

está en la dirección de  $y$ , y cuyo momento dipolar es  $\mu$ . Este dipolo es el límite de un sistema formado por una fuente de fuerza  $m$  situada en  $(0, \ell/2)$  y un sumidero de fuerza  $m$  situado en  $(0, -\ell/2)$ , cuando  $\ell \rightarrow 0$  y  $m \rightarrow \infty$  de forma que  $m\ell = \mu$ .

- \*16. Demuestre que las curvas equipotenciales del dipolo bidimensional del Ejercicio 15 son circunferencias tangentes al eje  $x$  en el origen.
- \*17. Demuestre que las líneas de corriente (líneas de campo) del dipolo bidimensional de los Ejercicios 15 y 16 son circunferencias tangentes al eje  $y$  en el origen. *Sugerencia:* Es posible demostrarlo geoméricamente. Si se realiza planteando una ecuación diferencial, hay que encontrar el cambio de la variable dependiente

$$y = vx \quad \frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$$

adecuado para integrar la ecuación.

- \*18. Demuestre que el campo de velocidades de una fuente de líneas de fuerza  $2m$  se puede obtener integrando en todo el eje  $z$  el campo de velocidades (tridimensional) de una fuente puntual de fuerza  $m dz$  situada en  $(0, 0, z)$ . ¿Por qué corresponde la integral a una fuente lineal de fuerza  $2m$  en vez de fuerza  $m$ ? ¿Se puede obtener el potencial de la fuente lineal integrando los potenciales de las fuentes puntuales?

- 19. Demuestre que el gradiente de una función expresada en términos de coordenadas polares en el plano es

$$\nabla \phi(r, \theta) = \frac{\partial \phi}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Este ejercicio es una repetición del Ejercicio 16 en la Sección 12.7.

- 20. Utilice el resultado del Ejercicio 19 para demostrar que una condición necesaria para que el campo vectorial, expresado en coordenadas polares,

$$\mathbf{F}(r, \theta) = F_r(r, \theta)\hat{\mathbf{r}} + F_\theta(r, \theta)\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

sea conservativo es que

$$\frac{\partial F_r}{\partial \theta} - r \frac{\partial F_\theta}{\partial r} = F_\theta$$

- 21. Demuestre que  $\mathbf{F} = r \sin 2\theta \hat{\mathbf{r}} + r \cos 2\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$  es conservativo, y calcule un potencial del campo.
- 22. Calcule para qué valores de las constantes  $\alpha$  y  $\beta$  es conservativo el campo vectorial

$$\mathbf{F} = r^2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \alpha r^\beta \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Calcule un potencial de  $\mathbf{F}$  si  $\alpha$  y  $\beta$  tienen los valores calculados.

### 15.3 Integrales sobre curvas

La integral definida  $\int_a^b f(x) dx$  representa la *cantidad total* de una magnitud distribuida a lo largo del eje  $x$ , entre  $a$  y  $b$ , de acuerdo con un valor de *densidad lineal*  $f(x)$  de dicha magnitud en el punto  $x$ . La cantidad de magnitud en un intervalo *infinitesimal* de longitud  $dx$  situado en  $x$  es  $f(x) dx$ , y la integral realiza las sumas de esas contribuciones (o *elementos*) infinitesimales, para obtener la cantidad total de magnitud. De forma similar, las integrales  $\iint_D f(x, y) dA$  y  $\iiint_R f(x, y, z) dV$  representan las cantidades totales de magnitudes distribuidas en regiones  $D$  del plano y  $R$  del espacio tridimensional, en función de las densidades de *área* o de *volumen* de esas magnitudes.

Puede ocurrir que una magnitud esté distribuida con una densidad lineal especificada en una *curva* en el plano o del espacio tridimensional, o con una densidad de área especificada en una *superficie* del espacio tridimensional. En estos casos es necesario utilizar *integrales sobre curvas* o *integrales sobre superficies* para sumar las contribuciones elementales y calcular la magnitud total. En esta sección y en la siguiente trataremos las integrales sobre curvas, y en las Secciones 15.5 y 15.6 las integrales sobre superficies.

Sea  $C$  una curva paramétrica continua y acotada en  $\mathbb{R}^3$ . Recuérdese (de la Sección 11.1) que  $C$  es una *curva suave* si tiene una parametrización de la forma

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad t \text{ en el intervalo } I$$

con vector «velocidad»  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  continuo y distinto de cero. Denominaremos a  $C$  **arco suave** si es una curva suave con intervalo de parámetros *finito*  $I = [a, b]$ .

En la Sección 11.3 vimos cómo calcular la longitud de  $\mathcal{C}$  subdividiéndola en arcos de corta longitud, utilizando los puntos correspondientes a los valores del parámetro

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$$

sumando las longitudes  $|\Delta \mathbf{r}_i| = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}|$  de los segmentos lineales que unen estos puntos, y tomando el límite cuando la máxima distancia entre puntos adyacentes tiende a cero. La longitud se expresó como

$$\int_{\mathcal{C}} ds$$

y es un ejemplo especial de una integral sobre la curva  $\mathcal{C}$  cuyo integrando es 1.

La integral sobre una curva de una función general  $f(x, y, z)$  se puede definir de forma similar. Escogemos un punto  $(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$  en el  $i$ -ésimo subarco y formamos la suma de Riemann

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*, z_i^*) |\Delta \mathbf{r}_i|$$

Si esta suma tiene un límite cuando  $\max |\Delta \mathbf{r}_i| \rightarrow 0$ , independiente de la elección particular de los puntos  $(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$ , entonces denominaremos a este límite **integral** de  $f$  sobre la curva  $\mathcal{C}$  y la expresaremos como

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z) ds$$

Si  $\mathcal{C}$  es un arco suave y si  $f$  es continua en  $\mathcal{C}$ , entonces el límite existirá; su valor está dado por una integral definida de una función continua, como se demuestra en el párrafo siguiente. También existirá (para  $f$  continua) si  $\mathcal{C}$  es **continua por tramos**, formada por un número finito de arcos suaves unidos por sus extremos; en este caso la integral de  $f$  sobre la curva  $\mathcal{C}$  es la suma de las integrales de  $f$  sobre cada uno de los arcos suaves. Se pueden considerar también integrales impropias sobre curvas, cuando  $f$  tenga discontinuidades o cuando la longitud de una curva no sea finita.

## Cálculo de integrales sobre curvas

La longitud de  $\mathcal{C}$  se calculó expresando el elemento de longitud de arco  $ds = |d\mathbf{r}/dt| dt$  en función de una parametrización  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ , ( $a \leq t \leq b$ ) de la curva, e integrando desde  $t = a$  hasta  $t = b$ :

$$\text{longitud de } \mathcal{C} = \int_{\mathcal{C}} ds = \int_a^b \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt$$

Las integrales sobre curvas más generales se pueden calcular de forma similar:

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z) ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt$$

Por supuesto, toda la exposición anterior se aplica de la misma forma en el caso de integrales de funciones  $f(x, y)$  sobre curvas  $\mathcal{C}$  en el plano  $xy$ .

**Observación** Hay que tener en cuenta que el valor de la integral de una función  $f$  sobre la curva  $\mathcal{C}$  depende de  $f$  y de  $\mathcal{C}$ , pero no de la forma particular en la que  $\mathcal{C}$  este parametrizada. Si  $\mathbf{r} = \mathbf{r}^*(u)$ ,  $\alpha \leq u \leq \beta$ , es otra parametrización de la misma curva suave  $\mathcal{C}$ , entonces todo punto  $\mathbf{r}(t)$  de  $\mathcal{C}$  se puede expresar en función de la nueva parametrización como  $\mathbf{r}^*(u)$ , donde  $u$  depende de  $t$ :  $u = u(t)$ . Si  $\mathbf{r}^*(u)$  recorre  $\mathcal{C}$  en la misma dirección que  $\mathbf{r}(t)$ , entonces  $u(a) = \alpha$ ,  $u(b) = \beta$  y

$du/dt \geq 0$ ; si  $\mathbf{r}^*(u)$  recorre  $C$  en la dirección opuesta, entonces  $u(a) = \beta$ ,  $u(b) = \alpha$  y  $du/dt \leq 0$ . En cualquier caso,

$$\int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt = \int_a^b f(\mathbf{r}^*(u(t))) \left| \frac{d\mathbf{r}^*}{du} \frac{du}{dt} \right| dt = \int_\alpha^\beta f(\mathbf{r}^*(u)) \left| \frac{d\mathbf{r}^*}{du} \right| du$$

Por consiguiente, la integral sobre una curva es *independiente de la parametrización* de dicha curva  $C$ . El siguiente ejemplo ilustra este hecho.

**Ejemplo 1** Una circunferencia de radio  $a > 0$  está centrada en el origen del plano  $xy$ . Sea  $C$  la mitad de esta circunferencia que está en el semiplano  $y \geq 0$ . Utilice dos parametrizaciones diferentes de  $C$  para calcular el momento de  $C$  con respecto a  $y = 0$ .

**Solución** Se requiere calcular  $\int_C y ds$ .

$C$  se puede parametrizar como  $\mathbf{r} = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j}$ , ( $0 \leq t \leq \pi$ ). Por tanto,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -a \sin t \mathbf{i} + a \cos t \mathbf{j} \quad \text{y} \quad \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = a$$

y el momento de  $C$  con respecto a  $y = 0$  es

$$\int_C y ds = \int_0^\pi a \sin t a dt = -a^2 \cos t \Big|_0^\pi = 2a^2$$

$C$  se puede parametrizar también como  $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + \sqrt{a^2 - x^2} \mathbf{j}$ , ( $-a \leq x \leq a$ ) y en este caso tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dx} &= \mathbf{i} - \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \mathbf{j} \\ \left| \frac{d\mathbf{r}}{dx} \right| &= \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} \end{aligned}$$

Por tanto, el momento de  $C$  con respecto a  $y = 0$  es

$$\int_C y ds = \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = a \int_{-a}^a dx = 2a^2$$

Es reconfortante obtener el mismo resultado utilizando parametrizaciones diferentes. A diferencia de las integrales sobre curvas de campos vectoriales, que consideraremos en la sección siguiente, las integrales sobre curvas de campos escalares consideradas aquí no dependen de la dirección (orientación) de  $C$ . Las dos parametrizaciones de la semicircunferencia eran en direcciones opuestas, pero se obtuvo el mismo resultado.

Las integrales sobre curvas dan lugar frecuentemente a integrales definidas que son muy difíciles o imposibles de calcular sin utilizar técnicas numéricas. Sólo las curvas muy simples o aquellas preparadas para llegar a expresiones simples de  $ds$  se pueden resolver calculando de forma exacta las integrales sobre ellas.

**Ejemplo 2** Calcule el centroide de la hélice circular  $C$  dada por

$$\mathbf{r} = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + b t \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

**Solución** Como se observó en el Ejemplo 5 de la Sección 11.3, en esta hélice  $ds = \sqrt{a^2 + b^2} dt$ . Sobre la hélice se tiene  $z = bt$ , por lo que su momento con respecto a  $z = 0$  es

$$M_{z=0} = \int_C z ds = b \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{2\pi} t dt = 2\pi^2 b \sqrt{a^2 + b^2}$$

Como la longitud de la hélice es  $L = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$ , la componente  $z$  de su centroide es  $M_{z=0}/L = \pi b$ . El momento de la hélice respecto a  $x = 0$  es

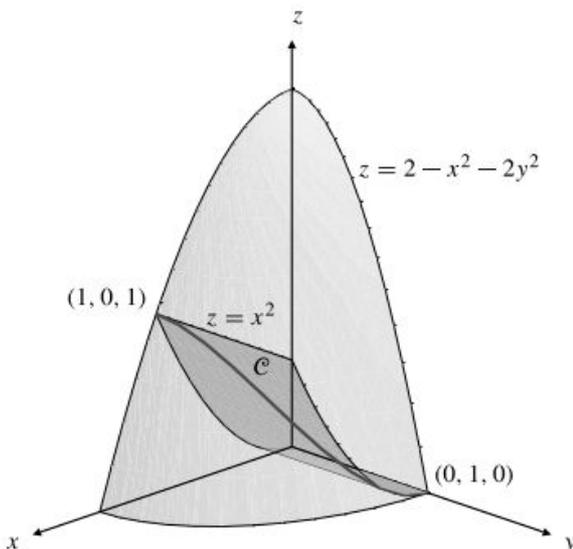
$$M_{x=0} = \int_c x ds = a\sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{2\pi} \cos t dt = 0$$

$$M_{y=0} = \int_c y ds = a\sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{2\pi} \sen t dt = 0$$

Por tanto, el centroide es  $(0, 0, \pi b)$ .

Algunas veces la curva sobre la que se calcula una integral se especifica como la intersección de dos superficies con ecuaciones dadas. Normalmente es necesario parametrizar la curva para calcular una integral sobre ella. Recuérdese de la Sección 11.3 que si una de las superficies es un cilindro paralelo a uno de los ejes coordenados, en general es más fácil empezar parametrizando ese cilindro (o también combinar las ecuaciones para eliminar una variable y obtener así el cilindro sobre el que está la curva).

**Ejemplo 3** Calcule la masa de un cable que recorre la parte del primer octante  $c$  de la curva intersección del paraboloides elíptico  $z = 2 - x^2 - 2y^2$  y el cilindro parabólico  $z = x^2$ , entre  $(0, 1, 0)$  y  $(1, 0, 1)$  (véase la Figura 15.7), si la densidad del cable en la posición  $(x, y, z)$  es  $\delta(x, y, z) = xy$ .



**Figura 15.7** La curva de intersección de  $z = x^2$  y  $z = 2 - x^2 - 2y^2$ .

**Solución** Necesitamos una parametrización adecuada de  $c$ . Como la curva  $c$  está en el cilindro  $z = x^2$ , y  $x$  va de 0 a 1, podemos hacer  $x = t$  y  $z = t^2$ . Por lo tanto,  $2y^2 = 2 - x^2 - z = 2 - 2t^2$ , por lo que  $y^2 = 1 - t^2$ . Como  $c$  está en el primer octante, se puede parametrizar como

$$x = t, \quad y = \sqrt{1 - t^2}, \quad z = t^2, \quad (0 \leq t \leq 1)$$

Entonces,  $dx/dt = 1$ ,  $dy/dt = -t/\sqrt{1 - t^2}$  y  $dz/dt = 2t$ , por lo que

$$ds = \sqrt{1 + \frac{t^2}{1 - t^2} + 4t^2} dt = \frac{\sqrt{1 + 4t^2 - 4t^4}}{\sqrt{1 - t^2}} dt$$

Por consiguiente, la masa del cable es

$$\begin{aligned}
 m &= \int_c xy \, ds = \int_0^1 t\sqrt{1-t^2} \frac{\sqrt{1+4t^2-4t^4}}{\sqrt{1-t^2}} \, dt \\
 &= \int_0^1 t\sqrt{1+4t^2-4t^4} \, dt \quad \text{Sea } u = t^2 \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{1+4u-4u^2} \, du \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{2-(2u-1)^2} \, du \quad \text{Sea } v = 2u-1 \\
 &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \sqrt{2-v^2} \, dv = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{2-v^2} \, dv \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi+2}{8}
 \end{aligned}$$

La integral final se calcula interpretándola como el área de parte un círculo. Se invita al lector a proporcionar los detalles. También se puede hacer mediante el cambio  $v = \sqrt{2} \sin w$ .

### Ejercicios 15.3

- Demuestre que la curva  $c$  dada por  $\mathbf{r} = a \cos t \mathbf{i} + a \sin^2 t \mathbf{j} + a \cos t \mathbf{k}$ , ( $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ ) está en la superficie de una esfera centrada en el origen. Calcule  $\int_c z \, ds$ .
- Sea  $c$  la hélice cónica cuyas ecuaciones paramétricas son  $x = t \cos t$ ,  $y = t \sin t$ ,  $z = t$ , ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ). Calcule  $\int_c z \, ds$ .
- Calcule la masa de un cable que sigue la curva  $\mathbf{r} = 3t \mathbf{i} + 3t^2 \mathbf{j} + 2t^3 \mathbf{k}$ , ( $0 \leq t \leq 1$ ) si la densidad en  $\mathbf{r}(t)$  es de  $1 + t$  g/unidad de longitud.
- Demuestre que la curva  $c$  del Ejemplo 3 admite también una parametrización de la forma  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $z = \cos^2 t$ , ( $0 \leq t \leq \pi/2$ ), y recalculé la masa del cable de dicho ejemplo utilizando esta parametrización.
- Calcule el momento de inercia respecto al eje  $z$  (es decir, el valor de  $\delta \int_c (x^2 + y^2) \, ds$ ) de un cable de densidad constante  $\delta$  que sigue la curva  $c$ :  $\mathbf{r} = e^t \cos t \mathbf{i} + e^t \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$ , desde  $t = 0$  hasta  $t = 2\pi$ .
- Calcule  $\int_c e^z \, ds$ , siendo  $c$  la curva del Ejercicio 5.
- Calcule  $\int_c x^2 \, ds$  sobre la recta de intersección de los planos  $x - y + z = 0$  y  $x + y + 2z = 0$ , desde el origen al punto  $(3, 1, -2)$ .
- Calcule  $\int_c \sqrt{1 + 4x^2 z^2} \, ds$ , siendo  $c$  la curva de intersección de las superficies  $x^2 + z^2 = 1$  y  $y = x^2$ .
- Calcule la masa y el centro de masa de un cable que tiene la forma de la hélice circular  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $z = t$ , ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ), si la densidad lineal del cable es  $\delta(x, y, z) = z$ .
- Repita el Ejercicio 9 para la parte de cable correspondiente a  $0 \leq t \leq \pi$ .
- Calcule el momento de inercia alrededor del eje  $y$ , es decir,  $\int_c (x^2 + z^2) \, ds$  de la curva  $x = e^t$ ,  $y = \sqrt{2}t$ ,  $z = e^{-t}$ , ( $0 \leq t \leq 1$ ).
- Calcule el centroide de la curva del Ejercicio 11.
- Calcule  $\int_c x \, ds$ , en la parte del primer octante de la curva de intersección del cilindro  $x^2 + y^2 = a^2$  y el plano  $z = x$ .
- Calcule  $\int_c z \, ds$  en la parte de la curva  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $x + y = 1$  con  $z \geq 0$ .

\*15. Calcule  $\int_c \frac{ds}{(2y^2 + 1)^{3/2}}$ , siendo  $c$  la parábola  $z^2 = x^2 + y^2$ ,  $x + z = 1$ . *Sugerencia:* Utilice  $y = t$  como parámetro.

16. Expresé como una integral definida, sin intentar calcularla, el valor de  $\int_c xyz ds$ , siendo  $c$  la curva  $y = x^2$ ,  $z = y^2$  desde  $(0, 0, 0)$  hasta  $(2, 4, 16)$ .

\*17. La función

$$E(k, \phi) = \int_0^\phi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt$$

se denomina **función integral elíptica de segunda clase**. La **integral elíptica completa** de segunda clase

es la función  $E(k) = E(k, \pi/2)$ . Expresé mediante estas funciones la longitud de una revolución completa de la hélice elíptica

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad z = ct$$

siendo  $0 < a < b$ . ¿Cuál es la longitud de la parte de la hélice que está entre  $t = 0$  y  $t = T$ , con  $0 < T < \pi/2$ ?

\*18. Calcule  $\int_L \frac{ds}{x^2 + y^2}$ , siendo  $L$  la recta de ecuación  $Ax + By = C$ , ( $C \neq 0$ ). *Sugerencia:* Utilice la simetría de la integral para sustituir la recta por otra con una ecuación más simple, pero que no cambie el valor de la integral.

