*19. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

*20. $\displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{dx}{4+x^2}$

Calcule el área de la región R especificada en los Ejercicios 21-32. Es útil realizar un dibujo de la región.

21. Limitada por $y = x^4$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$.

22. Limitada por $y = 1/x$, $y = 0$, $x = e$ y $x = e^2$.

23. Por encima de $y = x^2 - 4x$ y por debajo del eje x.

24. Limitada por $y = 5 - 2x - 3x^2$, $y = 0$, $x = -1$ y $x = 1$.

25. Limitada por $y = x^2 - 3x + 3$ y $y = 1$.

26. Por debajo de $y = \sqrt{x}$ y por encima de $y = \frac{x}{2}$.

27. Por encima de $y = x^2$ y a la derecha de $x = y^2$.

28. Por encima de $y = |x|$ y por debajo de $y = 12 - x^2$.

29. Limitada por $y = x^{1/3} - x^{1/2}$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$.

30. Por debajo de $y = e^{-x}$ y por encima de $y = 0$, desde $x = -a$ hasta $x = 0$.

31. Por debajo de $y = 1 - \cos x$ y por encima de $y = 0$, entre dos intersecciones consecutivas de estas gráficas.

32. Por debajo de $y = x^{-1/3}$ y por encima de $y = 0$, desde $x = 1$ hasta $x = 27$.

Calcule las integrales de funciones continuas por tramos en los Ejercicios 33 y 34.

33. $\displaystyle\int_{0}^{3\pi/2} |\cos x|\, dx$

34. $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{\operatorname{sgn}(x-2)}{x^2}\, dx$

En los Ejercicios 35-38, calcule los valores medios de las funciones dadas en los intervalos especificados.

35. $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ en $[0, 2]$

36. $f(x) = e^{3x}$ en $[-2, 2]$

37. $f(x) = 2^x$ en $[0, 1/\ln 2]$

38. $g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 < t \leqslant 3 \end{cases}$ en $[0, 3]$

Calcule las derivadas indicadas en los Ejercicios 39-46.

39. $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{2}^{x} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$

40. $\displaystyle\frac{d}{dt}\int_{t}^{3} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$

41. $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{0} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$

42. $\displaystyle\frac{d}{dx} x^2 \int_{0}^{x^2} \frac{\operatorname{sen} u}{u}\, du$

43. $\displaystyle\frac{d}{dt}\int_{-\pi}^{t} \frac{\cos y}{1+y^2}\, dy$

44. $\displaystyle\frac{d}{d\theta}\int_{\operatorname{sen}\theta}^{\cos\theta} \frac{1}{1-x^2}\, dx$

45. $\displaystyle\frac{d}{dx} F(\sqrt{x})$, si $\displaystyle F(t) = \int_{0}^{t} \cos(x^2)\, dx$.

46. $H'(2)$, si $\displaystyle H(x) = 3x \int_{4}^{x^2} e^{-\sqrt{t}}\, dt$

47. Resuelva la ecuación integral $\displaystyle f(x) = \pi\left(1 + \int_{1}^{x} f(t)\, dt\right)$.

48. Resuelva la ecuación integral $\displaystyle f(x) = 1 - \int_{0}^{x} f(t)\, dt$.

*49. Critique el siguiente cálculo erróneo:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\bigg|_{-1}^{1} = -1 + \frac{1}{-1} = -2$$

¿Dónde ocurre exactamente el error? ¿Por qué no es -2 un valor razonable de la integral?

*50. Utilice una integral definida para definir una función $F(x)$ cuya derivada sea $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+x^2}$ para todo x y que cumpla $F(17) = 0$.

*51. ¿Tiene la función $\displaystyle F(x) = \int_{0}^{2x-x^2} \cos\left(\frac{1}{1+t^2}\right) dt$ un valor máximo o mínimo? Justifique su respuesta.

Calcule los límites en los Ejercicios 52-54.

*52. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^5 + \left(1+\frac{2}{n}\right)^5 + \cdots + \left(1+\frac{n}{n}\right)^5\right)$.

*53. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{n} + \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} + \operatorname{sen}\frac{3\pi}{n} + \cdots + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{n}\right)$.

*54. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \frac{n}{n^2+9} + \cdots + \frac{n}{2n^2}\right)$.

5.6 El método de sustitución

Como hemos visto, el cálculo de integrales definidas se realiza más fácilmente si se puede obtener una primitiva del integrando. En esta sección y en las Secciones 6.1-6.4 presentaremos algunas *técnicas de integración*, es decir, métodos para obtener primitivas de funciones. Aunque las técnicas que desarrollaremos se pueden utilizar para una amplia clase de funciones, no funcionarán con todas las funciones que podríamos desear integrar. Si la integral definida tiene un integrando cuya primitiva es o bien imposible o bien muy difícil de obtener, se puede aproximar dicha integral definida por medios numéricos. En las Secciones 6.6-6.8 presentaremos técnicas para realizarlo.

Empezaremos por presentar una tabla con algunas integrales indefinidas conocidas. Estos resultados se obtuvieron durante nuestro desarrollo de fórmulas de diferenciación de funciones elementales. Es conveniente *memorizarlos*.

Algunas integrales elementales

1. $\int 1\,dx = x + C$
2. $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$
3. $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$
4. $\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C$
5. $\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + C$
6. $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + C$
7. $\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C \quad (r \neq -1)$
8. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$
9. $\int \operatorname{sen} ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$
10. $\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{sen} ax + C$
11. $\int \sec^2 ax\,dx = \frac{1}{a}\tan ax + C$
12. $\int \csc^2 ax\,dx = -\frac{1}{a}\cot ax + C$
13. $\int \sec ax \tan ax\,dx = \frac{1}{a}\sec ax + C$
14. $\int \csc ax \cot ax\,dx = -\frac{1}{a}\csc ax + C$
15. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$
16. $\int \frac{1}{a^2 + x^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$
17. $\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$
18. $\int b^{ax}\,dx = \frac{1}{a\ln b}b^{ax} + C$
19. $\int \cosh ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{senh} ax + C$
20. $\int \operatorname{senh} ax\,dx = \frac{1}{a}\cosh ax + C$

Nótese que las fórmulas 1-6 son casos especiales de la fórmula 7, que es válida en cualquier intervalo donde x^r tenga sentido. La fórmula de linealidad

$$\int (Af(x) + Bg(x))\,dx = A\int f(x)\,dx + B\int g(x)\,dx$$

hace posible integrar sumas y productos por constantes de funciones.

Ejemplo 1 **(Combinación de integrales elementales)**

(a) $\int (x^4 - 3x^3 + 8x^2 - 6x - 7)\,dx = \frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{4} + \frac{8x^3}{3} - 3x^2 - 7x + C$

(b) $\int \left(5x^{3/5} - \frac{3}{2 + x^2}\right)dx = \frac{25}{8}x^{8/5} - \frac{3}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}} + C$

(c) $\int (4\cos 5x - 5\operatorname{sen} 3x)\, dx = \frac{4}{5}\operatorname{sen} 5x + \frac{5}{3}\cos 3x + C$

(d) $\int \left(\frac{1}{\pi x} + a^{\pi x}\right) dx = \frac{1}{\pi}\ln|x| + \frac{1}{\pi \ln a} a^{\pi x} + C,\ (a > 0)$

Algunas veces es necesario modificar un integrando de forma que se pueda aplicar el método.

Ejemplo 2

$$\int \frac{(x+1)^3}{x}\, dx = \int \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x}\, dx$$
$$= \int \left(x^2 + 3x + 3 + \frac{1}{x}\right) dx$$
$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x + \ln|x| + C$$

Cuando la integral no se puede calcular por simple inspección, como en el caso de los Ejemplos 1-2, hay que utilizar una o más técnicas especiales. La más importante de estas técnicas es el **método de sustitución**, que es la versión integral de la Regla de la Cadena. Si se expresa la Regla de la Cadena, $\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$, en forma integral, se obtiene

$$\int f'(g(x))g'(x)\, dx = f(g(x)) + C$$

Obsérvese el siguiente formalismo que permitiría obtener la fórmula anterior aun cuando no supiéramos que es cierta:

Sea $u = g(x)$. Entonces $du/dx = g'(x)$ o, en forma diferencial, $du = g'(x)\, dx$. Entonces,

$$\int f'(g(x))g'(x)\, dx = \int f'(u)\, du = f(u) + C = f(g(x)) + C$$

Ejemplo 3 **(Ejemplos de sustitución)** Calcule las integrales indefinidas:

(a) $\int \frac{x}{x^2+1}\, dx$, (b) $\int \frac{\operatorname{sen}(3\ln x)}{x}\, dx$, y (c) $\int e^x\sqrt{1+e^x}\, dx$

Solución

(a) $\int \frac{x}{x^2+1}\, dx$ Sea $u = x^2 + 1$
Entonces $du = 2x\, dx$ y
$x\, dx = \frac{1}{2}\, du$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C = \ln\sqrt{x^2+1} + C$$

Ambas versiones de la respuesta final son igualmente aceptables.

(b) $\int \frac{\operatorname{sen}(3\ln x)}{x}\, dx$ Sea $u = 3\ln x$
Entonces $du = \frac{3}{x}\, dx$

$$= \frac{1}{3}\int \operatorname{sen} u\, du = -\frac{1}{3}\cos u + C = -\frac{1}{3}\cos(3\ln x) + C$$

(c) $\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx$ Sea $v = 1 + e^x$
Entonces $dv = e^x\,dx$

$$= \int v^{1/2}\,dv = \frac{2}{3}v^{3/2} + C = \frac{2}{3}(1+e^x)^{3/2} + C$$

En algunas ocasiones, las sustituciones apropiadas no son tan obvias como en el Ejemplo 3, y puede ser necesario modificar algebraicamente el integrando, transformándolo en una forma mejor para aplicar sustitución.

Ejemplo 4 Calcule (a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx$ y (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$.

Solución

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1}$ Sea $t = x + 2$
Entonces $dt = dx$

$$= \int \frac{dt}{t^2+1}$$

$$= \tan^{-1} t + C = \tan^{-1}(x+2) + C$$

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \int \frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}$

$$= \int \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{1-(e^{-x})^2}}$$ Sea $u = e^{-x}$
Entonces $du = -e^{-x}\,dx$

$$= -\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= -\text{sen}^{-1} u + C = -\text{sen}^{-1}(e^{-x}) + C$$

No se puede *forzar* al método de sustitución para que funcione. Por ejemplo, no existe ninguna sustitución que mejore mucho la integral $\int x(2+x^7)^{1/5}\,dx$. Sin embargo, en la integral $\int x^6(2+x^7)^{1/5}\,dx$ se puede aplicar el cambio $u = 2 + x^7$. El cambio $u = g(x)$ es probable que funcione si $g'(x)$ es un factor del integrando.

El siguiente teorema simplifica el uso del método de sustitución en integrales definidas.

TEOREMA 6 Sustitución en una integral definida

Supongamos que g es una función diferenciable en el intervalo $[a, b]$, que cumple que $g(a) = A$ y $g(b) = B$. Supongamos también que f es una función continua en el rango de g. Entonces,

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_A^B f(u)\,du$$

DEMOSTRACIÓN Sea F una primitiva de f: $F'(u) = f(u)$. Entonces,

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

por tanto,

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x))\Big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$$

$$= F(B) - F(A) = F(u)\Big|_A^B = \int_A^B f(u)\,du$$

Ejemplo 5 Calcule la integral $I = \int_0^8 \frac{\cos\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\,dx$.

Solución **MÉTODO I.** Sea $u = \sqrt{x+1}$. Entonces $du = \frac{dx}{2\sqrt{x+1}}$. Si $x = 0$, entonces $u = 1$; si $x = 8$, entonces $u = 3$. Por tanto,

$$I = 2\int_1^3 \cos u\,du = 2\operatorname{sen} u\Big|_1^3 = 2\operatorname{sen} 3 - 2\operatorname{sen} 1$$

MÉTODO II. Utilizaremos el mismo cambio que en el Método I, pero no transformaremos los límites de integración de valores en x en valores en u. Volveremos a la variable x antes de sustituir en los límites:

$$I = 2\int_{x=0}^{x=8} \cos u\,du = 2\operatorname{sen} u\Big|_{x=0}^{x=8} = 2\operatorname{sen}\sqrt{x+1}\Big|_0^8 = 2\operatorname{sen} 3 - 2\operatorname{sen} 1$$

Nótese que los límites *deben* escribirse como $x = 0$ y $x = 8$ en cualquier etapa donde la variable no sea x. Sería *incorrecto* escribir

$$I = 2\int_0^8 \cos u\,du$$

porque esto implicaría que u, y no x, varía entre 0 y 8. El Método I produce una solución más corta y, por tanto, es preferible. Sin embargo, en casos en que los límites transformados (los límites en u) sean muy complicados, es preferible utilizar el Método II.

Ejemplo 6 Calcule el área de la región limitada por $y = \left(2 + \operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)^2 \cos\frac{x}{2}$, el eje x, y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$.

Solución Como $y \geqslant 0$ cuando $0 \leqslant x \leqslant \pi$, el área pedida es

$$A = \int_0^{\pi} \left(2 + \operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)^2 \cos\frac{x}{2}\,dx \qquad \text{Sea } v = 2 + \operatorname{sen}\frac{x}{2}$$

$$\text{Entonces } dv = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx$$

$$= 2\int_2^3 v^2\,dv = \frac{2}{3}v^3\Big|_2^3 = \frac{2}{3}(27 - 8) = \frac{38}{3} \text{ unidades al cuadrado}$$

Observación La condición de que f sea continua en el rango de la función $u = g(x)$ (para $a \leqslant x \leqslant b$) es esencial en el Teorema 6. Utilizando el cambio $u = x^2$ en la integral $\int_{-1}^{1} x\csc(x^2)\,dx$ se llega a una conclusión errónea:

$$\int_{-1}^{1} x\csc(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_1^1 \csc u\,du = 0$$

Aunque $x\csc(x^2)$ es una función impar, no es continua en 0, y la integral dada representa una diferencia de áreas *infinitas*. Si se supone que f es una función continua en un intervalo que contiene A y B, entonces es suficiente con saber que $u = g(x)$ es uno a uno y, por tanto, diferenciable. En este caso el rango de g estará entre A y B, por lo que se cumplirá la condición del Teorema 6.

Integrales trigonométricas

El método de sustitución resulta a menudo de utilidad en el cálculo de integrales trigonométricas. Comenzaremos por presentar las integrales de las cuatro funciones trigonométricas cuyas integrales no hemos presentado todavía. Aparecen en muchas aplicaciones y es conveniente memorizarlas.

