

- 22.** Calcule el valor mínimo de $f(x, y) = x + 8y + \frac{1}{xy}$ en el primer cuadrante $x > 0, y > 0$. ¿Cómo sabe que existe un mínimo?
- 23.** Las regulaciones postales exigen que la suma de la altura y el perímetro horizontal de un paquete no supere las L unidades. Calcule el máximo volumen de una caja rectangular que pueda satisfacer esta restricción.
- 24.** El material utilizado para hacer el fondo de una caja rectangular es dos veces más caro por unidad de área que el material utilizado para hacer la tapa y las paredes laterales. Calcule las dimensiones de la caja de un volumen dado V para la que el coste de materiales es mínimo.
- 25.** Calcule el volumen de la mayor caja rectangular (con caras paralelas a los planos coordenados) que se puede inscribir en el elipsoide
- $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$
- 26.** Calcule tres números positivos a, b y c tales que su suma es 30 y la expresión ab^2c^3 es máxima.
- 27.** Calcule los puntos críticos de la función $z = g(x, y)$ que satisface la ecuación $e^{2zx-x^2} - 3e^{2y+y^2} = 2$.
- *28.** Clasifique los puntos críticos de la función g del ejercicio anterior.
- *29.** Sea $f(x, y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$. Demuestre que el origen es un punto crítico de f y que la restricción de

f a toda recta que pase por el origen tiene un valor mínimo local en el origen (es decir, demuestre que $f(x, kx)$ tiene un valor mínimo local en $x = 0$ para todo k , y que $f(0, y)$ tiene un valor mínimo local en $y = 0$). ¿Tiene $f(x, y)$ un valor mínimo local en el origen? ¿Qué le sucede a f en la curva $y = 2x^2$? ¿Qué dice el test de la segunda derivada en esta situación?

- 30.** Verifique completando el cuadrado (es decir, sin utilizar el Teorema 8 de la Sección 10.6) que la forma cuadrática

$$Q(u, v) = (x, y) \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Au^2 + 2Buv + Cv^2$$

es definida positiva si $A > 0$ y $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0$, definida

negativa si $A < 0$ y $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0$ e indefinida si

$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} < 0$. Esto proporciona una confirmación

independiente de la afirmación que se hace en la observación que precede al Ejemplo 7.

- *31.** Enuncie y demuestre (utilizando argumentos basados en completar cuadrados en vez de emplear el Teorema 8 de la Sección 10.6) un resultado análogo al del Ejercicio 30 para una forma cuadrática $Q(u, v, w)$ de tres variables. ¿Cuáles son las implicaciones para un punto crítico (a, b, c) de una función $f(x, y, z)$, cuyas derivadas parciales segundas son conocidas en (a, b, c) ?

13.2 Valores extremos de funciones definidas en dominios restringidos

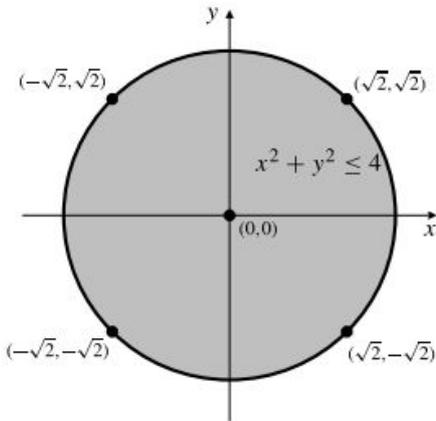
Una buena parte de la sección anterior ha considerado técnicas para determinar si un punto crítico de una función es un valor máximo, mínimo o un punto de ensilladura. En esta sección vamos a considerar el problema de determinar los valores máximos y mínimos absolutos de funciones que los posean (generalmente funciones cuyos dominios estén restringidos a subconjuntos de \mathbb{R}^2 , o \mathbb{R}^n , con interiores no vacíos). En el Ejemplo 8 de la Sección 13.1 tuvimos que *demostrar* que la función dada tenía valores extremos absolutos. Sin embargo, si lo que tenemos es una función continua en un dominio cerrado y acotado, entonces podemos basarnos en el Teorema 2 para garantizar la existencia de valores extremos absolutos, pero tendremos que comprobar siempre los puntos frontera, así como los puntos críticos del interior y los puntos singulares para obtener dichos extremos. Los siguientes ejemplos ilustran la técnica.

Ejemplo 1 Calcule los valores máximo y mínimo de $f(x, y) = 2xy$ en el disco cerrado $x^2 + y^2 \leq 4$ (véase la Figura 13.7).

Solución Como f es continua y el disco es cerrado, debe alcanzar valores máximo y mínimo absolutos en algunos puntos de dicho disco. Las derivadas parciales primeras de f son

$$f_1(x, y) = 2y \quad \text{y} \quad f_2(x, y) = 2x$$

por lo que no hay puntos singulares, y el único punto crítico es $(0, 0)$, donde f toma el valor 0.


Figura 13.7 Puntos candidatos a valores extremos en el Ejemplo 1.

Debemos considerar todavía los valores de f en la circunferencia frontera $x^2 + y^2 = 4$. Podemos expresar f sobre esta circunferencia en función de una sola variable utilizando una parametrización de la circunferencia, es decir,

$$x = 2 \cos t, \quad y = 2 \operatorname{sen} t, \quad (-\pi \leq t \leq \pi)$$

Tenemos

$$f(2 \cos t, 2 \operatorname{sen} t) = 8 \cos t \operatorname{sen} t = g(t)$$

Tenemos que obtener los valores extremos de $g(t)$. Podemos hacer esto de dos formas. Si escribimos $g(t) = 4 \operatorname{sen} 2t$, es claro que $g(t)$ tiene un valor máximo de 4 (en $t = \frac{\pi}{4}$ y $-\frac{3\pi}{4}$) y un valor mínimo de -4 (en $t = -\frac{\pi}{4}$ y $\frac{3\pi}{4}$). También podemos diferenciar g para obtener sus puntos críticos:

$$\begin{aligned} 0 = g'(t) &= -8 \operatorname{sen}^2 t + 8 \cos^2 t \Leftrightarrow \tan^2 t = 1 \\ &\Leftrightarrow t = \pm \frac{\pi}{4} \text{ o } \pm \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

con lo que se obtiene de nuevo el valor máximo de 4 y el valor mínimo de -4 (no es necesario comprobar los extremos $t = -\pi$ y $t = \pi$, ya que g es diferenciable en todas partes y es periódica de periodo π , y cualquier máximo o mínimo absoluto se producirá en un punto crítico).

En cualquier caso, f tiene un valor máximo de 4 en los puntos frontera $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, y un valor mínimo de -4 en los puntos frontera $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ y $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Se puede demostrar fácilmente mediante el test de la segunda derivada (o de cualquier otra forma) que el punto crítico interior $(0, 0)$ es un punto de ensilladura (véase la Figura 13.7).

Ejemplo 2 Calcule los valores extremos de la función $f(x, y) = x^2 y e^{-(x+y)}$ en la región triangular T dada por $x \geq 0$, $y \geq 0$ y $x + y \leq 4$.

Solución Primero se buscan los puntos críticos:

$$\begin{aligned} 0 = f_1(x, y) &= xy(2-x)e^{-(x+y)} \Rightarrow x = 0, y = 0 \text{ o } x = 2 \\ 0 = f_2(x, y) &= x^2(1-y)e^{-(x+y)} \Rightarrow x = 0 \text{ o } y = 1 \end{aligned}$$

Los puntos críticos son $(0, y)$ para todo y , y $(2, 1)$. Sólo $(2, 1)$ es un punto interior de T (véase la Figura 13.8). $f(2, 1) = 4/e^3 \approx 0.199$. La frontera de T está formada por tres segmentos rectos. En dos de ellos, los ejes coordenados, f es idénticamente nula. El tercer segmento se expresa como

$$y = 4 - x, \quad 0 \leq x \leq 4$$

por lo que los valores de f en este segmento se pueden expresar sólo en función de x :

$$g(x) = f(x, 4-x) = x^2(4-x)e^{-4}, \quad 0 \leq x \leq 4$$

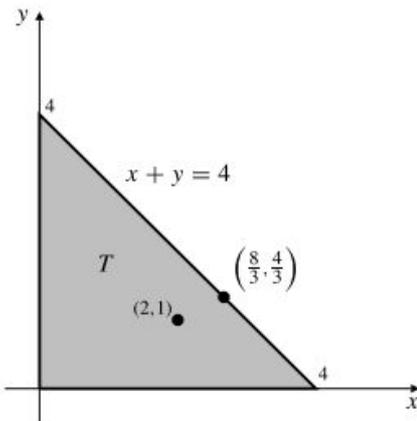


Figura 13.8 Puntos de interés en el Ejemplo 2.

Obsérvese que $g(0) = g(4) = 0$ y $g(x) > 0$ si $0 < x < 4$. Los puntos críticos de g están dados por $0 = g'(x) = (8x - 3x^2)e^{-4}$, por lo que son $x = 0$ y $x = 8/3$. Tenemos que

$$g\left(\frac{8}{3}\right) = f\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{256}{27} e^{-4} \approx 0.174 < f(2, 1)$$

Concluimos entonces que el valor máximo de f en la región T es $4/e^4$, y que se produce en el punto crítico interior $(2, 1)$. El valor mínimo de f es cero y se produce en todos los puntos de los dos segmentos frontera perpendiculares. Nótese que f no tiene ni un máximo local ni un mínimo local en el punto frontera $(8/3, 4/3)$, aunque g presenta un máximo local allí. Por supuesto, ese punto tampoco es un punto de ensilladura de f ; no es un punto crítico de f .

Ejemplo 3 Entre todos los triángulos cuyos vértices están en una circunferencia dada, calcule el que tiene área máxima.