## 15.4 Integrales sobre curvas de campos vectoriales

En física elemental el **trabajo** realizado por una fuerza constante de módulo  $F$  al mover un objeto una distancia  $d$  se define como el producto de  $F$  y  $d$ :  $W = Fd$ . Existe, sin embargo, una salvedad: se supone que la fuerza se realiza en la dirección de movimiento del objeto. Si el objeto se mueve en una dirección diferente a la de la fuerza (debido a otras fuerzas que actúan sobre él), entonces el trabajo realizado por una fuerza particular es el producto de la distancia recorrida por la componente de la fuerza en la dirección del movimiento. Por ejemplo, el trabajo realizado por la fuerza de la gravedad al deslizar un cajón de 10 kg una distancia de 5 m por una rampa con una inclinación de  $45^\circ$  respecto a la horizontal es  $W = 50g/\sqrt{2} \text{ N} \cdot \text{m}$  (siendo  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ), ya que la proyección escalar de la fuerza gravitatoria de  $10g \text{ N}$  sobre el cajón en la dirección de la rampa es  $10g/\sqrt{2} \text{ N}$ .

El trabajo realizado por una fuerza *variable*  $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ , que depende de forma continua de la posición, al mover un objeto por la curva suave  $c$ , es la integral de los *elementos de trabajo*  $dW$ . El elemento  $dW$  correspondiente al elemento de longitud de arco  $ds$  en la posición  $\mathbf{r}$  sobre  $c$  es  $ds$  veces la componente tangencial de la fuerza  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  sobre  $c$  en la dirección del movimiento (véase la Figura 15.8). Como  $\hat{\mathbf{T}} = d\mathbf{r}/ds$  es la tangente unidad a  $c$ ,

$$dW = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{T}} ds = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

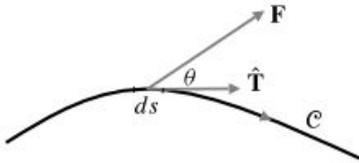
Por tanto, el trabajo total realizado por  $\mathbf{F}$  al mover un objeto sobre  $c$  es

$$W = \int_c \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}} ds = \int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_c F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

en general, si  $\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k}$  es un campo vectorial continuo, y  $c$  es una curva suave orientada, entonces la **integral sobre la curva  $c$  de la componente tangencial de  $\mathbf{F}$**  es

$$\begin{aligned} \int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_c \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}} ds \\ &= \int_c F_1(x, y, z) dx + F_2(x, y, z) dy + F_3(x, y, z) dz \end{aligned}$$

Esta integral se denomina a veces, de forma algo inapropiada, integral de  $\mathbf{F}$  sobre la curva  $c$  (no es una integral de  $\mathbf{F}$  sobre una curva, que debería dar como resultado un vector, sino una integral



**Figura 15.8**  $dW = |\mathbf{F}| \cos \theta \, ds$   
 $= \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}} \, ds$

sobre una curva de la *componente tangencial* de  $\mathbf{F}$ , que es un valor escalar). A diferencia de la integral sobre una curva considerada en la sección anterior, esta integral depende de la dirección de la orientación de  $c$ , y si se cambia la orientación de  $c$ , la integral cambia de signo.

Si  $c$  es una curva cerrada, la integral sobre dicha curva  $c$  de la componente tangencial de  $\mathbf{F}$  se denomina **circulación** de  $\mathbf{F}$  sobre  $c$ . El hecho de que la curva es cerrada se suele indicar mediante una pequeña circunferencia dibujada sobre el signo integral;

$$\oint_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \text{ indica la circulación de } \mathbf{F} \text{ sobre la curva cerrada } c$$

Como las integrales sobre curvas estudiadas en la sección anterior, una integral sobre una curva de un campo vectorial continuo se convierte en una integral definida ordinaria mediante una parametrización del camino de integración. Dado un arco suave  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ , ( $a \leq t \leq b$ ) tenemos

$$\begin{aligned} \int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt \\ &= \int_a^b \left[ F_1(x(t), y(t), z(t)) \frac{dx}{dt} + F_2(x(t), y(t), z(t)) \frac{dy}{dt} \right. \\ &\quad \left. + F_3(x(t), y(t), z(t)) \frac{dz}{dt} \right] dt \end{aligned}$$

Aunque este tipo de integral sobre curvas cambia de signo si se invierte el sentido de recorrido de  $c$ , por lo demás es independiente de la parametrización utilizada para  $c$ . Se cumple también que una integral sobre una curva suave por tramos es la suma de las integrales sobre cada uno de los arcos suaves que forman la curva completa.

**Ejemplo 1** Sea  $\mathbf{F}(x, y) = y^2\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$ . Calcule la integral

$$\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

desde  $(0, 0)$  hasta  $(1, 1)$  sobre las curvas:

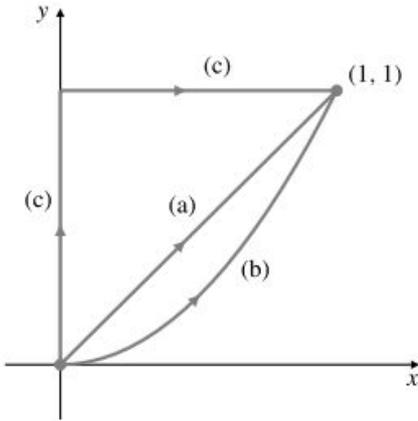
- (a) La recta  $y = x$ .
- (b) La curva  $y = x^2$ .
- (c) La curva suave por tramos formada por los segmentos de rectas desde  $(0, 0)$  hasta  $(0, 1)$  y desde  $(0, 1)$  hasta  $(1, 1)$ .

**Solución** La Figura 15.9 muestra los tres caminos. El camino recto (a) se puede parametrizar como  $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Por tanto,  $d\mathbf{r} = dt\mathbf{i} + dt\mathbf{j}$  y

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (t^2\mathbf{i} + 2t^2\mathbf{j}) \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{j}) dt = 3t^2 dt$$

Por tanto,

$$\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 3t^2 dt = t^3 \Big|_0^1 = 1$$


**Figura 15.9** Tres caminos desde  $(0, 0)$  hasta  $(1, 1)$ .

El camino parabólico (b) se puede parametrizar como  $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , por lo que  $d\mathbf{r} = dt\mathbf{i} + 2t dt\mathbf{j}$ . Entonces,

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (t^4\mathbf{i} + 2t^3\mathbf{j}) \cdot (dt\mathbf{i} + 2t dt\mathbf{j}) = 5t^4 dt$$

y

$$\int_e \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 5t^4 dt = t^5 \Big|_0^1 = 1$$

El tercer camino (c) está formado por dos segmentos, y parametrizaremos cada uno de ellos por separado. Utilizaremos  $y$  como parámetro del segmento vertical (con  $x = 0$  y  $dx = 0$ ), y  $x$  como parámetro del segmento horizontal (con  $y = 1$  y  $dy = 0$ ):

$$\begin{aligned} \int_e \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_e y^2 dx + 2xy dy \\ &= \int_0^1 (0) dy + \int_0^1 (1) dx = 1 \end{aligned}$$

En vista de estos resultados, podríamos preguntarnos si  $\int_e \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  vale lo mismo siguiendo *cualquier* camino desde  $(0, 0)$  hasta  $(1, 1)$ .

**Ejemplo 2** Sea  $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ . Calcule  $\int_e \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  desde  $(1, 0)$  hasta  $(0, -1)$  por:

- El segmento recto que une esos puntos.
- Los tres cuartos de circunferencia de radio unidad centrada en el origen que se recorre en sentido contrario al de las agujas del reloj.

**Solución** La Figura 15.10 muestra los dos caminos. El camino recto (a) se puede parametrizar como

$$\mathbf{r} = (1 - t)\mathbf{i} - t\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

Por tanto,  $d\mathbf{r} = -dt\mathbf{i} - dt\mathbf{j}$  y

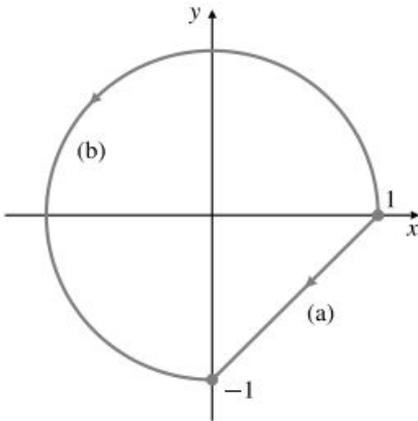
$$\int_e \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 ((-t)(-dt) - (1-t)(-dt)) = \int_0^1 dt = 1$$

El camino circular (b) se puede parametrizar como

$$\mathbf{r} = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$$

por lo que  $d\mathbf{r} = -\sin t dt\mathbf{i} + \cos t dt\mathbf{j}$ . Entonces,

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\sin^2 t dt - \cos^2 t dt = -dt$$



**Figura 15.10** Dos caminos desde (1, 0) hasta (0, -1).

y tenemos que

$$\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_0^{3\pi/2} dt = -\frac{3\pi}{2}$$

En este caso la integral sobre la curva depende del camino seguido desde (1, 0) hasta (0, -1) por el que se realiza la integral.

Algunos lectores habrán notado que en el Ejemplo 1 anterior el campo vectorial  $\mathbf{F}$  es conservativo, mientras que en el Ejemplo 2 no lo es. El Teorema 1 posterior confirma la relación existente entre *independencia del camino* en una integral sobre una curva de la componente tangencial de un campo vectorial y la existencia de una función potencial asociada a dicho campo. Este teorema y los posteriores requieren suposiciones específicas sobre la naturaleza del dominio del campo vectorial  $\mathbf{F}$ , por lo que necesitamos formular algunas definiciones topológicas.

### Dominios conexos y simplemente conexos

Recordemos que un conjunto  $S$  en el plano (en el espacio tridimensional) es abierto si todo punto de  $S$  en el centro de un disco (o bola) con radio positivo suficientemente pequeño está contenido en  $S$ . Si  $S$  es abierto y  $B$  es un conjunto (que puede ser vacío) de puntos en la frontera de  $S$ , entonces el conjunto  $D = S \cup B$  se denomina **dominio**. Un dominio no puede contener puntos aislados. Puede ser cerrado, pero debe tener puntos interiores cerca de cualquier punto frontera (véase la Sección 10.1, donde se presentan los conjuntos abiertos y cerrados, y los puntos interiores y frontera).

#### DEFINICIÓN 2

Se dice que un dominio  $D$  es **conexo** si toda pareja de puntos  $P$  y  $Q$  pertenecientes a  $D$  se puede unir mediante una curva suave por tramos que está contenida en  $D$ .

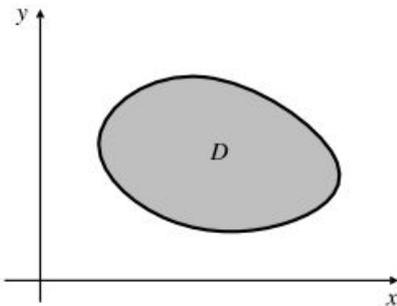
Por ejemplo, el conjunto de puntos  $(x, y)$  del plano que cumplen  $x > 0$ ,  $y > 0$  y  $x^2 + y^2 \leq 4$  es un dominio conexo, pero el conjunto de puntos que cumplen  $|x| > 1$  no es conexo (no hay un camino desde  $(-2, 0)$  hasta  $(2, 0)$  que esté completamente contenido en  $|x| > 1$ ). El conjunto de puntos  $(x, y, z)$  en el espacio tridimensional que cumplen  $0 < z < 1$  es un dominio conexo, pero el conjunto de puntos que cumplen  $z \neq 0$  no lo es.

Se dice que una curva cerrada es **simple** si no tiene intersecciones consigo misma excepto en su punto de comienzo y de final (por ejemplo, una circunferencia es una curva cerrada simple). Imaginemos una banda elástica que se adapta a una curva de este tipo. Si la banda es infinitamente compresible, se puede contraer hasta un único punto.

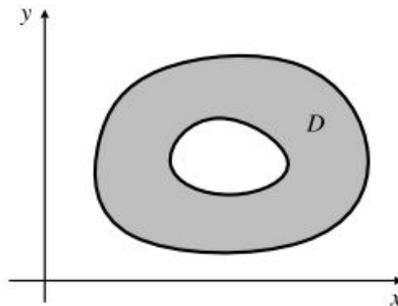
**DEFINICIÓN 3**

Un **dominio  $D$  simplemente conexo** es un dominio conexo en el que toda *curva cerrada simple* se puede contraer hasta un solo punto de  $D$  sin que en ningún momento ninguna parte de dicha curva se salga de  $D$ .

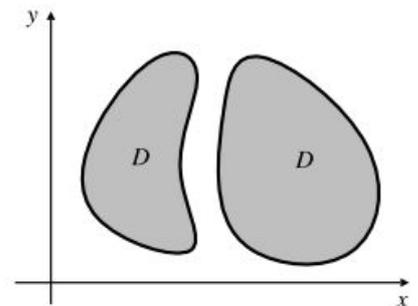
La Figura 15.11 muestra un dominio simplemente conexo en el plano. La Figura 15.12 muestra un dominio conexo, pero no simplemente conexo (una curva cerrada que rodee al hueco no se puede contraer en un punto sin salirse de  $D$ ). El dominio de la Figura 15.13 es no conexo. Está formado por dos *componentes*, y los puntos de componentes diferentes no se pueden unir por una curva contenida completamente en  $D$ .



**Figura 15.11** Un dominio simplemente conexo,



**Figura 15.12** Un dominio conexo, pero no simplemente conexo.



**Figura 15.13** Un dominio no conexo.

En el plano, un dominio  $D$  simplemente conexo no puede contener huecos, ni siquiera un hueco formado por un único punto. El interior de toda curva cerrada que no se corte a sí misma en un dominio  $D$  de este tipo pertenece a dicho dominio. Por ejemplo, el dominio de la función  $1/(x^2 + y^2)$  no es simplemente conexo porque el origen no le pertenece (el origen es un «hueco» en ese dominio). En el espacio tridimensional, un dominio simplemente conexo puede tener huecos. El conjunto de todos los puntos de  $\mathbb{R}^3$  diferentes del origen es simplemente conexo, como también lo es el exterior de una bola. Pero el conjunto de los puntos de  $\mathbb{R}^3$  que cumplen  $x^2 + y^2 > 0$  no es simplemente conexo. Tampoco lo es el interior de un dónut (un *toro*). En general, las condiciones siguientes caracterizan dominios  $D$  simplemente conexos:

- (i) Cualquier curva cerrada simple en  $D$  es la frontera de una «superficie» contenida en  $D$ .
- (ii) Si  $c_1$  y  $c_2$  son dos curvas en  $D$  con los mismos extremos, entonces  $c_1$  se puede deformar de forma continua hasta hacerla coincidir con  $c_2$ , permaneciendo en  $D$  durante todo el proceso de deformación.

## Independencia del camino

### TEOREMA 1 Independencia del camino

Sea  $D$  un dominio abierto y conexo, y sea  $\mathbf{F}$  un campo vectorial suave definido en  $D$ . Entonces las siguientes afirmaciones son *equivalentes* en el sentido de que, si una de ellas es cierta, también lo son las otras dos:

- (a)  $\mathbf{F}$  es conservativo en  $D$ .
- (b)  $\oint_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$  para toda curva  $c$  cerrada y suave en  $D$ .

(c) Dados dos puntos cualesquiera  $P_0$  y  $P_1$ , pertenecientes a  $D$ ,  $\int_e \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  tiene el mismo valor para todas las curvas suaves por tramos en  $D$  que empiecen en  $P_0$  y terminen en  $P_1$ .

**DEMOSTRACIÓN** Demostraremos que (a) implica (b), que (b) implica (c), y que (c) implica (a). Eso querrá decir entonces que cada una de ellas implica las otras dos.

Supongamos que (a) es cierta. Entonces  $\mathbf{F} = \nabla\phi$  para alguna función potencial escalar  $\phi$  definida en  $D$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\phi}{\partial z} dz = d\phi \end{aligned}$$

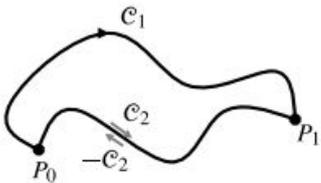
Si  $c$  es cualquier curva cerrada y suave por tramos, parametrizada, por ejemplo, como  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ , ( $a \leq t \leq b$ ), entonces  $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$  y

$$\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \frac{d\phi(\mathbf{r}(t))}{dt} dt = \phi(\mathbf{r}(b)) - \phi(\mathbf{r}(a)) = 0$$

Por tanto, (a) implica (b).

Supongamos ahora que (b) es cierta. Sean  $P_0$  y  $P_1$  dos puntos en  $D$ , y sean  $c_1$  y  $c_2$  dos curvas suaves por tramos en  $D$  que van desde  $P_0$  hasta  $P_1$ . Sea  $c = c_1 - c_2$  la curva cerrada que va desde  $P_0$  hasta  $P_1$  por  $c_1$  y vuelve después a  $P_0$  por  $c_2$  en la dirección opuesta (véase la Figura 15.14). Como estamos suponiendo que (b) es cierta, tenemos que

$$0 = \oint_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{c_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{c_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$



**Figura 15.14**  $c_1 - c_2 = c_1 + (-c_2)$  es una curva cerrada.

Por tanto,

$$\int_{c_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{c_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

y hemos demostrado que (b) implica (c).

Finalmente, supongamos que (c) es cierta. Sea  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  un punto fijo en el dominio  $D$ , y sea  $P = (x, y, z)$  un punto arbitrario en dicho dominio. Definamos una función  $\phi$  como

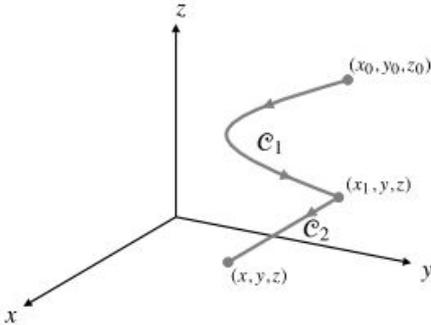
$$\phi(x, y, z) = \int_e \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

siendo  $e$  alguna curva suave por tramos en  $D$  desde  $P_0$  hasta  $P$  (bajo las hipótesis del teorema tal curva existe y, como estamos suponiendo que (c) es cierta, la integral tiene el mismo valor en todas esas curvas; por lo tanto,  $\phi$  está bien definida en  $D$ ). Demostraremos que  $\nabla\phi = \mathbf{F}$ , y por tanto que  $\mathbf{F}$  es conservativo y tiene potencial  $\phi$ .

Es suficiente demostrar que  $\partial\phi/\partial x = F_1(x, y, z)$ , ya que las otras dos componentes se tratan de forma similar. Como  $D$  es abierto, existe una bola de radio positivo centrada en  $P$  y contenida en  $D$ . Seleccionemos un punto de esta bola  $(x_1, y, z)$  con  $x_1 < x$ . Nótese que la recta que va de este punto a  $P$  es paralela al eje  $x$ . Como somos libres de elegir la curva  $e$

en la integral de definición de  $\phi$ , elegiremos una formada por dos segmentos:  $c_1$ , que es suave por tramos, y va de  $(x_0, y_0, z_0)$  a  $(x_1, y, z)$ , y  $c_2$ , un segmento de recta desde  $(x_1, y, z)$  hasta  $(x, y, z)$  (véase la Figura 15.15). Entonces,

$$\phi(x, y, z) = \int_{c_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{c_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$



**Figura 15.15** Un camino especial de  $P_0$  a  $P_1$ .

La primera integral no depende de  $x$ , por lo que su derivada con respecto a  $x$  es cero. El camino recto de la segunda integral se parametriza como  $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ , con  $x_1 \leq t \leq x$ , por lo que  $d\mathbf{r} = dt\mathbf{i}$ . Por el Teorema Fundamental del Cálculo,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{c_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_1}^x F_1(t, y, z) dt = F_1(x, y, z)$$

que es lo que queríamos demostrar. Por tanto,  $\mathbf{F} = \nabla\phi$  es conservativo, y (c) implica (a).

