3. Locuri geometrice

3.1. Locuri geometrice uzuale

Noțiunea de "loc geometric în plan" care se găseşte şi în "ELEMENTELE LUI EUCLID" se pare că a fost folosită încă de PLATON (427-347) şi ARISTOTEL(383-322). Locurile geometrice reprezintă unul din cele mai frumoase capitole ale geometriei.

Definiția locului geometric poate fi găsită în mai multe formulări:

a) **loc geometric** este totalitatea punctelor dintr-un spațiu definite printr-o proprietate (Dicționarul explicativ al limbii române);

b) **loc geometric** este mulțimea punctelor din plan sau spațiu care au o anumită proprietate (Micul dicționar enciclopedic);

c) **loc geometric** este figura **plană** sau în spațiu ale cărei puncte se definesc toate prin aceeaşi proprietate (Dicționar de neologisme).

Toate aceste formulări au acelaşi sens: un loc geometric este o mulțime de puncte DEFINITE. În esență, problemele de loc geometric sunt probleme de găsire a unor proprietăți echivalente celor prin care este dată o anumită mulțime sau altfel spus, probleme de egalitate a două mulțimi.

În continuare dăm o listă care conține locuri geometrice uzuale, care pot oferi idei şi soluții în rezolvarea altor probleme de loc geometric:

3.1.1 – Locul geometric al punctelor egal depărtate de extremitățile unui segment este mediatoarea acelui segment.

3.1.2 – Locul geometric al punctelor din plan interioare unui unghi egal depărtate de laturile sale este bisectoarea.

3.1.3 – Locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de două drepte concurente sunt bisectoarele unghiurilor formate de cele două drepte

(bisectoarele sunt perpendiculare în punctul de intersecție al celor două drepte).

3.1.4 – Locul geometric al punctelor din plan situate la o distanță dată față de o dreaptă este reprezentat de două drepte paralele cu o dreaptă dată, situate de o parte şi de alta a ei.

3.1.5 – Locul geometric al punctelor din plan situate la o distanță dată față de un punct fix este un cerc.

3.1.6 – Locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de trei puncte distincte, necoliniare este reprezentat de centrul cercului circumscris triunghiului determinat de cele trei puncte.

3.1.7 – Locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de două drepte paralele date este o dreaptă paralelă cu dreptele date şi situată la jumătatea distanței dintre ele.

3.1.8 – Locul geometric al punctelor din plan pentru care diferența pătratelor la două puncte fixe este constantă, este o dreaptă perpendiculară pe dreapta determinată de cele două puncte fixe.

3.1.9 – Locul geometric al punctelor din plan pentru care raportul distanțelor la două drepte paralele este constant, este reprezentat de două drepte paralele cu dreptele date sau o dreaptă (dacă raportul este 1).

3.1.10 – Locul geometric al punctelor din plan pentru care suma pătratelor distanțelor la două puncte date este constantă, este un cerc cu centrul în mijlocul segmentului determinat de două puncte.

3.1.11 – Locul geometric al punctelor din plan din care un segment se vede sub un unghi drept este cercul care are ca diametru segmentul respectiv.

3.1.12 – Locul geometric al punctelor din plan, mijloace ale segmentelor paralele cu o direcție dată şi cuprinse între două drepte paralele fixe, este dreapta paralelă cu dreptele date şi egal depărtate de ele.

3.1.13 – Locul geometric al punctelor din plan din care un segment se vede sub un unghi dat este reprezentat de două arce de cerc care au aceleaşi extremități ca şi segmentul şi sunt simetrice față de dreapta pe care este situat segmentul.

3.1.14 – Locul geometric al punctelor din plan care împart într-un raport constant segmentele determinate de un punct fix A şi punctul M ce descrie o dreaptă dată (d) este o dreaptă paralelă cu (d) şi care împarte distanța de la A la (d) în acelaşi raport.

3.1.15 – Locul geometric al punctelor din plan pentru care raportul distanțelor la două puncte fixe este constant ($k \neq 1$) este un cerc (pentru raportul distanțelor k=1 se obține o dreaptă).

3.1.16 – Locul geometric al punctelor N din plan, situate pe segmentele care unesc un punct fix A cu un punct M ce descrie o dreaptă (d) dată, astfel încât AN x AM=K este un cerc care trece prin A şi are centrul pe perpendiculara dusă din A pe (d).

3.1.17 – Locul geometric al punctelor din plan care au puteri egale față de două cercuri date este o dreaptă (numită axa radicală a celor două cercuri) perpendiculară pe linia centrelor cercurilor.