Solución La intuición nos dice que los triángulos equiláteros serán los de área máxima. Sin embargo, demostrarlo puede ser muy difícil a menos que se haga una buena selección de las variables para plantear el problema analíticamente. Con una elección adecuada de las unidades y los ejes podemos suponer que la circunferencia es $x^2 + y^2 = 1$ y que un vértice del triángulo es el punto P de coordenadas $(1, 0)$. Sean Q y R los otros dos vértices, como se muestra en la Figura 13.9. Puede suponerse que Q está en la semicircunferencia superior y R en la inferior, y que el origen O está dentro del triángulo PQR . Supongamos que PQ y PR forman ángulos θ y ϕ , respectivamente, con la dirección negativa del eje x . Claramente, $0 \leq \theta \leq \pi/2$ y $0 \leq \phi \leq \pi/2$. Las rectas que van desde O hasta Q y R forman ángulos iguales ψ con la recta QR , con $2\theta + 2\phi + 2\psi = \pi$. Trazando perpendiculares desde O a los tres lados del triángulo PQR , podemos expresar el área A del triángulo como la suma de las áreas de seis triángulos rectángulos más pequeños:

$$\begin{aligned} A &= 2 \times \frac{1}{2} \operatorname{sen} \theta \cos \theta + 2 \times \frac{1}{2} \operatorname{sen} \phi \cos \phi + 2 \times \frac{1}{2} \operatorname{sen} \psi \cos \psi \\ &= \frac{1}{2} (\operatorname{sen} 2\theta + \operatorname{sen} 2\phi + \operatorname{sen} 2\psi) \end{aligned}$$

Como $2\psi = \pi - 2(\theta + \phi)$, expresamos A en función de las dos variables θ y ϕ :

$$A = A(\theta, \phi) = \frac{1}{2} (\operatorname{sen} 2\theta + \operatorname{sen} 2\phi + \operatorname{sen} 2(\theta + \phi))$$

El dominio de A es el triángulo $\theta \geq 0$, $\phi \geq 0$, $\theta + \phi \leq \pi/2$. $A = 0$ en los vértices de un triángulo y es positiva en todas partes (véase la Figura 13.10). Demostraremos que el valor máximo de $A(\theta, \phi)$ en cualquier lado del triángulo es 1 y se produce en el punto medio de dicho lado. En dicho lado $\theta = 0$ y tenemos

$$A(0, \phi) = \frac{1}{2} (\operatorname{sen} 2\phi + \operatorname{sen} 2\phi) = \operatorname{sen} 2\phi \leq 1 = A(0, \pi/4)$$

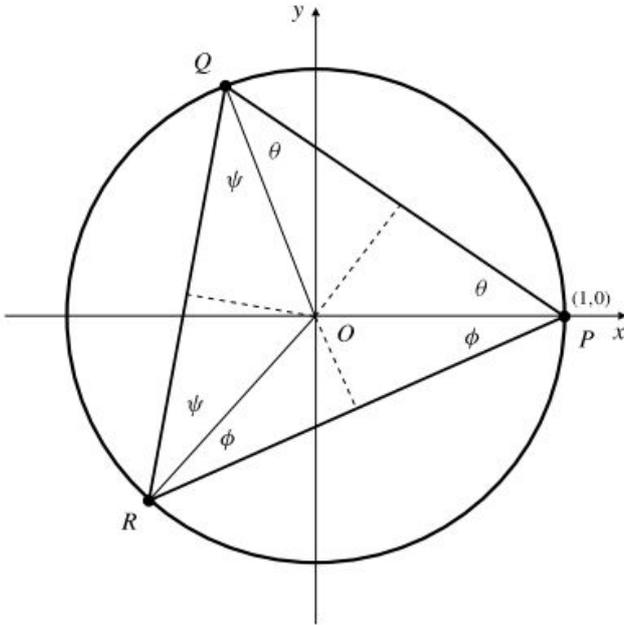


Figura 13.9 ¿Dónde deberían estar Q y R para asegurar que el triángulo PQR tiene área máxima?

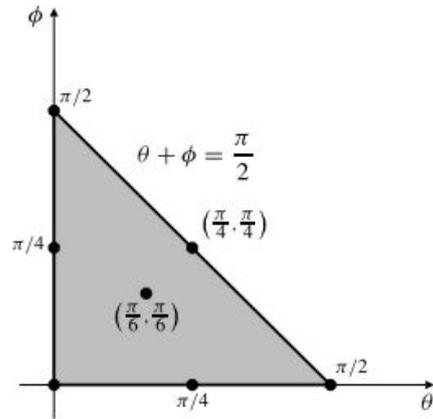


Figura 13.10 El dominio de $A(\theta, \phi)$.

De forma similar, en $\phi = 0$, $A(\theta, 0) \leq 1 = A(\pi/4, 0)$. En el lado $\theta + \phi = \pi/2$ tenemos

$$\begin{aligned} A\left(\theta, \frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \frac{1}{2} (\text{sen } 2\theta + \text{sen}(\pi - 2\theta)) \\ &= \text{sen } 2\theta \leq 1 = A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Debemos comprobar ahora los puntos críticos interiores de $A(\theta, \phi)$ (no hay puntos singulares). Los puntos críticos deben cumplir

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial A}{\partial \theta} = \cos 2\theta + \cos(2\theta + 2\phi) \\ 0 &= \frac{\partial A}{\partial \phi} = \cos 2\phi + \cos(2\theta + 2\phi) \end{aligned}$$

por lo que dichos puntos críticos cumplen $\cos 2\theta = \cos 2\phi$, y, por consiguiente, $\theta = \phi$. Sustituimos ahora esta ecuación en cualquiera de las ecuaciones anteriores para determinar θ :

$$\begin{aligned} \cos 2\theta + \cos 4\theta &= 0 \\ 2 \cos^2 2\theta + \cos 2\theta - 1 &= 0 \\ (2 \cos 2\theta - 1)(\cos 2\theta + 1) &= 0 \\ \cos 2\theta &= \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad \cos 2\theta = -1 \end{aligned}$$

La única solución que produce un punto interior del dominio de A es $\theta = \phi = \pi/6$. Nótese que

$$A\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} > 1$$

Este punto interior crítico maximiza el área del triángulo inscrito. Finalmente, obsérvese que para $\theta = \phi = \pi/6$, tenemos también que $\psi = \pi/6$, por lo que el triángulo de área máxima es un triángulo equilátero.

Observación Como el área A del triángulo inscrito debe tener un valor máximo (A es continua y su dominio es cerrado y acotado), se puede utilizar un argumento estrictamente geométrico para demostrar que el triángulo de área máxima es equilátero. Si un triángulo inscrito tuviera dos lados desiguales, su área se podría hacer mayor moviendo el vértice común de esos dos lados por la circunferencia para incrementar su distancia perpendicular al lado opuesto del triángulo.

Programación lineal

La programación lineal es una rama del álgebra lineal que desarrolla técnicas sistemáticas para obtener máximos y mínimos de una *función lineal* sujeta a varias *restricciones lineales de desigualdad*. Estos problemas aparecen frecuentemente en las ciencias de gestión y en la investigación de operaciones. Debido a su naturaleza lineal, en general no requieren el empleo del cálculo en su solución; la programación lineal se presenta frecuentemente en cursos de *matemática finita*. No presentaremos aquí ningún estudio formal de la programación lineal, pero haremos algunas observaciones que permitan su comparación con los problemas más generales no lineales de valores extremos considerados anteriormente, y que requieren el empleo del cálculo para obtener su solución.

La inecuación $ax + by \leq c$ es un ejemplo de inecuación lineal en dos variables. El *conjunto solución* de esta inecuación está formado por un semiplano que queda a un lado de la recta $ax + by = c$. El conjunto solución de un sistema de varias inecuaciones lineales de dos variables es la intersección de estos semiplanos, por lo que es una región *convexa* del plano limitada por una *línea poligonal*. Si es un conjunto acotado, entonces es un polígono convexo junto con su interior (un conjunto se denomina **convexo** si contiene completamente a una recta que se trace entre dos cualesquiera de sus puntos. En la recta real los conjuntos convexos son los intervalos).

Examinemos un ejemplo concreto simple en el que intervienen sólo dos variables y unas pocas restricciones.

Ejemplo 4 Calcule el valor máximo de $F(x, y) = 2x + 7y$ sujeta a las restricciones $x + 2y \leq 6$, $2x + y \leq 6$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

Solución El conjunto solución \mathcal{S} de este sistema de cuatro desigualdades de restricciones se muestra en la Figura 13.11. Es la región con forma de cuadrilátero cuyos vértices son $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(2, 2)$ y $(0, 3)$. La figura muestra también algunas curvas de nivel de la función lineal F . Son rectas paralelas de pendiente $-\frac{2}{7}$. Deseamos encontrar la recta correspondiente al máximo valor de F que corte todavía a \mathcal{S} . Evidentemente, se trata de la recta $F = 21$, que pasa por el vértice $(0, 3)$ de \mathcal{S} . El máximo valor de F sujeta a las restricciones es 21.

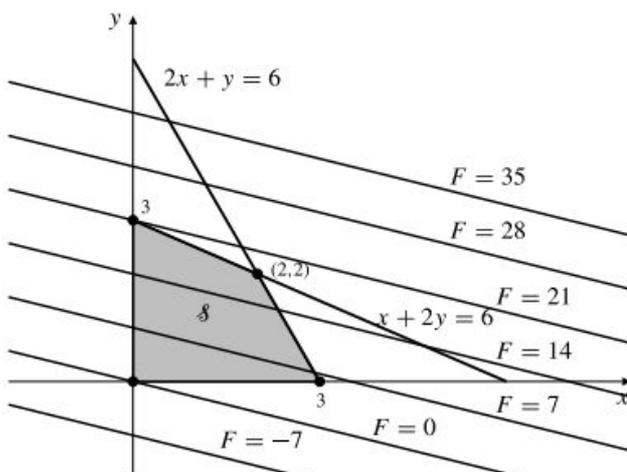


Figura 13.11 La región sombreada es el conjunto solución de las desigualdades de restricciones del Ejemplo 4.

Como ilustra este ejemplo simple, una función *lineal* con dominio restringido por desigualdades lineales no alcanza valores máximos ni mínimos en puntos del interior de su dominio (si dicho dominio tiene interior). Cualquier valor extremo se producirá en un punto frontera del dominio o en un conjunto de tales puntos frontera. Cuando el valor extremo se produzca en un conjunto de puntos frontera, dicho conjunto *siempre* contendrá al menos un vértice.