**Observación** Es muy fácil calcular la integral sobre una curva  $c$  de la componente tangencial de un campo vectorial *conservativo* cuando se conoce un potencial de  $\mathbf{F}$ . Si  $\mathbf{F} = \nabla\phi$  y  $c$  va desde  $P_0$  a  $P_1$ , entonces

$$\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_c d\phi = \phi(P_1) - \phi(P_0)$$

Como se indicó anteriormente, el valor de la integral depende sólo de los extremos de  $c$ .

**Observación** En el capítulo siguiente añadiremos otra condición a la lista de condiciones equivalentes de Teorema 1, suponiendo que el dominio  $D$  es *simplemente conexo*. Dado un dominio de este tipo, cada una de las tres condiciones del teorema equivale a

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

Ya sabemos que estas ecuaciones se cumplen en un dominio donde  $\mathbf{F}$  sea conservativo. El Teorema 4 de la Sección 16.2 indica que, si se cumplen las tres ecuaciones anteriores en un dominio simplemente conexo, entonces  $\mathbf{F}$  es conservativo en dicho dominio.

**Ejemplo 3** Indique para qué valor de las constantes  $A$  y  $B$  es conservativo el campo vectorial

$$\mathbf{F} = Ax \operatorname{sen}(\pi y)\mathbf{i} + (x^2 \cos(\pi y) + Bye^{-z})\mathbf{j} + y^2 e^{-z}\mathbf{k}$$

Para ese valor de  $A$  y  $B$ , calcule  $\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , siendo  $c$ :

- La curva  $\mathbf{r} = \cos t\mathbf{i} + \sin 2t\mathbf{j} + \sin^2 t\mathbf{k}$ , ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ).
- La curva de intersección del paraboloides  $z = x^2 + 4y^2$  y el plano  $z = 3x - 2y$ , de  $(0, 0, 0)$  a  $(1, 1/2, 2)$ .

**Solución**  $\mathbf{F}$  no puede ser conservativo a menos que

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

es decir, a menos que

$$A\pi x \cos(\pi y) = 2x \cos(\pi y), \quad 0 = 0 \quad \text{y} \quad -Bye^{-z} = 2ye^{-z}$$

Por tanto, se requiere que  $A = 2/\pi$  y  $B = -2$ . En este caso, se puede comprobar fácilmente que

$$\mathbf{F} = \nabla\phi, \quad \text{siendo } \phi(x, y, z) = \frac{x^2 \operatorname{sen}(\pi y)}{\pi} - y^2 e^{-z}$$

Para la curva (a), tenemos que  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} = \mathbf{r}(2\pi)$ , por lo que se trata de una curva cerrada, y

$$\int_e \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_e \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = 0$$

Como la curva (b) empieza en  $(0, 0, 0)$  y termina en  $(1, 1/2, 2)$ , tenemos que

$$\int_e \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \left( \frac{x^2 \operatorname{sen}(\pi y)}{\pi} - y^2 e^{-z} \right) \Big|_{(0,0,0)}^{(1,1/2,2)} = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{4e^2}$$

El ejemplo que sigue muestra cómo explotar el hecho de que

$$\int_e \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

se calcula fácilmente en el caso de  $\mathbf{F}$  conservativo incluso si el campo  $\mathbf{F}$  que deseamos integrar no es conservativo.

**Ejemplo 4** Calcule  $I = \oint_e (e^x \operatorname{sen} y + 3y) dx + (e^x \cos y + 2x - 2y) dy$  en sentido contrario al de las agujas del reloj por la elipse  $4x^2 + y^2 = 4$ .

**Solución**  $I = \oint_e \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , siendo  $\mathbf{F}$  el campo vectorial

$$\mathbf{F} = (e^x \operatorname{sen} y + 3y) \mathbf{i} + (e^x \cos y + 2x - 2y) \mathbf{j}$$

Este campo vectorial no es conservativo, pero lo sería si el término  $3y$  en  $F_1$  fuera  $2y$ ; concretamente, si

$$\phi(x, y) = e^x \operatorname{sen} y + 2xy - y^2$$

entonces  $\mathbf{F} = \nabla\phi + y\mathbf{i}$ , la suma de una parte conservativa y una parte no conservativa. Por tanto, tenemos

$$I = \oint_e \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} + \oint_e y dx$$

La primera integral es cero ya que  $\nabla\phi$  es conservativo y  $e$  es una curva cerrada. Para resolver la segunda integral, parametrizamos  $e$  como  $x = \cos t$ ,  $y = 2 \operatorname{sen} t$ ,  $(0 \leq t \leq 2\pi)$ , con lo que se obtiene

$$I = \oint_e y dx = -2 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t dt = -2 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt = -2\pi$$

## Ejercicios 15.4

En los Ejercicios 1-6, calcule la integral de la componente tangencial de los campos vectoriales dados sobre las curvas dadas.

1.  $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} - x^2\mathbf{j}$  sobre  $y = x^2$ , desde  $(0, 0)$  hasta  $(1, 1)$ .
2.  $\mathbf{F}(x, y) = \cos x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$  sobre  $y = \sin x$ , desde  $(0, 0)$  hasta  $(\pi, 0)$ .
3.  $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} - x\mathbf{k}$  sobre la recta que va desde  $(0, 0, 0)$  hasta  $(1, 1, 1)$ .
4.  $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} - y\mathbf{j} + 2x\mathbf{k}$  sobre la curva  $x = t, y = t^2, z = t^3$ , desde  $(0, 0, 0)$  hasta  $(1, 1, 1)$ .
5.  $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$  desde  $(-1, 0, 0)$  hasta  $(1, 0, 0)$ , sobre las dos direcciones de la curva de intersección del cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  y el plano  $z = y$ .
6.  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x - z)\mathbf{i} + (y - z)\mathbf{j} - (x + y)\mathbf{k}$  sobre el camino poligonal que va desde  $(0, 0, 0)$ , pasando por  $(1, 0, 0)$  y por  $(1, 1, 0)$ , hasta  $(1, 1, 1)$ .
7. Calcule el trabajo realizado por el campo vectorial

$$\mathbf{F} = (x + y)\mathbf{i} + (x - z)\mathbf{j} + (z - y)\mathbf{k}$$

al mover un objeto desde  $(1, 0, -1)$  hasta  $(0, -2, 3)$  siguiendo una curva suave.

8. Calcule  $\oint_C x^2y^2 dx + x^3y dy$  sobre el cuadrado cuyos vértices son  $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$  y  $(0, 1)$  en sentido contrario al de las agujas del reloj.
9. Calcule 
$$\int_C e^{x+y} \sin(y+z) dx + e^{x+y} (\sin(y+z) + \cos(y+z)) dy + e^{x+y} \cos(y+z) dz$$
 sobre el segmento recto que va desde  $(0, 0, 0)$  hasta  $(1, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ .
10. El campo  $\mathbf{F} = (axy + z)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + (bx + 2z)\mathbf{k}$  es conservativo. Calcule  $a$  y  $b$ , y un potencial de  $\mathbf{F}$ . Calcule también  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , siendo  $C$  la curva, desde  $(1, 1, 0)$  hasta  $(0, 0, 3)$ , que es la intersección de las superficies  $2x + y + z = 3$  y  $9x^2 + 9y^2 + 2z^2 = 18$ , en el octante  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ .
11. Determine los valores de  $A$  y  $B$  para los que el campo vectorial

$$\mathbf{F} = Ax \ln z \mathbf{i} + By^2 z \mathbf{j} + \left( \frac{x^2}{z} + y^3 \right) \mathbf{k}$$

es conservativo. Si  $C$  es la recta que va desde  $(1, 1, 1)$  hasta  $(2, 1, 2)$ , calcule

$$\int_C 2x \ln z dx + 2y^2 z dy + y^3 dz$$

12. Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerza  $\mathbf{F} = (y^2 \cos x + z^3)\mathbf{i} + (2y \sin x - 4)\mathbf{j} + (3xz^2 + 2)\mathbf{k}$  al mover una partícula por la curva  $x = \sin^{-1} t, y = 1 - 2t, z = 3t - 1, (0 \leq t \leq 1)$ .
13. Si  $C$  es la intersección de  $z = \ln(1 + x)$  e  $y = x$ , desde  $(0, 0, 0)$  hasta  $(1, 1, \ln 2)$ , calcule 
$$\int_C (2x \sin(\pi y) - e^z) dx + (\pi x^2 \cos(\pi y) - 3e^z) dy - xe^z dz$$
14. ¿Es un dominio alguno de los conjuntos siguientes? ¿Es un dominio simplemente conexo?
  - (a) El conjunto de puntos  $(x, y)$  del plano tales que  $x > 0$  e  $y \geq 0$ .
  - (b) El conjunto de puntos  $(x, y)$  del plano tales que  $x = 0$  e  $y \geq 0$ .
  - (c) El conjunto de puntos  $(x, y)$  del plano tales que  $x \neq 0$  e  $y > 0$ .
  - (d) El conjunto de puntos  $(x, y, z)$  del espacio tridimensional tales que  $x^2 > 1$ .
  - (e) El conjunto de puntos  $(x, y, z)$  del espacio tridimensional tales que  $x^2 + y^2 > 1$ .
  - (f) El conjunto de puntos  $(x, y, z)$  del espacio tridimensional tales que  $x^2 + y^2 + z^2 > 1$ .

En los Ejercicios 15-19, calcule las integrales sobre curvas cerradas

$$(a) \oint_C x dy, \quad (b) \oint_C y dx$$

siguiendo las curvas dadas, todas en sentido contrario al de las agujas del reloj.

15. La circunferencia  $x^2 + y^2 = a^2$ .
16. La elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .
17. La frontera del semidisco  $x^2 + y^2 \leq a^2, y \geq 0$ .
18. La frontera del cuadrado cuyos vértices son  $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$  y  $(0, 1)$ .
19. El triángulo cuyos vértices son  $(0, 0), (a, 0)$  y  $(0, b)$ .
20. Sobre la base de los resultados obtenidos en los Ejercicios 15-19, plantee cuáles pueden ser los valores de las integrales sobre curvas cerradas

$$(a) \oint_C x dy, \quad (b) \oint_C y dx$$

para toda curva cerrada que no se corta a sí misma en el plano  $xy$ . Demuestre su respuesta en el caso de que limite una región del plano que sea simple en  $x$  y en  $y$ . (Véase la Sección 14.2)

21. Si  $f$  y  $g$  son campos escalares con derivadas parciales primeras continuas en un dominio conexo  $D$ , demuestre que

$$\int_e f \nabla g \cdot d\mathbf{r} + \int_e g \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(Q)g(Q) - f(P)g(P)$$

para toda curva suave por tramos en  $D$  desde  $P$  hasta  $Q$ .

22. Calcule

$$\frac{1}{2\pi} \oint_e \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$$

- (a) Sobre la circunferencia  $x^2 + y^2 = a^2$  en sentido contrario al de las agujas del reloj.
  - (b) Sobre el cuadrado de vértices  $(-1, -1)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(1, 1)$  y  $(1, -1)$ , en el sentido de las agujas del reloj.
  - (c) Sobre la frontera de la región  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ ,  $y \geq 0$  en sentido contrario al de las agujas del reloj.
23. Revise el Ejemplo 5 de la Sección 15.2, en el que se demostró que

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

para todo  $(x, y) \neq (0, 0)$ . ¿Por qué este resultado, junto con el del Ejercicio 22, no contradicen la observación que se presenta tras demostrar el Teorema 1?

\*24. (**Número de vueltas**) Sea  $c$  una curva suave por tramos en el plano  $xy$  que no pasa por el origen. Sea  $\theta = \theta(x, y)$  la coordenada polar angular del punto  $P = (x, y)$ , donde  $c$  no está limitado a un intervalo de longitud  $2\pi$ , sino que varía de forma continua a medida que  $P$  se mueve desde un extremo de  $c$  al otro. Como en el Ejemplo 5 de la Sección 15.2, sucede que

$$\nabla \theta = -\frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j}$$

Si además  $c$  es una curva cerrada, demuestre que

$$w(c) = \frac{1}{2\pi} \oint_e \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$$

tiene un valor entero,  $w$ , que se denomina **número de vueltas** de  $c$  alrededor del origen.

## 15.5 Superficies e integrales de superficie

Esta sección y la siguiente están dedicadas a las integrales de funciones definidas sobre superficies en el espacio tridimensional. Antes de empezar, es necesario precisar más el significado del término «superficie». Hasta ahora hemos considerado las superficies de una forma intuitiva, bien como gráficas de funciones  $f(x, y)$  o bien como gráficas de ecuaciones  $f(x, y, z) = 0$ .

Una curva suave es un objeto *unidimensional*, porque los puntos sobre ella se sitúan proporcionando *una coordenada* (por ejemplo, la distancia a uno de sus extremos). Por tanto, la curva se puede definir como el rango de función vectorial de una variable real. Una superficie es un objeto *bidimensional*. Los puntos sobre ella se localizan utilizando *dos coordenadas*, y se puede definir como el rango de una función vectorial de dos variables reales. Denominaremos a ciertas funciones de ese tipo superficies paramétricas.

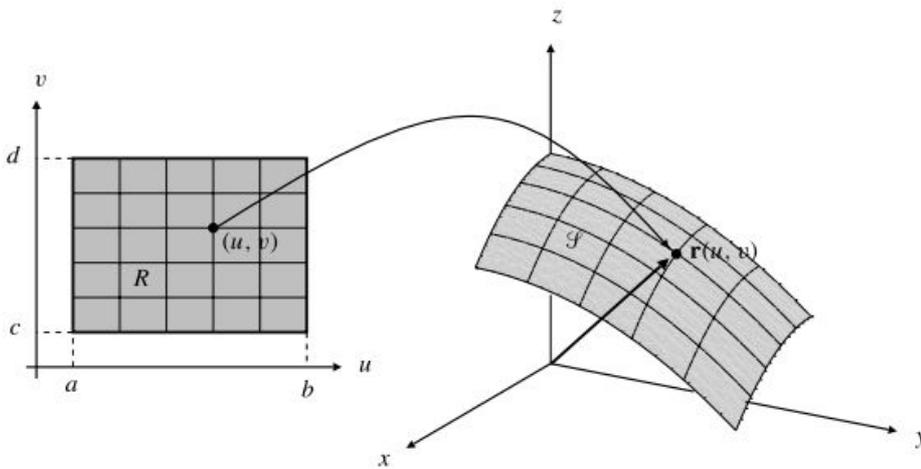
### Superficies paramétricas

#### DEFINICIÓN 4

Una **superficie paramétrica** en el espacio tridimensional es una función continua  $\mathbf{r}$  definida en algún rectángulo  $R$  dado por  $a \leq u \leq b$ ,  $c \leq v \leq d$  en el plano  $uv$  y cuyos valores en el espacio tridimensional están dados por

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v) \mathbf{i} + y(u, v) \mathbf{j} + z(u, v) \mathbf{k}, \quad (u, v) \text{ en } R$$

Realmente, es el *rango* de la función  $\mathbf{r}(u, v)$  la superficie paramétrica. Es un conjunto  $\mathcal{S}$  de puntos  $(x, y, z)$  en el espacio tridimensional cuyos vectores de posición son los vectores  $\mathbf{r}(u, v)$ , con  $(u, v)$  en  $R$  (véase la Figura 15.16). Si  $\mathbf{r}$  es uno a uno, entonces la superficie no se corta a sí misma. En este caso  $\mathbf{r}$  transforma la frontera del rectángulo  $R$  (los cuatro bordes) en una curva


**Figura 15.16**

Una superficie paramétrica  $\mathcal{S}$  definida en una región  $R$  de los parámetros. Las *curvas de contorno* de  $\mathcal{S}$  corresponden a la rejilla en  $R$ .

en el espacio tridimensional, que denominaremos **frontera de la superficie paramétrica**. El requisito de que  $R$  sea un rectángulo es sólo a efectos de simplificar la presentación. En realidad puede ser cualquier conjunto conexo, cerrado y acotado en el plano  $uv$ , con área bien definida, y formado por un conjunto abierto junto con sus puntos frontera. Así, consideraremos por ejemplo superficies paramétricas sobre discos cerrados, triángulos u otros dominios en el plano  $uv$ . Como es el rango de una función continua definida en un conjunto cerrado y acotado, una superficie paramétrica está siempre acotada en el espacio tridimensional.

**Ejemplo 1** La gráfica de  $z = f(x, y)$ , donde el dominio de  $f$  es el rectángulo  $R$  se puede representar como la superficie paramétrica

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + f(u, v)\mathbf{k}$$

con  $(u, v)$  en  $R$ . Sus ecuaciones paramétricas escalares son

$$x = u, \quad y = v, \quad z = f(u, v), \quad (u, v) \text{ en } R$$

Para estas gráficas es conveniente identificar el plano  $uv$  con el plano  $xy$  y expresar la ecuación de la superficie en la forma

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k}, \quad (x, y) \text{ en } R$$

**Ejemplo 2** Describa la superficie

$$\mathbf{r} = a \cos u \sin v \mathbf{i} + a \sin u \sin v \mathbf{j} + a \cos v \mathbf{k}, \quad (0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq \pi/2)$$

siendo  $a > 0$ . ¿Cuál es su frontera?

**Solución** Obsérvese que si  $x = a \cos u \sin v$ ,  $y = a \sin u \sin v$  y  $z = a \cos v$ , entonces  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ . Así, la superficie paramétrica dada está sobre una esfera de radio  $a$  centrada en el origen (obsérvese que  $u$  y  $v$  son las coordenadas esféricas de  $\theta$  y  $\phi$  sobre la esfera). Las restricciones sobre  $u$  y  $v$  permiten que  $(x, y)$  sea cualquier punto del disco  $x^2 + y^2 \leq a^2$ , pero fuerzan a que  $z \geq 0$ . Por tanto, la superficie es la *mitad superior* de la esfera. La parametrización dada es uno a uno en el rectángulo abierto  $0 < u < 2\pi$ ,  $0 < v < \pi/2$ , pero no en el rectángulo cerrado, ya que los bordes  $u = 0$  y  $u = 2\pi$  se transforman en los mismos puntos, y el borde  $v = 0$  colapsa a un solo punto. La frontera de la superficie está en la circunferencia  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $z = 0$ , y corresponde al borde  $v = \pi/2$  del rectángulo.

**Observación** Las parametrizaciones de superficies que son uno a uno sólo en el interior del dominio de parámetros  $R$  son todavía representaciones razonables de la superficie. Sin embargo, como en el Ejemplo 2, la frontera de la superficie se puede obtener a partir sólo de parte de la frontera de  $R$ , o puede no existir frontera en absoluto, en cuyo caso la superficie se denomina

**superficie cerrada.** Por ejemplo, si el dominio de  $\mathbf{r}$  en el Ejemplo 2 se amplía para incluir  $0 \leq v \leq \pi$ , entonces la superficie se convierte en la esfera completa de radio  $a$  centrada en el origen. La esfera es una superficie cerrada, sin puntos frontera.

**Observación** Como en el caso de parametrizaciones de curvas, las parametrizaciones de superficies no son únicas. La semiesfera del Ejemplo 2 se puede parametrizar también como

$$\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + \sqrt{a^2 - u^2 - v^2}\mathbf{k} \quad \text{para} \quad u^2 + v^2 \leq a^2$$

En este caso, el dominio de  $\mathbf{r}$  es un disco cerrado de radio  $a$ .