Integrales de la tangente, cotangente, secante y cosecante

$$\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + C$$

$$\int \cot x\,dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C = -\ln|\csc x| + C$$

$$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \csc x\,dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

Por supuesto, todas ellas se pueden comprobar diferenciando los miembros derechos de las ecuaciones. Las dos primeras se pueden calcular directamente expresando $\tan x$ y $\cot x$ en función de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, y utilizando el cambio adecuado. Por ejemplo,

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx \qquad \text{Sea } u = \cos x$$

$$\text{Entonces } du = -\operatorname{sen} x\,dx$$

$$= -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C$$

$$= -\ln|\cos x| + C = \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right| + C = \ln|\sec x| + C$$

La integral de $\sec x$ se puede calcular expresándola de la forma

$$\int \sec x\,dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x}\,dx$$

y utilizando el cambio $u = \sec x + \tan x$. La integral de $\csc x$ se puede calcular de forma similar (demuestre que las dos versiones dadas de la integral son equivalentes).

Consideraremos ahora integrales de la forma

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$$

Si m o n son enteros positivos e impares, la integral se puede calcular fácilmente por sustitución. Por ejemplo, si $n = 2k + 1$, siendo k un entero, se puede utilizar la igualdad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ para expresar la integral de la forma

$$\int \operatorname{sen}^m x(1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \cos x\, dx$$

que se puede integrar aplicando el cambio $u = \operatorname{sen} x$. De forma similar, se puede usar $u = \cos x$ si m es un entero impar.

Ejemplo 7 Calcule: (a) $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^8 x\, dx$ y (b) $\int \cos^5 ax\, dx$.

Solución

(a) $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^8 x\, dx = \int (1 - \cos^2 x)\cos^8 x \operatorname{sen} x\, dx$ Sea $u = \cos x$, $du = -\operatorname{sen} x\, dx$

$$= -\int (1 - u^2)u^8\, du = \int (u^{10} - u^8)\, du$$

$$= \frac{u^{11}}{11} - \frac{u^9}{9} + C = \frac{1}{11}\cos^{11} x - \frac{1}{9}\cos^9 x + C$$

(b) $\int \cos^5 ax\, dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 ax)^2 \cos ax\, dx$ Sea $u = \operatorname{sen} ax$, $du = a\cos ax\, dx$

$$= \frac{1}{a}\int (1 - u^2)^2\, du = \frac{1}{a}\int (1 - 2u^2 + u^4)\, du$$

$$= \frac{1}{a}\left(u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5\right) + C$$

$$= \frac{1}{a}\left(\operatorname{sen} ax - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3 ax + \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 ax\right) + C$$

Si las potencias de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ son ambas pares, se pueden utilizar las *fórmulas del ángulo doble* (*véase* la Sección P.7):

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

Ejemplo 8 **(Integración de potencias pares del seno y el coseno)** Verifique las fórmulas

$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}(x + \operatorname{sen} x \cos x) + C$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{1}{2}(x - \operatorname{sen} x \cos x) + C$$

Estas integrales aparecen frecuentemente y conviene recordarlas.

Solución Las dos integrales se pueden deducir de las correspondientes fórmulas del ángulo doble. Deduciremos la primera; la segunda es similar.

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x\,dx &= \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\,dx\\ &= \frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C\\ &= \frac{1}{2}(x+\operatorname{sen} x\cos x) + C \qquad (\text{ya que } \operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x\cos x)\end{aligned}$$

Ejemplo 9 Calcule $\int \operatorname{sen}^4 x\,dx$.

Solución Debemos aplicar dos veces la fórmula del ángulo doble.

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^4 x\,dx &= \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2\,dx\\ &= \frac{1}{4}\int (1-2\cos 2x+\cos^2 2x)\,dx\\ &= \frac{x}{4}-\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x+\frac{1}{8}\int (1+\cos 4x)\,dx\\ &= \frac{x}{4}-\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x+\frac{x}{8}+\frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C\\ &= \frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x+\frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C\end{aligned}$$

Nótese que no hace falta introducir la constante de integración C hasta que se calcula la última integral.

Utilizando las relaciones $\sec^2 x = 1+\tan^2 x$ y $\csc^2 x = 1+\cot^2 x$, y uno de los cambios $u=\sec x$, $u=\tan x$, $u=\csc x$ o $u=\cot x$, se pueden calcular integrales de la forma

$$\int \sec^m x\tan^n x\,dx \qquad \text{o} \qquad \int \csc^m x\cot^n x\,dx$$

a menos que m sea impar y n sea par (si éste es el caso, las integrales se pueden calcular aplicando integración por partes, que presentaremos en la Sección 6.1).

Ejemplo 10 **(Integrales con secantes y tangentes)** Calcule las siguientes integrales:

(a) $\int \tan^2 x\,dx$, (b) $\int \sec^4 t\,dt$ y (c) $\int \sec^3 x\tan^3 x\,dx$

Solución

(a) $\int \tan^2 x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)\,dx = \tan x - x + C$

(b) $\int \sec^4 t\,dt = \int (1+\tan^2 t)\sec^2 t\,dt$ Sea $u=\tan t$, $du = \sec^2 t\,dt$

$$= \int (1+u^2)\,du = u+\frac{1}{3}u^3 + C = \tan t + \frac{1}{3}\tan^3 t + C$$

(c) $\displaystyle\int \sec^3 x \tan^3 x\, dx$

$$= \int \sec^2 x(\sec^2 x - 1)\sec x \tan x\, dx \qquad \text{Sea } u = \sec x$$

$$du = \sec x \tan x\, dx$$

$$= \int (u^4 - u^2)\, du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{5}\sec^5 x - \frac{1}{3}\sec^3 x + C$$

Ejercicios 5.6

Calcule las integrales de los ejercicios 1-44. No olvide incluir la constante de integración en las integrales indefinidas. Sus respuestas puede ser diferentes de las que aparecen en la sección de Respuestas, pero, aun así, pueden ser correctas. Por ejemplo, al calcular $I = \int \operatorname{sen} x \cos x\, dx$ utilizando el cambio $u = \operatorname{sen} x$, se obtiene el resultado $I = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C$; utilizando el cambio $u = \cos x$ se obtiene el resultado $I = -\frac{1}{2}\cos^2 x + C$. Escribiendo $I = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(2x)\, dx$ se llega a $I = -\frac{1}{4}\cos(2x) + C$. Todos los resultados son correctos, y se diferencian en los valores de la constante de integración C:

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x = -\tfrac{1}{2}\cos^2 x + \tfrac{1}{2} = -\tfrac{1}{4}\cos(2x) + \tfrac{1}{4}$$

Siempre se puede comprobar el resultado de una integral indefinida diferenciándolo para obtener el integrando. Es a menudo una forma sencilla de comprobar nuestros resultados con los que se proporcionan en el texto, al final. Podemos encontrar integrales que no sepamos resolver, pero no deben cometerse errores en las que sí sepamos, puesto que los resultados se pueden comprobar fácilmente (es buena idea recordar esto en pruebas y exámenes).

1. $\displaystyle\int e^{5-2x}\, dx$

2. $\displaystyle\int \cos(ax + b)\, dx$

3. $\displaystyle\int \sqrt{3x + 4}\, dx$

4. $\displaystyle\int e^{2x}\operatorname{sen}(e^{2x})\, dx$

5. $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{(4x^2 + 1)^5}$

6. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

7. $\displaystyle\int x e^{x^2}\, dx$

8. $\displaystyle\int x^2 2^{x^3+1}\, dx$

9. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{4 + \operatorname{sen}^2 x}\, dx$

10. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1 - \tan^2 x}}\, dx$

***11.** $\displaystyle\int \frac{e^x + 1}{e^x - 1}\, dx$

12. $\displaystyle\int \frac{\ln t}{t}\, dt$

13. $\displaystyle\int \frac{ds}{\sqrt{4 - 5s}}$

14. $\displaystyle\int \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}\, dx$

15. $\displaystyle\int \frac{t\, dt}{\sqrt{4 - t^4}}$

16. $\displaystyle\int \frac{x^2\, dx}{2 + x^6}$

***17.** $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x + 1}$

***18.** $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$

19. $\displaystyle\int \tan x \ln \cos x\, dx$

20. $\displaystyle\int \frac{x + 1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

21. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13}$

22. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4 + 2x - x^2}}$

23. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \cos^5 x\, dx$

24. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 t \cos^5 t\, dt$

25. $\displaystyle\int \operatorname{sen} ax \cos^2 ax\, dx$

26. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\, dx$

27. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^6 x\, dx$

28. $\displaystyle\int \cos^4 x\, dx$

29. $\displaystyle\int \sec^5 x \tan x\, dx$

30. $\displaystyle\int \sec^6 x \tan^2 x\, dx$

31. $\displaystyle\int \sqrt{\tan x}\sec^4 x\, dx$

32. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^{-2/3} x \cos^3 x\, dx$

33. $\displaystyle\int \cos x \operatorname{sen}^4(\operatorname{sen} x)\, dx$

34. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3 \ln x \cos^3 \ln x}{x}\, dx$

35. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^4 x}\, dx$

36. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^4 x}\, dx$

37. $\displaystyle\int \csc^5 x \cot^5 x\, dx$

38. $\displaystyle\int \frac{\cos^4 x}{\operatorname{sen}^8 x}\, dx$

39. $\displaystyle\int_0^4 x^3(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}\, dx$

40. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\operatorname{sen}(\pi \ln x)}{x}\, dx$

41. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 x\, dx$

42. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi} \operatorname{sen}^5 x\, dx$

43. $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dt}{t \ln t}$

44. $\displaystyle\int_{\frac{\pi^2}{16}}^{\frac{\pi^2}{9}} \frac{2^{\operatorname{sen}\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

*45. Utilice las relaciones
$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\,\text{sen}^2\,\theta$ y
$\text{sen}\,\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ como ayuda para calcular

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\cos x}\,dx \quad \text{y} \quad \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\text{sen}\,x}\,dx$$

46. Calcule el área de la región limitada por $y = x/(x^2+16)$, $y=0$, $x=0$ y $x=2$.

47. Calcule el área de la región limitada por $y = x/(x^4+16)$, $y=0$, $x=0$ y $x=2$.

48. Exprese el área limitada por la elipse $(x^2/a^2)+(y^2/b^2)=1$ como una integral definida. Haga un cambio que transforme la integral en otra que represente el área de un círculo, y calcúlela.

*49. Utilice las fórmulas de suma de sen $(x \pm y)$ y cos $(x \pm y)$ de la Sección P.6 para demostrar las siguientes igualdades:

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\,(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\text{sen}\,x\,\text{sen}\,y = \frac{1}{2}\,(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\text{sen}\,x \cos y = \frac{1}{2}\,(\text{sen}\,(x+y) + \text{sen}\,(x-y))$$

*50. Utilice las igualdades demostradas en el Ejercicio 49 para calcular las siguientes integrales:

$$\int \cos ax \cos bx\,dx, \quad \int \text{sen}\,ax\,\text{sen}\,bx\,dx \ \text{ y } \ \int \text{sen}\,ax \cos bx\,dx$$

*51. Si m y n son enteros, demuestre que

(i) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,dx = 0$ si $m \neq n$

(ii) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}\,mx\,\text{sen}\,nx\,dx = 0$ si $m \neq n$

(iii) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}\,mx \cos nx\,dx = 0$

*52. **(Coeficientes de Fourier)** Suponga que para algún entero positivo k,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k} (a_n \cos nx + b_n\,\text{sen}\,nx)$$

se cumple para todo x en $[-\pi, \pi]$. Utilice el resultado del Ejercicio 51 para demostrar que los coeficientes $a_m\,(0 \leqslant m \leqslant k)$ y $b_m\ (1 \leqslant m \leqslant k)$, que se denominan coeficientes de Fourier de f en $[-\pi, \pi]$, se expresan como

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx, \quad b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}\,mx\,dx$$

5.7 Áreas de regiones planas

En esta sección revisaremos y ampliaremos el uso de integrales definidas para calcular áreas de regiones planas. Recuérdese que la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ mide el área comprendida entre la gráfica de f y el eje x, desde $x=a$ a $x=b$, pero trata como *negativa* cualquier parte del área que esté por debajo del eje x (se supone que $a<b$). Para calcular el área total limitada por $y=f(x)$, $y=0$, $x=a$ y $x=b$, hay que contar todas las áreas como positivas. Por tanto, hay que integrar el *valor absoluto* de f (*véase* la Figura 5.27):

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2 \quad \text{y} \quad \int_a^b |f(x)|\,dx = A_1 + A_2$$

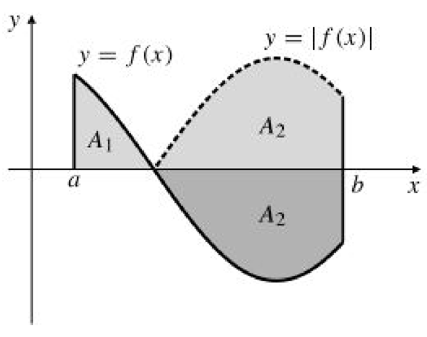

Figura 5.27

No existen «reglas» para integrar $\int_a^b |f(x)|\,dx$. Hay que dividir la integral en intervalos donde $f(x) > 0$ (y entonces $|f(x)| = f(x)$) e intervalos donde $f(x) < 0$ (y entonces $|f(x)| = -f(x)$).

Ejemplo 1 El área limitada por $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 3\pi/2$ (*véase* la Figura 5.28) es

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{3\pi/2} |\cos x|\, dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos x\, dx + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (-\cos x)\, dx \\ &= \operatorname{sen} x \Big|_0^{\pi/2} - \operatorname{sen} x \Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} \\ &= (1 - 0) - (-1 - 1) = 3 \text{ unidades al cuadrado} \end{aligned}$$

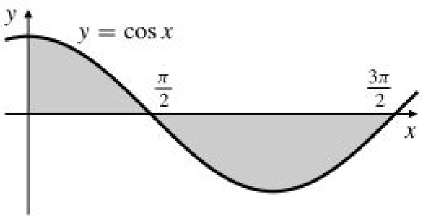

Figura 5.28

Área entre dos curvas

Suponga que una región plana R está limitada por las gráficas de dos funciones continuas, $y = f(x)$ y $y = g(x)$, y por las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, tal como se muestra en la Figura 5.29(a). Suponga que $a < b$ y que $f(x) \leqslant g(x)$ en el intervalo $[a, b]$, de forma que la gráfica de f está por debajo de gráfica de g. Si $f(x) \geqslant 0$ en $[a, b]$, entonces el área A de R es el área por encima del eje x bajo la gráfica de g menos el área por encima del eje x bajo la gráfica de f:

$$A = \int_a^b g(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b (g(x) - f(x))\, dx$$

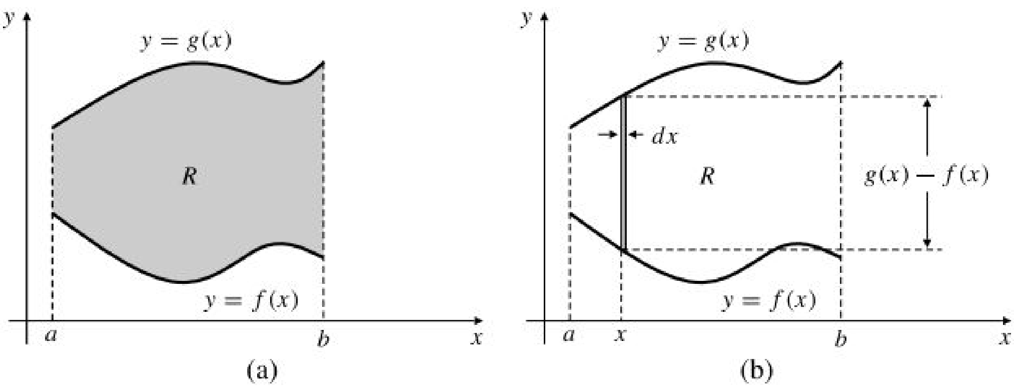

Figura 5.29
(a) Región R entre las dos gráficas.
(b) Un elemento de área de la región R.