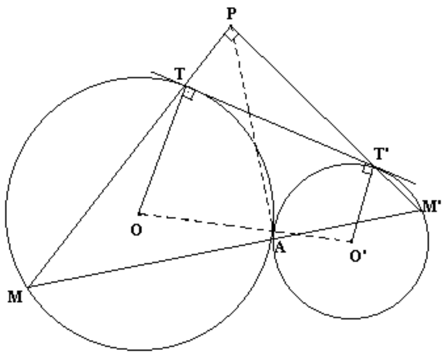
3.1.18 – Locul geometric al punctelor din plan de putere constantă față de un cerc dat, este un cerc concentric cu cercul dat, un punct sau mulțimea vidă.

Probleme rezolvate

R3.2.1 Două cercuri ζ şi ζ' sunt tangente exterioare într-un punct *A*. Fie *TT'* una din tangentele comune exterioare şi *M, M'* intersecțiile celor două cercuri cu o dreaptă variabilă ce trece prin *A*.

Să se afle locul geometric al punctelor *P* de intersecție a lui *MT* cu *MT'*.

Fig. 3.1.



Soluție. 1) Din $\left.\begin{array}{c} OT \perp TT' \\ OT' \perp TT' \end{array}\right\} \Rightarrow OO'T'T$ trapez dreptunghic $\Rightarrow$

$\Rightarrow m(\angle TOA) + m(\angle T'O'A) = 180^0 \Rightarrow m(TA) + m(T'A) = 180^0$

Dar $m(\angle TMA) + m(\angle T'M'A) = \dfrac{1}{2}\left(m(TA) + m(T'A)\right) = \dfrac{1}{2}180^0 = 90^0 \Rightarrow$

$\Rightarrow m(\angle MPM') = 90^0$, deci $\Delta PTT'$ este un triunghi dreptunghic cu ipotenuza constantă *TT'*.

Rezultă că locul geometric este cercul de diametrul *TT'*.

R3.2.2 O proprietate simplă a punctelor mediane *AA'* a ΔABC este următoarea: $M \in (AA') \Rightarrow S_{(ABM)} = S_{(ACM)}$

Se pune problema dacă singurele puncte *M* din plan cu proprietatea $S_{(ABM)} = S_{(ACM)}$ sunt punctele medianei din *A* ?

Pentru aceasta ajungem la următoarea problemă de loc geometric:

Să se determine locul geometric al punctelor *M* din planul ΔABC pentru care $S_{(ABM)} = S_{(ACM)}$.

Soluție. 1. Din proprietatea specificată anterior rezultă că *AA'* aparține locului geometric.

2. Arătăm că în interiorul $\angle CAB$ nu există alte puncte ale locului geometric.

- presupunem că ar exista $M \in \Omega$, $M \notin AA'$

$$\left.\begin{aligned} S_{(MAB)} &= \frac{AB*MM'}{2} \\ S_{(MAC)} &= \frac{AC*MM''}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow AB*MM' = AC*MM''$$

din $M_1 \in \Omega$ avem $S_{(ABM_1)} = S_{(ACM_1)} \Rightarrow AB*M_1M' = AC*M_1M_1''$;
dar $MM' > M_1M'$ şi $MM' < M_1M''$. Deci
$AB*M_1M' < AB*MM' = AC*MM'' < AC*M_1M_1'' \Rightarrow S_{(ABM_1)} = S_{(ACM_1)}$

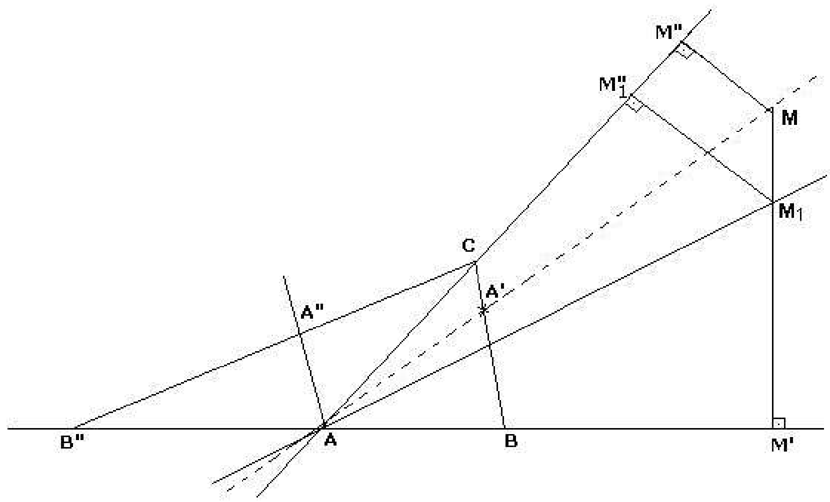
Rămâne să căutăm puncte ale locului în exteriorul acestui unghi.