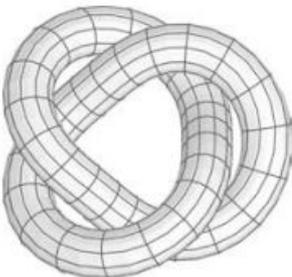
**Ejemplo 3 (Un tubo alrededor de una curva)** Si  $\mathbf{r} = \mathbf{F}(t)$ ,  $a \leq t \leq b$  es una curva paramétrica  $\mathcal{C}$  en el espacio tridimensional con normal unitaria  $\hat{\mathbf{N}}(t)$  y binormal  $\hat{\mathbf{B}}(t)$ , entonces la superficie paramétrica

$$\mathbf{r} = \mathbf{F}(u) + s\cos v \hat{\mathbf{N}}(u) + s\sin v \hat{\mathbf{B}}(u), \quad a \leq u \leq b, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

es una superficie con forma de tubo de radio  $s$ , cuyo eje es la curva  $\mathcal{C}$  (¿por qué?). La Figura 15.17 muestra un tubo de este tipo, con radio  $s = 0.25$ , alrededor de la curva

$$\mathbf{r} = (1 + 0.3 \cos(3t))(\cos(2t)\mathbf{i} + \sin(2t)\mathbf{j}) + 0.35 \sin(3t)\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

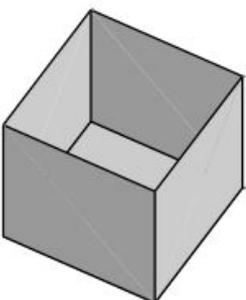
Esta curva cerrada se conoce con el nombre de **nudo de trébol**.



**Figura 15.17** Tubo con forma de un nudo de trébol.

### Superficies compuestas

Si se unen dos superficies paramétricas en parte o en la totalidad de sus curvas frontera, el resultado se denomina **superficie compuesta** o, pensando en términos geométricos, simplemente **superficie**. Por ejemplo, una esfera se puede obtener uniendo dos semiesferas por sus circunferencias frontera. En general, se pueden obtener superficies frontera uniendo en parejas por sus bordes un número finito de superficies paramétricas. La superficie de un cubo está formada por seis caras cuadradas unidas en parejas por sus aristas. Esta superficie es cerrada, ya que no existen bordes sin unir que formen su frontera. Si se elimina el cuadrado de la cara superior, las cinco caras restantes forman una caja cúbica sin tapa. Los bordes superiores de las cuatro caras laterales forman ahora la frontera de esta superficie compuesta (véase la Figura 15.18).



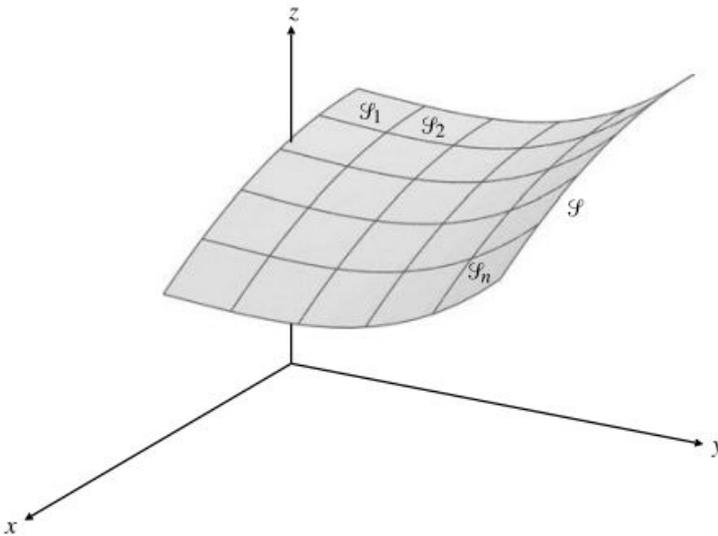
**Figura 15.18** Una superficie compuesta obtenida uniendo en parejas cinco superficies paramétricas suaves (cuadrados) por sus bordes. Los cuatro bordes superiores sueltos de las caras laterales forman la frontera de la superficie compuesta.

## Integrales de superficie

Para definir integrales de funciones definidas sobre una superficie como límites de sumas de Riemann necesitamos considerar *áreas* de regiones de la superficie. Es más difícil definir el área de una superficie curva que definir la longitud de una curva. Sin embargo, es probable que tengamos una idea de lo que significa el área de una región en un plano, y en la Sección 14.7 examinamos brevemente el problema de calcular el área de la gráfica de una función  $f(x, y)$ . Evitaremos dificultades suponiendo que todas las superficies que vamos a encontrar son lo «suficientemente suaves» para que puedan subdividirse en pequeñas partes aproximadamente planas. Después aproximaremos el área de cada parte mediante un área plana y sumaremos las aproximaciones para obtener una aproximación en forma de suma de Riemann al área de la superficie completa. Más adelante en esta sección daremos una definición más precisa de «superficie suave» y de «área de superficie». Por el momento, supondremos que el lector tiene una idea intuitiva de lo que significan.

Sea  $\mathcal{S}$  una superficie suave de área finita en  $\mathbb{R}^3$ , y sea  $f(x, y, z)$  una función acotada definida en todos los puntos de  $\mathcal{S}$ . Si se subdivide  $\mathcal{S}$  en pequeñas partes no solapadas, por ejemplo  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_n$  siendo  $\mathcal{S}_i$  el área de  $\Delta S_i$  (véase la Figura 15.19), podemos formar una **suma de Riemann**  $R_n$  para  $f$  en  $\mathcal{S}$ , escogiendo puntos arbitrarios  $(x_i, y_i, z_i)$  en  $\mathcal{S}_i$  y haciendo

$$R_n = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i$$



**Figura 15.19** Partición de una superficie paramétrica en muchas partes no solapadas.

Si estas sumas de Riemann tienen un límite único cuando los diámetros de todas las partes  $\mathcal{S}_i$  tienden a cero, independientemente de cómo se escojan los puntos  $(x_i, y_i, z_i)$ , entonces se dice que  $f$  es **integrable** en  $\mathcal{S}$  y el límite se denomina **integral de superficie** de  $f$  en  $\mathcal{S}$ , y se expresa como

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x, y, z) dS$$

## Superficies suaves, normales y elementos de área

Una superficie es suave si tiene un único plano tangente en todo punto  $P$  que no sea de su frontera. Un vector  $\mathbf{n}$  distinto de cero que sea normal al plano tangente en  $P$  se dice que es un vector normal a la superficie en  $P$ . La siguiente definición, algo más técnica, precisa este concepto.

**DEFINICIÓN 5**

Se dice que un conjunto  $\mathcal{S}$  en el espacio tridimensional es una **superficie suave** si todo punto  $P$  en  $\mathcal{S}$  tiene un entorno  $N$  (una bola abierta de radio positivo centrada en  $P$ ) que es el dominio de una función suave  $g(x, y, z)$  que cumple:

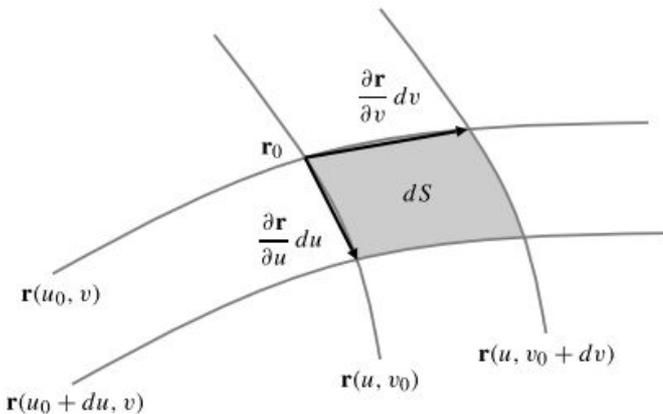
- (i)  $N \cap \mathcal{S} = \{Q \in N: g(Q) = 0\}$  y
- (ii)  $\nabla g(Q) \neq \mathbf{0}$ , si  $Q$  está en  $N \cap \mathcal{S}$ .

Por ejemplo, el cono  $x^2 + y^2 = z^2$ , sin el origen, es una superficie suave. Obsérvese que  $\nabla(x^2 + y^2 - z^2) = \mathbf{0}$  en el origen, y el cono no es suave en dicho punto, ya que no tiene un único plano tangente.

Una superficie paramétrica no puede cumplir las condiciones de suavidad en sus puntos frontera, pero se denominará **suave** si cumple la condición en todos sus puntos no frontera.

Se puede obtener la normal a una superficie paramétrica suave definida en un dominio de parámetros  $R$  como sigue. Si  $(u_0, v_0)$  es un punto en el interior de  $R$ , entonces  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$  y  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v)$  son dos curvas de  $\mathcal{S}$  que se cortan en  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(u_0, v_0)$  y que tienen, en ese punto, vectores tangentes (véase la Figura 15.20)

$$\left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right|_{(u_0, v_0)} \quad \text{y} \quad \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|_{(u_0, v_0)}$$



**Figura 15.20** Un elemento de área  $dS$  en una superficie paramétrica.

respectivamente. Suponiendo que estos dos vectores tangentes no son paralelos, su producto vectorial  $\mathbf{n}$ , que será distinto de cero, es *normal* a  $\mathcal{S}$  en  $\mathbf{r}_0$ . Además, el *elemento de área* de  $\mathcal{S}$ , limitado por las cuatro curvas  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v)$ ,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0 + du, v)$ ,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_0)$  y  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_0 + dv)$ , es un paralelogramo infinitesimal generado por los vectores  $(\partial \mathbf{r} / \partial u) du$  y  $(\partial \mathbf{r} / \partial v) dv$  (en  $(u_0, v_0)$ ) y, por consiguiente, su área es

$$dS = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv$$

Expresemos el vector normal  $\mathbf{n}$  y el elemento de área  $dS$  en función de las componentes de  $\mathbf{r}$ . Como

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \mathbf{k} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \mathbf{k}$$

el **vector normal** a  $\mathcal{S}$  en  $\mathbf{r}(u, v)$  es

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \\ &= \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \mathbf{i} + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \mathbf{j} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \mathbf{k} \end{aligned}$$

Además, el **elemento de área** en un punto  $\mathbf{r}(u, v)$  de la superficie está dado por

$$\begin{aligned} dS &= \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv \\ &= \sqrt{\left( \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right)^2 + \left( \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right)^2 + \left( \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right)^2} du dv \end{aligned}$$

El área de la propia superficie es la «suma» de estos elementos de área:

$$\text{Área de } \mathcal{S} = \iint_{\mathcal{S}} dS$$

**Ejemplo 4** La gráfica  $z = g(x, y)$  de una función  $g$  con derivadas parciales primeras continuas en un dominio  $D$  del plano  $xy$  se puede ver como una superficie paramétrica  $\mathcal{S}$  con parametrización

$$x = u, \quad y = v, \quad z = g(u, v), \quad (u, v) \text{ en } D$$

En este caso,

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = -g_1(u, v), \quad \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} = -g_2(u, v) \quad \text{y} \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 1$$

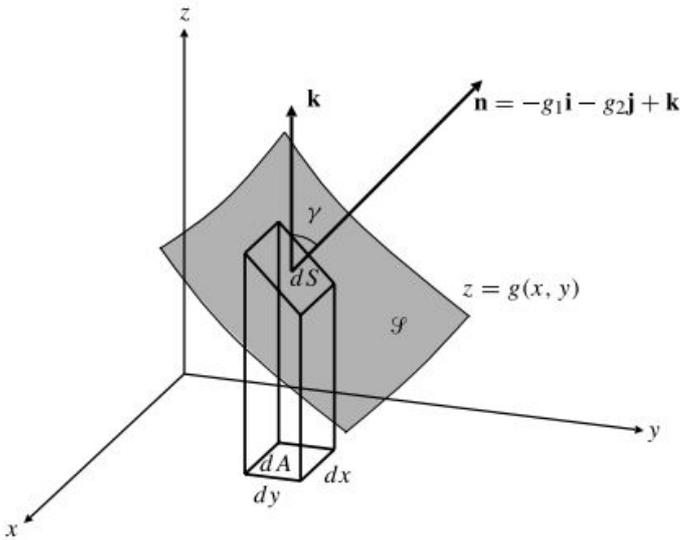
y, como la región paramétrica coincide con el dominio  $D$  de  $g$ , la integral de superficie de  $f(x, y, z)$  sobre  $\mathcal{S}$  se puede expresar como una integral doble sobre  $D$ :

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} f(x, y, z) dS \\ = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + (g_1(x, y))^2 + (g_2(x, y))^2} dx dy \end{aligned}$$

Como se observó en la Sección 14.7, esta fórmula también se puede justificar geoméricamente. El vector  $\mathbf{n} = -g_1(x, y)\mathbf{i} - g_2(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}$  es normal a  $\mathcal{S}$  y forma un ángulo  $\gamma$  con el eje  $z$  positivo, siendo

$$\cos \gamma = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{n}|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (g_1(x, y))^2 + (g_2(x, y))^2}}$$

El elemento de área de superficie  $dS$  debe tener un área que es  $1/\cos \gamma$  veces el área  $dx dy$  de su proyección perpendicular en el plano  $xy$  (véase la Figura 15.21).



**Figura 15.21** El elemento de área de superficie  $dS$  y su proyección en el plano  $xy$ .

### Cálculo de integrales de superficie

Ilustraremos el uso de las fórmulas de  $dS$  en el cálculo de integrales de superficie.

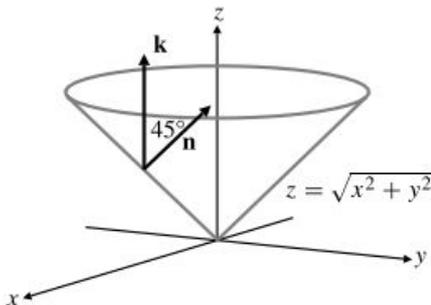
**Ejemplo 5** Calcule  $\iint_{\mathcal{S}} z \, dS$  sobre la superficie cónica  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , entre  $z = 0$  y  $z = 1$ .

**Solución** Como  $z^2 = x^2 + y^2$  en la superficie  $\mathcal{S}$ , tenemos que  $\partial z/\partial x = x/z$  y  $\partial z/\partial y = y/z$ . Por tanto,

$$dS = \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}} \, dx \, dy = \sqrt{\frac{z^2 + x^2 + y^2}{z^2}} \, dx \, dy = \sqrt{2} \, dx \, dy$$

Nótese que podríamos haber anticipado este resultado, ya que la normal al cono siempre forma un ángulo de  $\gamma = 45^\circ$  con el eje  $z$  positivo; véase la Figura 15.22. Por tanto,  $dS = dx \, dy / \cos 45^\circ = \sqrt{2} \, dx \, dy$ . Como  $z = \sqrt{x^2 + y^2} = r$  sobre la superficie cónica, es más fácil realizar la integración en coordenadas polares:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} z \, dS &= \sqrt{2} \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} z \, dx \, dy \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2 \, dr = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3} \end{aligned}$$



**Figura 15.22**  $dS = \sqrt{2} \, dx \, dy$  en este cono.

**Ejemplo 6** Calcule el momento de inercia respecto al eje  $z$  de la superficie paramétrica  $x = 2u$ ,  $y = u^2 - v^2$ ,  $z = u^2 + v^2$ , con  $u^2 + v^2 \leq 1$ .

**Solución** Se pide calcular  $\iint_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2) dS$ . Tenemos que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 2v & 2u \\ 2u & -2v \end{vmatrix} = -4(u^2 + v^2)$$

$$\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 2u & 2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4(u^2 - v^2)$$

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2u & 2v \end{vmatrix} = 8uv$$

Por tanto, el elemento de área de superficie sobre  $\mathcal{S}$  está dado por

$$\begin{aligned} dS &= 4\sqrt{(u^2 + v^2)^2 + (u^2 - v^2)^2 + 4u^2v^2} du dv \\ &= 4\sqrt{2(u^4 + v^4 + 2u^2v^2)} du dv = 4\sqrt{2}(u^2 + v^2) du dv \end{aligned}$$

Como  $x^2 + y^2 = 4u^2v^2 + (u^2 - v^2)^2 = (u^2 + v^2)^2$ , resulta

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2) dS &= \iint_{u^2 + v^2 \leq 1} (u^2 + v^2)^2 4\sqrt{2}(u^2 + v^2) du dv \\ &= 4\sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^6 r dr \quad (\text{utilizando coordenadas polares}) \\ &= \sqrt{2}\pi \end{aligned}$$

Éste es el momento de inercia pedido. ■

Aunque la mayor parte de las superficies que encontremos se puedan parametrizar fácilmente, en general es posible obtener el elemento de área de superficie  $dS$  geoméricamente en vez de emplear la fórmula paramétrica. Como hemos visto anteriormente, si una superficie tiene una proyección uno a uno sobre una región en el plano  $xy$ , entonces el elemento de área  $dS$  sobre la superficie se puede expresar como

$$dS = \left| \frac{1}{\cos \gamma} \right| dx dy = \frac{|\mathbf{n}|}{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}|} dx dy$$

siendo  $\gamma$  el ángulo que forman el vector normal  $\mathbf{n}$  a  $\mathcal{S}$  y el eje  $z$  positivo. Esta fórmula es útil independientemente de cómo se obtenga  $\mathbf{n}$ .

Consideremos una superficie  $\mathcal{S}$  cuya ecuación adopta la forma  $G(x, y, z) = 0$ . Como vimos en la Sección 12.7, si  $G$  tiene derivadas parciales primeras continuas que no se anulan en un punto  $(x, y, z)$  de  $\mathcal{S}$ , entonces el vector no nulo

$$\mathbf{n} = \nabla G(x, y, z)$$

es normal a  $\mathcal{S}$  en dicho punto. Como  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = G_3(x, y, z)$  si  $\mathcal{S}$  tiene una proyección uno a uno en el dominio  $D$  del plano  $xy$ , entonces

$$dS = \left| \frac{\nabla G(x, y, z)}{G_3(x, y, z)} \right| dx dy$$

y la integral de superficie de  $f(x, y, z)$  sobre  $\mathcal{S}$  se puede expresar como una integral doble en el dominio  $D$ :

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \left| \frac{\nabla G(x, y, z)}{G_3(x, y, z)} \right| dx dy$$

Por supuesto, existen fórmulas análogas para los elementos de área de superficies (integrales sobre superficies) con proyecciones uno a uno en el plano  $xz$  o en el plano  $yz$ .  $G_3$  se sustituye por  $G_2$  y  $G_1$ , respectivamente.

**Ejemplo 7** Calcule el momento respecto a  $z = 0$ , es decir,  $\iint_{\mathcal{S}} z dS$ , siendo  $\mathcal{S}$  el cuenco hiperbólico  $z^2 = 1 + x^2 + y^2$ , entre los planos  $z = 1$  y  $z = \sqrt{5}$ .

**Solución**  $\mathcal{S}$  está dado por  $G(x, y, z) = 0$ , siendo  $G(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 + 1$ . Está por encima del disco  $x^2 + y^2 \leq 4$  en el plano  $xy$ . Tenemos que  $\nabla G = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$  y  $G_3 = -2z$ . Por consiguiente, sobre  $\mathcal{S}$ , tenemos

$$z dS = z \frac{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}}{2z} dx dy = \sqrt{1 + 2(x^2 + y^2)} dx dy$$

y el momento pedido es

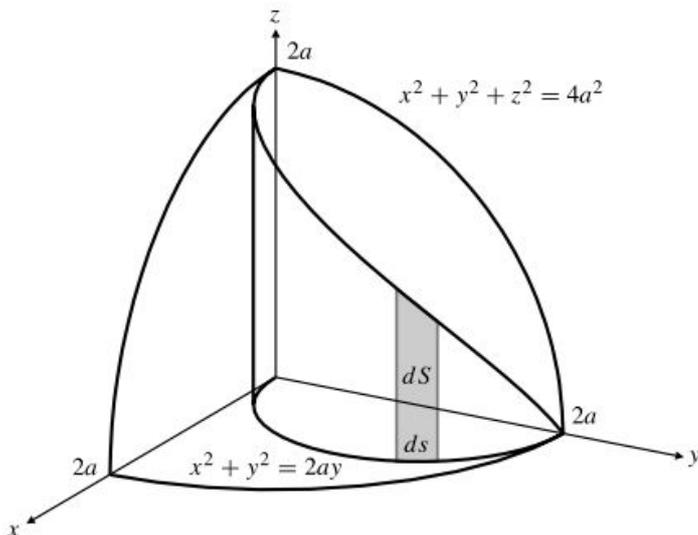
$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} z dS &= \iint_{x^2 + y^2 \leq 4} \sqrt{1 + 2(x^2 + y^2)} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \sqrt{1 + 2r^2} r dr = \frac{\pi}{3} (1 + 2r^2)^{3/2} \Big|_0^2 = \frac{26\pi}{3} \end{aligned}$$

El siguiente ejemplo ilustra una técnica que puede reducir a menudo el esfuerzo necesario para integrar sobre una superficie cilíndrica.