Es útil ver esta fórmula como la expresión de A en forma de «suma» (es decir, integral) de *un número infinito* de **elementos de área**

$$dA = (g(x) - f(x))\, dx$$

correspondientes a los valores de x entre a y b. Cada elemento de área corresponde al área de un rectángulo vertical infinitamente estrecho, con anchura dx y altura $g(x) - f(x)$, situado en la posición x (*véase* la Figura 5.29(b)). Incluso aunque f y g tomen valores negativos en el intervalo $[a, b]$, la interpretación y la fórmula del área resultante

$$A = \int_a^b (g(x) - f(x))\, dx$$

siguen siendo válidas, siempre que $f(x) \leqslant g(x)$ en $[a, b]$, de forma que los elementos de área dA tengan área positiva. El uso de integrales para representar una determinada magnitud en forma de *suma* de *elementos diferenciales* (es decir, una suma de elementos infinitesimales) es una perspectiva de gran utilidad, que usaremos a menudo en el Capítulo 7. Por supuesto, lo que estamos haciendo realmente es interpretar la integral como el *límite* de la suma de Riemann adecuada.

De forma más general, si la restricción $f(x) \leqslant g(x)$ se elimina, entonces el rectángulo vertical de anchura dx en la posición x que se extiende entre las gráficas de f y g tiene una altura de $|f(x) - g(x)|$ y, por tanto, su área es

$$dA = |f(x) - g(x)|\, dx$$

(*Véase* la Figura 5.30). Entonces, el área total entre las dos gráficas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ y entre las rectas verticales $x = a$ y $x = b > a$ se expresa como

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

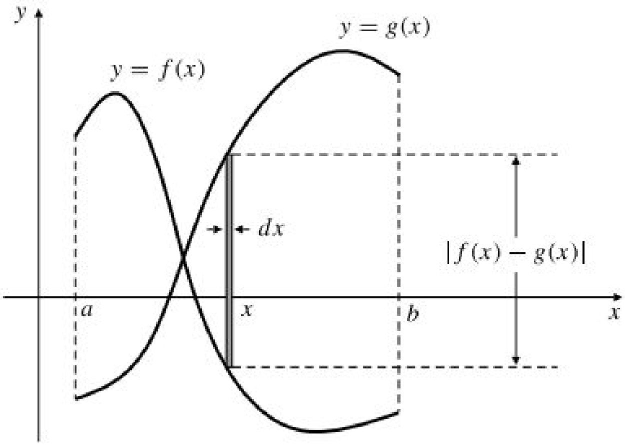

Figura 5.30 Un elemento de área de la región comprendida entre $y = f(x)$ y $y = g(x)$.

Para calcular esta integral, tenemos que determinar los intervalos en los que $f(x) > g(x)$ o $f(x) < g(x)$, y dividir la integral en una suma de integrales en cada uno de esos intervalos.

Ejemplo 2 Calcule el área de la región plana R limitada por las curvas $y = x^2 - 2x$ y $y = 4 - x^2$.

Solución Primero debemos encontrar la intersección de las curvas, de forma que debemos resolver la ecuación

$$x^2 - 2x = y = 4 - x^2$$
$$2x^2 - 2x - 4 = 0$$
$$2(x - 2)(x + 1) = 0 \qquad \text{por lo que } x = 2 \text{ o } x = -1$$

Las curvas se muestran en la Figura 5.31, donde está sombreada la región (finita) comprendida entre ellas (en los problemas de este tipo siempre es conveniente realizar un dibujo parecido). Como $4 - x^2 \geqslant x^2 - 2x$ para $-1 \leqslant x \leqslant 2$, el área A de R se expresa como

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{2} ((4 - x^2) - (x^2 - 2x))\,dx \\ &= \int_{-1}^{2} (4 - 2x^2 + 2x)\,dx \\ &= \left(4x - \frac{2}{3}x^3 + x^2\right)\Bigg|_{-1}^{2} \\ &= 4(2) - \frac{2}{3}(8) + 4 - \left(-4 + \frac{2}{3} + 1\right) = 9 \text{ unidades al cuadrado} \end{aligned}$$

Nótese que al representar el área como una integral *hay que restar la altura y de la curva inferior de la altura y de la curva superior* para obtener un elemento de área dA positivo. Si se resta de forma incorrecta se puede obtener un valor negativo del área.

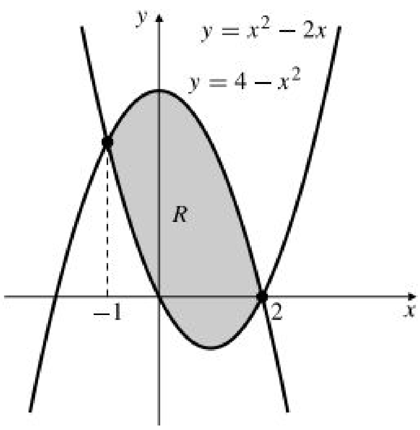

Figura 5.31

Ejemplo 3 Calcule el área total A entre las curvas $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$, desde $x = 0$ hasta $x = 2\pi$.

Solución La región se muestra sombreada en la Figura 5.32. Entre 0 y 2π, las gráficas del seno y del coseno se cortan en $x = \pi/4$ y $x = 5\pi/4$. El área buscada es

$$\begin{aligned} A &= \int_{0}^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x)\,dx + \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\operatorname{sen} x - \cos x)\,dx + \int_{5\pi/4}^{2\pi} (\cos x - \operatorname{sen} x)\,dx \\ &= (\operatorname{sen} x + \cos x)\Big|_{0}^{\pi/4} - (\cos x + \operatorname{sen} x)\Big|_{\pi/4}^{5\pi/4} + (\operatorname{sen} x + \cos x)\Big|_{5\pi/4}^{2\pi} \\ &= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} + \sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2}) = 4\sqrt{2} \text{ unidades al cuadrado} \end{aligned}$$

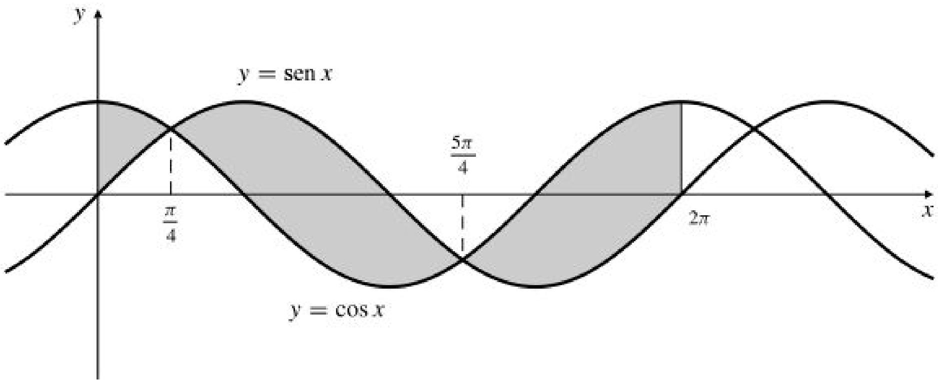

Figura 5.32

Algunas veces es más conveniente utilizar elementos de área horizontales en vez de elementos verticales, e integrar sobre un intervalo del eje y en vez de sobre un intervalo del eje x. Esto ocurre cuando la región cuya área deseamos calcular está limitada por curvas cuyas ecuaciones se expresan en forma de funciones de y. En la Figura 5.33(a), los elementos de área de la región R que está a la derecha de $x = f(y)$ y a la izquierda de $x = g(y)$, y entre las rectas horizontales $y = c$ e $y = d > c$, tiene como elemento de área $dA = (g(y) - f(y))\,dy$. Su área es

$$A = \int_c^d (g(y) - f(y))\,dy$$

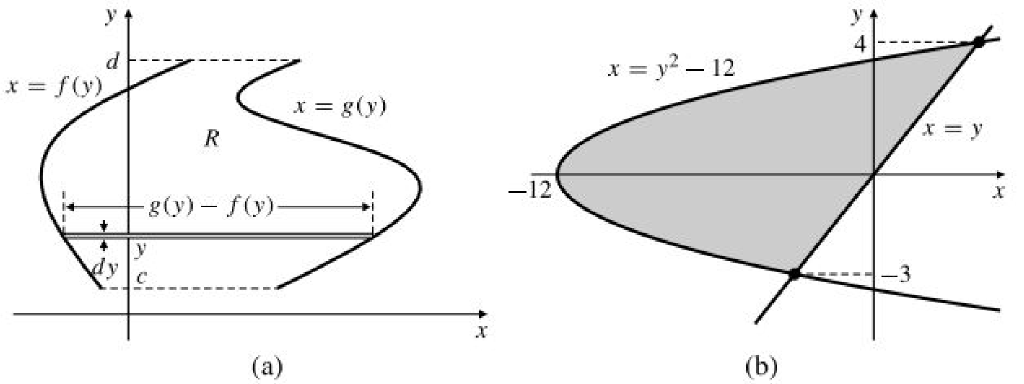

Figura 5.33
(a) Un elemento de área horizontal.
(b) La región finita limitada por $x = y^2 - 12$ y $x = y$.

Ejemplo 4 Calcule el área de la región plana que está a la derecha de la parábola $x = y^2 - 12$ y a la izquierda de la recta $y = x$, como se muestra en la Figura 5.33(b).

Solución Para calcular la intersección de las curvas:

$$y^2 - 12 = x = y$$
$$y^2 - y - 12 = 0$$
$$(y-4)(y+3) = 0 \qquad \text{por lo que } y = 4 \text{ o } y = -3$$

Obsérvese que $y^2 - 12 \leqslant y$ para $-3 \leqslant y \leqslant 4$. Por tanto, el área es

$$A = \int_{-3}^{4} (y - (y^2 - 12))\,dy = \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} + 12y\right)\Bigg|_{-3}^{4} = \frac{343}{6} \text{ unidades al cuadrado}$$

Por supuesto, se podría haber obtenido el mismo resultado integrando en la dirección de x, pero la integral resultante habría sido más complicada:

$$A = \int_{-12}^{-3} (\sqrt{12+x} - (-\sqrt{12+x}))\,dx + \int_{-3}^{4} (\sqrt{12+x} - x)\,dx$$

Se requieren integrales diferentes en los intervalos donde la región está limitada en su parte inferior por la parábola y por la recta. ■

Ejercicios 5.7

En los Ejercicios 1-16, dibuje y calcule el área de la región plana limitada por las curvas dadas.

1. $y = x$, $y = x^2$

2. $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$

3. $y = x^2 - 5$, $y = 3 - x^2$

4. $y = x^2 - 2x$, $y = 6x - x^2$

5. $2y = 4x - x^2$, $2y + 3x = 6$

6. $x - y = 7$, $x = 2y^2 - y + 3$

7. $y = x^3$, $y = x$

8. $y = x^3$, $y = x^2$

9. $y = x^3$, $x = y^2$

10. $x = y^2$, $x = 2y^2 - y - 2$

11. $y = \dfrac{1}{x}$, $2x + 2y = 5$

12. $y = (x^2 - 1)^2$, $y = 1 - x^2$

13. $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = \frac{1}{x^2+1}$ **14.** $y = \frac{4x}{3+x^2}$, $y = 1$

15. $y = \frac{4}{x^2}$, $y = 5 - x^2$ **16.** $x = y^2 - \pi^2$, $x = \operatorname{sen} y$

Calcule las áreas de las regiones descritas en los Ejercicios 17-28. Es útil dibujar la región antes de plantear la integral para calcular el área.

17. Limitada por $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$, y entre dos intersecciones consecutivas de esas curvas.

18. Limitada por $y = \operatorname{sen}^2 x$ y $y = 1$, y entre dos intersecciones consecutivas de esas curvas.

19. Limitada por $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \operatorname{sen}^2 x$, entre $x = 0$ y $x = \pi/2$.

20. Limitada por $y = \operatorname{sen}^2 x$ y $y = \cos^2 x$, y entre dos intersecciones consecutivas de esas curvas.

21. Bajo $y = 4x/\pi$ y por encima de $y = \tan x$, entre $x = 0$ y la primera intersección de las curvas que esté a la derecha de $x = 0$.

22. Limitada por $y = x^{1/3}$ y la componente de $y = \tan(\pi x/4)$ que pasa por el origen.

23. Limitada por $y = 2$ y la componente de $y = \sec x$ que pasa por el punto $(0, 1)$.

24. Limitada por $y = \sqrt{2}\cos(\pi x/4)$ y $y = |x|$.

25. Limitada por $y = \operatorname{sen}(\pi x/2)$ y $y = x$.

26. Limitada por $y = e^x$ y $y = x + 2$.

27. Calcule el área total encerrada por la curva $y^2 = x^2 - x^4$.

28. Calcule al área de la región cerrada de la curva $y^2 = x^4(2 + x)$ que está a la izquierda del origen.

29. Calcule el área de la región plana finita limitada por la curva $y = e^x$, la recta $x = 0$ y la tangente a $y = e^x$ en $x = 1$.

***30.** Calcule el área de la región plana finita limitada por la curva $y = x^3$ y la tangente a dicha curva en el punto $(1, 1)$. *Sugerencia*: Calcule el otro punto en el que la tangente corta a la curva.

Repaso del capítulo

Ideas clave

- **¿Qué significan los siguientes términos y frases?**
  - ◇ Notación sigma
  - ◇ Partición de un intervalo
  - ◇ Suma de Riemann
  - ◇ Integral definida
  - ◇ Integral indefinida
  - ◇ Función integrable
  - ◇ Elemento de área
  - ◇ Símbolo de evaluación
  - ◇ Desigualdad del triángulo para integrales
  - ◇ Función continua por tramos
  - ◇ Valor medio de una función f en el intervalo $[a, b]$
  - ◇ Método de sustitución
- **Enuncie el Teorema del Valor Medio para integrales.**
- **Enuncie el Teorema Fundamental del Cálculo.**
- **Enuncie tantas propiedades de la integral definida como sepa.**
- **¿Cuál es la relación entre la integral definida y la integral indefinida de una función f en el intervalo $[a, b]$?**
- **¿Cuál es la derivada de $\int_{f(x)}^{g(x)} h(t)\,dt$ con respecto a x?**
- **¿Cómo se puede calcular el área comprendida entre las gráficas de dos funciones?**

Ejercicios de repaso

1. Demuestre que $\frac{2j+1}{j^2(j+1)^2} = \frac{1}{j^2} - \frac{1}{(j+1)^2}$, y a partir de aquí calcule

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{2j+1}{j^2(j+1)^2}$$

2. **(Pila de bolas)** Las pelotas de golf de un escaparate en una tienda de deportes se exponen formando una pirámide con una base rectangular de 40 bolas de largo y 30 bolas de ancho. La capa superior tiene unas medidas de 39 bolas por 29 bolas, y así sucesivamente. ¿Cuántas bolas hay en la pirámide?