Este comportamiento se sigue cumpliendo en general para problemas de valores extremos de funciones lineales en cualquier número de variables, cuyos dominios estén restringidos por cualquier número de desigualdades lineales. En el caso de problemas con tres variables, el dominio será una región convexa de \mathbb{R}^3 limitada por planos. En el caso de un problema con n variables, el dominio será una región convexa de \mathbb{R}^n limitada por hiperplanos de dimensión $n - 1$. Estas regiones *poliédricas* tendrán vértices (donde se crucen n hiperplanos), y los valores máximo y mínimo de las funciones lineales sujetas a las restricciones se seguirán produciendo en subconjuntos de la frontera que contendrán a esos vértices. Por tanto, estos problemas se pueden resolver evaluando la función lineal que se ha de optimizar (se denomina **función objetivo**) en todos los vértices y seleccionando el valor máximo o mínimo.

En la práctica, en los problemas de programación lineal pueden intervenir cientos y hasta miles de variables, e incluso más restricciones. Estos problemas deben ser resueltos con computadores, pero incluso así es extremadamente ineficiente, si no imposible, calcular todos los vértices del conjunto solución de las restricciones, y los valores de la función objetivo en dichos vértices. Muchos de los estudios sobre programación lineal se centran, por tanto, en desarrollar técnicas para obtener (o al menos acercarse) el vértice óptimo en tan pocos pasos como sea posible. En general, intervienen criterios por los que un gran número de vértices se pueden rechazar mediante consideraciones geométricas. No profundizaremos en estas técnicas, sino que nos contentaremos con presentar un ejemplo más para ilustrar, en un caso muy simple, cómo se puede utilizar la geometría subyacente de un problema para reducir el número de vértices que se deben considerar.

Ejemplo 5 Un sastre dispone de 230 m de cierta tela y tiene pedidos para un máximo de 20 trajes, un máximo de 30 chaquetas y un máximo de 40 pantalones, para realizar con dicha tela. Cada traje requiere 6 m de tela, cada chaqueta 3 m y cada pantalón 2 m. Si el beneficio del sastre es de 20 € por traje, 14 € por chaqueta y 12 € por pantalón, ¿cuántos debe hacer para obtener el máximo beneficio con la tela de que dispone?

Solución Supongamos que el sastre hace x trajes, y chaquetas y z pantalones. En ese caso, su beneficio será

$$P = 20x + 14y + 12z$$

Las restricciones del problema son

$$x \geq 0, \quad x \leq 20$$

$$y \geq 0, \quad y \leq 30$$

$$z \geq 0, \quad z \leq 40$$

$$6x + 3y + 2z \leq 230$$

La última desigualdad se debe al suministro limitado de la fábrica. La Figura 13.12 muestra el conjunto solución. Tiene 10 vértices, A, B, \dots, J . Como P crece en la dirección del vector $\nabla P = 20\mathbf{i} + 14\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$, que apunta hacia el primer octante, el valor máximo no se puede alcanzar en ninguno de los vértices A, B, \dots, G (piénsese por qué). Por consiguiente, sólo necesitamos buscar en los vértices H, I y J .

$$H = (20, 10, 40), \quad P = 1020 \text{ en } H$$

$$I = (10, 30, 40), \quad P = 1100 \text{ en } I$$

$$J = (20, 30, 10), \quad P = 940 \text{ en } J$$

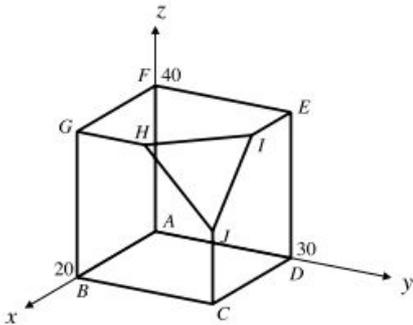


Figura 13.12 El conjunto convexo de puntos que cumplen las restricciones del Ejemplo 5.

Por consiguiente, el sastre debe hacer 10 trajes, 30 chaquetas y 40 pantalones para obtener su máximo beneficio, 1100 €, con la tela de que dispone.

Ejercicios 13.2

1. Calcule los valores máximo y mínimo de $f(x, y) = x - x^2 + y^2$ en el rectángulo $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$.
2. Calcule los valores máximo y mínimo de $f(x, y) = xy - 2x$ en el rectángulo $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.
3. Calcule los valores máximo y mínimo de $f(x, y) = xy - y^2$ en el disco $x^2 + y^2 \leq 1$.
4. Calcule los valores máximo y mínimo de $f(x, y) = x + 2y$ en el disco $x^2 + y^2 \leq 1$.
5. Calcule el valor máximo de $f(x, y) = xy - x^2y^2$ en el cuadrado $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.
6. Calcule los valores máximo y mínimo de $f(x, y) = xy(1 - x - y)$ en el triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$.
7. Calcule los valores máximo y mínimo de $f(x, y) = \sin x \cos y$ en la región triangular cerrada limitada por los ejes de coordenadas y la recta $x + y = 2\pi$.
8. Calcule el valor máximo de $f(x, y) = \sin x \sin y \sin(x + y)$ en el triángulo limitado por los ejes de coordenadas y la recta $x + y = \pi$.
9. La temperatura de todos los puntos del disco $x^2 + y^2 \leq 1$ está dada por $T = (x + y)e^{-x^2 - y^2}$. Calcule las temperaturas máxima y mínima en los puntos del disco.
10. Calcule los valores máximo y mínimo de $f(x, y) = \frac{x - y}{1 + x^2 + y^2}$ en el semiplano superior $y \geq 0$.
11. Calcule los valores máximo y mínimo de $xy^2 + yz^2$ en la bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.
12. Calcule los valores máximo y mínimo de $xz + yz$ en la bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.
13. Considere la función $f(x, y) = xye^{-xy}$ cuyo dominio es el primer cuadrante $x \geq 0$, $y \geq 0$. Demuestre que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, kx) = 0$. ¿Tiene f límite cuando (x, y) se aleja arbitrariamente del origen por el primer cuadrante? ¿Tiene f un valor máximo en el primer cuadrante?
14. Repita el Ejercicio 13 para la función $f(x, y) = xy^2e^{-xy}$.
15. En cierta comunidad hay dos fábricas de cerveza que compiten, de forma que las ventas de una afectan negativamente al beneficio de la otra. Si la fábrica A produce x litros de cerveza al mes y la fábrica B produce y litros de cerveza al mes, entonces los beneficios mensuales de $P \in$ de la fábrica A y de $Q \in$ de la fábrica B se pueden expresar como
$$P = 2x - \frac{2x^2 + y^2}{10^6}$$

$$Q = 2y - \frac{4y^2 + x^2}{2 \times 10^6}$$
 Calcule la suma de los beneficios de las dos fábricas si cada una establece su producción de forma independiente, con el criterio de maximizar su propio beneficio, y asume que su competidora hace lo mismo. Calcule la suma de los beneficios si las dos fábricas cooperan y determinan sus producciones respectivas de forma que se maximice dicha suma.
16. En una valla recta de 100 m de longitud se realizan dos dobleces que forman el mismo ángulo a la misma

distancia de sus extremos, y la cerca de tres segmentos resultantes se pega a un muro existente para formar un recinto de forma trapezoidal. ¿Cuál es la máxima área posible de dicho recinto?

- 17.** Maximice $Q(x, y) = 2x + 3y$ sujeta a las restricciones $x \geq 0, y \geq 0, y \leq 5, x + 2y \leq 12$ y $4x + y \leq 12$.
- 18.** Minimice $F(x, y, z) = 2x + 3y + 4z$ sujeta a las restricciones $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y \geq 2, y + z \geq 2$ y $x + z \geq 2$.
- 19.** Un fabricante textil produce dos tipos de tela de lana-algodón-poliéster. El tipo de lujo tiene una composición (por peso) del 20% de lana, el 50% de algodón y el 30% de poliéster y lo vende a 3 € por kilogramo. El tipo estándar tiene una composición

del 10% de lana, el 40% de algodón y el 50% de poliéster, y lo vende a 2 € por kilogramo. Si tiene en stock 2000 kg de lana, 6000 kg de algodón y 6000 kg de poliéster, ¿cuántos kilogramos de tela de cada tipo debería fabricar para maximizar sus ingresos?

- 20.** Un terreno de 10 hectáreas se parcela para realizar construcciones con densidades de seis chalets aislados por hectárea, ocho dúplex por hectárea o 12 apartamentos por hectárea. El promotor que posee el terreno puede obtener un beneficio de 40 000 € por chalet aislado, 20 000 € por dúplex y 16 000 € por apartamento. Las leyes municipales lo obligan a construir al menos tantos apartamentos como el total de chalets y dúplex. ¿Cuántas construcciones de cada tipo debe realizar para maximizar su beneficio?

13.3 Multiplicadores de Lagrange

Un problema de valores extremos con restricciones es aquel en el que las variables de la función a maximizar o minimizar no son completamente independientes entre sí, sino que deben satisfacer una o más ecuaciones o desigualdades de restricciones. Por ejemplo, los problemas

$$\text{maximizar } f(x, y) \quad \text{sujeto a } g(x, y) = C$$

y

$$\begin{aligned} \text{minimizar } f(x, y, z, w) \quad \text{sujeto a } g(x, y, z, w) = C_1 \\ \text{y } h(x, y, z, w) = C_2 \end{aligned}$$

tienen, respectivamente, una y dos ecuaciones de restricciones, y el problema

$$\text{maximizar } f(x, y, z) \quad \text{sujeto a } g(x, y, z) \leq C$$

tiene una única desigualdad de restricciones.

En general, se puede considerar que las desigualdades de restricciones restringen el dominio de la función a optimizar a un conjunto menor que todavía posea puntos interiores. La Sección 13.2 ha estado dedicada a estos problemas. En los tres primeros ejemplos de dicha sección buscábamos valores extremos *libres* (es decir, *sin restricciones*) en el interior del dominio, y examinábamos también la frontera del dominio, especificada por una o varias *ecuaciones de restricciones*. En el Ejemplo 1 parametrizamos la frontera y expresamos la función a optimizar en función del parámetro, para reducir así el problema a un problema libre en una variable, en vez de ser un problema con restricciones en dos variables. En el Ejemplo 2 la frontera estaba formada por tres segmentos rectos, en dos de los cuales la función valía obviamente cero. Utilizando la ecuación del tercer segmento despejamos y en función de x , para expresar los valores de $f(x, y)$ en ese segmento en función de una única variable libre. En el Ejemplo 3 utilizamos un enfoque similar para tratar la frontera triangular de la función de área $A(\theta, \phi)$.