**Ejemplo 8** Calcule el área de la parte del cilindro  $x^2 + y^2 = 2ay$  que está dentro de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ .

**Solución** Un cuarto del área requerida está en el primer octante (véase la Figura 15.23). Como el cilindro está generado por rectas verticales, podemos expresar un elemento de área  $dS$  sobre dicho cilindro en función del elemento de longitud  $ds$  sobre la curva  $c$  en el plano  $xy$ , cuya ecuación es  $x^2 + y^2 = 2ay$ .

$$dS = z ds = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} ds$$



**Figura 15.23** Un elemento de área sobre un cilindro. La coordenada  $z$  ya ha sido integrada.

Al expresar  $dS$  de esta forma, ya hemos integrado  $dz$ , por lo que sólo es necesaria una integral para sumar estos elementos de área. Es conveniente de nuevo utilizar coordenadas polares en el

plano  $xy$ . En función de dichas coordenadas polares, la ecuación de la curva  $c$  es  $r = 2a \sin \theta$ . Por tanto,  $dr/d\theta = 2a \cos \theta$  y  $ds = \sqrt{r^2 + (dr/d\theta)^2} d\theta = 2a d\theta$ . Entonces, el área total de la superficie de la parte del cilindro que está dentro de la esfera está dada por

$$\begin{aligned} A &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{4a^2 - r^2} \, 2a \, d\theta \\ &= 8a \int_0^{\pi/2} \sqrt{4a^2 - 4a^2 \sin^2 \theta} \, d\theta \\ &= 16a^2 \int_0^{\pi/2} \cos \theta \, d\theta = 16a^2 \text{ unidades al cuadrado} \end{aligned}$$

**Observación** El área calculada en el Ejemplo 8 se puede calcular también proyectando la superficie del cilindro de la Figura 15.23 en el plano  $yz$  (éste es el único plano coordenado que se puede utilizar; ¿por qué?). Véase el Ejercicio 6 posterior.

En coordenadas esféricas,  $\phi$  y  $\theta$  se pueden utilizar como parámetros sobre la superficie esférica  $\rho = a$ . El elemento de área sobre esa superficie se puede expresar, por tanto, en función de estas coordenadas:

$$\text{Elemento de área sobre la esfera } \rho = a: \quad dS = a^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta$$

Véase la Figura 14.43 en la Sección 14.6 y el Ejercicio 2 posterior.

**Ejemplo 9** Calcule  $\iint_{\mathcal{S}} z^2 \, dS$  sobre el hemisferio  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ .

**Solución** Como  $z = a \cos \phi$  y el hemisferio corresponde a  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , y  $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ , tenemos

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} z^2 \, dS &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} a^2 \cos^2 \phi \, a^2 \sin \phi \, d\phi \\ &= 2\pi a^4 \left( -\frac{1}{3} \cos^3 \phi \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{2\pi a^4}{3} \end{aligned}$$

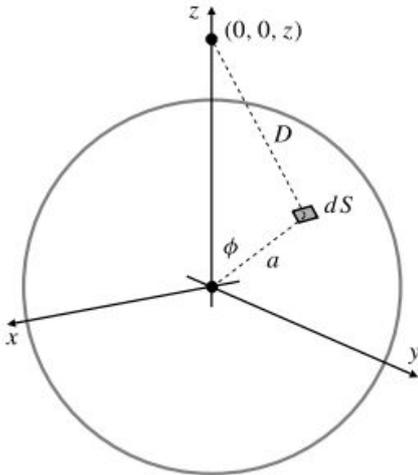
Finalmente, si una superficie compuesta  $\mathcal{S}$  está formada por *superficies paramétricas suaves* unidas por parejas por sus bordes, entonces  $\mathcal{S}$  se puede denominar **superficie suave por tramos**. La integral de superficie de una función  $f$  sobre una superficie suave por tramos  $\mathcal{S}$  es la suma de las integrales de superficie de  $f$  sobre las superficies suaves individuales que forman  $\mathcal{S}$ . En la siguiente sección encontraremos un ejemplo de esto.

## Atracción de una corteza esférica

En la Sección 14.7 calculamos la atracción gravitatoria que ejercía un disco en el plano  $xy$  sobre una masa  $m$  situada en la posición  $(0, 0, b)$  en el eje  $z$ . Ahora realizaremos un cálculo similar de la fuerza de atracción ejercida sobre  $m$  por una corteza esférica de radio  $a$  y densidad de área  $\sigma$  (unidades de masa por unidad de área), centrada en el origen. Este cálculo sería más difícil si intentáramos realizarlo integrando la componente vertical de la fuerza sobre  $m$ , como hicimos en la Sección 14.7. Se simplifica mucho si, en vez de eso, utilizamos una integral para calcular el potencial gravitatorio total  $\Phi(0, 0, z)$  debido a la esfera en la posición  $(0, 0, z)$ , y calculamos después la fuerza sobre  $m$  como  $\mathbf{F} = m\nabla\Phi(0, 0, b)$ .

Por el Teorema del Coseno, la distancia desde el punto con coordenadas esféricas  $[a, \phi, \theta]$  al punto  $(0, 0, z)$  en el eje  $z$  positivo (véase la Figura 15.24) es

$$D = \sqrt{a^2 + z^2 - 2az \cos \phi}$$



**Figura 15.24** Atracción de una esfera.

El elemento de área  $dS = a^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta$  en  $[a, \phi, \theta]$  tiene masa  $dm = \sigma \, dS$ , y su potencial gravitatorio en  $(0, 0, z)$  (véase el Ejemplo 1 en la Sección 15.2) es

$$d\Phi(0, 0, z) = \frac{k \, dm}{D} = \frac{k\sigma a^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta}{\sqrt{a^2 + z^2 - 2az \cos \phi}}$$

Para obtener el potencial total en  $(0, 0, z)$  debido a la esfera, integraremos  $d\Phi$  sobre la superficie de dicha esfera. Realizando el cambio de variables  $u = a^2 + z^2 - 2az \cos \phi$ ,  $du = 2az \sin \phi \, d\phi$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \Phi(0, 0, z) &= k\sigma a^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \frac{\sin \phi \, d\phi}{\sqrt{a^2 + z^2 - 2az \cos \phi}} \\ &= 2\pi k\sigma a^2 \int_{(z-a)^2}^{(z+a)^2} \frac{1}{\sqrt{u}} \frac{du}{2az} \\ &= \frac{2\pi k\sigma a}{z} \sqrt{u} \Big|_{(z-a)^2}^{(z+a)^2} \\ &= \frac{2\pi k\sigma a}{z} (z + a - |z - a|) = \begin{cases} 4\pi k\sigma a^2/z & \text{si } z > a \\ 4\pi k\sigma a & \text{si } z < a \end{cases} \end{aligned}$$

El potencial es constante dentro de la esfera y decrece proporcionalmente a  $1/z$  en el exterior. La fuerza sobre una masa  $m$  localizada en  $(0, 0, b)$  es, por tanto,

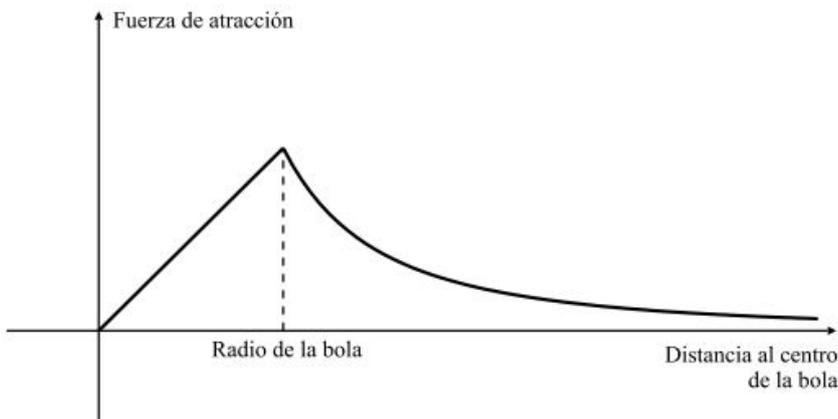
$$\mathbf{F} = m\nabla\Phi(0, 0, b) = \begin{cases} -(4\pi km\sigma a^2/b^2) \mathbf{k} & \text{si } b > a \\ \mathbf{0} & \text{si } b < a \end{cases}$$

Hemos llegado al resultado algo sorprendente de que, si la masa  $m$  está en el interior de la esfera, la fuerza de atracción neta sobre ésta es cero. Esto es lo que se esperaría en el centro de la esfera, pero fuera del centro parece que las fuerzas debidas a la parte de la esfera que están más cerca de  $m$  se cancelan exactamente con las fuerzas menores debidas a las partes de la esfera que están más lejos; estas partes más alejadas tienen área mayor y, por tanto, masa total mayor. Si  $m$  está fuera de la esfera, ésta la atrae con una fuerza de magnitud

$$F = \frac{kmM}{b^2}$$

siendo  $M = 4\pi\sigma a^2$  la masa total de la esfera. Ésta es la misma fuerza que ejercería una masa puntual con la misma masa de la esfera, localizada en el centro de ésta.

**Observación** Una bola sólida de densidad constante, o densidad que depende sólo de la distancia a su centro (por ejemplo, un planeta), se puede considerar como si estuviera formada por elementos de masa que fueran esferas concéntricas de densidad constante. Por tanto, la atracción que ejerce dicha bola sobre una masa  $m$  localizada en su exterior será también la misma que si toda la masa de la bola estuviera concentrada en su centro. Sin embargo, la atracción sobre una masa  $m$  situada en el interior de la bola será la producida solamente por la parte de la bola que esté más cerca del centro que  $m$ . La máxima fuerza de atracción se producirá cuando  $m$  está sobre la superficie de la bola. Si la densidad es constante, el módulo de la fuerza crece linealmente con la distancia al centro (¿por qué?) hasta la superficie, y después decrece con el cuadrado de la distancia, cuando  $m$  se aleja de la bola (véase la Figura 15.25).



**Figura 15.25** Fuerza de atracción de una bola sólida homogénea sobre una partícula localizada a una distancia variable de su centro.

**Observación** Toda la presentación anterior se aplica también al caso de la atracción o repulsión electrostática de una carga puntual por una densidad de carga uniforme sobre una cáscara esférica, que también está gobernada por la ley del inverso del cuadrado. En particular, no hay fuerza electrostática neta si la carga está situada dentro de la cáscara.

## Ejercicios 15.5

- Verifique que, sobre la curva cuya ecuación en polares es  $r = g(\theta)$ , el elemento de longitud de arco está dado por
 
$$ds = \sqrt{(g(\theta))^2 + (g'(\theta))^2} d\theta$$
 ¿Cuál es el elemento de área sobre el cilindro vertical, expresado en función de coordenadas cilíndricas como  $r = g(\theta)$ ?
- Verifique que, sobre la superficie esférica  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , el elemento de área se expresa en función de coordenadas esféricas como  $dS = a^2 \sin \phi d\phi d\theta$ .
- Calcule el área de la parte del plano  $Ax + By + Cz = D$  que está dentro del cilindro elíptico
 
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
- Calcule el área de la parte de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$  que está dentro del cilindro  $x^2 + y^2 = 2ay$ .
- Plantee fórmulas para los elementos de área de superficie  $dS$ , para una superficie cuya ecuación  $F(x, y, z) = 0$  sea válida para el caso en el que la superficie tenga una proyección uno a uno sobre (a) el plano  $xz$  y (b) el plano  $yz$ .
- Repita el cálculo de áreas del Ejemplo 8 proyectando la parte de la superficie que se muestra en la Figura 15.23 en el plano  $yz$ , y utilizando la fórmula del Ejercicio 5(b).
- Calcule  $\iint_S x dS$  sobre la parte del cilindro parabólico  $z = x^2/2$  situada dentro de la parte que está en el primer octante del cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ .

8. Calcule el área de la parte del cono  $z^2 = x^2 + y^2$  que está dentro del cilindro  $x^2 + y^2 = 2ay$ .
9. Calcule el área de la parte del cilindro  $x^2 + y^2 = 2ay$  que está fuera del cono  $z^2 = x^2 + y^2$ .
10. Calcule el área de la parte del cilindro  $x^2 + z^2 = a^2$  que está dentro del cilindro  $y^2 + z^2 = a^2$ .
11. Un cilindro circular de radio  $a$  está circunscrito por una esfera de radio  $a$ , de forma que el cilindro es tangente a la esfera en su ecuador. Dos planos, ambos perpendiculares al eje del cilindro, cortan a la esfera y al cilindro formando circunferencias. Demuestre que el área de la parte de la esfera que está entre los dos planos es igual al área de la parte del cilindro que está entre los dos planos. Por tanto, el área de la parte de una esfera que está entre dos planos paralelos que se cortan depende sólo del radio de la esfera y de la distancia entre los planos, y no de la posición particular de los planos.
12. Sea  $0 < a < b$ . A partir de las funciones integrales elípticas definidas en el Ejercicio 17 de la Sección 15.3, calcule el área de la parte de cada uno de los cilindros  $x^2 + z^2 = a^2$  e  $y^2 + z^2 = b^2$  que está dentro del otro cilindro.
13. Calcule  $\iint_{\mathcal{S}} y dS$ , siendo  $\mathcal{S}$  la parte del plano  $z = 1 + y$  que está dentro del cono  $z = \sqrt{2(x^2 + y^2)}$ .
14. Calcule  $\iint_{\mathcal{S}} y dS$ , siendo  $\mathcal{S}$  la parte del cono  $z = \sqrt{2(x^2 + y^2)}$  que está por debajo del plano  $z = 1 + y$ .
15. Calcule  $\iint_{\mathcal{S}} xz dS$ , siendo  $\mathcal{S}$  la parte de la superficie  $z = x^2$  que está en el primer octante del espacio tridimensional, y dentro del paraboloide  $z = 1 - 3x^2 - y^2$ .
16. Calcule la masa de la parte de la superficie  $z = \sqrt{2xy}$  que está por encima de la región  $0 \leq x \leq 5$ ,  $0 \leq y \leq 2$ , si la densidad de área de dicha superficie es  $\sigma(x, y, z) = kz$ .
17. Calcule la carga total de la superficie  $\mathbf{r} = e^u \cos v \mathbf{i} + e^u \sin v \mathbf{j} + u \mathbf{k}$ , ( $0 \leq u \leq 1$ ,  $0 \leq v \leq \pi$ ) si la densidad de carga de la superficie es  $\delta = \sqrt{1 + e^{2u}}$ .

Los Ejercicios 18 y 19 consideran **esferoides**, que son elipsoides con dos de sus tres semiejes iguales, por ejemplo,  $a = b$ :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

- \*18. Calcule el área de la superficie de un **esferoide prolado**, con  $0 < a < c$ . Un esferoide prolado tiene sus dos semiejes menores iguales, como un balón de rugby americano.
- \*19. Calcule el área de la superficie de un **esferoide oblado**, con  $0 < c < a$ . Un esferoide oblado tiene sus dos semiejes mayores iguales, como la tierra.
20. Describa la superficie paramétrica  $x = a \cos v$ ,  $y = a \sin v$ ,  $z = bv$  ( $0 \leq u \leq 1$ ,  $0 \leq v \leq 2\pi$ ), y calcule su área.
- \*21. Calcule  $\iint_{\mathcal{P}} \frac{dS}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ , siendo  $\mathcal{P}$  el plano cuya ecuación es  $Ax + By + Cz = D$ , ( $D \neq 0$ ).
22. Una cáscara esférica de radio  $a$  está centrada en el origen. Calcule el centroide de la parte de la esfera que está en el primer octante.
23. Calcule el centro de masas de una cáscara cónica circular recta, cuyo radio en la base es  $a$ , cuya altura es  $h$ , y que tiene una densidad de área constante  $\sigma$ .
- \*24. Calcule la atracción gravitatoria que ejerce una cáscara hemisférica de radio  $a$  y densidad de área constante  $\sigma$ , sobre una masa  $m$  situada en el centro de la base del hemisferio.
- \*25. Calcule la atracción gravitatoria que ejerce una cáscara cilíndrica circular de radio  $a$ , altura  $h$  y densidad de área constante  $\sigma$ , sobre una masa  $m$  situada en el eje del cilindro y a  $b$  unidades sobre la base.

En los Ejercicios 26-28, calcule el momento de inercia y el radio de giro de los objetos dados respecto a los ejes dados. Suponga densidades de área  $\sigma$  constantes en cada caso.

26. Una cáscara cilíndrica de radio  $a$  y altura  $h$ , con respecto al eje del cilindro.
27. Una cáscara esférica de radio  $a$  con respecto a un diámetro.
28. Una cáscara cónica circular recta, cuyo radio en la base es  $a$  y cuya altura es  $h$ , con respecto al eje del cono.
29. ¿Con qué aceleración la cáscara esférica del Ejercicio 27 girará por un plano inclinado que forma un ángulo  $\alpha$  con la horizontal? (Compare su resultado con el del Ejemplo 4(b) de la Sección 16.7).

## 15.6 Superficies orientadas e integrales de flujo

Las integrales de superficie de las componentes normales de campos vectoriales tienen un papel muy importante en cálculo vectorial, similar al que tienen las integrales sobre curvas de las componentes tangenciales de campos vectoriales.

### Superficies orientadas

Una superficie suave  $\mathcal{S}$  en el espacio tridimensional se denomina **orientable** si existe un *campo de vectores unitarios*  $\hat{\mathbf{N}}(P)$ , definido sobre  $\mathcal{S}$ , que varía de forma continua cuando  $P$  se mueve por  $\mathcal{S}$  y que es normal a todo punto de  $\mathcal{S}$ . Un campo vectorial  $\hat{\mathbf{N}}(P)$  de este tipo determina una **orientación** de  $\mathcal{S}$ . La superficie debe tener dos lados, ya que  $\hat{\mathbf{N}}(P)$  sólo puede tomar un valor en cada punto de  $P$ . El lado al que apunta  $\hat{\mathbf{N}}$  se denomina **lado positivo**, y el otro lado, **lado negativo**. Una **superficie orientada** consiste en una superficie suave, junto con una elección particular de campo vectorial unitario normal  $\hat{\mathbf{N}}(P)$ .

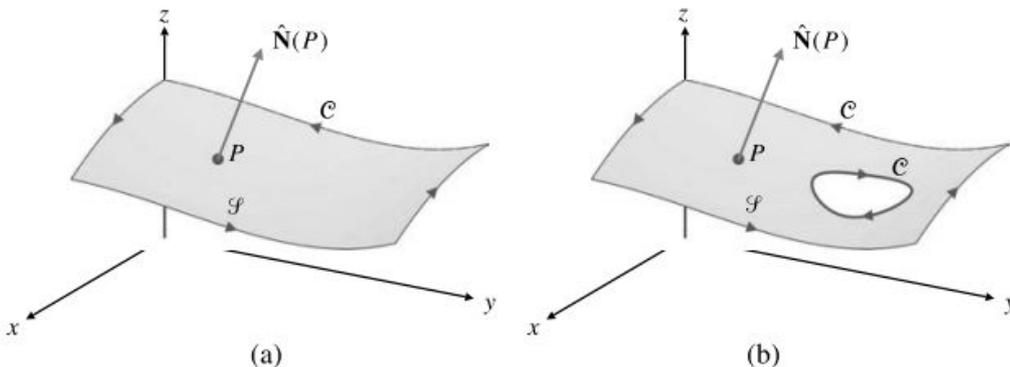
Por ejemplo, si se define  $\hat{\mathbf{N}}$  sobre la superficie suave  $z = f(x, y)$  como

$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{-f_1(x, y)\mathbf{i} - f_2(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + (f_1(x, y))^2 + (f_2(x, y))^2}}$$

entonces la parte superior de la superficie es el lado positivo (véase la Figura 15.26).