3. Sea $P_n = \{x_0 = 1, x_1, x_2, \ldots, x_n = 3\}$ una partición de $[1, 3]$ en n subintervalos de la misma longitud, y sea $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Evalúe $\int_1^3 f(x)\,dx$ calculando $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$.

4. Interprete $R_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{1 + \frac{i}{n}}$ como una suma de Riemann para una cierta función f en el intervalo $[0, 1]$. A partir de aquí, calcule $\lim_{n\to\infty} R_n$.

Calcule las integrales de los Ejercicios 5-8 sin utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo.

5. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (2 - \operatorname{sen} x)\, dx$

6. $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{5}} \sqrt{5 - x^2}\, dx$

7. $\displaystyle\int_{1}^{3} \left(1 - \frac{x}{2}\right) dx$

8. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \cos x\, dx$

Calcule los valores medios de las funciones de los Ejercicios 9 y 10 en los intervalos indicados.

9. $f(x) = 2 - \operatorname{sen} x^3$ en $[-\pi, \pi]$

10. $h(x) = |x - 2|$ en $[0, 3]$

Calcule el valor medio de las funciones de los Ejercicios 11-14.

11. $\displaystyle f(t) = \int_{13}^{t} \operatorname{sen}(x^2)\, dx$

12. $\displaystyle f(x) = \int_{-13}^{\operatorname{sen} x} \sqrt{1 + t^2}\, dt$

13. $\displaystyle g(s) = \int_{4s}^{1} e^{\operatorname{sen} u}\, du$

14. $\displaystyle g(\theta) = \int_{e^{\operatorname{sen}\theta}}^{e^{\cos\theta}} \ln x\, dx$

15. Resuelva la ecuación integral $\displaystyle 2 f(x) + 1 = 3 \int_{x}^{1} f(t)\, dt$.

16. Utilice el cambio $x = \pi - u$ para demostrar que

$$\int_{0}^{\pi} x f(\operatorname{sen} x)\, dx = \frac{\pi}{2} \int_{0}^{\pi} f(\operatorname{sen} x)\, dx$$

para cualquier función f continua en el intervalo $[0, 1]$.

Calcule las áreas de las regiones planas finitas limitadas por las gráficas indicadas en los Ejercicios 17-22.

17. $y = 2 + x - x^2$ e $y = 0$

18. $y = (x - 1)^2$, $y = 0$ y $x = 0$

19. $x = y - y^4$ y $x = 0$

20. $y = 4x - x^2$ e $y = 3$

21. $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos 2x$, $x = 0$ y $x = \pi/6$

22. $y = 5 - x^2$ y $y = 4/x^2$

Calcule las integrales de los Ejercicios 23-30.

23. $\displaystyle\int x^2 \cos(2x^3 + 1)\, dx$

24. $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x}\, dx$

25. $\displaystyle\int_{0}^{4} \sqrt{9t^2 + t^4}\, dt$

26. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3(\pi x)\, dx$

27. $\displaystyle\int_{0}^{\ln 2} \frac{e^u}{4 + e^{2u}}\, du$

28. $\displaystyle\int_{1}^{\sqrt[4]{e}} \frac{\tan^2 \pi \ln x}{x}\, dx$

29. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{2s + 1}}{\sqrt{2s + 1}}\, ds$

30. $\displaystyle\int \cos^2 \frac{t}{5} \operatorname{sen}^2 \frac{t}{5}\, dt$

31. Calcule el valor mínimo de $\displaystyle F(x) = \int_{0}^{x^2 - 2x} \frac{1}{1 + t^2}\, dt$. ¿Tiene F un valor máximo? ¿Por qué?

32. Calcule el valor máximo de $\int_a^b (4x - x^2)\, dx$ en los intervalos $[a, b]$ como $a < b$. ¿Cómo se sabe que ese valor máximo debe existir?

33. Un objeto se mueve por el eje x de forma que su posición en el instante t está dada por la función $x(t)$. En la Sección 2.11 definimos la velocidad media de un objeto en el intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ como $v_{av} = (x(t_1) - x(t_0))/(t_1 - t_0)$. Demuestre que v_{av} es, de hecho, el valor medio de la función velocidad $v(t) = dx/dt$ en el intervalo $[t_0, t_1]$.

34. Si un objeto cae partiendo del reposo bajo aceleración gravitatoria constante, demuestre que su altura media durante un intervalo de tiempo T de su caída se expresa como $T/\sqrt{3}$.

35. Halle dos números x_1 y x_2 en el intervalo $[0, 1]$ con $x_1 < x_2$ tales que si $f(x)$ es un polinomio cúbico cualquiera (es decir, un polinomio de grado 3), entonces

$$\int_{0}^{1} f(x)\, dx = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

Problemas avanzados

1. Calcule las sumas de Riemman superior e inferior, $U(f, P_n)$ y $L(f, P_n)$ de $f(x) = 1/x$ en el intervalo $[1, 2]$ para la partición P_n con puntos de división $x_i = 2^{i/n}$ en $0 \leqslant i \leqslant n$. Verifique que $\lim_{n\to\infty} U(f, P_n) = \ln 2 = \lim_{n\to\infty} L(f, P_n)$.

2. (a) Utilice las fórmulas de suma $\cos(a + b)$ y $\cos(a - b)$ para demostrar que

$$\cos\left(\left(j + \tfrac{1}{2}\right)t\right) - \cos\left(\left(j - \tfrac{1}{2}\right)t\right) = -2 \operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{2}t\right) \operatorname{sen}(jt)$$

y, a partir de ahí, deduzca que si $t/(2\pi)$ no es un entero, entonces

$$\sum_{j=1}^{n} \operatorname{sen}(jt) = \frac{\cos\frac{t}{2} - \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}$$

(b) Utilice el resultado del apartado (a) para calcular $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx$ como límite de una suma de Riemann.

3. (a) Utilice el método del Problema 2 para demostrar que si $t/(2\pi)$ no es un entero, entonces

$$\sum_{j=1}^{n} \cos(jt) = \frac{\operatorname{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) - \operatorname{sen}\frac{t}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}$$

(b) Utilice el resultado del apartado (a) para calcular $\int_0^{\pi/3} \cos x\, dx$ como límite de una suma de Riemann.

4. Sea $f(x) = 1/x^2$ y sea $1 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 2$, de forma que $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es una partición de $[1, 2]$ en n subintervalos. Demuestre que $c_i = \sqrt{x_{i-1} x_i}$ está en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de la partición, y calcule la suma de Riemann $\Sigma_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$. ¿Qué implica esto sobre $\int_1^2 (1/x^2)\, dx$?

5. (a) Utilice inducción matemática para verificar que para todo entero positivo k, $\Sigma_{j=1}^{n} j^k = \dfrac{n^{k+1}}{k+1} + \dfrac{n^k}{2} + P_{k-1}(n)$, siendo P_{k-1}, un polinomio de grado como máximo $k-1$. *Sugerencia*: Comience iterando la igualdad

$$(j+1)^{k+1} - j^{k+1} = (k+1)j^k + \frac{(k+1)k}{2} j^{k-1}$$
$$+ \text{ potencias inferiores de } j$$

para $j = 1, 2, 3, ..., k$ y más.

(b) Deduzca de (a) que $\displaystyle\int_0^a x^k\, dx = \frac{a^{k+1}}{k+1}$.

6. Sea C la curva cúbica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, y sea P un punto de C. La tangente a C en P se encuentra de nuevo con la curva C en el punto Q. La tangente a C en Q se encuentra de nuevo con la curva C en R. Demuestre que el área entre C y la tangente en Q es 16 veces el área entre C y la tangente en P.

7. Sea C la curva cúbica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, y sea P un punto de C. La tangente a C en P se encuentra de nuevo con la curva C en el punto Q. Sea R el punto de inflexión de C. Demuestre que R está entre P y Q en C, y que QR divide el área comprendida entre C y su tangente en P en dos áreas con una relación 16/11.

8. **(Dobles tangentes)** La recta PQ es tangente a la gráfica C del polinomio de cuarto grado $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ en dos puntos distintos: $P = (p, f(p))$ y $Q = (q, f(q))$. Sean $U = (u, f(u))$ y $V = (v, f(v))$ los otros dos puntos donde la recta tangente a C en $T = ((p+q)/2, f((p+q)/2))$ se encuentra con la curva C. Si A y B son los dos puntos de inflexión de C, sean R y S los otros dos puntos donde AB se encuentra con la curva C (para más información, *véase* la Figura 5.34, y también el Problema Avanzado 17 del Capítulo 2).

(a) Calcule la relación entre el área limitada por UV y C y el área limitada por PQ y C.

(b) Demuestre que el área encerrada por RS y C es dividida en A y B en tres partes en relación 1 : 2 : 1.

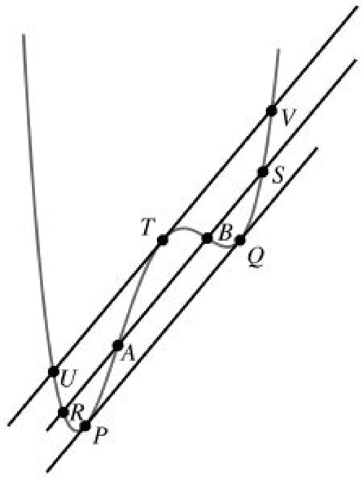

Figura 5.34

CAPÍTULO 6

Técnicas de integración

Soy muy bueno en cálculo diferencial e integral,
Conozco los nombres científicos de seres animaloides;
En pocas palabras, en todo lo vegetal, animal y mineral,
Soy el modelo de un moderno General.

William Schwenck Gilbert 1836-1911
de *The Pirates of Penzance*

Introducción Este capítulo está completamente dedicado al cálculo de integrales. Las cuatro primeras secciones son una continuación de nuestra búsqueda de métodos, que empezamos en la Sección 5.6, para obtener primitivas, y, por tanto, integrales definidas, por el Teorema Fundamental del Cálculo. La Sección 6.5 considera el problema del cálculo de integrales definidas de funciones en intervalos infinitos, o en intervalos donde las funciones no están acotadas. Las tres secciones restantes presentan técnicas de *integración numérica* que se pueden utilizar para obtener valores aproximados de integrales definidas cuando no se puede obtener una primitiva.

No es necesario conocer todo el material que se presenta en este capítulo para examinar las aplicaciones de la integración que se presentan en el Capítulo 7, aunque algunos ejemplos y ejercicios de dicho capítulo dependen de técnicas presentadas en éste.

6.1 Integración por partes

El siguiente método general que presentaremos para la obtención de primitivas se denomina **integración por partes**. De la misma forma que el método de sustitución se puede ver como el inverso de la diferenciación mediante la Regla de la Cadena, el método de integración por partes se puede ver como el inverso de la diferenciación mediante la Regla del Producto.

Supongamos que $U(x)$ y $V(x)$ son dos funciones diferenciables. De acuerdo con la Regla del Producto,

$$\frac{d}{dx}(U(x)V(x)) = U(x)\frac{dV}{dx} + V(x)\frac{dU}{dx}$$

Integrando los dos miembros de esta ecuación y ordenando términos, se obtiene

$$\int U(x)\frac{dV}{dx}\,dx = U(x)V(x) - \int V(x)\frac{dU}{dx}\,dx$$

o, de forma más simple,

$$\boxed{\int U\,dV = UV - \int V\,dU}$$

La fórmula anterior sirve como *modelo* para realizar la integración por partes, como veremos en los ejemplos que siguen. En cada aplicación del método, dividimos el integrando en un producto de dos partes, U y V', donde V' es fácil de integrar y $\int VU'\,dx$ es en general (pero no siempre) un integrando *más simple* que $\int UV'\,dx$. La técnica se denomina integración por partes porque sustituye una integral por la suma de un término integrado y otra integral que hay que calcular. Es decir, realiza sólo *parte* de la integración original.

Ejemplo 1 $\int xe^x\,dx$ Sea $U = x$, $dV = e^x\,dx$
Entonces $dU = dx$, $V = e^x$

$= xe^x - \int e^x\,dx$ (es decir, $UV - \int V\,dU$)

$= xe^x - e^x + C$

Obsérvese la forma en que se lleva a cabo la integración por partes. Indicaremos en el lateral qué valores toman U y dV y después calcularemos dU y V a partir de los anteriores. Sin embargo, realmente no sustituiremos U y V en la integral, sino que utilizaremos la fórmula $\int U\,dV = UV - \int V\,dU$ como un modelo o regla nemotécnica para sustituir la integral dada por la parte parcialmente integrada en la segunda línea.

Obsérvese también que si hubiéramos incluido una constante de integración con V, por ejemplo, $V = e^x + K$, esa constante se habría cancelado en el paso siguiente:

$$\int xe^x\,dx = x(e^x + K) - \int (e^x + K)\,dx$$

$$= xe^x + Kx - e^x - Kx + C = xe^x - e^x + C$$

En general, no se incluye una constante de integración con V o en el miembro derecho hasta que se calcula la última integral.

Es conveniente estudiar cuidadosamente todos los pasos del ejemplo siguiente, ya que muestran las diversas formas en las que se utiliza integración por partes e ilustran las diversas formas de seleccionar U y dV en diversas situaciones. Una selección inadecuada puede producir una integral más difícil de resolver que la inicial. Es conveniente buscar un factor del integrando que se pueda integrar fácilmente, e incluir dx en dicho factor para formar dV. Seguidamente, se denomina U al factor restante del integrando. Algunas veces puede ser necesario hacer solamente $dV = dx$. Al dividir un integrando cuando se utiliza integración por partes, debe escogerse U y dV de forma que, si es posible, $V\,dU$ sea «más simple» (es decir, más fácil de integrar) que $U\,dV$.

Ejemplo 2 Utilice integración por partes para calcular:

(a) $\int \ln x\,dx$, (b) $\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx$, (c) $\int x\tan^{-1} x\,dx$, (d) $\int \operatorname{sen}^{-1} x\,dx$.