La reducción de problemas de optimización con ecuaciones de restricciones a problemas libres con menos variables independientes sólo es posible cuando a partir de las ecuaciones de restricciones se pueden despejar explícitamente algunas variables en función de las otras, o bien cuando se pueden expresar paramétricamente todas las variables en función de unos pocos parámetros. A menudo es muy difícil o imposible resolver las ecuaciones de restricciones, por lo que necesitamos otras técnicas.

El método de los multiplicadores de Lagrange

Una técnica para calcular valores extremos de $f(x, y)$ sujeta a la restricción de igualdad $g(x, y) = 0$ se basa en el siguiente teorema:

TEOREMA 4 Supongamos que f y g tienen derivadas parciales primeras continuas cerca del punto $P_0 = (x_0, y_0)$ sobre la curva \mathcal{C} cuya ecuación es $g(x, y) = 0$. Supongamos además que, cuando se restringe a los puntos de \mathcal{C} , la función $f(x, y)$ tiene un valor máximo o mínimo local en P_0 . Supongamos finalmente que,

- (i) P_0 no es un extremo de \mathcal{C} .
- (ii) $\nabla g(P_0) \neq \mathbf{0}$.

Entonces existe un número λ_0 tal que (x_0, y_0, λ_0) es un punto crítico de la **función Lagrangiana**

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

DEMOSTRACIÓN En conjunto, (i) y (ii) implican que \mathcal{C} es lo suficientemente suave para tener una tangente en P_0 , y que $\nabla g(P_0)$ es normal a dicha tangente. Si $\nabla f(P_0)$ no es paralela a $\nabla g(P_0)$, entonces $\nabla f(P_0)$ tiene un vector proyección \mathbf{v} distinto de cero sobre la recta tangente a \mathcal{C} en P_0 (véase la Figura 13.13). Por lo tanto, f tiene una derivada direccional positiva en P_0 en la dirección de \mathbf{v} , y una derivada direccional negativa en la dirección opuesta. Entonces, $f(x, y)$ crece o decrece a medida que nos alejamos de P_0 por la curva \mathcal{C} en la dirección de \mathbf{v} o de $-\mathbf{v}$, y f no puede tener un máximo ni un mínimo en P_0 . Como estamos suponiendo que f tiene un valor extremo en P_0 , lo que debe ocurrir es que $\nabla f(P_0)$ es paralelo a $\nabla g(P_0)$. Como $\nabla g(P_0) \neq \mathbf{0}$, debe existir un número real λ_0 tal que $\nabla f(P_0) = -\lambda_0 \nabla g(P_0)$, o

$$\nabla(f + \lambda_0 g)(P_0) = \mathbf{0}$$

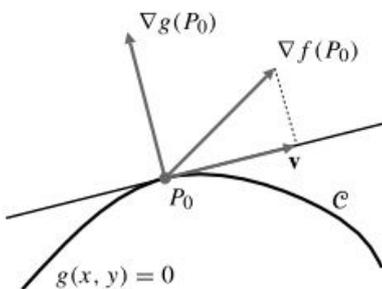


Figura 13.13 Si $\nabla f(P_0)$ no es un múltiplo de $\nabla g(P_0)$, entonces $\nabla f(P_0)$ tiene un vector proyección \mathbf{v} distinto de cero tangente a la curva de nivel de g que pasa por P_0 .

Las dos componentes de la ecuación vectorial anterior afirman que $\partial L/\partial x = 0$ y $\partial L/\partial y = 0$ en (x_0, y_0, λ_0) . La tercera ecuación que debe cumplir un punto crítico de L es $\partial L/\partial \lambda = g(x, y) = 0$. Ésta se cumple en (x_0, y_0, λ_0) , ya que P_0 está en \mathcal{C} . Por tanto, (x_0, y_0, λ_0) es un punto crítico de $L(x, y, \lambda)$.

El Teorema 4 sugiere que para obtener candidatos de puntos de la curva $g(x, y) = 0$ donde $f(x, y)$ alcance un máximo o un mínimo, hay que buscar los puntos críticos de la función Lagrangiana

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

En todo punto crítico de L debe cumplirse

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \frac{\partial L}{\partial x} = f_1(x, y) + \lambda g_1(x, y) \\ 0 &= \frac{\partial L}{\partial y} = f_2(x, y) + \lambda g_2(x, y) \end{aligned} \right\} \text{ es decir, } \nabla f \text{ es paralelo a } \nabla g$$

$$y \quad 0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x, y) \quad \text{la ecuación de la restricción}$$

Nótese, sin embargo, que se *supone* que el problema con restricciones *tiene solución*. El Teorema 4 no garantiza que dicha solución exista; sólo indica la forma de calcular una solución que ya se sabe que existe. En general es necesario ver primero si el problema en estudio tiene solución antes de utilizar este método para intentar obtenerla.

Apliquemos el método en un caso concreto:

Ejemplo 1 Calcule la mínima distancia desde el origen a la curva $x^2y = 16$.

Solución La Figura 13.14 muestra la gráfica de $x^2y = 16$. Parece haber dos puntos en la curva que son los más cercanos al origen (la curva no está acotada). Para calcular los puntos más cercanos basta con minimizar el *cuadrado* de la distancia de un punto (x, y) de la curva al origen (es más sencillo trabajar con el cuadrado de la distancia que con la propia distancia, ya que en esta última aparece una raíz cuadrada, más difícil de diferenciar). Por tanto, deseamos resolver el problema

$$\text{minimizar } f(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{sueto a } g(x, y) = x^2y - 16 = 0$$

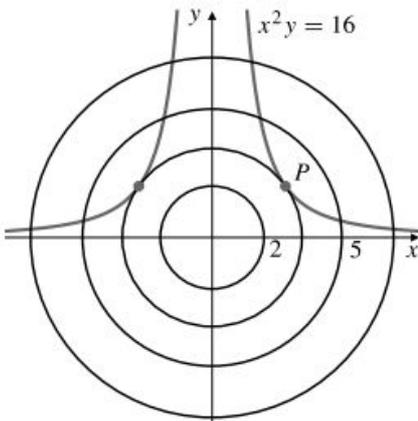


Figura 13.14 La curva de nivel de la función que representa el cuadrado de la distancia al origen es tangente a la curva $x^2y = 16$ en los dos puntos donde dicha curva está más próxima al origen.

Sea $L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2y - 16)$. En los puntos críticos de L debe cumplirse

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2\lambda xy = 2x(1 + \lambda y) \quad (\text{A})$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda x^2 \quad (\text{B})$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2y - 16 \quad (\text{C})$$

La ecuación (A) requiere que $x = 0$ o que $\lambda y = -1$. Sin embargo, $x = 0$ es inconsistente con la ecuación (C). Por tanto, $\lambda y = -1$. A partir de la ecuación (B) tenemos ahora

$$0 = 2y^2 + \lambda y x^2 = 2y^2 - x^2$$

Por consiguiente, $x = \pm\sqrt{2}y$, y (C) permite obtener ahora $2y^3 = 16$, por lo que $y = 2$. Así, existen dos candidatos a puntos de $x^2y = 16$ más cercanos al origen, $(\pm 2\sqrt{2}, 2)$. Ambos están a distancia

$\sqrt{8+4} = 2\sqrt{3}$ unidades del origen, por lo que ésta debe ser la mínima distancia desde el origen a la curva. En la Figura 13.14 se muestran algunas curvas de nivel de $x^2 + y^2$, junto con la curva de la restricción $x^2y = 16$. Obsérvese cómo la curva de la restricción es tangente a la curva de nivel que pasa por los puntos que minimizan la distancia $(\pm 2\sqrt{2}, 2)$, reflejando el hecho de que las normales a las dos curvas son paralelas en esos puntos.

Observación Por supuesto, en el ejemplo anterior podríamos haber despejado y de la ecuación de restricciones en la forma $y = 16/x^2$, haber sustituido en f y, por tanto, haber reducido el problema al de obtener el valor mínimo (sin restricciones) de

$$F(x) = f\left(x, \frac{16}{x^2}\right) = x^2 + \frac{256}{x^4}$$

Se invita al lector a verificar que se obtiene el mismo resultado.

El número λ que aparece en la función Lagrangiana se denomina **multiplicador de Lagrange**. La técnica de solución de problemas de valores extremos buscando los puntos críticos de un problema con restricciones con más variables (las variables originales más los multiplicadores de Lagrange correspondientes a cada ecuación de restricciones) se denomina **método de los multiplicadores de Lagrange**. Dará buenos resultados en tanto en cuanto la función a maximizar o minimizar (denominada **función objetivo**) y las ecuaciones de las restricciones tengan gráficas *suaves* en un entorno de los puntos donde se produzcan los valores extremos, y esos puntos no estén en *bordes* de las gráficas. Véanse el Ejemplo 3 y el Ejercicio 26 posteriores.

Ejemplo 2 Calcule los puntos de la curva $17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100$ que están más cerca y más lejos del origen.

Solución La forma cuadrática del miembro izquierdo de la ecuación anterior es definida positiva, como se puede ver completando el cuadrado. Por tanto, la curva está acotada y debe tener puntos con distancia máxima y mínima al origen (de hecho, la curva es una elipse centrada en el origen y con ejes principales oblicuos. El problema pide calcular los extremos de los ejes mayor y menor).

De nuevo, lo que deseamos es optimizar $x^2 + y^2$ sujeta a la ecuación de restricciones. En este caso el Lagrangiano es

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(17x^2 + 12xy + 8y^2 - 100)$$

y los puntos críticos deben cumplir

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda(34x + 12y) \quad (\text{A})$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda(12x + 16y) \quad (\text{B})$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 17x^2 + 12xy + 8y^2 - 100 \quad (\text{C})$$

Despejando λ en las ecuaciones (A) y (B) e igualando las dos expresiones de λ se obtiene

$$\frac{-2x}{34x + 12y} = \frac{-2y}{12x + 16y} \quad \text{o} \quad 12x^2 + 16xy = 34xy + 12y^2$$

Esta ecuación se puede simplificar, obteniéndose

$$2x^2 - 3xy - 2y^2 = 0$$

Multiplicando la ecuación (D) por 4 y sumando el resultado a la ecuación (C) se obtiene $25x^2 = 100$, por lo que $x = \pm 2$. Finalmente, se sustituyen los dos valores de x en (D) y se obtienen (para cada uno) dos valores de y de las correspondientes ecuaciones de segundo grado:

$$\begin{aligned} \text{Para } x = 2: y^2 + 3y - 4 = 0, & \quad \text{Para } x = -2: y^2 - 3y - 4 = 0 \\ (y - 1)(y + 4) = 0 & \quad (y + 1)(y - 4) = 0 \end{aligned}$$

Obtenemos, por tanto, cuatro puntos candidatos: $(2, 1)$, $(-2, -1)$, $(2, -4)$ y $(-2, 4)$. Los dos primeros puntos son los más cercanos al origen; son los extremos del eje menor de la elipse. Los otros dos son los más lejanos del origen (los extremos del eje mayor) (véase la Figura 13.15).