Una superficie suave, o suave por tramos, puede ser **cerrada** (es decir, sin frontera), o puede tener una o más curvas frontera (no es necesario que el campo vectorial unitario normal  $\hat{\mathbf{N}}(P)$  esté definido en los puntos frontera).

Una superficie orientada  $\mathcal{S}$  **induce una orientación** en cualquiera de sus curvas frontera  $\mathcal{C}$ ; si nos situamos en el lado positivo de la superficie  $\mathcal{S}$  y recorremos  $\mathcal{C}$  en la dirección de su orientación, entonces  $\mathcal{S}$  quedará a nuestra izquierda (véase la Figura 15.26(a) y (b)).

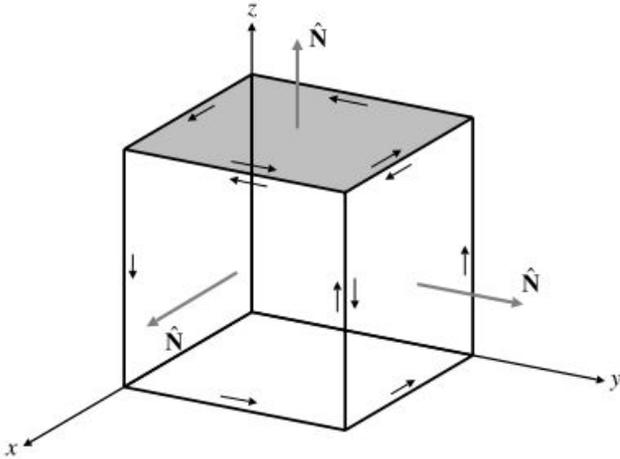


**Figura 15.26** Las curvas frontera de una superficie orientada están a su vez orientadas de forma que dejan la superficie a su izquierda.

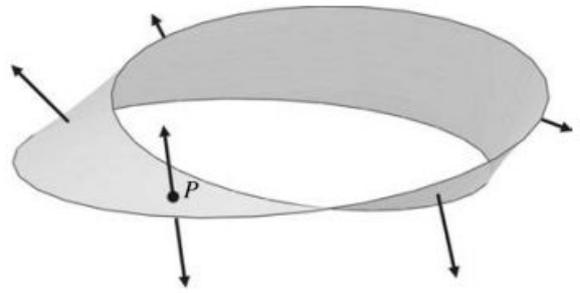
Una superficie *suave por tramos* es **orientable** si, siempre que dos de sus superficies suaves componentes se unen por una curva común  $\mathcal{C}$ , inducen orientaciones *opuestas* sobre  $\mathcal{C}$ . Esto fuerza a las normales  $\hat{\mathbf{N}}$  a estar en el mismo lado en dichas superficies adyacentes. Por ejemplo, la superficie de un cubo es una superficie cerrada suave por tramos, formada por seis superficies suaves (los cuadrados de sus caras), unidas por sus aristas (véase la Figura 15.27). Si todas las caras están orientadas de forma que sus normales  $\hat{\mathbf{N}}$  apunten hacia el exterior del cubo (o hacia el interior del cubo), entonces la propia superficie del cubo está orientada.

No toda superficie puede ser orientada, incluso siendo suave. Una superficie orientable debe tener dos caras. Por ejemplo, una **cinta de Möbius**, que consiste en una cinta de papel con sus extremos unidos para formar un lazo cerrado, pero de forma que a uno de sus extremos se le da media vuelta antes de unirlos, sólo tiene un lado (podemos fabricar una para comprobarlo), por lo que no puede ser orientada (véase la Figura 15.28). Si un vector distinto de cero se desplaza

por la cinta, de forma que siempre es normal a la superficie, volverá a su posición inicial apuntando en la dirección opuesta.



**Figura 15.27** La superficie del cubo es orientable; las caras adyacentes producen orientaciones opuestas en su arista común.



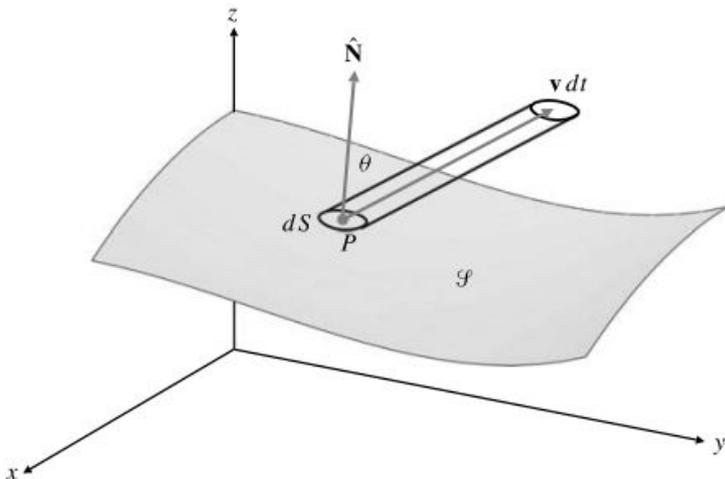
**Figura 15.28** La cinta de Möbius no es orientable; tiene sólo una «cara».

### Flujo de un campo vectorial por una superficie

Supongamos que el espacio tridimensional estuviera lleno de un fluido incompresible con un campo de velocidades  $\mathbf{v}$ . Sea  $\mathcal{S}$  una superficie imaginaria, suave y orientada, en dicho espacio tridimensional (decimos que  $\mathcal{S}$  es *imaginaria* porque no impide el movimiento del fluido; está fija en el espacio y el fluido puede atravesarla libremente). Calcularemos la velocidad de flujo del fluido por  $\mathcal{S}$ . Sea  $dS$  un pequeño elemento de área situado en un punto  $P$  de la superficie. El fluido que cruza ese elemento entre los instantes  $t$  y  $t + dt$  ocupa un cilindro con base de área  $dS$  y altura  $|\mathbf{v}(P)| dt \cos \theta$ , siendo  $\theta$  el ángulo que forman  $\mathbf{v}(P)$  y la normal  $\hat{\mathbf{N}}(P)$  (véase la Figura 15.29). Este cilindro tiene un volumen (con signo) de  $\mathbf{v}(P) \cdot \hat{\mathbf{N}}(P) dS dt$ . La velocidad a la que el fluido cruza  $dS$  es  $\mathbf{v}(P) \cdot \hat{\mathbf{N}}(P) dS$ , y la velocidad total a la que el fluido cruza  $\mathcal{S}$  se obtiene mediante la integral de superficie

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS \quad \text{o} \quad \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$$

donde se utiliza  $d\mathbf{S}$  para representar el vector elemento de área de superficie  $\hat{\mathbf{N}} dS$ .



**Figura 15.29** El fluido que cruza  $dS$  durante un tiempo  $dt$  llena el tubo.

**DEFINICIÓN 6** Flujo de un campo vectorial por una superficie orientada

Dado un campo vectorial continuo  $\mathbf{F}$ , el **flujo** de  $\mathbf{F}$  por la superficie orientable  $\mathcal{S}$  es la integral sobre  $\mathcal{S}$  de la componente normal de  $\mathbf{F}$ .

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS \quad \text{o} \quad \iint_{\mathcal{S}} F \cdot d\mathbf{S}$$

Cuando la superficie es cerrada, la integral de flujo se escribe

$$\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS \quad \text{o} \quad \oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

En este caso se dice que el flujo de  $\mathbf{F}$  es *hacia el exterior* de  $\mathcal{S}$  si  $\hat{\mathbf{N}}$  es el vector normal unitario exterior, y *hacia el interior* de  $\mathcal{S}$  si  $\hat{\mathbf{N}}$  es el vector normal interior.

**Ejemplo 1** Calcule el flujo del campo vectorial  $\mathbf{F} = m\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$  hacia el exterior de una esfera  $\mathcal{S}$  de radio  $a$  centrada en el origen ( $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ).

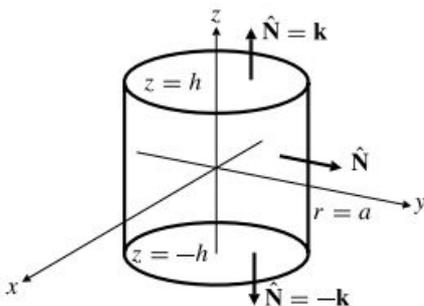
**Solución** Como  $\mathbf{F}$  es el campo asociado con una fuente de fuerza  $m$  situada en el origen (que produce  $4\pi m$  unidades de fluido por unidad de tiempo), la respuesta debe ser  $4\pi m$ . De todas formas, vamos a calcularla. Utilizaremos coordenadas esféricas. En un punto  $\mathbf{r}$  de la esfera, cuyas coordenadas esféricas son  $[a, \phi, \theta]$ , la normal unitaria hacia fuera es  $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ . Como el campo vectorial sobre la esfera es  $\mathbf{F} = m\hat{\mathbf{r}}/a^2$ , y como  $dS = a^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta$  es un elemento de área, el flujo de  $\mathbf{F}$  hacia el exterior de la esfera es

$$\oiint_{\mathcal{S}} \left( \frac{m}{a^2} \hat{\mathbf{r}} \right) \cdot \hat{\mathbf{r}} a^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta = m \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \phi \, d\phi = 4\pi m$$

**Ejemplo 2** Calcule el flujo total de  $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  hacia el exterior a través de la superficie del cilindro sólido  $x^2 + y^2 \leq a^2$ ,  $-h \leq z \leq h$ .

**Solución** La Figura 15.30 muestra el cilindro. Su superficie está formada por los discos de la tapa y de la base, y por la pared lateral cilíndrica. Calcularemos el flujo de  $\mathbf{F}$  a través de cada una de ellas. Naturalmente, utilizaremos coordenadas cilíndricas. En la tapa del disco tenemos  $z = h$ ,  $\hat{\mathbf{N}} = \mathbf{k}$  y  $dS = r \, dr \, d\theta$ . Por tanto,  $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = hr \, dr \, d\theta$  y

$$\iint_{\text{tapa}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = h \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r \, dr = \pi a^2 h$$



**Figura 15.30** Las tres componentes de la superficie de un cilindro sólido, con sus normales hacia fuera.

En el disco de la base tenemos  $z = -h$ ,  $\hat{\mathbf{N}} = -\mathbf{k}$  y  $dS = r \, dr \, d\theta$ . Por tanto,  $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = hr \, dr \, d\theta$  y

$$\iint_{\text{base}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = \iint_{\text{tapa}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = \pi a^2 h$$

En la pared cilíndrica,  $\mathbf{F} = a \cos \theta \mathbf{i} + a \sin \theta \mathbf{j} + z \mathbf{k}$ ,  $\hat{\mathbf{N}} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$  y  $dS = a \, d\theta \, dz$ . Por consiguiente,  $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = a^2 \, d\theta \, dz$  y

$$\iint_{\text{paredcil}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = a^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-h}^h dz = 4\pi a^2 h$$

El flujo total de  $\mathbf{F}$  hacia el exterior de la superficie  $\mathcal{S}$  del cilindro es la suma de estas tres contribuciones:

$$\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = 6\pi a^2 h$$

Sea  $\mathcal{S}$  una superficie suave orientada, con una proyección uno a uno sobre un dominio  $D$  del plano  $xy$ , y cuya ecuación es de la forma  $G(x, y, z) = 0$ . En la Sección 15.5 demostramos que el elemento de área de superficie sobre  $\mathcal{S}$  se puede expresar de la forma

$$dS = \left| \frac{\nabla G}{G_3} \right| dx \, dy$$

y, por tanto, las integrales de superficie sobre  $\mathcal{S}$  se pueden reducir a integrales dobles sobre el dominio  $D$ . Las integrales de flujo se pueden tratar de la misma forma. Dependiendo de la orientación de  $\mathcal{S}$ , la normal unitaria  $\hat{\mathbf{N}}$  se puede expresar como

$$\hat{\mathbf{N}} = \pm \frac{\nabla G}{|\nabla G|}$$

Por tanto, el vector elemento de área  $d\mathbf{S}$  se puede escribir

$$d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{N}} \, dS = \pm \frac{\nabla G(x, y, z)}{G_3(x, y, z)} \, dx \, dy$$

El signo debe escogerse para que  $\mathcal{S}$  tenga la orientación apropiada. Si  $G_3 > 0$ , y queremos que el lado positivo de  $\mathcal{S}$  esté hacia arriba, debemos utilizar el signo  $+$ . Por supuesto, se aplican fórmulas similares para superficies con proyecciones uno a uno en los otros planos coordenados.

**Ejemplo 3** Calcule el flujo hacia el exterior de  $z\mathbf{i} + x^2\mathbf{k}$  a través de la parte de la superficie  $z = x^2 + y^2$  que está por encima del cuadrado  $R$  definido por  $-1 \leq x \leq 1$  y  $-1 \leq y \leq 1$ .

**Solución** Para  $F(x, y, z) = z - x^2 - y^2$  tenemos  $\nabla F = -2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}$  y  $F_3 = 1$ . Por tanto,

$$d\mathbf{S} = (-2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}) \, dx \, dy$$

y el flujo pedido es

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} (z\mathbf{i} + x^2\mathbf{k}) \cdot d\mathbf{S} &= \iint_R (-2x(x^2 + y^2) + x^2) \, dx \, dy \\ &= \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 (x^2 - 2x^3 - 2xy^2) \, dy \\ &= \int_{-1}^1 2x^2 \, dx = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Dos de los tres términos de la integral doble valen cero debido a la simetría.

Dada una superficie  $\mathcal{S}$  cuya ecuación es  $z = f(x, y)$ , tenemos

$$\hat{\mathbf{N}} = \pm \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} \quad y$$

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

de forma que el vector elemento de área sobre  $\mathcal{S}$  está dado por

$$d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{N}} dS = \pm \left( -\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k} \right) dx dy$$

De nuevo, el signo  $+$  corresponde a una normal hacia arriba.

Dada una superficie paramétrica general  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ , la normal unitaria  $\hat{\mathbf{N}}$  y el elemento de área  $dS$  se calcularon en la Sección 15.5:

$$\hat{\mathbf{N}} = \pm \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|}, \quad dS = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv$$

Por tanto, el vector elemento de área es

$$d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{N}} dS = \pm \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du dv$$

**Ejemplo 4** Calcule el flujo en dirección ascendente de  $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$  a través de  $\mathcal{S}$ , siendo  $\mathcal{S}$  la parte de la superficie  $z = 1 - x^2 - y^2$  que está en el primer octante del espacio tridimensional.

**Solución** El vector elemento de área correspondiente a la norma hacia arriba sobre  $\mathcal{S}$  es

$$d\mathbf{S} = \left( -\frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k} \right) dx dy = (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}) dx dy$$

La proyección de  $\mathcal{S}$  en el plano  $xy$  es el cuarto de disco  $Q$  dado por  $x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $x \geq 0$  y  $y \geq 0$ . Por tanto, el flujo de  $\mathbf{F}$  hacia arriba a través de  $\mathcal{S}$  es

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_Q (2xy - 2xy + 4) dx dy \\ &= 4 \times (\text{área de } Q) = \pi \end{aligned}$$

**Ejemplo 5** Calcule el flujo en dirección descendente de  $\mathbf{F} = \frac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}}{x^2 + y^2} + \mathbf{k}$  a través de la superficie  $\mathcal{S}$  definida paramétricamente como

$$\mathbf{r} = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + u^2 \mathbf{k}, \quad (0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi)$$

**Solución** Primero calculamos  $d\mathbf{S}$ :

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \cos v \mathbf{i} + \sen v \mathbf{j} + 2u \mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = -u \sen v \mathbf{i} + u \cos v \mathbf{j}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = -2u^2 \cos v \mathbf{i} - 2u^2 \sen v \mathbf{j} + u \mathbf{k}$$

Como  $u \geq 0$  sobre  $\mathcal{S}$ , la última expresión es una normal hacia arriba. Deseamos una normal hacia abajo, por lo que utilizamos

$$d\mathbf{S} = (2u^2 \cos v \mathbf{i} + 2u^2 \sen v \mathbf{j} - u \mathbf{k}) du dv$$

Sobre  $\mathcal{S}$  tenemos

$$\mathbf{F} = \frac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}}{x^2 + y^2} + \mathbf{k} = \frac{2u \cos v \mathbf{i} + 2u \sen v \mathbf{j}}{u^2} + \mathbf{k}$$

por lo que el flujo de  $\mathbf{F}$  en sentido descendente a través de  $\mathcal{S}$  es

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 (4u - u) du = 3\pi$$

## Ejercicios 15.6

1. Calcule el flujo de  $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + z\mathbf{j}$  hacia el exterior del tetraedro limitado por los planos coordenados y el plano  $x + 2y + 3z = 6$ .
2. Calcule el flujo de  $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  hacia el exterior de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .
3. Calcule el flujo del campo vectorial del Ejercicio 2 hacia el exterior de la superficie de la caja  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ ,  $0 \leq z \leq c$ .
4. Calcule el flujo del campo vectorial  $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{k}$  hacia el exterior de la frontera del cono sólido  $0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ .
5. Calcule el flujo de  $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  hacia arriba a través de la parte de la superficie  $z = a - x^2 - y^2$  que está por encima del plano  $z = b < a$ .
6. Calcule el flujo de  $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + x\mathbf{j} + \mathbf{k}$  hacia arriba a través de la parte de la superficie  $z = x^2 - y^2$  que está en el interior del cilindro  $x^2 + y^2 = a^2$ .
7. Calcule el flujo de  $\mathbf{F} = y^3\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + x\mathbf{k}$  hacia abajo a través de la parte de la superficie  $z = 4 - x^2 - y^2$  que está por encima del plano  $z = 2x + 1$ .
8. Calcule el flujo de  $\mathbf{F} = z^2\mathbf{k}$  hacia arriba a través de la parte de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  que está en el primer octante del espacio tridimensional.
9. Calcule el flujo de  $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$  hacia arriba a través de la parte de la superficie  $z = 2 - x^2 - 2y^2$  que está por encima del plano  $xy$ .
10. Calcule el flujo de  $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  hacia arriba a través de la superficie  $\mathbf{r} = u^2v\mathbf{i} + uv^2\mathbf{j} + v^3\mathbf{k}$ , ( $0 \leq u \leq 1$ ,  $0 \leq v \leq 1$ ).
11. Calcule el flujo de  $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$  hacia arriba a través de la superficie  $u \cos v \mathbf{i} + u \sen v \mathbf{j} + u \mathbf{k}$ , ( $0 \leq u \leq 2$ ,  $0 \leq v \leq \pi$ ).
12. Calcule el flujo de  $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}$  hacia arriba a través de la superficie  $\mathbf{r} = e^u \cos v \mathbf{i} + e^u \sen v \mathbf{j} + u \mathbf{k}$ , con  $0 \leq u \leq 1$  y  $0 \leq v \leq \pi$ .
13. Calcule el flujo de  $\mathbf{F} = m\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$  hacia el exterior de la superficie del cubo  $-a \leq x, y, z \leq a$ .
- \*14. Calcule el flujo del campo vectorial del Ejercicio 13 hacia el exterior de la caja  $1 \leq x, y, z \leq 2$ . *Nota:* Este problema se puede resolver de manera muy sencilla utilizando del Teorema de la Divergencia de la Sección 16.4; el flujo que se pide es, de hecho, cero. Sin embargo, el objetivo aquí es hacerlo por cálculo directo de las integrales de superficie que intervienen, y así es bastante difícil. Por simetría, es suficiente calcular el flujo neto hacia el exterior del cubo definido por cualquiera de las tres parejas de caras opuestas; es decir, se debe calcular solamente el flujo a través de dos caras, por ejemplo  $z = 1$  y  $z = 2$ . Tenga en cuenta que deberá trabajar mucho para calcular estas integrales. Tras resolverlas observará que las igualdades  $2 \arctan a = \arctan(2a/(1 - a^2))$  y  $\arctan a + \arctan(1/a) = \pi/2$  son de utilidad para demostrar el flujo neto es cero.

