

**LUCRARE METODICO-ȘTIINȚIFICĂ
PENTRU OBTINEREA GRADULUI
DIDACTIC I ÎN INVĂȚĂMÂNT**

TEMA:

“ GEOMETRIE PROIECTIVĂ PLANĂ ”

**Coordonator științific,
Prof.dr. Răzvan Lițcanu**

**Candidat,
prof. Aura Diaconescu**

ARGUMENT

- ✓ Geometria proiectivă a fost creată, în prima jumătate a secolului trecut și are un lung șir de precursori: Pappus, Gerard Desargues; Blaise Pascal; Isaac Newton; Leonhard Euler; Lazare Carnot.
- ✓ Ca ramură a matematicii, geometria proiectivă își trage originea din tratatul inginerului militar Jean – Victor Poncelet, scris de el între 1813-1814, când a fost prizonier la Saratov.
- ✓ Ea a fost dezvoltată ulterior, de Iacob Steiner și Chasles.
- ✓ Prin lucrările fundamentale ale lui Poncelet, Steiner și Chasles, geometria proiectivă s-a desprins ca o disciplină nouă.
- ✓ Fără un domeniu special, operând asupra materialului cunoscut al geometriei, prin metodele sale noi, geometria proiectivă a permis matematicienilor să adâncească mai ales studiul conicelor și al cuadricelelor.

✓ La noi în țară geometria proiectivă a fost studiată la Universitatea din București și din Iași, la cursurile de geometrie analitică și geometrie descriptivă.

✓ În prima carte de geometrie analitică tipărită la noi, aparținând lui C. Climescu - Curs de geometrie analitică. Secțiuni conice, Iași, 1898, intervin considerații proiective și elemente imaginare în spiritul așa-numitei pe atunci, geometrie modernă.

✓ La București, Gh. Țițeica dădea o mare dezvoltare proprietăților proiective, în cursul său de geometrie analitică extins pe doi ani, la începutul secolului actual; o parte din lecțiile sale fiind publicate în Gazeta Matematică.

✓ Emil Pangrati, Dan Barbilian, N. Abramescu, Traian Lalescu, Șerban Gheorghiu, AL.Myller, Gh. Popescu, Al. Niculescu, Adr. Gheorghiu, N. Botea, G:D: Simionescu , C.Ionescu-Bujor etc.au publicat numeroase note și probleme de geometrie proiectivă.

✓ De o deosebită importanță este culegerea lui G. Țițeica, apărută în 1901, și revizuită în 1944, care cuprinde numeroase probleme referitoare la noțiuni de geometrie proiectivă: rapoarte anarmonice, pol și polară, omografie.

✓ Cărți românești, special de geometrie proiectivă, nu au apărut la noi până în 1950.

✓ Cert este că, deși s-au scris numeroase cărți de geometrie proiectivă, nu sunt două care să semene între ele, nici în linii mari. Prezentarea unui manual didactic de geometrie proiectivă rămâne o problemă deschisă.

✓ În concluzie, geometria proiectivă este o ramură definitivată a matematicii, care și-a rezolvat aproape toate problemele. Astăzi ea prezintă mai mult un interes didactic decât științific. Dar sub acest aspect didactic, ea ridică serioase probleme.

Capitolul I. Elemente improprii. Diviziuni armonice. polaritate

- **I.1. Planul proiectiv. Spațiul proiectiv.**
- **I.2. Elemente improprii. Diviziuni armonice. Conservarea diviziunilor.**
- **I.3. Polara unghiulară.**
- **I.4. Polara în raport cu un cerc.**
- **I.5. Legătura dintre polara unghiulară și polara în raport cu un cerc.**

- **Există mai multe moduri de abordare a geometriei proiective.**

- **Un prim mod de construcție a geometriei proiective, așa cum reiese din lucrarea “ O introducere în geometrie”, lucrare apărută la editura Theta, București 2000, sub semnătura autorilor Liviu Ornea și Adriana Turtoi, se poate face pornind de la axiomele elementare:**
 - P1. Prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una.**
 - P2. Orice dreaptă are cel puțin trei puncte distincte.**

P3. (Axioma lui Veblen.) *Fie d_1, d_2 drepte distincte, concurente în punctul O . Fie A_1, B_1 , respectiv A_2, B_2 puncte distincte între ele și distincte de O ale dreptei d_1 , respectiv d_2 . Atunci dreptele A_1A_2 și B_1B_2 se intersectează.*