Solución

(a) $\int \ln x\,dx$ Sea $U = \ln x$, $dV = dx$
Entonces $dU = dx/x$, $V = x$

$$= x\ln x - \int x\frac{1}{x}\,dx$$

$$= x\ln x - x + C$$

(b) Esta vez debemos integrar por partes dos veces:

$\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx$ Sea $U = x^2$, $dV = \operatorname{sen} x\,dx$
Entonces $dU = 2x\,dx$, $V = -\cos x$

$= -x^2 \cos x + 2\int x\cos x\,dx$ Sea $U = x$, $dV = \cos x\,dx$
Entonces $dU = dx$, $V = \operatorname{sen} x$

$$= -x^2\cos x + 2\left(x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx\right)$$

$$= -x^2\cos x + 2x\operatorname{sen} x + 2\cos x + C$$

(c) $\int x\tan^{-1} x\,dx$ Sea $U = \tan^{-1} x$, $dV = x\,dx$
Entonces $dU = dx/(1+x^2)$, $V = \frac{1}{2}x^2$

$$= \frac{1}{2}x^2\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\tan^{-1} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\tan^{-1} x + C$$

(d) $\int \operatorname{sen}^{-1} x\,dx$ Sea $U = \operatorname{sen}^{-1} x$, $dV = dx$
Entonces $dU = dx/\sqrt{1-x^2}$, $V = x$

$= x\operatorname{sen}^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ Sea $u = 1 - x^2$
$du = -2x\,dx$

$$= x\operatorname{sen}^{-1} x + \frac{1}{2}\int u^{-1/2}\,du$$

$$= x\operatorname{sen}^{-1} x + u^{1/2} + C = x\operatorname{sen}^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C$$

■

Presentamos a continuación dos consejos útiles para escoger U y dV:

(i) Si el integrando contiene un polinomio multiplicado por una exponencial, un seno o un coseno, o alguna otra función fácil de integrar, haga U igual al polinomio y dV igual al resto del integrando.

(ii) Si el integrando contiene un logaritmo, una función trigonométrica inversa o alguna otra función que no sea fácilmente integrable pero cuya derivada se pueda calcular fácilmente, denomine U a esa función y haga dV igual al resto del integrando.

Por supuesto, estas «reglas» no tienen garantía. Pueden fallar y no ser útiles si «el resto» no tiene una forma adecuada. Existen muchas funciones de las que no se puede calcular primitiva utilizando ninguna técnica estándar, por ejemplo, e^{x^2}.

Los dos ejemplos que siguen ilustran un fenómeno muy útil que aparece frecuentemente. Puede ocurrir que tras aplicar una o dos veces integración por partes, y posiblemente alguna identidad conocida, la integral original aparezca en el miembro derecho. A menos que su coeficiente sea 1, tendremos así una ecuación de donde se puede despejar la integral buscada.

Ejemplo 3 Calcule $I = \int \sec^3 x\,dx$.

Solución Empezamos integrando por partes:

$$\begin{aligned} I &= \int \sec^3 x\,dx \qquad \begin{array}{lll} \text{Sea} & U = \sec x, & dV = \sec^2 x\,dx \\ \text{Entonces} & dU = \sec x \tan x\,dx, & V = \tan x \end{array} \\ &= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x\,dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)\,dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec^3 x\,dx + \int \sec x\,dx \\ &= \sec x \tan x - I + \ln|\sec x + \tan x| \end{aligned}$$

De la anterior ecuación se puede despejar la integral deseada I. Como $2I = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|$, tenemos que

$$\boxed{\int \sec^3 x\,dx = I = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C}$$

Este integral aparece frecuentemente en las aplicaciones, por lo que merece la pena memorizarla. ■

Ejemplo 4 Calcule $I = \int e^{ax}\cos bx\,dx$.

Solución Si $a = 0$ o $b = 0$, la integral es fácil de resolver, por lo que supondremos que $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Tenemos que

$$\begin{aligned} I &= \int e^{ax}\cos bx\,dx \qquad \begin{array}{lll} \text{Sea} & U = e^{ax}, & dV = \cos bx\,dx \\ \text{Entonces} & dU = ae^{ax}\,dx, & V = (1/b)\,\text{sen}\, bx \end{array} \\ &= \frac{1}{b}e^{ax}\,\text{sen}\, bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\,\text{sen}\, bx\,dx \\ &\qquad\qquad \begin{array}{lll} \text{Sea} & U = e^{ax}, & dV = \text{sen}\, bx\,dx \\ \text{Entonces} & dU = ae^{ax}\,dx, & V = -(\cos bx)/b \end{array} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{b} e^{ax} \operatorname{sen} bx - \frac{a}{b}\left(-\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx\, dx\right)$$

$$= \frac{1}{b} e^{ax} \operatorname{sen} bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} I$$

Por tanto,

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) I = \frac{1}{b} e^{ax} \operatorname{sen} bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx + C_1$$

y

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = I = \frac{b e^{ax} \operatorname{sen} bx + a e^{ax} \cos bx}{b^2 + a^2} + C$$

■

Obsérvese que, tras la primera integración por partes, obtuvimos una integral que era diferente, pero no más simple, que la integral original. En este punto podríamos haber optado por abandonar este método. Sin embargo, la perseverancia tiene su recompensa: una segunda integración por partes hace aparecer la integral original I en una ecuación de donde se puede despejar. Al escoger U como la exponencial en la primera integración por partes (podríamos haber escogido el coseno), debemos realizar la misma selección de U en la segunda integral por partes. Si hubiéramos cambiado de montura en mitad del proceso y hubiéramos decidido hacer U igual a la función trigonométrica en la segunda integración por partes, habríamos obtenido

$$I = \frac{1}{b} e^{ax} \operatorname{sen} bx - \frac{1}{b} e^{ax} \operatorname{sen} bx + I$$

con lo que habríamos *deshecho* lo que conseguimos en el primer paso.

Si se desea calcular una integral definida por el método de integración por partes, no hay que olvidar incluir el símbolo de evaluación apropiado en el término integrado.

Ejemplo 5 **(Una integral definida)**

$$\int_1^e x^3 (\ln x)^2\, dx \qquad \text{Sea} \quad U = (\ln x)^2, \quad dV = x^3\, dx$$
$$\text{Entonces} \quad dU = 2 \ln x (1/x)\, dx, \quad V = x^4/4$$

$$= \frac{x^4}{4} (\ln x)^2 \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x^3 \ln x\, dx \qquad \text{Sea} \quad U = \ln x, \quad dV = x^3\, dx$$
$$\text{Entonces} \quad dU = dx/x, \quad V = x^4/4$$

$$= \frac{e^4}{4} (1^2) - 0 - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{4} \int_1^e x^3\, dx\right)$$

$$= \frac{e^4}{4} - \frac{e^4}{8} + \frac{1}{8} \frac{x^4}{4} \Big|_1^e = \frac{e^4}{8} + \frac{e^4}{32} - \frac{1}{32} = \frac{5}{32} e^4 - \frac{1}{32}$$

■

Fórmulas de reducción

Considere el problema de calcular $\int x^4 e^{-x}\, dx$. Como en el Ejemplo 1, podríamos utilizar integración por partes cuatro veces. Cada vez se reduciría la potencia de x en una unidad. Como esto es repetitivo y tedioso, es preferible el siguiente procedimiento. Para $n \geqslant 0$, sea

$$I_n = \int x^n e^{-x}\, dx$$

Deseamos calcular I_4. Si integramos por partes, se obtiene una fórmula de I_n en función de I_{n-1}:

$$I_n = \int x^n e^{-x}\,dx \qquad \text{Sea} \quad U = x^n, \quad dV = e^{-x}\,dx$$
$$\text{Entonces} \quad dU = nx^{n-1}\,dx, \quad V = -e^{-x}$$
$$= -x^n e^{-x} + n\int x^{n-1}e^{-x}\,dx = -x^n e^{-x} + nI_{n-1}$$

La fórmula

$$I_n = -x^n e^{-x} + nI_{n-1}$$

se denomina **fórmula de reducción** porque permite obtener el valor de la integral I_n en función de I_{n-1}, una integral con un valor reducido del exponente n. Empezando con

$$I_0 = \int x^0 e^{-x}\,dx = \int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + C$$

se puede aplicar cuatro veces la fórmula de reducción, con lo que se obtiene

$$I_1 = -xe^{-x} + I_0 = -e^{-x}(x+1) + C_1$$
$$I_2 = -x^2e^{-x} + 2I_1 = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C_2$$
$$I_3 = -x^3e^{-x} + 3I_2 = -e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6) + C_3$$
$$I_4 = -x^4e^{-x} + 4I_3 = -e^{-x}(x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 24x + 24) + C_4$$

Ejemplo 6 Obtenga y utilice una fórmula de reducción para calcular

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

Solución Observe primero que

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \operatorname{sen} x\Big|_0^{\pi/2} = 1$$

Hagamos ahora $n \geqslant 2$:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x\cos x\,dx$$
$$U = \cos^{n-1} x, \quad dV = \cos x\,dx$$
$$dU = -(n-1)\cos^{n-2} x\operatorname{sen} x\,dx, \quad V = \operatorname{sen} x$$
$$= \operatorname{sen} x\cos^{n-1} x\Big|_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} x\operatorname{sen}^2 x\,dx$$
$$= 0 - 0 + (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} x(1 - \cos^2 x)\,dx$$
$$= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

Llevando al miembro izquierdo el término $-(n-1)I_n$, se obtiene $nI_n = (n-1)I_{n-2}$, o

$$I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

que es la fórmula de reducción buscada. Es válida para $n \geqslant 2$, condición necesaria para asegurar que $\cos^{n-1}(\pi/2) = 0$. Si $n \geqslant 2$ es un *entero par*, tenemos que

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} I_{n-4} = \cdots \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0 \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Si $n \geqslant 3$ es un entero *impar*, tenemos que

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot I_1 \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Véase en el Ejercicio 38 donde se presenta una consecuencia interesante de estas fórmulas. ■

Ejercicios 6.1

Calcule las integrales de los Ejercicios 1-28.

1. $\displaystyle\int x\cos x\,dx$

2. $\displaystyle\int (x+3)e^{2x}\,dx$

3. $\displaystyle\int x^2\cos \pi x\,dx$

4. $\displaystyle\int (x^2-2x)e^{kx}\,dx$

5. $\displaystyle\int x^3\ln x\,dx$

6. $\displaystyle\int x(\ln x)^3\,dx$

7. $\displaystyle\int \tan^{-1} x\,dx$

8. $\displaystyle\int x^2\tan^{-1} x\,dx$

9. $\displaystyle\int x\,\mathrm{sen}^{-1} x\,dx$

10. $\displaystyle\int x^5 e^{-x^2}\,dx$

11. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sec^5 x\,dx$

12. $\displaystyle\int \tan^2 x\sec x\,dx$

13. $\displaystyle\int e^{2x}\mathrm{sen}\,3x\,dx$

14. $\displaystyle\int xe^{\sqrt{x}}\,dx$

***15.** $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{\mathrm{sen}^{-1} x}{x^2}\,dx$

16. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{sen}\,(\pi\sqrt{x})\,dx$

17. $\displaystyle\int x\sec^2 x\,dx$

18. $\displaystyle\int x\,\mathrm{sen}^2 x\,dx$

19. $\displaystyle\int \cos(\ln x)\,dx$

20. $\displaystyle\int_1^e \mathrm{sen}\,(\ln x)\,dx$

21. $\displaystyle\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx$

22. $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}\,dx$

23. $\displaystyle\int \arccos x\,dx$

24. $\displaystyle\int x\sec^{-1} x\,dx$

25. $\displaystyle\int_1^2 \sec^{-1} x\,dx$

***26.** $\displaystyle\int (\mathrm{sen}^{-1} x)^2\,dx$

***27.** $\displaystyle\int x(\tan^{-1} x)^2\,dx$

***28.** $\displaystyle\int xe^x\cos x\,dx$

29. Calcule el área por debajo de $y = e^{-x}$ y por encima de $y = 0$, desde $x = 0$ hasta $x = \pi$.

30. Calcule el área de la región plana finita limitada por la curva $y = \ln x$, la recta $y = 1$ y la tangente a $y = \ln x$ en $x = 1$.

Fórmulas de reducción

31. Obtenga una fórmula de reducción para $I_n = \int (\ln x)^n\,dx$ y utilícela para calcular I_4.

32. Obtenga una fórmula de reducción para $I_n = \int_0^{\pi/2} x^n \mathrm{sen}\,x\,dx$ y utilícela para calcular I_6.

33. Obtenga una fórmula de reducción para $I_n = \int \mathrm{sen}^n x\,dx$ (siendo $n \geqslant 2$), y utilícela para calcular I_6 e I_7.

34. Obtenga una fórmula de reducción para $I_n = \int \sec^n x\,dx$ (siendo $n \geqslant 3$), y utilícela para calcular I_6 e I_7.

***35.** Haciendo

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} \\ &= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int x\frac{x}{(x^2+a^2)^n}\,dx \end{aligned}$$

e integrando por partes la última integral, haciendo $U = x$, obtenga una fórmula de reducción para I_n. Utilice esta fórmula para calcular I_3.

***36.** Si f es dos veces diferenciable en el intervalo $[a, b]$ y $f(a) = f(b) = 0$, demuestre que

$$\int_a^b (x-a)(b-x)\,f''(x)\,dx = -2\int_a^b f(x)\,dx$$

Sugerencia: Aplique dos veces integración por partes al miembro izquierdo. Esta fórmula se utilizará en la Sección 6.6 para obtener una estimación del error con la fórmula de aproximación de la Regla del Trapecio.

***37.** Si f y g son dos funciones con segunda derivada continua en el intervalo $[a, b]$ y si $f(a) = g(a) = f(b) = g(b) = 0$, demuestre que

$$\int_a^b f(x)g''(x)\,dx = \int_a^b f''(x)g(x)\,dx$$

¿Qué otros supuestos sobre los valores de f y g en a y b producirían el mismo resultado?

***38. (El Producto de Wallis)** Sea $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$.

(a) Utilice el hecho de que $0 \leqslant \cos x \leqslant 1$ para $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$ para demostrar que $I_{2n+2} \leqslant I_{2n+1} \leqslant I_{2n}$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$

(b) Utilice la fórmula de reducción $I_n = ((n-1)/n)I_{n-2}$ obtenida en el Ejemplo 6, junto con el resultado del apartado (a), para demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$$

(c) Combine el resultado del apartado (b) con las fórmulas explícitas de I_n (para n par e impar) obtenidas en el Ejemplo 6 para demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

Esta interesante fórmula en forma de producto para obtener el valor de π se debe al matemático inglés del siglo XIX John Wallis, y se conoce como Producto de Wallis.

6.2 Sustituciones inversas

Las sustituciones consideradas en la Sección 5.6 eran sustituciones directas en el sentido de que simplificaban un integrando sustituyendo una expresión de éste por una única variable. En esta sección consideraremos el procedimiento inverso: sustituiremos una variable de integración con una función de una nueva variable. Estas sustituciones, denominadas *sustituciones inversas*, podría parecer que en principio complican la integral. Es decir, sustituyendo $x = g(u)$ en la integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

se obtiene como resultado la integral más «complicada»

$$\int_{x=a}^{x=b} f(g(u))\,g'(u)\,du$$

Sin embargo, como veremos posteriormente, algunas veces estas sustituciones de hecho simplifican el integrando, transformando la integral inicial en otra que se puede calcular por simple inspección o a la que se pueden aplicar otras técnicas.