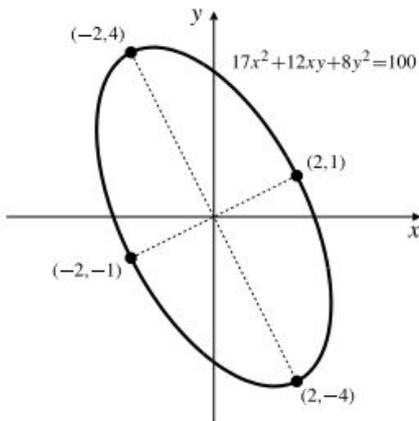


Figura 13.15 Los puntos de la elipse que están más cerca y más lejos del origen.

Considerando las bases geométricas del método de los multiplicadores de Lagrange, no debemos esperar que el método tenga éxito si las curvas de nivel de las funciones que intervienen no son suaves, o si el máximo o mínimo se produce en un extremo de la curva de restricciones. Uno de los obstáculos del método es que las curvas de nivel de las funciones pueden no ser suaves, incluso aunque las propias funciones tengan derivadas parciales. Pueden aparecer problemas cuando un gradiente se anula, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3 Calcule el valor mínimo de $f(x, y) = y$, sujeta a la ecuación de restricción $g(x, y) = y^3 - x^2 = 0$.

Solución La parábola semicúbica $y^3 = x^2$ tiene un vértice en el origen (véase la Figura 13.16). Es claro que $f(x, y) = y$ tiene un valor mínimo de 0 en ese punto. Sin embargo, supongamos que intentamos resolver el problema utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange. En este caso el Lagrangiano es

$$L(x, y, \lambda) = y + \lambda(y^3 - x^2)$$

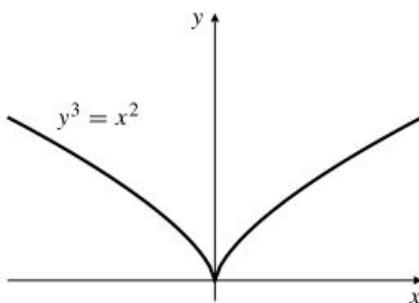


Figura 13.16 El mínimo de y se produce en un punto de la curva donde ésta no tiene tangente.

cuyos puntos críticos deben cumplir

$$\begin{aligned} -2\lambda x &= 0 \\ 1 + 3\lambda y^2 &= 0 \\ y^3 - x^2 &= 0 \end{aligned}$$

Obsérvese que $y = 0$ no puede satisfacer la segunda ecuación, y, de hecho, las tres ecuaciones *no tienen solución* (x, y, λ) (la primera ecuación implica que o bien $\lambda = 0$, o bien $x = 0$, pero ninguna de ellas es consistente con las otras dos ecuaciones).

Observación El método de los multiplicadores de Lagrange no funciona en el ejemplo anterior porque $\nabla g = \mathbf{0}$ en el punto de solución, y por tanto la curva $g(x, y) = 0$ puede no ser suave en dicho punto (de hecho, en este caso no lo es). La condición geométrica de que ∇f debe ser paralelo ∇g en el punto de solución carece de sentido en este caso. Cuando se aplica el método de los multiplicadores de Lagrange, hay que estar seguro de que el valor extremo se puede producir en:

- (i) Un punto crítico del Lagrangiano.
- (ii) Un punto donde $\nabla g = \mathbf{0}$.
- (iii) Un punto donde ∇f o ∇g no existen.
- (iv) Un «extremo» del conjunto de restricciones.

Esta situación es similar a la de los valores extremos de una función f de una variable, que pueden producirse en un punto crítico, un punto singular o un extremo del dominio de f .

Problemas con más de una restricción

Consideraremos a continuación un problema tridimensional que requiere la obtención de un valor máximo o mínimo de una función de tres variables sujeta a dos ecuaciones de restricciones:

$$\text{optimizar } f(x, y, z) \quad \text{sujeto a } g(x, y, z) = 0 \text{ y } h(x, y, z) = 0$$

Supongamos de nuevo que el problema tiene solución, por ejemplo el punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, y que las funciones f , g y h tienen derivadas parciales primeras continuas cerca de P_0 . Supongamos también que $\mathbf{T} = \nabla g(P_0) \times \nabla h(P_0) \neq \mathbf{0}$. Estas condiciones implican que las superficies $g(x, y, z) = 0$ y $h(x, y, z) = 0$ son suaves cerca de P_0 y que no son tangentes entre sí en ese punto, por lo que deben cruzarse formando una curva \mathcal{C} que es suave cerca de P_0 . La curva \mathcal{C} tiene un vector tangente \mathbf{T} en P_0 . El mismo argumento geométrico utilizado en la demostración del Teorema 4 demuestra de nuevo que $\nabla f(P_0)$ debe ser perpendicular a \mathbf{T} (si no lo fuera, entonces habría un vector proyección sobre \mathbf{T} no nulo, y f tendría derivadas direccionales no nulas en las direcciones $\pm \mathbf{T}$, y por tanto crecería y decrecería cuando nos moviéramos a partir de P_0 siguiendo la curva \mathcal{C} en direcciones opuestas).

Como $\nabla g(P_0)$ y $\nabla h(P_0)$ son no nulos y ambos son perpendiculares a \mathbf{T} (véase la Figura 13.17), $\nabla f(P_0)$ debe estar en el plano generado por esos dos vectores y, por consiguiente, debe ser una combinación lineal de aquéllos:

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = -\lambda_0 \nabla g(x_0, y_0, z_0) - \mu_0 \nabla h(x_0, y_0, z_0)$$

para algunas constantes λ_0 y μ_0 . Se deduce entonces que $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0, \mu_0)$ es un punto crítico de la función Lagrangiana

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) + \mu h(x, y, z)$$

Buscamos tripletes (x, y, z) que optimicen $f(x, y, z)$ sujeta a las dos restricciones $g(x, y, z) = 0$ y $h(x, y, z) = 0$ entre los puntos (x, y, z, λ, μ) que sean puntos críticos de la función Lagrangiana anterior, y por tanto debemos resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) + \lambda g_1(x, y, z) + \mu h_1(x, y, z) &= 0 \\ f_2(x, y, z) + \lambda g_2(x, y, z) + \mu h_2(x, y, z) &= 0 \\ f_3(x, y, z) + \lambda g_3(x, y, z) + \mu h_3(x, y, z) &= 0 \\ g(x, y, z) &= 0 \\ h(x, y, z) &= 0 \end{aligned}$$

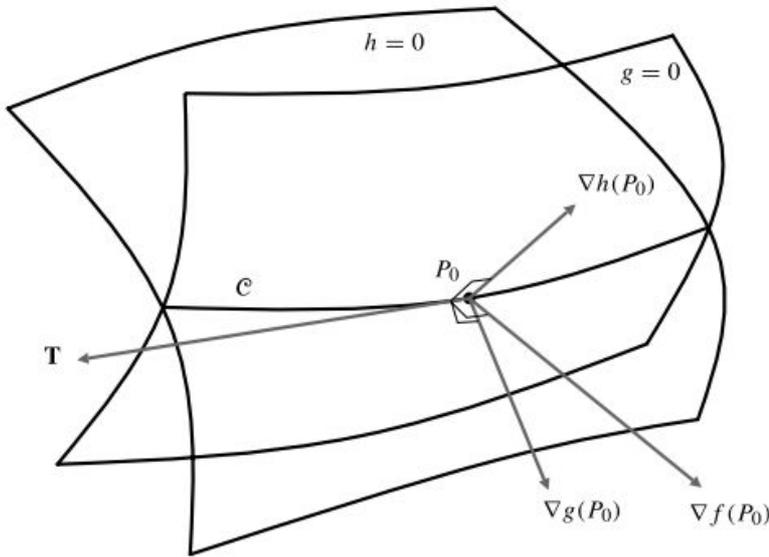


Figura 13.17 En P_0 , ∇f , ∇g y ∇h son todos perpendiculares a \mathbf{T} . Por tanto, ∇f está en el plano generado por ∇g y ∇h .

La resolución de un sistema como éste puede ser muy difícil. Debe notarse que al utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange en vez de resolver las ecuaciones de restricciones, hemos cambiado el problema de resolver dos ecuaciones para expresar dos variables como *funciones* de una tercera por un problema de obtener valores *numéricos* resolviendo cinco ecuaciones con cinco incógnitas.

Ejemplo 4 Calcule los valores máximo y mínimo de $f(x, y, z) = xy + 2z$ en la circunferencia correspondiente a la intersección del plano $x + y + z = 0$ con la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 24$.

Solución La función f es continua, y la circunferencia es un conjunto cerrado y acotado en el espacio tridimensional. Por tanto, deben existir valores máximo y mínimo. Buscaremos los puntos críticos del Lagrangiano

$$L = xy + 2z + \lambda(x + y + z) + \mu(x^2 + y^2 + z^2 - 24)$$

Igualando a cero las primeras derivadas de L , obtenemos

$$y + \lambda + 2\mu x = 0 \tag{A}$$

$$x + \lambda + 2\mu y = 0 \tag{B}$$

$$2 + \lambda + 2\mu z = 0 \tag{C}$$

$$x + y + z = 0 \tag{D}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 24 = 0 \tag{E}$$

Restando (A) de (B) obtenemos $(x - y)(1 - 2\mu) = 0$. Por tanto, $\mu = \frac{1}{2}$ o $x = y$. Analizaremos ambas posibilidades.

Cuando ninguna de las ecuaciones se pueda factorizar, intente combinar dos o más para producir una nueva ecuación que se pueda factorizar.

