_n f_n(tx_1, \ldots, tx_n) = kt^{k-1} f(x_1, \ldots, x_n)$$

Basta con sustituir ahora $t = 1$ para obtener el resultado.

Nótese que los Ejercicios 26-29 de la Sección 12.3 ilustran este teorema.

Derivadas de orden superior

La aplicación de la Regla de la Cadena a derivadas de orden superior puede ser muy complicada. Es importante tener en cuenta en cada etapa qué variables dependen de otras.

Ejemplo 8 Calcule $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x^2 - y^2, xy)$ en función de las derivadas parciales de la función f. Suponga que las derivadas parciales de segundo orden de f son continuas.

Solución En este problema no se indican explícitamente los símbolos de las variables primarias de las que depende f. Las denominaremos u y v. Por tanto, el problema nos pide calcular

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(u, v), \qquad \text{siendo} \qquad u = x^2 - y^2 \qquad \text{y} \qquad v = xy$$

Diferenciando primero con respecto a y:

$$\frac{\partial}{\partial y} f(u, v) = -2yf_1(u, v) + xf_2(u, v)$$

Ahora se diferencia el resultado con respecto a x. Nótese que el segundo término de la derecha es un producto de dos funciones de x, por lo que hay que aplicar la Regla del Producto:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(u, v) &= -2y(2x f_{11}(u, v) + yf_{12}(u, v)) \\ &\quad + f_2(u, v) + x(2x f_{21}(u, v) + yf_{22}(u, v)) \\ &= f_2(u, v) - 4xy f_{11}(u, v) + 2(x^2 - y^2) f_{12}(u, v) + xyf_{22}(u, v)\end{aligned}$$

En el último paso hemos usado el hecho de que las derivadas parciales mixtas de f son continuas, por lo que se pueden igualar f_{12} y f_{21}. ■

Revise cuidadosamente el cálculo anterior y asegúrese de entender lo que se hace en cada paso. Nótese que todas las derivadas de f que aparecen se evalúan en $(u, v) = (x^2 - y^2, xy)$, no en (x, y), ya que x e y no son las variables primarias de las que depende f.

Observación Los cálculos realizados en el ejemplo anterior (y en los siguientes) se pueden hacer fácilmente mediante un programa de matemáticas por computador. En Maple:

```
> g := (x, y) -> f(x^2 - y^2, x*y) :
  simplify(D[1, 2] (g) (x, y)) ;
```

$$\begin{aligned}&-4yD_{1,1}(f)(x^2 - y^2, xy)x - 2 * D_{1,2}(f)(x^2 - y^2, xy)y^2 \\ &\quad + 2D_{1,2}(f)(x^2 - y^2, xy)x^2 \\ &\quad + xD_{2,2}(f)(x^2 - y^2, xy)y + D_2(f)(x^2 - y^2, xy)\end{aligned}$$

que, tras inspeccionarla de cerca, se puede ver que es el mismo resultado calculado en el ejemplo.

Ejemplo 9 Si $f(x, y)$ es armónica, demuestre que $f(x^2 - y^2, 2xy)$ es también armónica.

Solución Sea $u = x^2 - y^2$ y $v = 2xy$. Si $z = f(u, v)$, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x f_1(u, v) + 2y f_2(u, v)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2y f_1(u, v) + 2x f_2(u, v)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= 2 f_1(u, v) + 2x(2x f_{11}(u, v) + 2y f_{12}(u, v)) \\ &\quad + 2y(2x f_{21}(u, v) + 2y f_{22}(u, v)) \\ &= 2 f_1(u, v) + 4x^2 f_{11}(u, v) + 8xy f_{12}(u, v) + 4y^2 f_{22}(u, v)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -2 f_1(u, v) - 2y(-2y f_{11}(u, v) + 2x f_{12}(u, v)) \\ &\quad + 2x(-2y f_{21}(u, v) + 2x f_{22}(u, v)) \\ &= -2 f_1(u, v) + 4y^2 f_{11}(u, v) - 8xy f_{12}(u, v) + 4x^2 f_{22}(u, v)\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4(x^2 + y^2)(f_{11}(u, v) + f_{22}(u, v)) = 0$$

ya que f es armónica. Entonces, $z = f(x^2 - y^2, 2xy)$ es una función armónica de x e y.

En el siguiente ejemplo se demuestra que la ecuación diferencial bidimensional de Laplace (*véase* el Ejemplo 3 en la Sección 12.4) tiene la forma

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = 0$$

cuando se plantea para una función z expresada en las coordenadas polares r y θ.