Las sustituciones trigonométricas inversas

Tres sustituciones inversas muy útiles son:

$$x = a\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad x = a\tan\theta \quad \text{y} \quad x = a\sec\theta$$

que corresponden a las sustituciones directas:

$$\theta = \mathrm{sen}^{-1}\frac{x}{a}, \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{x}{a} \quad \text{y} \quad \theta = \sec^{-1}\frac{x}{a} = \cos^{-1}\frac{a}{x}$$

Sustitución inversa por el seno

Las integrales en las que aparece $\sqrt{a^2 - x^2}$ (siendo $a > 0$) se pueden reducir frecuentemente a una forma más simple mediante el cambio

$$x = a\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \text{o, en otros términos,} \qquad \theta = \mathrm{sen}^{-1}\frac{x}{a}$$

Obsérvese que $\sqrt{a^2 - x^2}$ sólo tiene sentido si $-a \leqslant x \leqslant a$, lo que corresponde a $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Como $\cos\theta \geqslant 0$ para esos valores de θ, tenemos que

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2(1 - \mathrm{sen}^2\,\theta)} = \sqrt{a^2\cos^2\theta} = a\cos\theta$$

Si $\cos\theta$ fuera no negativo, habríamos obtenido $a|\cos\theta|$. Si fuera necesario, las otras funciones trigonométricas de θ se pueden expresar en función de x examinando un triángulo rectángulo etiquetado de forma correspondiente a la sustitución (*véase* la Figura 6.1).

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} \qquad \text{y} \qquad \tan\theta = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

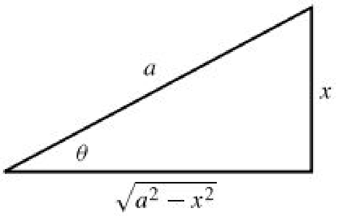

Figura 6.1

Ejemplo 1 Calcule $\displaystyle\int \frac{1}{(5 - x^2)^{3/2}}\,dx.$

Solución Obsérvese la Figura 6.2.

$$\int \frac{1}{(5 - x^2)^{3/2}}\,dx \qquad \begin{aligned} &\text{Sea } x = \sqrt{5}\,\mathrm{sen}\,\theta \\ &dx = \sqrt{5}\cos\theta\,d\theta \end{aligned}$$

$$= \int \frac{\sqrt{5}\cos\theta\,d\theta}{5^{3/2}\cos^3\theta}$$

$$= \frac{1}{5}\int \sec^2\theta\,d\theta = \frac{1}{5}\tan\theta + C = \frac{1}{5}\frac{x}{\sqrt{5 - x^2}} + C$$

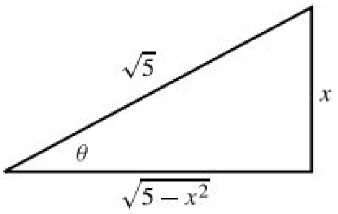

Figura 6.2

Ejemplo 2 Calcule el área del segmento circular sombreado en la Figura 6.3.

Solución El área es

$$A = 2\int_b^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \qquad \begin{aligned} &\text{Sea } x = a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ &dx = a\cos\theta\,d\theta \end{aligned}$$

$$= 2\int_{x=b}^{x=a} a^2\cos^2\theta\,d\theta$$

$$= a^2(\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta)\Big|_{x=b}^{x=a} \qquad \text{(como en el Ejemplo 8 de la Sección 5.6)}$$

$$= a^2\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}\right)\Bigg|_b^a \qquad (\textit{Véase}\text{ la Figura 6.1})$$

$$= \frac{\pi}{2}a^2 - a^2\operatorname{sen}^{-1}\frac{b}{a} - b\sqrt{a^2-b^2} \text{ unidades al cuadrado}$$

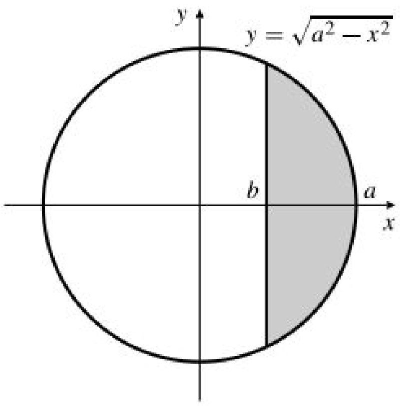

Figura 6.3

Sustitución inversa por la tangente

Las integrales en las que aparece $\sqrt{a^2+x^2}$ o $\dfrac{1}{x^2+a^2}$ (siendo $a > 0$) a menudo se simplifican mediante el cambio

$$x = a\tan\theta \qquad \text{o, en otros términos,} \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{x}{a}$$

Como x puede tomar cualquier valor real, tenemos que $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, por lo que $\sec\theta > 0$ y

$$\sqrt{a^2+x^2} = a\sqrt{1+\tan^2\theta} = a\sec\theta$$

Otras funciones trigonométricas de θ se pueden expresar en función de x tomando como referencia un triángulo rectángulo con catetos a y x e hipotenusa $\sqrt{a^2+x^2}$ (*véase* la Figura 6.4):

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} \qquad \text{y} \qquad \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

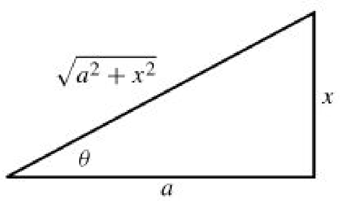

Figura 6.4

Ejemplo 3 Calcule (a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$ y (b) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+9x^2)^2}\,dx.$

Solución Las Figuras 6.5 y 6.6 ilustran los apartados (a) y (b), respectivamente.

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$ Sea $x = 2\tan\theta$
$dx = 2\sec^2\theta\, d\theta$

$$= \int \frac{2\sec^2\theta}{2\sec\theta}\,d\theta$$

$$= \int \sec\theta\, d\theta$$

$$= \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2}\right| + C$$

$$= \ln\left(\sqrt{4+x^2} + x\right) + C_1, \qquad \text{siendo } C_1 = C - \ln 2$$

Nótese que $\sqrt{4+x^2} + x > 0$ para todo x, por lo que no es necesario tomar valor absoluto.

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+9x^2)^2}\,dx$ Sea $3x = \tan\theta$
$3dx = \sec^2\theta\, d\theta$
$1 + 9x^2 = \sec^2\theta$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sec^4\theta}$$

$$= \frac{1}{3}\int \cos^2\theta\, d\theta = \frac{1}{6}(\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta) + C$$

$$= \frac{1}{6}\tan^{-1}(3x) + \frac{1}{6}\frac{3x}{\sqrt{1+9x^2}}\frac{1}{\sqrt{1+9x^2}} + C$$

$$= \frac{1}{6}\tan^{-1}(3x) + \frac{1}{2}\frac{x}{1+9x^2} + C$$

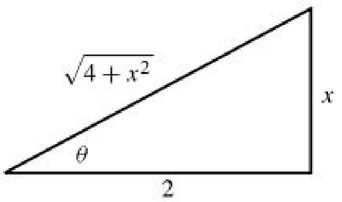

Figura 6.5

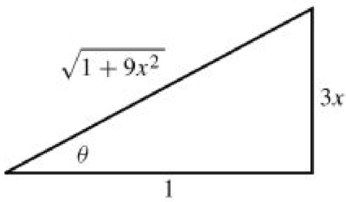

Figura 6.6

■

Sustitución inversa por la secante

Las integrales en las que aparece $\sqrt{x^2 - a^2}$ (siendo $a > 0$) a menudo se simplifican mediante el cambio

$$x = a\sec\theta \qquad \text{o, en otros términos,} \qquad \theta = \sec^{-1}\frac{x}{a}$$

Hay que tener cuidado con este cambio. Aunque

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a\sqrt{\sec^2\theta - 1} = a\sqrt{\tan^2\theta} = a|\tan\theta|$$

no siempre se puede eliminar el valor absoluto de la tangente. Obsérvese que $\sqrt{x^2 - a^2}$ tiene sentido para $x \geqslant a$ y para $x \leqslant -a$:

$$\text{Si } x \geqslant a, \text{ entonces } 0 \leqslant \theta = \sec^{-1}\frac{x}{a} = \arccos\frac{a}{x} < \frac{\pi}{2}, \text{ y } \tan\theta \geqslant 0.$$

$$\text{Si } x \leqslant -a, \text{ entonces } \frac{\pi}{2} < \theta = \sec^{-1}\frac{x}{a} = \arccos\frac{a}{x} \leqslant \pi, \text{ y } \tan\theta \leqslant 0.$$

En el primer caso $\sqrt{x^2 - a^2} = a\tan\theta$; el segundo caso $\sqrt{x^2 - a^2} = -a\tan\theta$.

Ejemplo 4 Calcule $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, siendo $a > 0$.

Solución Supongamos por el momento que $x \geqslant a$. Si $x = a\sec\theta$, entonces $dx = a\sec\theta\tan\theta\, d\theta$ y $\sqrt{x^2 - a^2} = a\tan\theta$ (Figura 6.7). Entonces,

$$\begin{aligned} I &= \int \sec\theta\, d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C \\ &= \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right| + C = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C_1 \end{aligned}$$

siendo $C_1 = C - \ln a$. Si $x \leqslant -a$, sea $u = -x$ de forma que $u \geqslant a$ y $du = -dx$. Tenemos que

$$\begin{aligned} I &= -\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = -\ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C_1 \\ &= \ln\left|\frac{1}{-x + \sqrt{x^2 - a^2}}\,\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}\right| + C_1 \\ &= \ln\left|\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{-a^2}\right| + C_1 = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C_2 \end{aligned}$$

siendo $C_2 = C_1 - 2\ln a$. Entonces, en cualquier caso, tenemos que

$$I = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

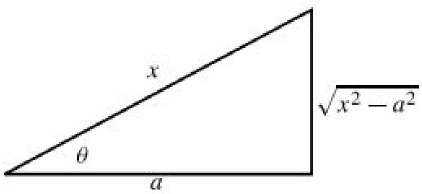

Figura 6.7

Completar el cuadrado

Las expresiones cuadráticas de la forma $Ax^2 + Bx + C$ aparecen a menudo en integrandos. Se pueden expresar en forma de suma o diferencia de cuadrados utilizando el procedimiento de completar el cuadrado, como hicimos para obtener la fórmula de las raíces de ecuaciones de segundo grado en la Sección P.6. En primer lugar se saca factor común A, de forma que la expresión resultante empiece con $x^2 + 2bx$, siendo $2b = B/A$. Esos son los dos primeros términos de $(x + b)^2 = x^2 + 2bx + b^2$. Se suma y se resta entonces el tercer término $b^2 = B^2/4A^2$:

$$\begin{aligned} Ax^2 + Bx + C &= A\left(x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}\right) \\ &= A\left(x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{B^2}{4A^2} + \frac{C}{A} - \frac{B^2}{4A^2}\right) \\ &= A\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + \frac{4AC - B^2}{4A} \end{aligned}$$

Se debe realizar el cambio $u = x + \dfrac{B}{2A}$.

Ejemplo 5 Calcule (a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}\,dx$ y (b) $\displaystyle\int \frac{x}{4x^2 + 12x + 13}\,dx$.

Solución

(a)
$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}\,dx &= \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (1 - 2x + x^2)}} \\ &= \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (x - 1)^2}} \qquad \begin{array}{l} \text{Sea } u = x - 1 \\ du = dx \end{array} \\ &= \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} \\ &= \operatorname{sen}^{-1} u + C = \operatorname{sen}^{-1}(x - 1) + C \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} \int \frac{x}{4x^2 + 12x + 13}\,dx &= \int \frac{x\,dx}{4\left(x^2 + 3x + \frac{9}{4} + 1\right)} \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{x\,dx}{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + 1} \qquad \begin{array}{l} \text{Sea } u = x + (3/2) \\ du = dx \\ x = u - (3/2) \end{array} \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{u\,du}{u^2 + 1} - \frac{3}{8}\int \frac{du}{u^2 + 1} \qquad \begin{array}{l} \text{En la primera integral} \\ \text{sea } v = u^2 + 1 \\ du = 2u\,du \end{array} \\ &= \frac{1}{8}\int \frac{dv}{v} - \frac{3}{8}\tan^{-1} u \\ &= \frac{1}{8}\ln|v| - \frac{3}{8}\tan^{-1} u + C \\ &= \frac{1}{8}\ln(4x^2 + 12x + 13) - \frac{3}{8}\tan^{-1}\left(x + \frac{3}{2}\right) + C_1 \end{aligned}$$

siendo $C_1 = C - (\ln 4)/8$.

Otras sustituciones inversas

Las integrales en las que aparece $\sqrt{ax+b}$ se pueden simplificar algunas veces mediante el cambio $ax + b = u^2$.

Ejemplo 6 $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{2x}}\,dx$ Sea $2x = u^2$, $2\,dx = 2u\,du$

$$= \int \frac{u}{1+u}\,du$$

$$= \int \frac{1+u-1}{1+u}\,du$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{1+u}\right) du \qquad \text{Sea } v = 1+u,\quad dv = du$$

$$= u - \int \frac{dv}{v} = u - \ln|v| + C$$

$$= \sqrt{2x} - \ln(1+\sqrt{2x}) + C$$

Algunas veces, las integrales en las que aparece $\sqrt[n]{ax+b}$ se pueden simplificar mucho mediante la sustitución híbrida $ax + b = u^n$, $a\,dx = nu^{n-1}\,du$.

Ejemplo 7 $\displaystyle\int_{-1/3}^{2} \frac{x}{\sqrt[3]{3x+2}}\,dx$ Sea $3x + 2 = u^3$, $3\,dx = 3u^2\,du$

$$= \int_1^2 \frac{u^3-2}{3u}\,u^2\,du$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^2 (u^4 - 2u)\,du = \frac{1}{3}\left(\frac{u^5}{5} - u^2\right)\Bigg|_1^2 = \frac{16}{15}$$

Nótese el cambio de límites en esta integral definida. $u = 1$ cuando $x = -1/3$ y $u = 2$ cuando $x = 2$.

Si aparece más de una potencia fraccionaria, puede ser posible eliminarlas todas a la vez.

Ejemplo 8 Calcule $\displaystyle\int \frac{1}{x^{1/2}(1+x^{1/3})}\,dx$.