CASO I Si $\mu = \frac{1}{2}$, obtenemos a partir de (B) y (C)

$$x + \lambda + y = 0 \quad \text{y} \quad 2 + \lambda + z = 0$$

Por tanto, $x + y = 2 + z$. Combinando esto con (D) se obtiene $z = -1$ y $x + y = 1$. Ahora, por (E), $x^2 + y^2 = 24 - z^2 = 23$. Como $x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2 = 1$, tenemos $2xy = 1 - 23 = -22$ y $xy = -11$. Ahora $(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = 23 + 22 = 45$, por lo que $x - y = \pm 3\sqrt{5}$. Combinando esto con

$x + y = 1$, se obtienen dos puntos críticos que resultan de $\mu = \frac{1}{2}$, concretamente, $((1 + 3\sqrt{5})/2, (1 - 3\sqrt{5})/2, -1)$ y $((1 - 3\sqrt{5})/2, (1 + 3\sqrt{5})/2, -1)$. En ambos puntos se tiene que $f(x, y, z) = xy + 2z = -11 - 2 = -13$.

CASO II Si $x = y$, entonces (D) implica que $z = -2x$, y (E) produce entonces $6x^2 = 24$, por lo que $x = \pm 2$. Por tanto, debemos considerar los puntos $(2, 2, -4)$ y $(-2, -2, 4)$. Tenemos $f(2, 2, -4) = 4 - 8 = -4$ y $f(-2, -2, 4) = 4 + 8 = 12$.

Concluimos entonces que el valor máximo de f en la circunferencia es 12, y el valor mínimo es -13 .

El método de los multiplicadores de Lagrange se puede aplicar para obtener valores extremos de una función de n variables, es decir, de una variable vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, sujeta a $m \leq n - 1$ restricciones:

$$\text{optimizar } f(\mathbf{x}) \quad \text{sujeto a } g_{(1)}(\mathbf{x}) = 0, \dots, g_{(m)}(\mathbf{x}) = 0$$

Suponiendo que el problema tiene solución en el punto P_0 , que f y todas las funciones $g_{(j)}$ tienen derivadas parciales primeras continuas en un entorno de P_0 , y que la intersección de las (hiper) superficies de restricciones es suave cerca de P_0 , entonces podemos buscar el punto P_0 entre los puntos críticos de la función Lagrangiana de $(n + m)$ variables

$$L(\mathbf{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_{(j)}(\mathbf{x})$$

No demostraremos esta afirmación general (la demostración se puede basar en el Teorema de la Función Implícita). Todos los puntos críticos deben satisfacer las $n + m$ ecuaciones

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad (1 \leq i \leq n), \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = g_{(j)}(\mathbf{x}) = 0, \quad (1 \leq j \leq m)$$

Programación no lineal

Cuando en la sección anterior buscamos valores extremos de funciones f en dominios restringidos R , tuvimos que buscar separadamente puntos críticos de f en el interior de R y puntos críticos de la restricción de f en la frontera de R . El interior de R está generalmente especificado por una o más restricciones en forma de inequación $g < 0$, y la frontera corresponde a restricciones en forma de ecuación $g = 0$ (para las que se puede utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange).

Es posible unificar estos enfoques en un solo método de cálculo de valores extremos de funciones definidas en regiones especificadas por inequaciones de la forma $g \leq 0$.

Consideremos, por ejemplo, el problema de obtener valores extremos de $f(x, y)$ en la región R especificada por $g(x, y) \leq 0$. Podemos proceder intentando obtener los puntos críticos de la función de cuatro variables

$$L(x, y, \lambda, u) = f(x, y) + \lambda(g(x, y) + u^2)$$

Estos puntos críticos deben cumplir las cuatro ecuaciones

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x} = f_1(x, y) + \lambda g_1(x, y) \tag{A}$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial y} = f_2(x, y) + \lambda g_2(x, y) \tag{B}$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = g_2(x, y) + u^2 \tag{C}$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial u} = 2\lambda u \tag{D}$$

Supongamos que (x, y, λ, u) satisface estas ecuaciones. Consideraremos dos casos:

CASO I $u \neq 0$. Entonces (D) implica que $\lambda = 0$, (C) implica que $g(x, y) = -u^2 < 0$, y (A) y (B) implican que $f_1(x, y) = 0$ y $f_2(x, y) = 0$. Por tanto, (x, y) es un punto crítico interior de f .

CASO II $u = 0$. Entonces (C) implica que $g(x, y) = 0$, y (A) y (B) implican que $\nabla f(x, y) = -\lambda \nabla g(x, y)$, por lo que (x, y) es un punto frontera candidato a ser valor extremo.

Esta técnica se puede ampliar al problema de calcular los valores extremos de una función de n variables, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, en la intersección R de m regiones R_j definidas por restricciones en forma de inecuación $g_j(\mathbf{x}) \leq 0$.

$$\text{optimizar } f(\mathbf{x}) \quad \text{sujeto a } g_{(1)}(\mathbf{x}) \leq 0, \dots, g_{(m)}(\mathbf{x}) \leq 0$$

En este caso buscaremos puntos críticos del Lagrangiano de $n + 2m$ variables

$$L(\mathbf{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_m, u_1, \dots, u_m) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j (g_{(j)}(\mathbf{x}) + u_j^2)$$

Los puntos críticos cumplirán el sistema de $n + 2m$ ecuaciones

$$\nabla f(\mathbf{x}) = - \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla g_{(j)}(\mathbf{x}) \quad (n \text{ ecuaciones})$$

$$g_{(j)}(\mathbf{x}) = -u_j^2, \quad (1 \leq j \leq m) \quad (m \text{ ecuaciones})$$

$$2\lambda_j u_j = 0, \quad (1 \leq j \leq m) \quad (m \text{ ecuaciones})$$

Las últimas m ecuaciones muestran que $\lambda_j = 0$ para todo j tal que $u_j \neq 0$. Si todo $u_j \neq 0$, entonces \mathbf{x} es un punto crítico de f interior a R . En otro caso, alguna de las u_j será cero, por ejemplo, aquellas correspondientes a valores de j en un subconjunto J de $\{1, 2, \dots, m\}$. En este caso \mathbf{x} estará en la parte de la frontera de R formada por puntos de cada una de las regiones R_j para las que $j \in J$, y ∇f será una combinación lineal de los correspondientes gradientes $\nabla g_{(j)}$:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = - \sum_{j \in J} \lambda_j \nabla g_{(j)}(\mathbf{x})$$

Las expresiones anteriores se conocen por el nombre de **condiciones de Kuhn-Tucker**, y esta técnica de resolución de problemas de valores extremos en dominios restringidos se denomina **programación no lineal**.

Ejercicios 13.3

1. Utilice el método de los multiplicadores de Lagrange para maximizar $x^3 y^5$ sujeta a la restricción $x + y = 8$.
2. Calcule la mínima distancia del punto $(3, 0)$ a la parábola $y = x^2$:
 - (a) Por reducción a un problema sin restricciones en una variable.
 - (b) Utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange.
3. Calcule la distancia del origen al plano $x + 2y + 2z = 3$:
 - (a) Utilizando un argumento geométrico (sin utilizar cálculo).
 - (b) Reduciendo el problema a un problema sin restricciones en dos variables.
 - (c) Utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange.
4. Calcule los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y, z) = x + y - z$ en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
5. Utilice el método de los multiplicadores de Lagrange para calcular la máxima y mínima distancia del punto $(2, 1, -2)$ a la esfera cuya ecuación es $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (por supuesto, la respuesta se podría obtener más fácilmente utilizando un argumento geométrico simple).

- 6.** Calcule la mínima distancia del origen a la superficie $xyz^2 = 2$.
- 7.** Calcule a , b y c de forma que el volumen $V = 4\pi abc/3$ de un elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ que pase por el punto $(1, 2, 1)$ sea lo más pequeño posible.
- 8.** Calcule los extremos de los ejes mayor y menor de la elipse $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 16$.
- 9.** Calcule los valores máximo y mínimo de $f(x, y, z) = xyz$ en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 12$.
- 10.** Calcule los valores máximo y mínimo de $x + 2 - 3z$ en el elipsoide $x^2 + 4y^2 + 9z^2 \leq 108$.
- 11.** Calcule los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y, z) = x$ en la curva correspondiente a la intersección del plano $z = x + y$ y el elipsoide $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 8$.
- 12.** Calcule los valores máximo y mínimo de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ en la elipse formada por la intersección del cono $z^2 = x^2 + y^2$ y el plano $x - 2z = 3$.
- 13.** Calcule los valores máximo y mínimo de $f(x, y, z) = 4 - z$ en la elipse formada por la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 8$ y el plano $x + y + z = 1$.
- 14.** Calcule los valores máximo y mínimo de $f(x, y, z) = x + y^2z$ sujeta a las restricciones $y^2 + z^2 = 2$ y $z = x$.
- *15.** Utilice el método de los multiplicadores de Lagrange para calcular la mínima distancia entre las rectas $x = y = z$ y $x = -y, z = 2$ (existen, por supuesto, formas mucho más sencillas de obtener la respuesta. Esto es un ejemplo de matar moscas a cañonazos).
- 16.** Calcule los valores máximo y mínimo de la función de n variables $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ sujeta a la restricción $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$.
- 17.** Repita el Ejercicio 16 para la función $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n$ con la misma restricción.
- 18.** Calcule la forma más económica de una caja rectangular sin tapa.
- 19.** Calcule el volumen máximo de una caja rectangular con caras paralelas a los planos coordenados, si una esquina está en el origen y la esquina situada en la diagonal opuesta está en el plano $4x + 2y + z = 2$.
- 20.** Calcule el volumen máximo de una caja rectangular con caras paralelas a los planos coordenados si una esquina está en el origen y la esquina situada en la diagonal opuesta está en la parte del primer octante de la superficie $xy + 2yz + 3xz = 18$.
- 21.** Se desea construir una caja rectangular sin tapa con un volumen determinado $V \text{ m}^3$ utilizando dos materiales diferentes. El material utilizado para el fondo y la parte frontal de la caja cuesta cinco veces (por metro cuadrado) lo que cuesta el material utilizado para la parte trasera y los otros dos lados. ¿Cuáles deberían ser las dimensiones de la caja para minimizar el coste de los materiales?
- *22.** Calcule los valores máximo y mínimo de $xy + z^2$ en la bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Utilice multiplicadores de Lagrange para tratar el caso de la frontera.
- *23.** Repita el Ejercicio 22 pero considere el caso de la frontera parametrizando la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ utilizando
- $$x = \sin \phi \cos \theta, \quad y = \sin \phi \sin \theta, \quad z = \cos \phi$$
- con $0 \leq \phi \leq \pi$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
- *24.** Si α , β y γ son los ángulos de un triángulo, demuestre que
- $$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}$$
- ¿Para qué triángulos se produce la igualdad?
- *25.** Suponga que f y g tienen derivadas parciales primeras continuas en el plano xy , y suponga también que $g_2(a, b) \neq 0$. Esto implica que la ecuación $g(x, y) = g(a, b)$ define implícitamente y como función de x cerca del punto (a, b) . Utilice la Regla de la Cadena para demostrar que si $f(x, y)$ tiene un valor extremo local en (a, b) sujeto a la restricción $g(x, y) = g(a, b)$, entonces para algún valor λ el punto (a, b, λ) es un punto crítico de la función
- $$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$
- Esto constituye una justificación más formal del método de los multiplicadores de Lagrange en este caso.
- 26.** ¿Cuál es la mínima distancia del punto $(0, -1)$ a la curva $y = \sqrt{1 - x^2}$? ¿Se puede resolver este problema mediante el método de los multiplicadores de Lagrange? ¿Por qué?
- 27.** El Ejemplo 3 demostró que el método de los multiplicadores de Lagrange puede fallar al obtener un punto que optimice $f(x, y)$ sujeto a la restricción $g(x, y) = 0$, si $\nabla g = \mathbf{0}$ en el punto óptimo. ¿Puede fallar también el método si $\nabla f = \mathbf{0}$ en el punto óptimo? ¿Por qué?