Ejemplo 10 **(Ecuación de Laplace en coordenadas polares)** Si $z = f(x, y)$ tiene derivadas parciales de segundo orden continuas, y si $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$, demuestre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Solución Se puede hacer de dos formas diferentes. Podemos partir de cada miembro de la ecuación y utilizar la Regla de la Cadena para demostrar que son iguales. En este ejemplo calcularemos las derivadas parciales con respecto a r y θ que aparecen en el miembro izquierdo y las expresaremos en función de las derivadas parciales con respecto a x e y. El otro método, que se basa en expresar las derivadas parciales con respecto a x e y en función de las derivadas parciales con respecto a r y θ, es algo más difícil (*véase* el Ejercicio 24 posterior). Sin embargo, tendríamos que haberlo planteado de esta manera si no nos hubieran dado la forma de la ecuación diferencial en coordenadas polares y tuviéramos que obtenerla.

En primer lugar, nótese que

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta, \qquad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\operatorname{sen}\theta, \qquad \frac{\partial y}{\partial r} = \operatorname{sen}\theta, \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$$

Por tanto,

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta\,\frac{\partial z}{\partial x} + \operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial z}{\partial y}$$

¡¡ ATENCIÓN !! Este ejemplo es difícil pero importante. Examine cada paso cuidadosamente hasta asegurarse de entender lo que se hace.

Ahora se diferencia de nuevo con respecto a r. Recuérdese que r y θ son variables independientes, por lo que los factores $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$ se pueden considerar constantes. Sin embargo, $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ dependen de x e y y, por tanto, de r y θ.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} &= \cos\theta\,\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial x} + \operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial y} \\
&= \cos\theta\left(\cos\theta\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right) + \operatorname{sen}\theta\left(\cos\theta\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) \\
&= \cos^2\theta\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\cos\theta\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \operatorname{sen}^2\theta\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}
\end{aligned}$$

En la última línea se ha utilizado la igualdad de las derivadas parciales mixtas. De forma similar,

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = -r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\frac{\partial z}{\partial x} + r\cos\theta\,\frac{\partial z}{\partial y}$$

Al diferenciar por segunda vez con respecto a θ, r se puede considerar constante, pero cada uno de los términos anteriores sigue siendo un producto de dos funciones que dependen de θ. Entonces,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} &= -r\left(\cos\theta\,\frac{\partial z}{\partial x} + \mathrm{sen}\,\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial z}{\partial x}\right) + r\left(-\mathrm{sen}\,\theta\,\frac{\partial z}{\partial y} + \cos\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\\
&= -r\frac{\partial z}{\partial r} - r\,\mathrm{sen}\,\theta\left(-r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + r\cos\theta\,\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right)\\
&\quad + r\cos\theta\left(-r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + r\cos\theta\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\\
&= -r\frac{\partial z}{\partial r} + r^2\left(\mathrm{sen}^2\,\theta\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \cos^2\theta\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\end{aligned}$$

Combinando estos resultados, se obtiene la fórmula deseada:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Ejercicios 12.5

En los Ejercicios 1-4, escriba las versiones apropiadas de la Regla de la Cadena para las derivadas indicadas.

1. $\partial w/\partial t$ si $w = f(x, y, z)$, siendo $x = g(s, t)$, $y = h(s, t)$ y $z = k(s, t)$.

2. $\partial w/\partial t$ si $w = f(x, y, z)$, siendo $x = g(s)$, $y = h(s, t)$ y $z = k(t)$.

3. $\partial z/\partial u$ si $z = g(x, y)$, siendo $y = f(x)$ y $x = h(u, v)$.

4. dw/dt si $w = f(x, y)$, $x = g(r, s)$, $y = h(r, t)$, $r = k(s, t)$ y $s = m(t)$.

5. Si $w = f(x, y, z)$, siendo $x = g(y, z)$ e $y = h(z)$, indique versiones apropiadas de la Regla de la Cadena para $\frac{dw}{dz}$, $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_x$ y $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{x,y}$.

6. Utilice dos métodos diferentes para calcular $\partial u/\partial t$ si $u = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = e^{st}$ y $1 + s^2\cos t$.

7. Utilice dos métodos diferentes para calcular $\partial z/\partial x$ si $z = \tan^{-1}(u/v)$, $u = 2x + y$ y $v = 3x - y$.

8. Utilice dos métodos diferentes para calcular dz/dt si $z = txy^2$, $x = t + \ln(y + t^2)$ e $y = e^t$.

En los Ejercicios 9-12, calcule las derivadas que se indican, suponiendo que la función $f(x, y)$ tiene derivadas parciales primeras continuas.