Solución Se pueden eliminar la raíz cuadrada y la raíz cúbica utilizando la sustitución inversa $x = u^6$. Se elige la potencia 6 porque 6 es el mínimo común múltiplo de 2 y 3.

$$\int \frac{dx}{x^{1/2}(1+x^{1/3})} \qquad \text{Sea } x = u^6,\quad dx = 6u^5\,du$$

$$= 6\int \frac{u^5\,du}{u^3(1+u^2)} = 6\int \frac{u^2}{1+u^2}\,du = 6\int \left(1 + \frac{1}{1+u^2}\right) du$$

$$= 6(u - \tan^{-1} u) + C = 6(x^{1/6} - \tan^{-1} x^{1/6}) + C$$

El cambio tan $(\theta/2)$

Existe un tipo especial de cambio que puede transformar una integral cuyo integrando es una función racional de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$ (es decir, un cociente de polinomios en $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$) en una función racional de x. El cambio es

$$x = \tan\frac{\theta}{2} \qquad \text{o, en otros términos,} \quad \theta = 2\tan^{-1} x$$

Obsérvese que

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sec^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{1+x^2}$$

por tanto,

$$\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = \frac{2}{1+x^2} - 1 = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$\operatorname{sen}\theta = 2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 2\tan\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{2x}{1+x^2}$$

Además, $dx = \frac{1}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}\,d\theta$, por lo que

$$d\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}\,dx = \frac{2\,dx}{1+x^2}$$

En resumen:

El cambio tan $(\theta/2)$

Si $x = \tan(\theta/2)$, entonces

$$\cos\theta = \frac{1-x^2}{1+x^2}, \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{2x}{1+x^2} \qquad \text{y} \qquad d\theta = \frac{2\,dx}{1+x^2}$$

Nótese que $\cos\theta$, $\operatorname{sen}\theta$ y $d\theta$ sólo involucran funciones racionales de x. En la Sección 6.3 examinaremos técnicas generales para integrar funciones racionales de x.

Ejemplo 9 $\displaystyle\int \frac{1}{2+\cos\theta}\,d\theta$ Sea $x = \tan(\theta/2)$

$$\cos\theta = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$d\theta = \frac{2\,dx}{1+x^2}$$

$$= \int \frac{\dfrac{2\,dx}{1+x^2}}{2+\dfrac{1-x^2}{1+x^2}} = 2\int \frac{1}{3+x^2}\,dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{\theta}{2}\right) + C$$

Ejercicios 6.2

Calcule las integrales de los Ejercicios 1-36.

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

2. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

3. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9-x^2}}$

4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-4x^2}}$

5. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$

6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{9-x^2}}$

7. $\int \frac{x+1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$

9. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{9+x^2}}$

10. $\int \frac{\sqrt{9+x^2}}{x^4}\,dx$

11. $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}$

12. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$

13. $\int \frac{x^2\,dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}$

14. $\int \frac{dx}{(1+2x^2)^{5/2}}$

15. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$ $(x>2)$

16. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}$ $(x>a>0)$

17. $\int \frac{dx}{x^2+2x+10}$

18. $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$

19. $\int \frac{dx}{(4x^2+4x+5)^2}$

20. $\int \frac{x\,dx}{x^2-2x+3}$

21. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$

22. $\int \frac{dx}{(4x-x^2)^{3/2}}$

23. $\int \frac{x\,dx}{(3-2x-x^2)^{3/2}}$

24. $\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$

25. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^3}$

26. $\int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2}$

***27.** $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^3}\,dx$

28. $\int \sqrt{9+x^2}\,dx$

29. $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$

30. $\int \frac{dx}{1+x^{1/3}}$

***31.** $\int \frac{1+x^{1/2}}{1+x^{1/3}}\,dx$

***32.** $\int \frac{x\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

33. $\int_{-\ln 2}^{0} e^x\sqrt{1-e^{2x}}\,dx$

34. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}}\,dx$

35. $\int_{-1}^{\sqrt{3}-1} \frac{dx}{x^2+2x+2}$

36. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$

En los Ejercicios 37-39, calcule las integrales utilizando el cambio especial $x = \tan(\theta/2)$, como en el Ejemplo 9.

***37.** $\int \frac{d\theta}{2+\operatorname{sen}\theta}$

***38.** $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1+\cos\theta+\operatorname{sen}\theta}$

***39.** $\int \frac{d\theta}{3+2\cos\theta}$

40. Calcule el área de la región limitada por $y=(2x-x^2)^{-1/2}$, $y=0$, $x=1/2$ y $x=1$.

41. Calcule el área de la región por debajo de $y=9/(x^4+4x^2+4)$ y por encima de $y=1$.

42. Calcule el valor medio de la función $f(x)=(x^2-4x+8)^{-3/2}$ en el intervalo $[0,4]$.

43. Calcule el área del interior de la circunferencia $x^2+y^2=a^2$ que está por encima de la recta $y=b$, $(-a\leqslant b\leqslant a)$.

44. Calcule el área común al interior de las circunferencias $x^2+y^2=1$ y $(x-2)^2+y^2=4$.

45. Calcule el área del primer cuadrante que está por encima de la hipérbola $xy=12$ y en el interior de la circunferencia $x^2+y^2=25$.

46. Calcule el área a la izquierda de $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ y a la derecha de la recta $x=c$, con $-a\leqslant c\leqslant a$.

***47.** Calcule el área de la región limitada por el eje x, la hipérbola $x^2-y^2=1$, y la recta que va desde el origen al punto $(\sqrt{1+Y^2}, Y)$ en dicha hipérbola. (Suponga $Y>0$.) En particular, demuestre que si $Y=\operatorname{senh} t$ el área es $t/2$ unidades al cuadrado.

***48.** Calcule las integrales

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad \text{y} \quad \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}$$

para $x>a>0$ utilizando el cambio $x=a\cosh u$. (*Sugerencia*: Revise las propiedades de las funciones hiperbólicas de la Sección 3.6). Ésta sustitución es una alternativa a $x=a\sec\theta$ cuando aparece $\sqrt{x^2-a^2}$.

6.3 Integrales de funciones racionales

En esta sección vamos a considerar integrales de la forma

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

siendo P y Q polinomios. Recuérdese que un **polinomio** es una función P de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

siendo n un entero no negativo, a_0, a_1, a_2, ..., a_n constantes y $a_n \neq 0$. Denominamos a n **grado** del polinomio P. Un cociente $P(x)/Q(x)$ de dos polinomios se denomina **función racional** (*véase* la Sección P.6 donde se presentan los polinomios y las funciones racionales). En general sólo será necesario considerar funciones racionales $P(x)/Q(x)$ en las que el grado de P sea menor que el grado de Q. Si el grado de P es mayor o igual que el grado de Q, entonces se dividen los polinomios para expresar la fracción $P(x)/Q(x)$ en forma de un polinomio sumado con otra fracción $R(x)/Q(x)$ en la que R, el resto de la división, es siempre de grado menor que Q.

Ejemplo 1 Calcule $\displaystyle\int \frac{x^3+3x^2}{x^2+1}\,dx$.

Solución El grado del numerador es 3 y el del denominador es 2, por lo que es necesario dividir los polinomios:

$$\begin{array}{r|l} & x+3 \\ \hline x^2+1 & x^3+3x^2 \\ & \underline{x^3 \qquad\; + x} \\ & \quad 3x^2 - x \\ & \quad \underline{3x^2 \qquad + 3} \\ & \qquad\; -x-3 \end{array}$$

$$\frac{x^3+3x^2}{x^2+1} = x+3-\frac{x+3}{x^2+1}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+3x^2}{x^2+1}\,dx &= \int (x+3)\,dx - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx - 3\int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= \frac{1}{2}x^2+3x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 3\tan^{-1}x + C\end{aligned}$$

Ejemplo 2 Calcule $\displaystyle\int \frac{x}{2x-1}\,dx$.

Solución El numerador y el denominador tienen el mismo grado, 1, por lo que es necesario de nuevo dividir. En este caso se puede realizar la división simplemente transformando el integrando:

$$\frac{x}{2x-1} = \frac{1}{2}\,\frac{2x}{2x-1} = \frac{1}{2}\,\frac{2x-1+1}{2x-1} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2x-1}\right)$$

Véase la Sección P.6. Tenemos entonces que

$$\int \frac{x}{2x-1}\,dx = \frac{1}{2}\int\left(1+\frac{1}{2x-1}\right)dx = \frac{x}{2}+\frac{1}{4}\ln|2x-1| + C$$

En lo que sigue, supondremos siempre que se han realizado las divisiones previas necesarias y que el polinomio cociente ya se ha integrado. Por tanto, el problema básico que debemos considerar en esta sección es el siguiente:

El problema básico

Calcular $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, siendo grado de $P <$ grado de Q.

La complejidad de este problema depende del grado de Q.

Denominadores lineales y cuadráticos

Supongamos que $Q(x)$ es de grado 1. Por tanto, $Q(x) = ax + b$, con $a \neq 0$. Entonces $P(x)$ debe tener grado 0 y ser, por tanto, una constante c. Tenemos que $P(x)/Q(x) = c/(ax + b)$. El cambio $u = ax + b$ produce

$$\int \frac{c}{ax + b}dx = \frac{c}{a}\int \frac{du}{u} = \frac{c}{a}\ln|u| + C$$

de modo que para $c = 1$:

Caso de denominador lineal

$$\int \frac{1}{ax + b}dx = \frac{1}{a}\ln|ax + b| + C$$

Supongamos ahora que $Q(x)$ es una función cuadrática, es decir, de grado 2. A efectos de esta presentación, podemos suponer que $Q(x)$ es o bien de la forma $x^2 + a^2$ o bien de la forma $x^2 - a^2$, ya que completando el cuadrado y realizando el cambio de variable apropiado se puede reducir siempre el denominador a esta forma, como se demuestra en la Sección 6.2. Como $P(x)$ puede ser como máximo una función lineal, $P(x) = Ax + B$, esto nos lleva a considerar las cuatro integrales siguientes:

$$\int \frac{x\,dx}{x^2 + a^2}, \qquad \int \frac{x\,dx}{x^2 - a^2}, \qquad \int \frac{dx}{x^2 + a^2} \quad \text{y} \quad \int \frac{dx}{x^2 - a^2}$$

Si $a = 0$, sólo hay dos integrales, que se pueden calcular fácilmente. En las dos primeras integrales se aplica el cambio $u = x^2 \pm a^2$. La tercera es una integral conocida, y la cuarta se puede resolver mediante el cambio $x = a\operatorname{sen}\theta$ si $|x| < |a|$, o el cambio $x = a\sec\theta$ si $|x| > |a|$, pero se puede calcular también mediante otro método que veremos posteriormente. Los valores de las cuatro integrales se presentan a continuación:

Caso de denominador cuadrático

$$\int \frac{x\,dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2 + a^2) + C$$

$$\int \frac{x\,dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2}\ln|x^2 - a^2| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + C$$

Para obtener la última de las fórmulas anteriores, expresaremos el integrando como una suma de dos fracciones con denominadores lineales:

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a} = \frac{Ax + Aa + Bx - Ba}{x^2 - a^2}$$

donde en el último paso se han sumado las dos fracciones. Si esta ecuación se cumple para todo x (excepto $x = \pm a$), entonces los numeradores de los dos miembros deben ser polinomios idénticos en x. La ecuación $(A + B)x + (Aa - Ba) = 1 = 0x + 1$ se cumplirá para todo x sólo si

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \qquad \text{(el coeficiente de } x\text{)} \\ Aa - Ba &= 1 \qquad \text{(el término constante)} \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de dos ecuaciones lineales se obtiene el valor de las incógnitas A y B, $A = 1/(2a)$ y $B = -1/(2a)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - a^2} &= \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x-a} - \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x+a} \\ &= \frac{1}{2a}\ln|x-a| - \frac{1}{2a}\ln|x+a| + C \\ &= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \end{aligned}$$

Descomposición en fracciones simples

La técnica que acabamos de utilizar, donde se expresa una fracción compleja como suma de fracciones más sencillas, se denomina **método de descomposición en fracciones simples**. Supongamos un polinomio $Q(x)$ de grado n, de forma que su término de mayor grado es x^n (con coeficiente 1). Supongamos además que Q se puede descomponer en un producto de n factores lineales *distintos* (de grado 1), por ejemplo,

$$Q(x) = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n)$$

con $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$, $i \leqslant i$, $j \leqslant n$. Si $P(x)$ es un polinomio de grado inferior a n, entonces $P(x)/Q(x)$ admite una **descomposición en fracciones simples** de la forma

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - a_n}}$$

para ciertos valores de las constantes $A_1, A_2, \ldots, A_n$. No presentaremos aquí ninguna demostración formal de esta afirmación, ya que pertenece al ámbito de los cursos de álgebra (*véase* el Teorema 1 posterior donde se plantea un resultado más general).

Sabiendo que $P(x)/Q(x)$ admite una descomposición en fracciones simples, como se ha comentado anteriormente, existen dos métodos para determinar las constantes $A_1, A_2, \ldots, A_n$. El primero de ellos, que se generaliza más fácilmente a descomposiciones más complicadas que se presentarán posteriormente, consiste en sumar las fracciones de la descomposición y obtener una nueva fracción $S(x)/Q(x)$ con numerador $S(x)$, un polinomio de grado una unidad menor que $Q(x)$. Esta nueva fracción será idéntica a la fracción original $P(x)/Q(x)$ si S y P son polinomios idénticos. Las constantes $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se determinan resolviendo el sistema de n ecuaciones lineales que resulta de igualar los coeficientes de las mismas potencias de x en los polinomios S y P.

El segundo método se basa en la siguiente observación: si se multiplica la descomposición en fracciones simples por $x - a_j$, se obtiene

$$\begin{aligned}(x - a_j)\,&\frac{P(x)}{Q(x)}\\ &= A_1\frac{x-a_j}{x-a_1} + \cdots + A_{j-1}\frac{x-a_j}{x-a_{j-1}} + A_j + A_{j+1}\frac{x-a_j}{x-a_{j+1}} + \cdots + A_n\frac{x-a_j}{x-a_n}\end{aligned}$$

Todos los términos del miembro derecho se anulan en $x = a_j$, excepto el término j-ésimo, A_j. Por tanto,

$$\begin{aligned}A_j &= \lim_{x\to a_j}(x-a_j)\frac{P(x)}{Q(x)}\\ &= \frac{P(a_j)}{(a_j-a_1)\cdots(a_j-a_{j-1})(a_j-a_{j+1})\cdots(a_j-a_n)}\end{aligned}$$

para $1 \leqslant j \leqslant n$. En la práctica, el método se utiliza para obtener el coeficiente A_j simplificando el factor $x - a_j$ en el denominador de $P(x)/Q(x)$ y particularizando la expresión resultante en $x = a_j$.

Ejemplo 3 Calcule $\displaystyle\int \frac{(x+4)}{x^2-5x+6}\,dx$.

Solución La descomposición en fracciones simples tiene la forma

$$\frac{x+4}{x^2-5x+6} = \frac{x+4}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

Calcularemos A y B por los dos métodos comentados anteriormente.

MÉTODO I. Se suman las fracciones simples

$$\frac{x+4}{x^2-5x+6} = \frac{Ax-3A+Bx-2B}{(x-2)(x-3)}$$

y se igualan los coeficientes de x y los términos constantes en los numeradores de ambos miembros, con lo que se obtiene

$$A + B = 1 \quad \text{y} \quad -3A - 2B = 4$$

Resolviendo esas ecuaciones se llega a $A = -6$ y $B = 7$.