Fie *B*' simetricul faţă de *A*.

Din $AB = AB' \Rightarrow S_{(ABM)} = S_{(AB'M)}$, deci relaţia ce o verifică punctele locului este: $S_{(AB'M)} = S_{(ACM)}$, care din nou conform proprietăţii medianei în $\Delta B'AC$ este mediana *AA"* paralelă cu *BC*.

Deci locul geometric este mediana din *A* şi paralela prin *A* la *BC*.

Fig. 3.2.



R3.2.3. Să se determine locul geometric al punctelor *M* din planul dreptelor d_1 şi d_2 pentru care raportul:

$$\frac{d(M,d_1)}{d(M,d_2)} = k \text{ , } k>0.$$

Soluţie. Rezolvăm problema în cazurile:

$$d_1 \cap d_2 = \{O\} \neq \emptyset \text{ şi } d_1 \cap d_2 = 0, d_1 \parallel d_2$$

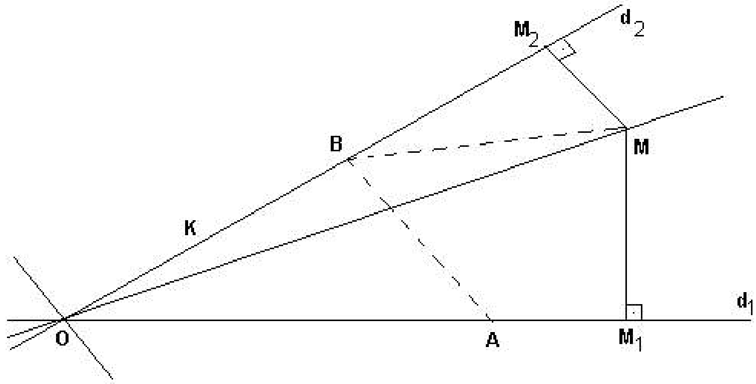


Fig. 3.3.

Fie $M\in\Omega$ situat în unul din cele patru unghiuri format de dreptele d_1 şi d_2.

Pe laturile acestui unghi luăm $A\in d_1$ astfel ca $OA=1$ şi $B\in d_2$ astfel ca $OB=k$, relaţia $d(M,d_1)*1=d(M,d_2)*k \Leftrightarrow OA*MM_1=OB*MM_2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow S_{(OAM)}=S_{(OBM)}$.

Deci am ajuns la problema determinării locului geometric al punctelor din planul triunghiului *OAB* cu $S_{(OAM)}=S_{(OBM)}$ care este format din două drepte: mediana din *O* şi paralela prin *O* la *AB*.

În cazul $d_1 \parallel d_2$ diferenţiem cazul k=1 şi cazul $k\neq 1$.

Dacă k=1, pe fiecare dreaptă perpendiculară pe d_1 şi d_2 avem un singur punct în loc (mijlocul segmentului determinat de intersecţia ei cu cele două drepte).

Deci locul va fi o dreaptă paralelă la d_1 şi d_2 egal depărtată de cele două drepte.

Dacă $k\neq 1$ pe fiecare dreaptă perpendiculară pe d_1 şi d_2 se obţin câte două puncte, unul între punctele de intersecţie şi unul în afară, situat la distanţă determinată.

Deci locul geometric în acest caz va fi format din două drepte paralele la d_1 şi d_2.

R3.2.4 Două puncte mobile *M* şi *N* se mişcă rectiliniu şi uniform. Să se determine locul geometric al punctelor $P\in[MN]$ astfel ca $\frac{MP}{NP}=k$ (constant).

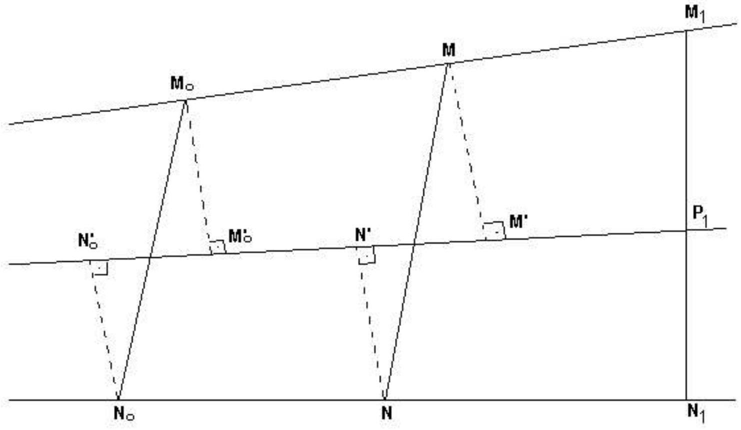


Fig. 3.4.