9. $\frac{\partial}{\partial x} f(2x, 3y)$

10. $\frac{\partial}{\partial x} f(2y, 3x)$

11. $\frac{\partial}{\partial x} f(y^2, x^2)$

12. $\frac{\partial}{\partial y} f(yf(x, t),\ f(y, t))$

13. Supongamos que la temperatura T de un cierto líquido varía con la profundidad z y el tiempo t de acuerdo con la fórmula $T = e^{-t}z$. Calcule la tasa de cambio de la temperatura con respecto al tiempo en un punto que se mueve por el líquido de forma que en el instante t su profundidad es $f(t)$. ¿Cuál es la tasa de cambio si $f(t) = e^t$? ¿Qué sucede en este caso?

14. Suponga que la intensidad de un campo eléctrico E varía con la posición (x, y, z) y con el tiempo t de acuerdo con la fórmula $E = f(x, y, z, t)$. Calcule la tasa de cambio con respecto al tiempo de la intensidad de campo medida por un instrumento que se mueve por el espacio siguiendo la trayectoria helicoidal $x = \mathrm{sen}\,t$, $y = \cos t$, $z = t$.

En los Ejercicios 15-20, suponga que f tiene derivadas parciales continuas de todos los órdenes.

15. Si $z = f(x, y)$, siendo $x = 2s + 3t$ e $y = 3s - 2t$, calcule

(a) $\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}$, (b) $\frac{\partial^2 z}{\partial s\partial t}$ y (c) $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$.

16. Si $f(x, y)$ es armónica, demuestre que $f\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right)$ es también armónica.

17. Si $x = t\,\mathrm{sen}\,s$ e $y = t\cos s$, calcule $\dfrac{\partial^2}{\partial s\partial t} f(x, y)$.

18. Calcule $\dfrac{\partial^3}{\partial x\partial y^2} f(2x + 3y, xy)$ en función de las derivadas parciales de la función f.

19. Calcule $\dfrac{\partial^2}{\partial y\partial x} f(y^2, xy, -x^2)$ en función de las derivadas parciales de la función f.

20. Calcule $\dfrac{\partial^3}{\partial t^2\partial s} f(s^2 - t, s + t^2)$ en función de las derivadas parciales de la función f.

21. Suponga que $u(x, y)$ y $v(x, y)$ tienen derivadas parciales segundas continuas y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Suponga también que $f(u, v)$ es una función armónica de u y v. Demuestre que $f(u(x, y), v(x, y))$ es una función armónica de x e y. *Sugerencia:* u y v son armónicas por el Ejercicio 15 de la Sección 12.4.

22. Si $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, verifique que $u(x, y, z) = 1/r$ es armónica en $\mathbb{R}^3$, excepto en el origen.

***23.** Si $x = e^s\cos t$, $y = e^s\,\mathrm{sen}\,t$ y $z = u(x, y) = v(s, t)$, demuestre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = (x^2 + y^2)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

***24.** **(Transformación de la ecuación de Laplace a coordenadas polares)** La transformación a coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, implica que $r^2 = x^2 + y^2$ y $\tan\theta = y/x$. Utilice estas ecuaciones para demostrar que

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \mathrm{sen}\,\theta$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{r} \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r}$$

Utilice estas fórmulas como ayuda para expresar $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ en función de las derivadas parciales de u con respecto a r y θ, volviendo así a demostrar la fórmula de la ecuación diferencial de Laplace en coordenadas polares dada en el Ejemplo 10.

25. Si $u(x, y) = r^2\ln r$, siendo $r^2 = x^2 + y^2$, verifique que u es una función biarmónica, demostrando que

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0$$

26. Si $f(x, y)$ es positivamente homogénea de grado k y tiene derivadas parciales de segundo orden continuas, demuestre que

$$x^2 f_{11}(x, y) + 2xyf_{12}(x, y) + y^2 f_{22}(x, y) = k(k-1)\,f(x, y)$$

***27.** Generalice el resultado del Ejercicio 26 a funciones de n variables.

***28.** Generalice los resultados de los Ejercicios 26 y 27 a expresiones en las que intervengan las derivadas parciales de orden m de la función f.

Los Ejercicios 29 y 30 vuelven sobre el Ejercicio 16 de la Sección 12.4. Sea

$$F(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{si} \quad (x, y) \neq (0\ 0) \\ 0, & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

29. (a) Demuestre que $F(x, y) = -F(y, x)$ para todo (x, y).
(b) Demuestre que $F_1(x, y) = -F_2(y, x)$ y $F_{12}(x, y) = -F_{21}(y, x)$ para $(x, y) \neq (0, 0)$.
(c) Demuestre que $F_1(0, y) = -2y$ para todo y, a partir de aquí, demuestre que $F_{12}(0, 0) = 2$.
(d) Deduzca que $F_2(x, 0) = 2x$ y $F_{21}(0, 0) = 2$.