- **Un alt mod de definiție a dreptei proiective, a planului proiectiv și a spațiului proiectiv, se realizează pornind de la o structură algebrică ale cărei proprietăți sunt degajate treptat, așa cum se poate vedea în lucrarea lui Ioan Pop, apărută la editura Universității “Alexandru Ioan Cuza” Iași, 2001, “Geometrie afină, euclidiană și proiectivă”.**
- **Sunt abordate noțiunile legate de elemente improprii, diviziune armonică, fascicul armonic, polara unghiulară, polara în raport cu un cerc, precum și legătura dintre polara unghiulară și polara în raport cu un cerc.**

Capitolul II. Dualitatea proiectivă. Aplicații

- **II.1. Dualitatea proiectivă (transformare prin polare reciproce).**
- **II.2. Aplicații ale dualității proiective.**
- **Este prezentată noțiunea de dualitate proiectivă sau transformare prin polare.**
- **De reținut că transformarea prin dualitate permută rolul dreptelor și al punctelor:**
 - la puncte coliniare corespund drepte concurente;
 - la drepte concurente corespund puncte coliniare.
- **Corespondența prin dualitate funcționează în tot planul dacă se admite că centrul cercului în raport cu care se face dualitate este polul dreptei de la infinit și reciproc, dreapta de la infinit este polara centrului cercului.**
- **Ca aplicații ale dualității proiective, amintim: teorema lui Brianchon, teorema lui Newton, teorema (punctul lui Gergonne), prima și a doua teoremă a lui Lemoine.**

Capitolul III. Omografii. Involuții. Proiecții.

- Se face o scurtă trecere în revistă a noțiunilor de omografie (puncte limită ale unei omografii, puncte duble ale unei omografii pe o dreaptă), involuție și proiecție.

Capitolul IV. Probleme de geometrie care pot fi rezolvate cu metode provenind din geometria proiectivă

- Acest capitol este un capitol de aplicații, ce constă în prezentarea unui număr de 21 de probleme de geometrie care se rezolvă cu ajutorul noțiunilor prezentate în capitolele anterioare ale lucrării, probleme care se rezolvă cu ajutorul noțiunilor:
 - diviziune armonică;
 - polară;
 - fascicul armonic, etc.
- Problemele au fost selectate din:
 - “ Culegere e probleme de geometrie sintetică și proiectivă”, M. Huschitt, E.D.P. 1971;
 - “ Probleme practice de geometrie”, I. Nicolescu, V. Boskoff, Ed. Tehnică, 1990 .
 - “ Probleme de geometrie”, Gh. Țițeica, Ed. Tehnică, 1981 .

Capitolul V: Elemente de metodică predării matematicii

- **V.1. Metode de rezolvare a problemelor de geometrie.**
- **V.2. Introducerea unor metode provenind din geometria proiectivă.**
 - **V.2.1. Biraportul în geometria triunghiului.**
 - **V.2.2. Conexiuni și soluții diverse ale unei probleme de geometrie.**
 - **V.2.3. Relația lui Van Aubel abordată de către elevii de gimnaziu.**
- **V.3. Proiecte didactice.**
- **Reguli elementare în rezolvarea problemelor:**
 - citirea (corectă) a enunțului problemei și construirea corectă a figurii;
 - însușirea enunțului problemei;
 - cunoașterea unor anumite procedee și metode pentru rezolvarea problemelor de geometrie;
 - construirea de raționamente noi pe baza axiomelor, definițiilor și a altor raționamente învățate anterior;
 - stabilirea de relații între diferite elemente ale figurilor și scrierea lor cu ajutorul simbolurilor din matematică, pe baza raționamentelor construite;
 - discutarea problemei;
 - verificarea soluțiilor problemei.

**“ Profesorul de matematică dispune de mari
posibilități. Dacă el își umple timpul
muștrulându-și elevii cu operații rutiniere, el le
ucide interesul, le frânează dezvoltarea
intelectuală și-și folosește prost posibilitățile. Dacă
însă stârnește curiozitatea elevilor, propunându-le
probleme proporțional cu cunoștințele lor și dacă
îi ajută să-și rezolve problemele prin întrebări
care-i stimulează, el le poate inocula gustul pentru
o gândire independentă și le poate dezvolta
aptitudinile corespunzătoare”.**