Soluție. Vom arăta că locul geometric este o dreaptă. Pentru aceasta este suficient să arătăm că dacă P_0 și P_1 sunt două poziții ale lui P , orice altă poziție este coliniară cu P_0 și P_1.

Rapoartele $\frac{N_0N}{NN_1}$ și $\frac{M_0M}{MM_1}$ nu depind de vitezele v_M și v_N, ci doar de intervalul de timp, deci

$$\frac{N_0N}{NN_1}=\frac{M_0M}{MM_1}=x*\left(\frac{v_1t_1}{v_1t_2}=\frac{v_2t_1}{v_2t_2}=\frac{t_1}{t_2}\right);$$

Dacă $\{P\}=P_0P_1\cap MN$, pentru a arăta că $P=P'$ este suficient să arătăm că $\frac{MP'}{P'N}=k$.

Fie $N_0^{'}$, $M_0^{'}$, $N^{'}$, $M^{'}$, $N_1^{'}$, $M_1^{'}$, formând proiecțiile pe dreapta P_0P_1 ale punctelor N_0 , M_0 , N, M, N_1 , M_1 , avem : $\frac{MP'}{P'N}=\frac{MN'}{NN'}$.

Din trapezul $N_0N_1N_1^{'}N_0^{'}$ $\Rightarrow$

$$NN'=\frac{x*N_1N_1^{'}+N_0N_0^{'}}{1+x},\quad \text{analog } MM'=\frac{x*M_1M_1^{'}+M_0M_0^{'}}{1+x}$$

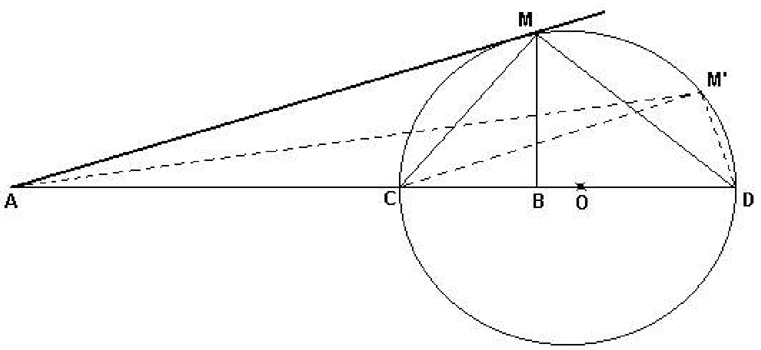
Deci $\frac{M_0M_o^{'}}{N_0N_0^{'}}=\frac{M_0P_0}{N_0P_0}=k\Rightarrow\begin{cases}M_0M_0^{'}=k*N_0N_0^{'}\\M_1M_1^{'}=k*N_1N_1^{'}\end{cases}$. Deci $\frac{MP'}{P'N}=k.$

R3.2.5 Să se găsească locul geometric al punctelor din plan pentru care raportul distanțelor la două puncte fixe este constant.

Soluție. Fie A și B două puncte fixe distincte. Căutăm locul geometric al punctelor M pentru care $\frac{MA}{MB} = k$, unde k este o constantă pozitivă.

În plan pentru k=1, orice punct M pentru care $\frac{MA}{MB} = 1$, aparține mediatoarei segmentului $[AB]$ și reciproc. De aceea în acest caz locul geometric este mediatoarea segmentului AB.

Fig. 3.5.



Fie $k \neq 1$ și M un punct care nu se află pe dreapta AB, astfel încât $\frac{MA}{MB} = k$. Bisectoarea interioară a unghiului $\angle AMB$ taie pe AB în C.

Deoarece $k \neq 1$ implică $MA \neq MB, \Delta AMB$ nu este isoscel. De aceea și bisectoarea exterioară unghiului $\angle AMB$ taie pe AB în D.

În proprietatea bisectoarei avem: $\frac{CA}{CB} = \frac{MA}{MB} = \frac{DA}{DB} = k$. Astfel C și D sunt puncte fixe pe AB, care împart segmentul $[AB]$ în raportul k. Deoarece $m(\angle CMD) = 90^0$ rezultă M aparține cercului de diametru CD.

Reciproc: fie M' un punct al cercului de diametru CD, unde C și D sunt fixe pe AB, care împarte $[AB]$ în raportul k.

Deoarece $M'C \perp M'D$ rezultă că $M'C$ și $M'D$ sunt bisectoarele unghiului M', adică $\frac{M'A}{M'B} = \frac{CA}{CB} = k.$

Punctele C și D convin prin definiție. De aceea locul geometric al punctelor pentru care raportul distanțelor la două puncte fixe A și B este un număr pozitiv $k \neq 1$, este cercul de diametru CD, punctele C, D împărțind pe $[AB]$ în raportul dat.