30. (a) Utilice el Ejercicio 29(b) para calcular $F_{12}(x, x)$ para $x \neq 0$.
(b) ¿Es $F_{12}(x, y)$ continua en $(0, 0)$? ¿Por qué?

◆**31.** Utilice los cambios de variable $\xi = x + ct$, $\eta = x$ para transformar la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\,\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad (c = \text{constante})$$

en la ecuación más simple $\partial v/\partial\eta = 0$, con $v(\xi, \eta) = v(x + ct, x) = u(x, t)$. Esta ecuación indica que $v(\xi, \eta)$ no depende de η, por lo que $v = f(\xi)$ para alguna función diferenciable arbitraria f. ¿Cuál es la correspondiente «solución general» $u(x, t)$ de la ecuación diferencial en derivadas parciales original?

◆**32.** Habiendo considerado el Ejercicio 31, plantee una «solución general» $w(r, s)$ de la ecuación diferencial en derivadas parciales de segundo orden

$$\frac{\partial^2}{\partial r\partial s}\,w(r, s) = 0$$

En la respuesta deben intervenir dos funciones arbitrarias.

◆**33.** Utilice los cambios de variable $r = x + ct$, $s = x - ct$, $w(r, s) = u(x, t)$ para transformar la ecuación de onda unidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

a una forma más simple. Utilice ahora el resultado del Ejercicio 32 para obtener la *solución general* de esta ecuación de onda en la forma dada en el Ejemplo 4 de la Sección 12.4.

34. Demuestre que el problema de valor inicial de la ecuación de onda unidimensional

$$\begin{cases} u_{tt}(x,\ t) = c^2 u_{xx}(x,\ t) \\ u(x,\ 0) = p(x) \\ u_t(x,\ 0) = q(x) \end{cases}$$

tiene como solución

$$u(x,\ t) = \frac{1}{2}\,[p(x-ct) + p(x+ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} q(s)\,ds$$

Nótese que aquí hemos utilizado los subíndices x y t en lugar de 1 y 2 para indicar las derivadas parciales. Esto es práctica habitual cuando se trata con ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

Observación El problema de valor inicial del Ejercicio 34 proporciona el pequeño desplazamiento lateral $u(x,\ t)$ de la posición x en el instante t de una cuerda que vibra bajo tensión según el eje x. La función $p(x)$ proporciona el desplazamiento *inicial* en la posición x, es decir, el desplazamiento en $t = 0$. De forma similar, $q(x)$ proporciona la velocidad inicial en la posición x. Obsérvese que la posición en el instante t depende sólo de los valores de esos datos iniciales en puntos no separados más de ct unidades. Esto es coherente con la observación hecha anteriormente de que las soluciones de la ecuación de onda representan ondas que viajan con velocidad c.

Vuelva a realizar los ejemplos y ejercicios que se indican en los Ejercicios 35-40 utilizando Maple para efectuar los cálculos.

35. Ejemplo 10 **36.** Ejercicio 16

37. Ejercicio 19 **38.** Ejercicio 20

39. Ejercicio 23 **40.** Ejercicio 34

12.6 Aproximaciones lineales, diferenciabilidad y diferenciales

La recta tangente a la gráfica $y = f(x)$ en $x = a$ proporciona una aproximación adecuada a los valores de $f(x)$ para valores de x cercanos al punto a (*véase* la Figura 12.23):

$$f(x) \approx L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

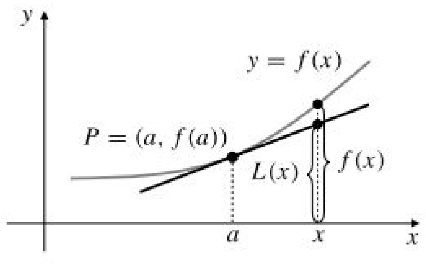


Figura 12.23 Linealización de la función f alrededor de a.

$L(x)$ es la **linealización** de f en a; su gráfica es una recta tangente a $y = f(x)$ en ese punto. La mera existencia de $f'(a)$ es suficiente para garantizar que el error de la aproximación (la distancia vertical entre la curva y la tangente en x) es pequeña comparada con la distancia a $h = x - a$ entre a y x, es decir,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h) - L(a+h)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \\ &= f'(a) - f'(a) = 0\end{aligned}$$

De forma similar, el plano tangente a la gráfica de $z = f(x, y)$ en (a, b) es $z = L(x, y)$, siendo

$$L(x, y) = f(a, b) + f_1(a, b)(x-a) + f_2(a, b)(y-b)$$