G. Polya

- **Metodele folosite în geometrie pentru rezolvarea problemelor :**
 - metoda sintezei;
 - metoda analizei;
 - metoda construcțiilor geometrice;
 - metoda reducerii la absurd în problemele de geometrie;
 - metoda analitico-sintetică;
 - metode de rezolvare a problemelor de coliniaritate;
 - metode de rezolvare a problemelor de concurență.
- Având ca principală sursă bibliografică “ Educația matematică, vol.2, nr.1-2 (2006), 3-10”, am prezentat aplicații ale noțiunii de biraport în geometria triunghiului, pornind de la demonstrarea unei teoreme și arătând utilitatea ei în rezolvarea unor probleme de coliniaritate, de concurență, de stabilire a unor locuri geometrice, etc.
- De un real interes este rezolvarea problemei “ Să se arate că într-un trapez punctul de intersecție al laturilor neparalele, mijloacele laturilor paralele și punctul de intersecție al diagonalelor sunt coliniare”, propusă la etapa județeană a olimpiadei de matematică din anul 1984, în județul Caraș-Severin, de regretatul profesor Adrian Ghioca.
- Problema poate fi rezolvată la nivelul clasei a-VII-a (folosind asemănarea triunghiurilor, reciproca teoremei lui Menelaus sau teorema lui Ceva), la nivelul clasei a-IX-a cu ajutorul calculului vectorial, la nivelul clasei a-X-a, folosind numerele complexe, analitic, la nivelul clasei a-XI-a, dar și o soluție deosebit de elegantă, bazată pe transformările geometrice, și nu în ultimul rând cu ajutorul geometriei proiective.

- Prezența în culegerile de matematică a teoremei lui Menelaus, Ceva, bisectoarei, relației lui Steiner, Carnot, etc, m-a încurajat să încerc să abordez și mai puțin cunoscuta teoremă a lui Van Aubel, prezentată în capitolul IV al lucrării (problema 8), abordată la nivelul elevilor de gimnaziu.

Proiecte didactice; fișe de lucru

- Proiect de activitate didactică la lecția “ Unități de măsură pentru masă; transformări “ – clasa a-V-a;
- Fișă de lucru la lecția “ Unități de măsură pentru masă; transformări “ – clasa a-V-a;
- Proiect de activitate didactică la lecția “ Rezolvarea de ecuații în Z ” – clasa a-VI-a;
- Proiect de activitate didactică la lecția “ Triunghiul echilateral. Proprietăți ale triunghiului echilateral” – clasa a-VI-a;
- Fișă de lucru la lecția “ Triunghiul echilateral. Proprietăți ale triunghiului echilateral” – clasa a-VI-a;
- Proiect de activitate didactică la lecția “ Distanța între două puncte din plan” – clasa a-VII-a;
- Test de evaluare inițială clasa a-VII-a;
- Barem de corectare și notare a testului de evaluare inițială clasa a-VII-a;
- Interpretarea testului.

Bibliografie

- I. Nicolescu, V. Boskoff : Probleme practice de geometrie, Ed. Tehnică , 1990
- N. Mihăileanu: Elemente de geometrie proiectivă, Ed.Tehnică, 1966
- N. Mihăileanu: Geometrie analitică, proiectivă și diferențială.Complemete, E.D.P. București, 1972
- Liviu Ornea, Adriana Turtoi: O introducere în geometrie, Theta, București, 2000
- I.Pop: Geometrie afină, euclidiană și proiectivă, Ed. Univ.Al.I.Cuza, Iași, 2001
- M. Huschitt: Culegere de probleme de geometrie sintetică și proiectivă, E.D.P., 1971
- Gh. Țițeica: Probleme de geometrie, Ed. Tehnică, 1981
- Dumitru Smaranda, Nicolae Soare: Transformări geometrice, Ed. Academiei, București, 1988
- Educația matematică, vol.2, nr.1-2 (2006), 3-10
- Costică Lupu, Dumitru Săvulescu: Metodica predării geometriei, Ed. Paralela 45, 2003
- Eugen Rusu: Metodica predării geometriei în școala generală , E.D.P. București, 1968
- Bogdanov Zlate: Metodica predării geometriei în școala generală de opt ani, E.D.P. București, 1965
- D.M.Bătinețu-Giurgiu, ș.a.: Probleme date la olimpiadele de matematică pentru licee (1950-1990), Ed. Științifică, București, 1992
- Maria Elena Panaitopol, Laurențiu Panaitopol: Probleme calitative de geometrie plană, Ed. Gil, Zalău, 1996
- Inventica'84 Culegere de probleme de matematică pentru cercurile de elevi din clasele I-VIII, Craiova – Dolj, 1984”.