MÉTODO II. Para calcular A, se elimina el término $x - 2$ del denominador de la expresión $P(x)/Q(x)$ y se particulariza el resultado en $x = 2$. La obtención de B es similar.

$$A = \left.\frac{x+4}{x-3}\right|_{x=2} = -6 \quad \text{y} \quad B = \left.\frac{x+4}{x-2}\right|_{x=3} = 7$$

En cualquier caso tenemos

$$\begin{aligned}\int \frac{(x+4)}{x^2-5x+6}\,dx &= -6\int\frac{1}{x-2}\,dx + 7\int\frac{1}{x-3}\,dx\\ &= -6\ln|x-2| + 7\ln|x-3| + C\end{aligned}$$

■

Ejemplo 4 Calcule $I = \int \frac{x^3+2}{x^3-x}dx.$

Solución Como el grado del numerador no es menor que el del denominador, hay que dividir:

$$I = \int \frac{x^3-x+x+2}{x^3-x}dx = \int \left(1+\frac{x+2}{x^3-x}\right)dx = x + \int \frac{x+2}{x^3-x}dx$$

Ahora se puede utilizar el método de descomposición en fracciones simples.

$$\frac{x+2}{x^3-x} = \frac{x+2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$
$$= \frac{A(x^2-1)+B(x^2+x)+C(x^2-x)}{x(x-1)(x+1)}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} A+B+C &= 0 && \text{(coeficiente de } x^2\text{)} \\ B-C &= 1 && \text{(coeficiente de } x\text{)} \\ -A \quad &= 2 && \text{(término constante)} \end{aligned}$$

Se deduce entonces que $A = -2$, $B = 3/2$ y $C = 1/2$. Podemos obtener también los mismos valores utilizando el Método II del ejemplo anterior:

$$A = \left.\frac{x+2}{(x-1)(x+1)}\right|_{x=0} = -2, \qquad B = \left.\frac{x+2}{x(x+1)}\right|_{x=1} = \frac{3}{2} \quad \text{y}$$
$$C = \left.\frac{x+2}{x(x-1)}\right|_{x=-1} = \frac{1}{2}$$

Finalmente, tenemos

$$I = x - 2\int \frac{1}{x}dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx$$
$$= x - 2\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + C$$

A continuación consideraremos una función racional cuyo denominador tiene un factor cuadrático equivalente a una suma de cuadrados y que, por tanto, no se puede descomponer en un producto de factores lineales reales.

Ejemplo 5 Calcule $\int \frac{2+3x+x^2}{x(x^2+1)}dx.$

Solución Nótese que el numerador es de grado 2 y el denominador es de grado 3, por lo que no es necesaria la división previa. Si se descompone el integrando en una suma de dos fracciones más simples, el denominador de una de ellas será x y el de la otra x^2+1. La forma apropiada de la descomposición resulta ser

$$\frac{2+3x+x^2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)}$$

Nótese que hemos utilizado un numerador lineal (de grado 1) en el término correspondiente al denominador cuadrático (de grado 2). Igualando los coeficientes de los dos numeradores, se obtiene

$$\begin{aligned} A+B \quad &= 1 && \text{(coeficiente de } x^2\text{)} \\ C &= 3 && \text{(coeficiente de } x\text{)} \\ A \quad &= 2 && \text{(término constante)} \end{aligned}$$

Por tanto, $A = 2$, $B = -1$ y $C = 3$. Tenemos, entonces,

$$\int \frac{2 + 3x + x^2}{x(x^2 + 1)}\,dx = 2\int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{x}{x^2 + 1}\,dx + 3\int \frac{1}{x^2 + 1}\,dx$$

$$= 2\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + 3\tan^{-1}x + C$$

Hay que resaltar que la suma de fracciones es el único método razonable que utiliza valores reales para determinar las constantes A, B y C. Podríamos haber determinado A utilizando el Método II del Ejemplo 3, pero habríamos tenido que utilizar números complejos.

Ejemplo 6 Calcule $I = \displaystyle\int \frac{1}{x^3 + 1}\,dx$.

Solución En este caso $Q(x) = x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$. El último factor no tiene raíces reales, por lo que no se puede factorizar en un producto de factores reales lineales. Tenemos que

$$\frac{1}{x^3 + 1} = \frac{1}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 - x + 1}$$

$$= \frac{A(x^2 - x + 1) + B(x^2 + x) + C(x + 1)}{(x + 1)(x^2 - x + 1)}$$

$$\begin{aligned} A + B \phantom{{}+C} &= 0 \qquad &&\text{(coeficiente de } x^2\text{)} \\ -A + B + C &= 0 \qquad &&\text{(coeficiente de } x\text{)} \\ A \phantom{{}+B} + C &= 1 \qquad &&\text{(término constante)} \end{aligned}$$

Por tanto, $A = 1/3$, $B = -1/3$ y $C = 2/3$, con lo que

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x + 1} - \frac{1}{3}\int \frac{x - 2}{x^2 - x + 1}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x + 1| - \frac{1}{3}\int \frac{x - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \qquad \begin{array}{l}\text{Sea } u = x - 1/2 \\ du = dx\end{array}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x + 1| - \frac{1}{3}\int \frac{u}{u^2 + \frac{3}{4}}\,du + \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2 + \frac{3}{4}}\,du$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x + 1| - \frac{1}{6}\ln\left(u^2 + \frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x + 1| - \frac{1}{6}\ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x - 1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Sólo es necesario un refinamiento final del método de descomposición en fracciones simples. Si alguno de los factores lineales o cuadráticos de $Q(x)$ se *repite* (por ejemplo, m veces), entonces la descomposición en fracciones simples de $P(x)/Q(x)$ requiere m fracciones distintas correspondientes a ese factor. Los exponentes de los denominadores de esas fracciones van aumentando desde 1 hasta m, y los numeradores son todos constantes cuando el factor que se repite es lineal o lineales cuando el factor que se repite es cuadrático (*véase* el Teorema 1 posterior).

Ejemplo 7 Calcule $\int \frac{1}{x(x-1)^2}\,dx$.

Solución En este caso, la descomposición en fracciones simples adecuada es

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{A(x^2-2x+1)+B(x^2-x)+Cx}{x(x-1)^2}$$

Igualando los coeficientes de x^2, x y 1 en los denominadores de los dos miembros, se obtiene

$$\begin{aligned} A + B \qquad &= 0 \quad \text{(coeficiente de } x^2\text{)} \\ -2A - B + C &= 0 \quad \text{(coeficiente de } x\text{)} \\ A \qquad\quad &= 1 \quad \text{(término constante)} \end{aligned}$$

Por tanto, $A = 1$, $B = -1$, $C = 1$ y

$$\int \frac{1}{x(x-1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$$
$$= \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$
$$= \ln\left|\frac{x}{x-1}\right| - \frac{1}{x-1} + C$$

Ejemplo 8 Calcule $I = \int \frac{x^2+2}{4x^5+4x^3+x}\,dx$.

Solución El denominador se puede factorizar como $x(2x^2+1)^2$, por lo que la descomposición en fracciones simples apropiada es

$$\frac{x^2+2}{x(2x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{2x^2+1} + \frac{Dx+E}{(2x^2+1)^2}$$
$$= \frac{A(4x^4+4x^2+1)+B(2x^4+x^2)+C(2x^3+x)+Dx^2+Ex}{x(2x^2+1)^2}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} 4A + 2B \qquad\qquad &= 0 \quad \text{(coeficiente de } x^4\text{)} \\ 2C \qquad\quad &= 0 \quad \text{(coeficiente de } x^3\text{)} \\ 4A + B \qquad + D \quad &= 1 \quad \text{(coeficiente de } x^2\text{)} \\ C \qquad + E &= 0 \quad \text{(coeficiente de } x\text{)} \\ A \qquad\qquad\qquad &= 2 \quad \text{(término constante)} \end{aligned}$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtiene $A = 2$, $B = -4$, $C = 0$, $D = -3$ y $E = 0$.

$$I = 2\int \frac{dx}{x} - 4\int \frac{x\,dx}{2x^2+1} - 3\int \frac{x\,dx}{(2x^2+1)^2} \qquad \begin{aligned} &\text{Sea } u = 2x^2+1 \\ &du = 4x\,dx \end{aligned}$$
$$= 2\ln|x| - \int \frac{du}{u} - \frac{3}{4}\int \frac{du}{u^2}$$
$$= 2\ln|x| - \ln|u| + \frac{3}{4u} + C$$
$$= \ln\left(\frac{x^2}{2x^2+1}\right) + \frac{3}{4}\,\frac{1}{2x^2+1} + C$$

El teorema que sigue resume los diversos aspectos del método de descomposición en fracciones simples.

TEOREMA 1 **Descomposición en fracciones simples de funciones racionales**

Sean P y Q polinomios con coeficientes reales, y supongamos que el grado de P es menor que el grado de Q. Entonces:

(a) $Q(x)$ se puede descomponer en el producto de una constante K, factores lineales reales de la forma $x - a_i$, y factores reales cuadráticos de la forma $x^2 + b_i x + c_i$ que no tienen raíces reales. Los factores lineales y cuadráticos se pueden repetir:

$$Q(x) = K(x - a_1)^{m_1}(x - a_2)^{m_2} \cdots (x - a_j)^{m_j}(x^2 + b_1 x + c_1)^{n_1} \cdots (x^2 + b_k x + c_k)^{n_k}$$

El grado de Q es $m_1 + m_2 + \cdots + m_j + 2n_1 + 2n_2 + \cdots + 2n_k$.

(b) La función racional $P(x)/Q(x)$ se puede expresar como una suma de fracciones simples de la siguiente forma:

(i) Por cada factor $(x - a)^m$ de $Q(x)$, la descomposición contiene una suma de fracciones de la forma

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x-a)^m}$$

(ii) Por cada factor $(x^2 + bx + c)^n$ de $Q(x)$, la descomposición contiene una suma de fracciones de la forma

$$\frac{B_1 x + C_1}{x^2 + bx + x} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{B_n x + C_n}{(x^2 + bx + c)^n}$$

Las constantes $A_1, A_2, \ldots, A_m, B_1, B_2, \ldots, B_n, C_1, C_2, \ldots, C_n$ se pueden determinar sumando las fracciones de la descomposición e igualando los coeficientes de potencias iguales de x en el numerador de la suma con los de $P(x)$.

No proporcionaremos aquí una demostración de este teorema.

Nótese que el apartado (a) no nos indica cómo obtener los factores de $Q(x)$, sino que sólo nos dice la forma que tienen. Es necesario conocer los factores de Q antes de utilizar la descomposición en fracciones simples para integrar la función racional $P(x)/Q(x)$. La descomposición en fracciones simples se utiliza también en otras situaciones matemáticas, en concreto para resolver ciertos problemas en los que intervienen ecuaciones diferenciales.

Ejercicios 6.3

Calcule las integrales de los Ejercicios 1-34.

1. $\displaystyle\int \frac{2\,dx}{2x-3}$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{5-4x}$

3. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\pi x+2}$

4. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x-4}\,dx$

5. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-9}\,dx$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{5-x^2}$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2-x^2}$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{b^2-a^2x^2}$

9. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{x^2+x-2}$

10. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{3x^2+8x-3}$

11. $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^2+x}\,dx$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+9x}$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-6x+9x^2}$

14. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{2+6x+9x^2}$

15. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{6x-9x^2}\,dx$

16. $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{12+7x+x^2}\,dx$

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2-a^2)}$

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4-a^4}$

*19. $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{x^3 - a^3}$

20. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3 + 2x^2 + 2x}$

21. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3 - 4x^2 + 3x}$

22. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 1}{x^3 + 8}\,dx$

23. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2 - 1)^2}$

24. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x^2 - 1)(x^2 - 4)}$

25. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4 - 3x^3}$

26. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x^2 - x + 1)^2}$

*27. $\displaystyle\int \frac{t\,dt}{(t + 1)(t^2 + 1)^2}$

*28. $\displaystyle\int \frac{dt}{(t - 1)(t^2 - 1)^2}$

*29. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(3 + x^2)\sqrt{1 - x^2}}$

*30. $\displaystyle\int \frac{dx}{e^{2x} - 4e^x + 4}$

*31. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1 + x^2)^{3/2}}$

*32. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1 - x^2)^{3/2}}$

*33. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x^2 - 1)^{3/2}}$

*34. $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\cos\theta(1 + \operatorname{sen}\theta)}$

*35. Suponga que P y Q son polinomios tales que el grado de P es menor que el grado de Q. Si

$$Q(x) = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n)$$

siendo $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$, de forma que $P(x)/Q(x)$ tiene la siguiente descomposición en fracciones simples:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - a_n}$$

demuestre que

$$A_j = \frac{P(a_j)}{Q'(a_j)} \qquad (1 \leqslant j \leqslant n)$$

Esto proporciona otro método para calcular las constantes de la descomposición en fracciones simples si los factores del denominador son lineales y distintos.

6.4 Integración mediante programas de computador o tablas

Aunque toda persona que utilice el cálculo debe estar familiarizada con las técnicas básicas de integración, de la misma forma que cualquiera que use la aritmética debe estar familiarizado con las técnicas de multiplicación y división, la tecnología evoluciona rápidamente y, en muchos casos, evita la necesidad de calcular integrales largas y complicadas mediante dichas técnicas. De hecho, hoy en día existen varios programas de computador que pueden manejar expresiones matemáticas simbólicas (en vez de numéricas), y que pueden realizar, con poca o ninguna intervención por nuestra parte, los diversos pasos y cálculos de límites que se requieren para obtener y simplificar tanto derivadas como integrales. Se puede ahorrar mucho esfuerzo y tiempo haciendo que el computador calcule una integral complicada como

$$\int \frac{1 + x + x^2}{(x^4 - 1)(x^4 - 16)^2}\,dx$$

en vez de hacerla a mano utilizando descomposición en fracciones simples. Incluso sin la ayuda del computador, se pueden utilizar tablas de integrales estándar como las que aparecen al final de este libro como ayuda en el cálculo de integrales complicadas. No obstante, el uso de computadores o de tablas puede requerir que realicemos algunas simplificaciones previas a mano, y por supuesto puede requerir que seamos capaces de interpretar las respuestas que se obtienen. Presentaremos a continuación algunos ejemplos.

Uso de Maple para integración

Los programas matemáticos de computador son capaces de calcular simbólicamente integrales tanto indefinidas como definidas, y también proporcionar aproximaciones numéricas de aquellas integrales definidas que tengan valores numéricos. Los ejemplos que siguen muestran cómo utilizar Maple para calcular integrales.

Empezaremos calculando $\displaystyle\int 2^x\sqrt{1 + 4^x}\,dx$ y $\displaystyle\int_0^\pi 2^x\sqrt{1 + 4^x}\,dx$.