15. Defina el flujo de un campo vectorial en el *plano* a través de una *curva* suave por tramos. Calcule el flujo de  $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$  hacia el exterior a través de:
- La circunferencia  $x^2 + y^2 = a^2$ .
  - La frontera del cuadrado  $-1 \leq x, y \leq 1$ .
16. Calcule el flujo de  $\mathbf{F} = -(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})/(x^2 + y^2)$  hacia el interior a través de cada una de las dos curvas del ejercicio anterior.
17. Si  $\mathcal{S}$  es una superficie orientada y suave en el espacio tridimensional, y  $\hat{\mathbf{N}}$  es el campo vectorial unitario que determina la orientación de  $\mathcal{S}$ , demuestre que el flujo de  $\hat{\mathbf{N}}$  a través de  $\mathcal{S}$  es el área de  $\mathcal{S}$ .
- \*18. El Teorema de la Divergencia, que se presentará en la Sección 16.4, implica que el flujo de un campo vectorial constante a través de cualquier superficie cerrada suave por tramos y orientada es cero. Demuéstrelo ahora para el caso de (a) una caja rectangular y (b) una esfera.

## Repaso del capítulo

### Ideas clave

- **¿Qué significan los siguientes términos y frases?**
  - ◇ Campo vectorial
  - ◇ Campo escalar
  - ◇ Línea de campo
  - ◇ Campo conservativo
  - ◇ Potencial escalar
  - ◇ Equipotencial
  - ◇ Fuente
  - ◇ Dipolo
  - ◇ Dominio conexo
  - ◇ Simplemente conexo
  - ◇ Superficie paramétrica
  - ◇ Superficie orientable
  - ◇ Integral sobre la curva  $\mathcal{C}$  de  $f$
  - ◇ Integral sobre la curva  $\mathcal{C}$  de la componente tangencial de  $\mathbf{F}$
  - ◇ Flujo de un campo vectorial a través de una superficie
- **¿Cómo son las integrales sobre curvas de un campo conservativo en relación con sus curvas o superficies equipotenciales?**
- **¿Cómo se calcula la integral sobre una curva de un campo escalar?**
- **¿Cómo se calcula la integral sobre una curva de la componente tangencial de un campo vectorial?**
- **¿Cuándo es independiente la integral sobre una curva entre dos puntos del camino que une dichos puntos?**

- **¿Cómo se calcula la integral de superficie de un campo escalar?**
- **¿Cómo se calcula el flujo de un vector a través de una superficie?**

### Ejercicios de repaso

- Calcule  $\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{y} ds$ , siendo  $\mathcal{C}$  la curva
 
$$x = t, \quad y = 2e^t, \quad z = e^{2t}, \quad (-1 \leq t \leq 1)$$
- Sea  $\mathcal{C}$  la parte de la curva de intersección de las superficies  $z = x + y^2$  e  $y = 2x$  que van del origen al punto  $(2, 4, 18)$ . Calcule  $\int_{\mathcal{C}} 2y dx + x dy + 2 dz$ .
- Calcule  $\iint_{\mathcal{S}} x dS$ , siendo  $\mathcal{S}$  la parte del cono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  que está en la región  $0 \leq x \leq 1 - y^2$ .
- Calcule  $\iint_{\mathcal{S}} xyz dS$  en la parte del plano  $x + y + z = 1$  que está en el primer octante.
- Calcule el flujo de  $x^2y\mathbf{i} - 10xy^2\mathbf{j}$  hacia arriba a través de la superficie  $z = xy$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ .
- Calcule el flujo de  $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  hacia abajo a través de la parte del plano  $x + 2y + 3z = 6$  que está en el primer octante.
- Una cuenta de masa  $m$  se desliza por un hilo cuya forma es la de la curva  $x = asen t$ ,  $y = acos t$ ,  $z = bt$ , con  $0 \leq t \leq 6\pi$ .
  - ¿Cuál es el trabajo hecho por la fuerza gravitatoria  $\mathbf{F} = -mg\mathbf{k}$  sobre la cuenta durante su descenso?
  - ¿Cuál es el trabajo hecho contra una resistencia de magnitud constante  $R$  que se opone directamente al movimiento de la cuenta durante su descenso?

8. ¿Para qué valores de las constantes  $a$ ,  $b$  y  $c$  se puede determinar el valor de la integral  $I$  de la componente tangencial de  $\mathbf{F} = (axy + 3yz)\mathbf{i} + (x^2 + 3xz + by^2z)\mathbf{j} + (bxy + cy^3)\mathbf{k}$ , sobre la curva que va desde  $(0, 1, -1)$  hasta  $(2, 1, 1)$  sin conocer exactamente dicha curva? ¿Cuál es el valor de la integral?

9. Sea  $\mathbf{F} = (x^2/y)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \mathbf{k}$ .

- (a) Calcule la línea de campo de  $\mathbf{F}$  que pasa por  $(1, 1, 0)$  y demuestre que pasa también por  $(e, e, 1)$ .
- (b) Calcule  $\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , siendo  $c$  la parte de la línea de campo del apartado (a) que va desde  $(1, 1, 0)$  hasta  $(e, e, 1)$ .

10. Considere los campos vectoriales

$$\mathbf{F} = (1 + x)e^{x+y}\mathbf{i} + (xe^{x+y} + 2y)\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{G} = (1 + x)e^{x+y}\mathbf{i} + (xe^{x+y} + 2z)\mathbf{j} - 2y\mathbf{k}$$

- (a) Demuestre que  $\mathbf{F}$  es conservativo y calcule un potencial del campo.
- (b) Calcule  $\int_c \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}$ , con  $c$  dada por

$$\mathbf{r} = (1 - t)e^t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}, \quad (0 \leq t \leq 1)$$

aprovechando la similitud entre  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{G}$ .

11. Calcule un campo vectorial en el plano  $\mathbf{F}(x, y)$  que cumpla las siguientes condiciones:

- (i) Las líneas de campo de  $\mathbf{F}$  son las curvas  $xy = C$ .
- (ii)  $|\mathbf{F}(x, y)| = 1$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$ .
- (iii)  $\mathbf{F}(1, 1) = (\mathbf{i} - \mathbf{j})/\sqrt{2}$ .
- (iv)  $\mathbf{F}$  es continuo excepto en  $(0, 0)$ .

12. Sea  $\mathcal{S}$  la parte de la superficie del cilindro  $y^2 + z^2 = 16$  que está en el primer octante, y entre los planos  $x = 0$  y  $x = 5$ . Calcule el flujo de  $3z^2x\mathbf{i} - x\mathbf{j} - y\mathbf{k}$  a través de  $\mathcal{S}$  alejándose del eje  $x$ .

### Problemas avanzados

\*1. Calcule el centroide de la superficie

$$\mathbf{r} = (2 + \cos v)(\cos u\mathbf{i} + \sin u\mathbf{j}) + \sin v\mathbf{k}$$

con  $0 \leq u \leq 2\pi$  y  $0 \leq v \leq \pi$ . Describa esta superficie.

\*2. Una superficie suave  $\mathcal{S}$  se expresa paramétricamente como

$$\mathbf{r} = (\cos 2u)(2 + v \cos u)\mathbf{i} + (\sin 2u)(2 + v \cos u)\mathbf{j} + v \sin u\mathbf{k}$$

con  $0 \leq u \leq 2\pi$  y  $-1 \leq v \leq 1$ . Demuestre que para todo campo vectorial suave  $\mathbf{F}$  sobre  $\mathcal{S}$ ,

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = 0$$

siendo  $\hat{\mathbf{N}} = \hat{\mathbf{N}}(u, v)$  un campo vectorial normal unitario sobre  $\mathcal{S}$  que depende de forma continua de  $(u, v)$ .

¿Cómo se explica esto? *Sugerencia:* Intente describir cómo es la superficie  $\mathcal{S}$ .

\*3. Vuelva a calcular la fuerza gravitatoria que ejerce una esfera de radio  $a$  y densidad de área  $\sigma$  centrada en el origen sobre una masa puntual situada en  $(0, 0, b)$ , integrando directamente la componente vertical de la fuerza debida al elemento de área  $dS$ , en vez de integrar el potencial como hicimos en la última parte de la Sección 15.5. Tendrá que ser bastante creativo para resolver la integral resultante.



## CAPÍTULO 16

# Cálculo vectorial

Los matemáticos son como los franceses: siempre que les dices algo, lo traducen a su propio idioma, y a menudo resulta algo completamente diferente.

**Johann Wolfgang von Goethe (1749-1832)**

de *Maxims and Reflections*, 1829

**Introducción** En este capítulo vamos a desarrollar analogías tridimensionales al Teorema Fundamental del Cálculo en una dimensión. Estas analogías (Teorema de Green, Teorema de la Divergencia de Gauss y Teorema de Stokes) son de gran importancia, tanto en teoría como en aplicaciones. Se expresan en términos de ciertos operadores diferenciales, divergencia y rotacional, que están relacionados con el operador gradiente que presentamos en la Sección 12.7. Las Secciones 16.1 y 16.2 presentan los operadores y sus propiedades. El resto del capítulo trata de la generalización del Teorema Fundamental del Cálculo y sus aplicaciones.

## 16.1 Gradiente, divergencia y rotacional

La información de primer orden sobre la tasa de cambio de un campo escalar tridimensional,  $f(x, y, z)$ , está contenida en las tres derivadas parciales primeras  $\partial f/\partial x$ ,  $\partial f/\partial y$  y  $\partial f/\partial z$ . El gradiente,

$$\mathbf{grad} f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

reúne la información en un único vector «derivada» de  $f$ . Vamos a desarrollar formas similares de representar la información de la tasa de cambio de campos vectoriales.

La información de primer orden sobre la tasa de cambio del campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\mathbf{k}$$

está contenida en nueve derivadas parciales primeras, tres para cada una de las tres componentes del campo vectorial  $\mathbf{F}$ :

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{array}$$

Resaltamos de nuevo que  $F_1$ ,  $F_2$  y  $F_3$  indican las componentes de  $\mathbf{F}$ , no derivadas parciales. Dos combinaciones especiales de estas derivadas organizan esta información de formas particularmente útiles, como el caso del gradiente para campos escalares. Son la **divergencia** de  $\mathbf{F}$  ( $\mathbf{div} \mathbf{F}$ ) y el **rotacional** de  $\mathbf{F}$  ( $\mathbf{rot} \mathbf{F}$ ), que se definen como sigue:

### Divergencia y rotacional

$$\mathbf{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$$

$$= \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

Nótese que la divergencia de un campo vectorial es un campo escalar, mientras que el rotacional es otro campo vectorial. Obsérvese también la notación  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  y  $\nabla \times \mathbf{F}$ , que utilizaremos algunas veces en vez de  $\mathbf{div} \mathbf{F}$  y  $\mathbf{rot} \mathbf{F}$ . Esta notación utiliza el *operador diferencial vector*

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

que se denomina frecuentemente *nabla*. De la misma forma que el gradiente de un campo escalar  $f$  se puede ver como la *multiplicación escalar formal* de  $\nabla$  y  $f$ , también la divergencia y el rotacional de  $\mathbf{F}$  se pueden ver como un *producto escalar formal* y un *producto vectorial formal* de  $\nabla$  con  $\mathbf{F}$ . Al utilizar  $\nabla$ , el orden de los «factores» es importante; las magnitudes sobre las que actúa  $\nabla$  deben aparecer a la derecha de  $\nabla$ . Por ejemplo,  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  y  $\mathbf{F} \cdot \nabla$  no significan lo mismo; el primero es un campo escalar y el segundo es un operador diferencial escalar:

$$\mathbf{F} \cdot \nabla = F_1 \frac{\partial}{\partial x} + F_2 \frac{\partial}{\partial y} + F_3 \frac{\partial}{\partial z}$$

### !! ATENCIÓN !!

No hay que confundir el campo escalar  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  con el operador diferencial escalar  $\mathbf{F} \cdot \nabla$ . Son objetos bastante diferentes.

**Ejemplo 1** Calcule la divergencia y el rotacional del campo vectorial

$$\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + (y^2 - z^2)\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$$

**Solución** Tenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 - z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(yz) = y + 2y + y = 4y \\ \operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & y^2 - z^2 & yz \end{vmatrix} \\ &= \left[ \frac{\partial}{\partial y}(yz) - \frac{\partial}{\partial z}(y^2 - z^2) \right] \mathbf{i} + \left[ \frac{\partial}{\partial z}(xy) - \frac{\partial}{\partial x}(yz) \right] \mathbf{j} \\ &\quad + \left[ \frac{\partial}{\partial x}(y^2 - z^2) - \frac{\partial}{\partial y}(xy) \right] \mathbf{k} = 3z\mathbf{i} - x\mathbf{k} \end{aligned}$$

Se pueden definir también la divergencia y el rotacional de un campo vectorial bidimensional; si  $\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y)\mathbf{i} + F_2(x, y)\mathbf{j}$ , entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F} &= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \\ \operatorname{rot} \mathbf{F} &= \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k} \end{aligned}$$

Nótese que el rotacional de un campo vectorial bidimensional es un vector tridimensional perpendicular al plano del campo. Aunque **div** y **grad** están definidas para todas las dimensiones, **rot** sólo está definido en tres dimensiones y en el plano (suponiendo que admitimos valores en tres dimensiones).

**Ejemplo 2** Calcule la divergencia y el rotacional de  $\mathbf{F} = xe^y\mathbf{i} - ye^x\mathbf{j}$ .

**Solución** Tenemos

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x} (xe^y) + \frac{\partial}{\partial y} (-ye^x) = e^y - e^x$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F} = \left( \frac{\partial}{\partial x} (-ye^x) - \frac{\partial}{\partial y} (xe^y) \right) \mathbf{k} \\ &= -(ye^x + xe^y) \mathbf{k} \end{aligned}$$

## Interpretación de la divergencia

El valor de la divergencia de un campo vectorial  $\mathbf{F}$  en un punto  $P$  es, en términos generales, una medida de la tasa con la que el campo «diverge» o «se extiende» desde  $P$ . Esta extensión se puede medir mediante el flujo hacia afuera de una pequeña superficie cerrada que rodea a  $P$ . Por ejemplo,  $\operatorname{div} \mathbf{F}(P)$  es el límite del *flujo por unidad de volumen* hacia el exterior de esferas cada vez más pequeñas centradas en  $P$ .

### TEOREMA 1 Divergencia como densidad de flujo

Si  $\hat{\mathbf{N}}$  es la normal unitaria hacia el exterior sobre la esfera  $\mathcal{S}_\epsilon$  de radio  $\epsilon$  centrada en el punto  $P$ , y si  $\mathbf{F}$  es un campo vectorial tridimensional suave, entonces

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(P) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{3}{4\pi\epsilon^3} \iint_{\mathcal{S}_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$$

**DEMOSTRACIÓN** Sin pérdida de generalidad supondremos que  $P$  está en el origen. Desarrollamos  $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$  en serie de Taylor alrededor del origen (una serie de Maclaurin). Como se demostró en la Sección 12.9 en el caso de una función de dos variables, la serie de Maclaurin de una función escalar de tres variables toma la forma

$$f(x, y, z) = f(0, 0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(0,0,0)} x + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(0,0,0)} y + \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{(0,0,0)} z + \dots$$

donde «...» representa los términos de grados segundo y superiores en  $x$ ,  $y$  y  $z$ . Si aplicamos esta fórmula a las componentes de  $\mathbf{F}$ , obtenemos

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_{x0}x + \mathbf{F}_{y0}y + \mathbf{F}_{z0}z + \dots$$

siendo

$$\mathbf{F}_0 = \mathbf{F}(0, 0, 0)$$

$$\mathbf{F}_{x0} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \Big|_{(0,0,0)} = \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial F_2}{\partial x} \mathbf{j} + \frac{\partial F_3}{\partial x} \mathbf{k} \right) \Big|_{(0,0,0)}$$

$$\mathbf{F}_{y0} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} \Big|_{(0,0,0)} = \left( \frac{\partial F_1}{\partial y} \mathbf{i} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial F_3}{\partial y} \mathbf{k} \right) \Big|_{(0,0,0)}$$

$$\mathbf{F}_{z0} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} \Big|_{(0,0,0)} = \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} \mathbf{i} + \frac{\partial F_2}{\partial z} \mathbf{j} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \mathbf{k} \right) \Big|_{(0,0,0)}$$

Para no confundir derivadas parciales con componentes de vectores, aquí estamos utilizando sub-índices  $x_0, y_0$  y  $z_0$  para indicar los valores de las derivadas parciales primeras de  $\mathbf{F}$  en  $(0, 0, 0)$ .

de nuevo, «...» representa los términos de grados segundo y superior en  $x, y$  y  $z$ . La normal unitaria sobre  $\mathcal{S}_\epsilon$  es  $\hat{\mathbf{N}} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})/\epsilon$ , por lo que tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} &= \frac{1}{\epsilon} (\mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{i}x + \mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{j}y + \mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{k}z \\ &\quad + \mathbf{F}_{x_0} \cdot \mathbf{i}x^2 + \mathbf{F}_{x_0} \cdot \mathbf{j}xy + \mathbf{F}_{x_0} \cdot \mathbf{k}xz \\ &\quad + \mathbf{F}_{y_0} \cdot \mathbf{i}xy + \mathbf{F}_{y_0} \cdot \mathbf{j}y^2 + \mathbf{F}_{y_0} \cdot \mathbf{k}yz \\ &\quad + \mathbf{F}_{z_0} \cdot \mathbf{i}xz + \mathbf{F}_{z_0} \cdot \mathbf{j}yz + \mathbf{F}_{z_0} \cdot \mathbf{k}z^2 + \dots) \end{aligned}$$

Integramos cada término dentro de los paréntesis sobre  $\mathcal{S}_\epsilon$ . Por simetría,

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}_\epsilon} x \, dS &= \iint_{\mathcal{S}_\epsilon} y \, dS = \iint_{\mathcal{S}_\epsilon} z \, dS = 0 \\ \iint_{\mathcal{S}_\epsilon} xy \, dS &= \iint_{\mathcal{S}_\epsilon} xz \, dS = \iint_{\mathcal{S}_\epsilon} yz \, dS = 0 \end{aligned}$$

También por simetría,

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}_\epsilon} x^2 \, dS &= \iint_{\mathcal{S}_\epsilon} y^2 \, dS = \iint_{\mathcal{S}_\epsilon} z^2 \, dS \\ &= \frac{1}{3} \iint_{\mathcal{S}_\epsilon} (x^2 + y^2 + z^2) \, dS = \frac{1}{3} (\epsilon^2) (4\pi\epsilon^2) = \frac{4}{3} \pi\epsilon^4 \end{aligned}$$

y los términos de grado superior tienen integrales de superficie en  $\epsilon^5$  y potencias superiores. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{3}{4\pi\epsilon^3} \iint_{\mathcal{S}_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS &= \mathbf{F}_{x_0} \cdot \mathbf{i} + \mathbf{F}_{y_0} \cdot \mathbf{j} + \mathbf{F}_{z_0} \cdot \mathbf{k} + \epsilon(\dots) \\ &= \nabla \cdot \mathbf{F}(0, 0, 0) + \epsilon(\dots) \\ &\rightarrow \nabla \cdot \mathbf{F}(0, 0, 0) \end{aligned}$$

cuando  $\epsilon \rightarrow 0^+$ . Esto es lo que queríamos demostrar.