13.4 El método de los mínimos cuadrados

En el análisis de datos experimentales surgen importantes problemas de optimización. Con frecuencia, se diseñan experimentos para medir los valores de una o más magnitudes que se suponen constantes, o para demostrar una supuesta relación funcional entre magnitudes variables. El error experimental suele estar presente en las medidas, y es necesario repetir los experimentos varias veces para obtener valores *medios* o *promedios* de las cantidades que se desea medir.

Consideremos un ejemplo muy simple. Un experimento destinado a medir una cierta constante física c se repite n veces, y se obtienen los valores c_1, c_2, \dots, c_n . Si ninguna de las medidas se considera errónea, la intuición nos dice que es razonable utilizar el valor medio $c = (c_1 + c_2 + \dots + c_n)/n$ como el valor de c determinado por los experimentos. Veamos cómo se puede justificar esta intuición.

Son posibles varios modelos para determinar c a partir de los valores de los datos. Por ejemplo, podríamos escoger el valor de c que minimizara la suma T de sus distancias a los puntos de datos:

$$T = |c - c_1| + |c - c_2| + \dots + |c - c_n|$$

Esto no resulta satisfactorio por varias razones. Como los valores absolutos tienen puntos singulares, es difícil determinar el valor óptimo de c de acuerdo con este criterio. Lo que es más importante, c podría no quedar únicamente determinado. Si $n = 2$, cualquier punto situado en el intervalo entre c_1 y c_2 dará el mismo valor mínimo de T (véase el Ejercicio 24 posterior donde se presenta una generalización de este fenómeno).

Un enfoque más prometedor es minimizar la suma S de los *cuadrados* de las distancias de c a los puntos de datos:

$$S = (c - c_1)^2 + (c - c_2)^2 + \dots + (c - c_n)^2 = \sum_{i=1}^n (c - c_i)^2$$

Esta función de c es suave, y su valor mínimo (sin restricciones) se producirá en los puntos críticos de \bar{c} dados por

$$0 = \left. \frac{dS}{dc} \right|_{c=\bar{c}} = \sum_{i=1}^n 2(\bar{c} - c_i) = 2n\bar{c} - 2 \sum_{i=1}^n c_i$$

Por tanto, \bar{c} es la *media* de los valores de los datos:

$$\bar{c} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c_i = \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_n}{n}$$

La técnica utilizada para obtener \bar{c} anteriormente es un ejemplo de lo que se denomina **método de los mínimos cuadrados**. Tiene la siguiente interpretación geométrica. Si los valores de datos c_1, c_2, \dots, c_n se consideran componentes de un vector \mathbf{c} en \mathbb{R}^n , y \mathbf{w} es el vector cuyas componentes son 1, 1, ..., 1, entonces el vector proyección de \mathbf{c} en la dirección de \mathbf{w} ,

$$\mathbf{c}_{\mathbf{w}} = \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{w}|^2} \mathbf{w} = \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_n}{n} \mathbf{w}$$

tiene todas sus componentes iguales al promedio de los valores de los datos. Así, determinar c a partir de los datos mediante el método de mínimos cuadrados es equivalente a obtener el vector proyección del vector de los datos en el subespacio unidimensional de \mathbb{R}^n generado por \mathbf{w} . Si las medidas c_i no tuvieran error, entonces \mathbf{c} habría sido igual a $c\mathbf{w}$.

Regresión lineal

En las investigaciones científicas muchas veces se sospecha que la respuesta de un sistema es una cierta clase de función de una o más variables de entrada. Los investigadores crean experimentos para medir la respuesta del sistema a diversos valores de esas variables para determinar los parámetros de la función.

Por ejemplo, supongamos que se sospecha que la respuesta y de un sistema depende de la entrada x de acuerdo con la relación lineal

$$y = ax + b$$

donde los valores de a y b son desconocidos. Un experimento diseñado para medir los valores de y correspondientes a varios valores de x producirá n puntos de datos, (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$. Si la supuesta relación lineal es válida, esos datos seguirán *aproximadamente* una línea recta, pero no exactamente, debido al error experimental. Supongamos que los puntos están dispuestos como se muestra en la Figura 13.18. En este caso, parece razonable suponer una relación lineal. Nuestro objetivo sería calcular los valores de a y b de la recta $y = ax + b$ que «mejor» se ajuste a los datos.

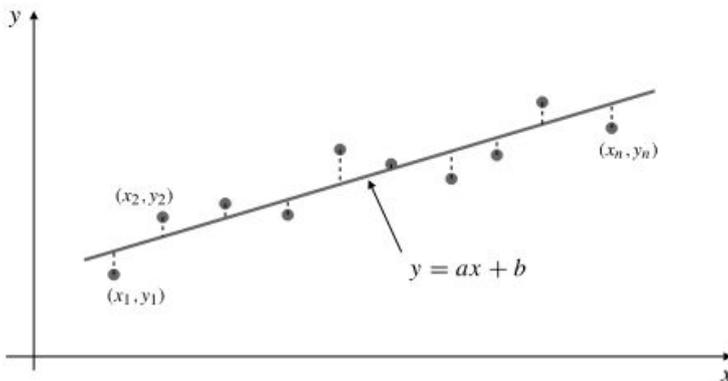


Figura 13.18 Ajuste de una recta a unos datos experimentales.

En esta situación, el método de los mínimos cuadrados requiere escoger los valores de a y b de forma que se minimice la suma S de los cuadrados de las distancias verticales de los puntos a la recta:

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$$

Se trata de un problema de minimización sin restricciones con dos variables, a y b . El mínimo se producirá en un punto crítico de S que debe cumplir

$$0 = \frac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - ax_i - b)$$

$$0 = \frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)$$

Las ecuaciones anteriores se pueden expresar como

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) a + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) b &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) a + nb &= \sum_{i=1}^n y_i \end{aligned}$$

Resolviendo esa pareja de ecuaciones lineales, obtenemos los parámetros deseados:

$$a = \frac{n \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)}{n \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}$$

$$b = \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)}{n \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} = \frac{\overline{x^2}\bar{y} - \bar{x}\overline{xy}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}$$

En estas fórmulas hemos utilizado una barra para indicar el valor medio de una magnitud; por ejemplo, $\overline{xy} = (1/n) \sum_{i=1}^n x_i y_i$, y así sucesivamente.

Este procedimiento de ajuste de la «mejor» recta a un conjunto de puntos de datos mediante el método de los mínimos cuadrados se denomina **regresión lineal**, y la recta $y = ax + b$ obtenida de esta forma se denomina **recta de regresión empírica** de los datos. Algunas calculadoras científicas con funciones estadísticas permiten calcular regresiones lineales, acumulando las sumas de x_i , y_i , x_i^2 y $x_i y_i$ en varios registros y llevando la cuenta en otro registro del número n de puntos introducidos. En todo momento está disponible la información necesaria para calcular a y b , y el valor de y correspondiente a cualquier valor x dado.

Ejemplo 1 Calcule la recta de regresión empírica de los datos $(x, y) = (0, 2.10), (1, 1.92), (2, 1.84), (3, 1.71)$ y $(4, 1.64)$. ¿Cuál es el valor predicho para y en $x = 5$?

Solución Tenemos

$$\bar{x} = \frac{0 + 1 + 2 + 3 + 4}{5} = 2$$

$$\bar{y} = \frac{2.10 + 1.92 + 1.84 + 1.71 + 1.64}{5} = 1.842$$

$$\overline{xy} = \frac{(0)(2.10) + (1)(1.92) + (2)(1.84) + (3)(1.71) + (4)(1.64)}{5} = 3.458$$

$$\overline{x^2} = \frac{0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2}{5} = 6$$

Por tanto,

$$a = \frac{3.458 - (2)(1.842)}{6 - 2^2} = -0.113$$

$$b = \frac{(6)(1.842) - (2)(3.458)}{6 - 2^2} = 2.068$$

y la recta de regresión empírica es

$$y = 2.068 - 0.113x$$

El valor predicho para y en $x = 5$ es $2.068 - 0.113 \times 5 = 1.503$.