**Observación** Las esferas  $\mathcal{S}_\epsilon$  en el teorema anterior se pueden sustituir por la contracción de otras familias de superficies suaves por tramos. Por ejemplo, si  $B$  es la superficie de una caja rectangular de dimensiones  $\Delta x, \Delta y$  y  $\Delta z$  que contiene a  $P$ , entonces

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(P) = \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \iint_B \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS$$

Véase el Ejercicio 12 posterior.

**Observación** En dos dimensiones, el valor de  $\operatorname{div} \mathbf{F}(P)$  representa el límite del *flujo por unidad de área* hacia el exterior de pequeñas superficies cerradas, que no se cruzan entre sí y que encierran a  $P$ . Véase el Ejercicio 13 al final de esta sección.

Volvamos ahora a la interpretación de un campo vectorial como un campo de velocidades de un fluido incompresible en movimiento. Si el flujo total hacia fuera del campo de velocidades a través de la superficie límite de un dominio es positivo (negativo), entonces se debe producir (o eliminar) fluido dentro de ese dominio.

El campo vectorial  $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  del Ejemplo 2 de la Sección 15.6 tiene una divergencia constante  $\nabla \cdot \mathbf{F} = 3$ . En ese ejemplo demostramos que el flujo de  $\mathbf{F}$  hacia el exterior de cierto cilindro con radio en la base  $a$  y altura  $2h$  es  $6\pi a^2 h$ , que es tres veces el volumen del cilindro. Los Ejercicios 2 y 3 de la Sección 15.6 confirman resultados similares para el flujo de  $\mathbf{F}$  hacia el exterior de otros dominios. Esto da lugar a otra interpretación de la divergencia:  $\text{div } \mathbf{F}(P)$  es la *fuerza de la fuente de  $\mathbf{F}$  por unidad de volumen* en  $P$ . Con esta interpretación, debemos esperar, incluso en el caso de un campo vectorial  $\mathbf{F}$  cuya divergencia no sea constante, que el flujo total de  $\mathbf{F}$  hacia el exterior de la superficie  $\mathcal{S}$  de un dominio  $D$  sea igual a la fuerza total de la fuente de  $\mathbf{F}$  dentro de  $D$ , es decir,

$$\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV$$

Éste es el **Teorema de la Divergencia**, que demostraremos en la Sección 16.4.

**Ejemplo 3** Verifique que el campo vectorial  $\mathbf{F} = m\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ , debido a una fuente de fuerza  $m$  en  $(0, 0, 0)$ , tiene divergencia cero en todos los puntos de  $\mathbb{R}^3$  excepto el origen. ¿Qué se puede esperar del flujo total de  $\mathbf{F}$  hacia el exterior a través de la superficie límite de un dominio  $D$  si el origen está fuera de  $D$ ? ¿Y si el origen está dentro de  $D$ ?

**Solución** Como

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{m}{r^3} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}), \quad \text{siendo } r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

y como  $\partial r / \partial x = x/r$ , tenemos

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = m \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{r^3} \right) = m \frac{r^3 - 3xr^2 \left( \frac{x}{r} \right)}{r^6} = m \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}$$

De forma similar,

$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = m \frac{r^2 - 3y^2}{r^5} \quad \text{y} \quad \frac{\partial F_3}{\partial z} = m \frac{r^2 - 3z^2}{r^5}$$

Sumando sus términos, obtenemos  $\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = 0$  si  $r > 0$ .

Si el origen está fuera del dominio  $D$ , entonces la densidad de la fuente de  $\mathbf{F}$  en  $D$  es cero, por lo que puede esperarse que el flujo total de  $\mathbf{F}$  hacia el exterior de  $D$  sea cero. Si el origen está en el interior de  $D$ , entonces  $D$  contiene una fuente de fuerza  $m$  (que produce  $4\pi m$  unidades al cubo de fluido por unidad de tiempo), por lo que el flujo del exterior de  $D$  será  $4\pi m$ . Véase el Ejemplo 1 de la Sección 15.6, y también los Ejercicios 9 y 10 de esa sección, donde se presentan ejemplos concretos. ■

## Distribuciones y funciones delta

Si  $\ell(x)$  representa la densidad lineal (masa por unidad de longitud) de una masa distribuida en el eje  $x$ , entonces la masa total distribuida es

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) \, dx$$

Supongamos ahora que la única masa en el eje es una «masa puntual»  $m = 1$  situada en el origen. Entonces, en todos los puntos  $x \neq 0$ , la densidad es  $\ell(x) = 0$ , pero debe cumplirse todavía que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) dx = m = 1$$

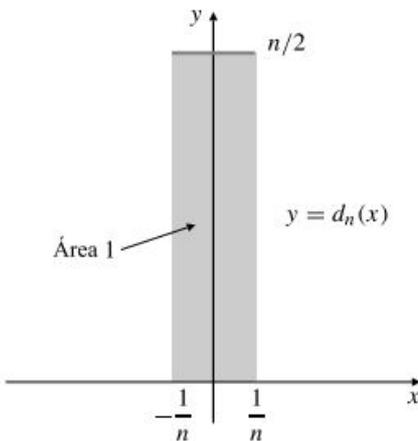
por lo que  $\ell(0)$  debe ser infinito. Esto es una situación ideal, un modelo matemático. Ninguna *función* real  $\ell(x)$  puede tener estas propiedades; si una función es cero en todas partes excepto en un único punto, entonces cualquier integral de esa función será cero (¿por qué?). Además, ninguna masa real puede ocupar un único punto. No obstante, es muy útil modelar masas reales y aisladas como masas puntuales y para modelar sus densidades se utilizan **funciones generalizadas** (también denominadas **distribuciones**).

Podemos ver la densidad de una masa puntual de valor 1 situada en  $x = 0$  como el límite de densidades mayores concentradas en intervalos cada vez más pequeños. Por ejemplo, si

$$d_n(x) = \begin{cases} n/2 & \text{si } |x| \leq 1/n \\ 0 & \text{si } |x| > 1/n \end{cases}$$

(véase la Figura 16.1), entonces, para cualquier función suave  $f(x)$  definida en  $\mathbb{R}$ , tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} d_n(x) f(x) dx = \frac{n}{2} \int_{-1/n}^{1/n} f(x) dx$$



**Figura 16.1** La función  $d_n(x)$  converge a  $\delta(x)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Sustituyendo  $f(x)$  en la integral de la derecha por su desarrollo en serie de Maclaurin:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots$$

Como

$$\int_{-1/n}^{1/n} x^k dx = \begin{cases} 2/((k+1)n^{k+1}) & \text{si } k \text{ es par} \\ 0 & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

podemos tomar el límite cuando  $n \rightarrow \infty$  y obtener

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} d_n(x) f(x) dx = f(0)$$

**DEFINICIÓN 1**

La **distribución de Dirac**  $\delta(x)$  (también denominada **función delta de Dirac**, aunque no es realmente una función) es el «límite» de la secuencia  $d_n(x)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Se define mediante la condición

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

para toda función suave  $f(x)$ .

Un cambio formal de variable permite demostrar que la función delta también cumple

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - t) f(t) dt = f(x)$$

**Ejemplo 4** En vista del hecho de que  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = m\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$  cumple  $\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = 0$  para  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ , pero produce un flujo de  $4\pi m$  hacia el exterior de cualquier esfera centrada en el origen, podemos ver  $\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z)$  como una distribución

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = 4\pi m \delta(x) \delta(y) \delta(z)$$

En particular, integrando esta distribución con  $f(x, y, z) = 1$  en  $\mathbb{R}^3$ , tenemos

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathbb{R}^3} \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) dV &= 4\pi m \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z) dz \\ &= 4\pi m \end{aligned}$$

La integral se puede realizar igualmente sobre *cualquier dominio* de  $\mathbb{R}^3$  que contenga al origen en su interior, y el resultado será el mismo. Si el origen está fuera del dominio, el resultado será cero. Volveremos sobre esta situación tras considerar el Teorema de la Divergencia en la Sección 16.4.

Un estudio formal sobre distribuciones está fuera del alcance de este libro; puede encontrarse en libros más avanzados sobre ecuaciones diferenciales o matemáticas para ingeniería.

## Interpretación del rotacional

En términos generales,  $\operatorname{rot} \mathbf{F}(P)$  mide la cantidad en la que el campo vectorial  $\mathbf{F}$  «gira» alrededor de  $P$ .

**Ejemplo 5** Considere el campo de velocidades

$$\mathbf{v} = -\Omega y \mathbf{i} + \Omega x \mathbf{j}$$

de un sólido en rotación alrededor del eje  $z$  con velocidad angular  $\Omega$ , es decir, con vector velocidad angular  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{k}$  (véase la Figura 15.2 en la Sección 15.1). Calcule la circulación de este campo sobre una circunferencia  $C_\epsilon$  en el plano  $xy$ , centrada en un punto  $(x_0, y_0)$ , de radio  $\epsilon$ , en sentido contrario al de las agujas del reloj. ¿Cuál es la relación entre la circulación y el rotacional de  $\mathbf{v}$ ?

**Solución** La parametrización de la circunferencia indicada es

$$\mathbf{r} = (x_0 + \epsilon \cos t) \mathbf{i} + (y_0 + \epsilon \sin t) \mathbf{j}, \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

y la circulación de  $\mathbf{v}$  sobre ella es

$$\begin{aligned} \oint_{c_\epsilon} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} (-\Omega(y_0 + \epsilon \operatorname{sen} t)(-\epsilon \operatorname{sen} t) + \Omega(x_0 + \epsilon \operatorname{cos} t)(\epsilon \operatorname{cos} t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\Omega\epsilon(y_0 \operatorname{sen} t + x_0 \operatorname{cos} t) + \Omega\epsilon^2) dt \\ &= 2\Omega\pi\epsilon^2 \end{aligned}$$

Como

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \left( \frac{\partial}{\partial x} (\Omega x) - \frac{\partial}{\partial y} (-\Omega y) \right) \mathbf{k} = 2\Omega \mathbf{k} = 2\boldsymbol{\Omega}$$

la circulación es el producto de  $(\operatorname{rot} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{k}$  y el área encerrada por  $c_\epsilon$ . Nótese que esta circulación es constante para circunferencias de radio fijo; no depende de la posición de su centro.

Los cálculos del ejemplo anterior sugieren que el rotacional de un campo vectorial es una medida de la *circulación por unidad de área* en planos normales a dicho rotacional. El Teorema 2 posterior establece una versión más precisa de esta conjetura. No demostraremos este teorema ahora, porque la demostración en este momento sería muy complicada (véase, sin embargo, el Ejercicio 14, donde se presenta un caso especial). Una demostración más sencilla se basa en el Teorema de Stokes; véase el Ejercicio 13 de la Sección 16.5.

**TEOREMA 2 El rotacional como densidad de circulación**

Si  $\mathbf{F}$  es un campo vectorial suave y  $c_\epsilon$  es una circunferencia de radio  $\epsilon$  centrada en el punto  $P$ , que limita a un disco  $\mathcal{S}_\epsilon$  con normal unitaria  $\hat{\mathbf{N}}$  y orientación heredada de  $c_\epsilon$  (véase la Figura 16.2), entonces

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi\epsilon^2} \oint_{c_\epsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{N}} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F}(P)$$

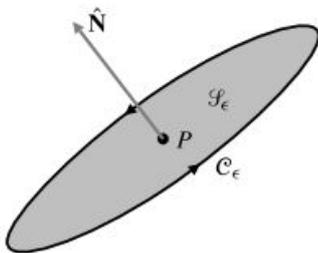


Figura 16.2

El Ejemplo 5 sugiere también la siguiente definición de velocidad angular *local* de un fluido en movimiento:

La **velocidad angular local** de un punto  $P$  en un fluido en movimiento con un campo de velocidades  $\mathbf{v}(P)$  está dada por

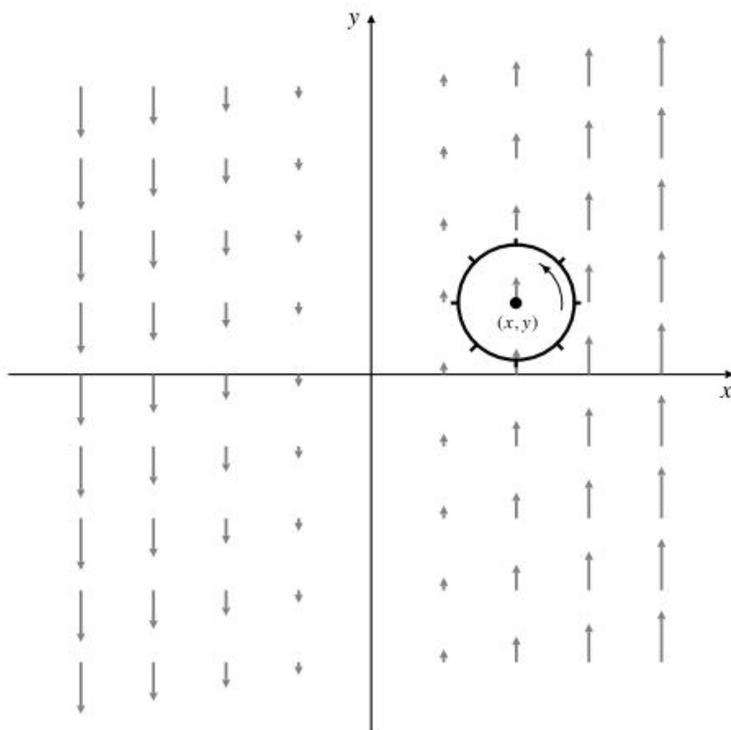
$$\boldsymbol{\Omega}(P) = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v}(P)$$

El Teorema 2 indica que la velocidad angular local  $\boldsymbol{\Omega}(P)$  es aquel vector cuya componente en la dirección de cualquier vector unitario  $\hat{\mathbf{N}}$  es la mitad de la circulación límite por unidad de área

alrededor de las circunferencias frontera (orientadas) de pequeños discos circulares centrados en  $P$  y con normal  $\hat{\mathbf{N}}$ .

No todos los campos vectoriales con rotacional distinto de cero *parecen* circular. El campo de velocidades del cuerpo rígido en rotación considerado en el Ejemplo 5 parece circular alrededor del eje de rotación, pero la circulación sobre una circunferencia situada en un plano perpendicular a ese eje será independiente de la posición de dicha circunferencia, y dependerá sólo de su área. Ni siquiera es necesario que la circunferencia contenga al eje de rotación. El ejemplo que sigue considera un campo de velocidades de un fluido cuyas líneas de corriente son *rectas*, pero cuyo rotacional es distinto de cero y constante, y tiene, por tanto, velocidad angular local constante.

**Ejemplo 6** Considere el campo de velocidades  $\mathbf{v} = x\mathbf{j}$  de un fluido en movimiento en el plano  $xy$ . Evidentemente, las partículas del fluido se mueven siguiendo líneas paralelas al eje  $y$ . Sin embargo,  $\text{rot } \mathbf{v}(x, y) = \mathbf{k}$  y  $\boldsymbol{\Omega}(x, y) = \frac{1}{2}\mathbf{k}$ . Una pequeña «rueda con palas» de radio  $\epsilon$  (véase la Figura 16.3), situada con su centro en la posición  $(x, y)$  del fluido, será desplazada por dicho fluido con velocidad  $x\mathbf{j}$ , pero también girará con velocidad angular  $\boldsymbol{\Omega}(x, y) = \frac{1}{2}\mathbf{k}$ , independientemente de su posición. Esta velocidad angular es debida al hecho de que la velocidad del fluido en el lado derecho de la rueda es superior a la del lado izquierdo.



**Figura 16.3** La rueda de palas no sólo es desplazada por el flujo, sino que también gira.

## Ejercicios 16.2

En los Ejercicios 1-11, calcule  $\text{div } \mathbf{F}$  y  $\text{rot } \mathbf{F}$  para los campos vectoriales dados.

1.  $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

2.  $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

3.  $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$

4.  $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$

5.  $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + x\mathbf{k}$

6.  $\mathbf{F} = xy^2\mathbf{i} - yz^2\mathbf{j} + zx^2\mathbf{k}$

7.  $\mathbf{F} = f(x)\mathbf{i} + g(y)\mathbf{j} + h(z)\mathbf{k}$

8.  $\mathbf{F} = f(z)\mathbf{i} - f(z)\mathbf{j}$

9.  $\mathbf{F}(r, \theta) = r\mathbf{i} + \text{sen } \theta\mathbf{j}$ , siendo  $(r, \theta)$  las coordenadas polares en el plano.

10.  $\mathbf{F} = \hat{\mathbf{r}} = \cos \theta\mathbf{i} + \text{sen } \theta\mathbf{j}$

11.  $\mathbf{F} = \hat{\boldsymbol{\theta}} = \text{sen } \theta\mathbf{i} + \cos \theta\mathbf{j}$

\*12. Sea  $\mathbf{F}$  un campo vectorial tridimensional suave. Si  $B_{a,b,c}$  es la superficie de la caja  $-a \leq x \leq a$ ,  $-b \leq y \leq b$ ,  $-c \leq z \leq c$ , con normal hacia el exterior  $\hat{\mathbf{N}}$ , demuestre que

$$\lim_{a,b,c \rightarrow 0^+} \frac{1}{8abc} \oiint_{B_{a,b,c}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = \nabla \cdot \mathbf{F}(0, 0, 0)$$

\*13. Sea  $\mathbf{F}$  un campo vectorial bidimensional suave. Si  $c_\epsilon$  es una circunferencia de radio  $\epsilon$  centrada en el origen, y  $\hat{\mathbf{N}}$  es la normal unitaria hacia el exterior de  $c_\epsilon$  demuestre que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi \epsilon^2} \int_{c_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, ds = \mathbf{div} \, \mathbf{F}(0, 0)$$

\*14. Demuestre el Teorema 2 en el caso especial de que  $c_\epsilon$  sea la circunferencia en el plano  $xy$  cuya parametrización es  $x = \epsilon \cos \theta$ ,  $y = \epsilon \sin \theta$ ,  $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ . En este caso  $\hat{\mathbf{N}} = \mathbf{k}$ . *Sugerencia:* desarrolle  $\mathbf{F}(x, y, z)$  mediante un desarrollo en serie de Taylor vectorial alrededor del origen, como en la demostración del Teorema 1, y calcule la circulación sobre  $c_\epsilon$  de los términos individuales.

## 16.2 Algunas identidades con el gradiente, la divergencia y el rotacional

Existen numerosas identidades con las funciones

$$\mathbf{grad} \, f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{div} \, \mathbf{F}(x, y, z) = \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

$$\mathbf{rot} \, \mathbf{F}(x, y, z) = \nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

y el **operador Laplaciana**,  $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ , definido para un campo escalar  $\phi$  como

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot \nabla \phi = \mathbf{div} \, \mathbf{grad} \, \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

y para un campo vectorial  $\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k}$  como

$$\nabla^2 \mathbf{F} = (\nabla^2 F_1) \mathbf{i} + (\nabla^2 F_2) \mathbf{j} + (\nabla^2 F_3) \mathbf{k}$$

El operador Laplaciana,  $\nabla^2 = (\partial^2/\partial x^2) + (\partial^2/\partial y^2) + (\partial^2/\partial z^2)$ , se indica como  $\Delta$  en algunos textos. Recuérdese que una función  $\phi$  se denomina **armónica** en un dominio  $D$  si  $\nabla^2 \phi = 0$  en dicho dominio  $D$  (véase la Sección 12.4).

Reuniremos las identidades más importantes en el teorema que sigue. La mayoría de ellas son diversas formas de la Regla del Producto. Demostraremos algunas para ilustrar las técnicas que se utilizan (la mayoría de las veces cálculo directo) y dejaremos el resto como ejercicios. Nótese que en dos de las identidades intervienen magnitudes como  $(\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F}$ ; esto representa el vector que se obtiene aplicando el operador diferencial escalar  $\mathbf{G} \cdot \nabla$  al campo vectorial  $\mathbf{F}$ :

$$(\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F} = G_1 \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + G_2 \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + G_3 \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z}$$