Observación La regresión lineal se puede interpretar también desde la perspectiva de proyección de vectores. Los puntos de datos definen dos vectores \mathbf{x} e \mathbf{y} en \mathbb{R}^n cuyas componentes son x_1, x_2, \dots, x_n y y_1, y_2, \dots, y_n , respectivamente. Sea \mathbf{w} el vector de componentes $1, 1, \dots, 1$. Calcular

los coeficientes a y b de la recta de regresión equivale a calcular la proyección ortogonal de \mathbf{y} en el subespacio bidimensional (plano) de \mathbb{R}^n generado por \mathbf{x} y \mathbf{w} (véase la Figura 13.19). Esta proyección es $\mathbf{p} = a\mathbf{x} + b\mathbf{w}$. De hecho, las dos ecuaciones obtenidas anteriormente igualando a cero las derivadas parciales de S se corresponden con las dos condiciones

$$(\mathbf{y} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x} = 0$$

$$(\mathbf{y} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{w} = 0$$

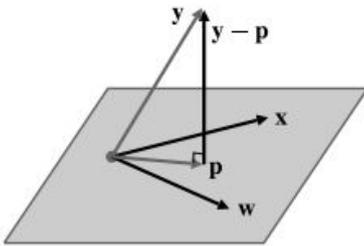


Figura 13.19 $\mathbf{p} = a\mathbf{x} + b\mathbf{w}$ es la proyección de \mathbf{y} en el plano generado por \mathbf{x} y \mathbf{w} .

que indican que \mathbf{y} menos su proyección en el subespacio es perpendicular a dicho subespacio. El ángulo que forman \mathbf{y} y \mathbf{p} mide lo bien que la recta de regresión empírica se ajusta a los datos; cuanto menor sea el ángulo, mejor será el ajuste.

La regresión lineal se puede utilizar también para obtener relaciones funcionales específicas de tipos diferentes a la lineal aplicando previamente a los datos las transformaciones adecuadas.

Ejemplo 2 Calcule los valores de las constantes K y s para las que la curva

$$y = Kx^s$$

se ajusta mejor a los puntos de datos experimentales (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$ (suponga que todos los valores de los datos son positivos).

Solución Obsérvese que la forma funcional requerida corresponde a una regresión lineal entre $\ln y$ y $\ln x$:

$$\ln y = \ln K + s \ln x$$

Si determinamos los parámetros a y b de la recta de regresión empírica $\eta = a\xi + b$ correspondiente a los datos transformados $(\xi_i, \eta_i) = (\ln x_i, \ln y_i)$, entonces $s = a$ y $K = e^b$ son los valores pedidos.

Observación Debe recalcar que las constantes K y s obtenidas por el método utilizado en la solución del ejemplo anterior no son las mismas que se habrían obtenido aplicando directamente el método de los mínimos cuadrados al problema sin transformar, es decir, minimizando $\sum_{i=1}^n (y_i - Kx_i^s)^2$. Este problema no se puede resolver fácilmente (¡inténtelo!).

En general, el método de los mínimos cuadrados se aplica para ajustar una ecuación en la que la respuesta se expresa como una suma de constantes multiplicadas por funciones de una o más variables de entrada. Las constantes se determinan como los puntos críticos de la suma de las desviaciones al cuadrado entre los valores reales de la respuesta y los valores predichos por la ecuación.

Aplicaciones del método de los mínimos cuadrados a integrales

El método de los mínimos cuadrados se puede utilizar para obtener aproximaciones a funciones razonablemente bien comportadas (es decir, continuas por tramos), en forma de sumas de constantes multiplicadas por funciones especificadas. La idea es escoger las constantes que minimicen la *integral* del cuadrado de la diferencia.

Por ejemplo, supongamos que deseamos aproximar la función continua $f(x)$ en el intervalo $[0, 1]$ mediante la función lineal $g(x) = px + q$. El método de los mínimos cuadrados requiere que p y q se elijan de forma que se minimice la integral

$$I(p, q) = \int_0^1 (f(x) - px - q)^2 dx$$

Suponiendo que podemos «diferenciar la integral» (investigaremos este aspecto en la Sección 13.5), el punto crítico de $I(p, q)$ se puede obtener a partir de

$$0 = \frac{\partial I}{\partial p} = -2 \int_0^1 x(f(x) - px - q) dx$$

$$0 = \frac{\partial I}{\partial q} = -2 \int_0^1 (f(x) - px - q) dx$$

Entonces,

$$\frac{p}{3} + \frac{q}{2} = \int_0^1 xf(x) dx$$

$$\frac{p}{2} + q = \int_0^1 f(x) dx$$

y resolviendo este sistema lineal se pueden obtener p y q :

$$p = \int_0^1 (12x - 6) f(x) dx$$

$$q = \int_0^1 (4 - 6x) f(x) dx$$

El siguiente ejemplo considerará la aproximación de una función mediante un **polinomio trigonométrico**. Estas aproximaciones forman la base del estudio de las **series de Fourier**, que son de importancia fundamental en la solución de problemas con condiciones de contorno en los que intervienen las ecuaciones de Laplace, del calor y de onda, así como de otras ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que aparecen en matemáticas aplicadas (véase la Sección 9.9).

Ejemplo 3 Utilice una integral de mínimos cuadrados para aproximar $f(x)$ mediante la suma

$$\sum_{k=1}^n b_k \operatorname{sen} kx$$

en el intervalo $0 \leq x \leq \pi$.

Solución Deseamos calcular las constantes que minimizan

$$I = \int_0^\pi \left(f(x) - \sum_{k=1}^n b_k \operatorname{sen} kx \right)^2 dx$$

Para todo $1 \leq j \leq n$, tenemos

$$0 = \frac{\partial I}{\partial b_j} = -2 \int_0^\pi \left(f(x) - \sum_{k=1}^n b_k \operatorname{sen} kx \right) \operatorname{sen} jx dx$$

Entonces,

$$\sum_{k=1}^n b_k \int_0^\pi \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} jx dx = \int_0^\pi f(x) \operatorname{sen} jx dx$$

Sin embargo, si $j \neq k$, entonces $\text{sen } kx \text{sen } jx$ es una función par, por lo que

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \text{sen } kx \text{sen } jx \, dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi \text{sen } kx \text{sen } jx \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\pi}^\pi (\cos(k-j)x - \cos(k+j)x) \, dx = 0 \end{aligned}$$

Si $j = k$, tenemos entonces que

$$\int_0^\pi \text{sen}^2 jx \, dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2jx) \, dx = \frac{\pi}{2}$$

de forma que

$$b_j = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \text{sen } jx \, dx$$

Observación La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{sen } kx, \quad \text{siendo} \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \text{sen } kx \, dx, \quad k = 1, 2, \dots,$$

se denomina representación mediante **serie de Fourier en senos** de $f(x)$ en el intervalo $(0, \pi)$. Si f es continua en $[0, \pi]$, se puede demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \left(f(x) - \sum_{k=1}^n b_k \text{sen } kx \right)^2 dx = 0$$

pero se requiere algo más que la continuidad de f para asegurar que esta serie de Fourier en senos converge a $f(x)$ en todos los puntos de $(0, \pi)$. Estas cuestiones se estudian en el *análisis armónico*. De forma similar, la serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \quad \text{siendo} \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos kx \, dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

se denomina representación mediante **serie de Fourier en cosenos** de $f(x)$ en el intervalo $(0, \pi)$.

Observación Representar una función como suma de una serie de Fourier es análogo a representar un vector como combinación lineal de vectores de una base. Si vemos las funciones continuas en el intervalo $[0, \pi]$ como «vectores» con las operaciones de suma y multiplicación por un escalar definidas punto a punto:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (cf)(x) = cf(x)$$

y con la operación «producto escalar» definida como

$$f \bullet g = \int_0^\pi f(x)g(x) \, dx$$

entonces, las funciones $e_k(x) = \sqrt{2/\pi} \text{sen } kx$ forman una «base». Como se demuestra en el ejemplo anterior, $e_j \bullet e_j = 1$, y si $k \neq j$ entonces $e_k \bullet e_j = 0$. Por tanto, estos «vectores base» son «vectores unitarios mutuamente perpendiculares». Los coeficientes de los senos en la serie de Fourier de una función f son las componentes de dicha función con respecto a esa base.

Ejercicios 13.4

1. Se va a instalar un generador en una factoría para suministrar potencia a n máquinas situadas en las posiciones (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$. ¿Dónde se debe situar el generador para minimizar la suma de los cuadrados de su distancia a las máquinas?
2. Se sabe que entre ciertas variables se cumple la relación $y = ax^2$. Dados los datos experimentales (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, determine el valor de a mediante el método de los mínimos cuadrados.
3. Repita el Ejercicio 2, pero con la relación $y = ae^x$.
4. Utilice el método de los mínimos cuadrados para obtener el plano $z = ax + by + c$ que se ajusta mejor a los datos (x_i, y_i, z_i) , $i = 1, 2, \dots, n$.
5. Repita el Ejercicio 4 utilizando un argumento basado en proyección de vectores en vez del método de los mínimos cuadrados.

En los Ejercicios 6-11, demuestre cómo se puede adaptar la regresión lineal para determinar los parámetros p y q de forma que la relación dada se ajuste a los datos experimentales (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$. ¿En cuál de esas situaciones son los valores obtenidos de p y q idénticos a los que se obtendrían mediante aplicación directa del método de los mínimos cuadrados sin cambio de variable?

6. $y = p + qx^2$
7. $y = pe^{qx}$
8. $y = \ln(p + qx)$
9. $y = px + qx^2$
10. $y = \sqrt{px + q}$
11. $y = pe^x + qe^{-x}$
12. Calcule la parábola de la forma $y = p + qx^2$ que mejor se ajuste a los datos $(x, y) = (1, 0.11), (2, 1.62), (3, 4.07), (4, 7.55), (6, 17.63)$ y $(7, 24.20)$. No existe valor de y medido en $x = 5$. ¿Qué valor predeciría en este punto?
13. Utilice el método de los mínimos cuadrados para calcular las constantes a, b y c tales que la relación $y = ax^2 + bx + c$ describa lo mejor posible los datos experimentales (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$ ($n \geq 3$). ¿Cómo se interpreta esta situación en términos de proyección de vectores?
14. ¿Cómo se puede utilizar el resultado del Ejercicio 13 para ajustar una curva de la forma $y = pe^x + q + re^{-x}$ a los mismos puntos de datos?

15. Calcule el valor de la constante a para la que la función $f(x) = ax^2$ se aproxima mejor a la función $g(x) = x^3$ en el intervalo $[0, 1]$, en el sentido de que se minimice la integral

$$I = \int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx$$

¿Cuál es el valor mínimo de I ?

16. Calcule a de forma que se minimice $I = \int_0^\pi (ax(\pi - x) - \sin x)^2 dx$. ¿Cuál es el valor mínimo de la integral?
17. Repita el Ejercicio 15 con la función $f(x) = ax^2 + b$ y la misma g . Calcule a y b .
- *18. Calcule a, b y c de forma que se minimice $\int_0^1 (x^3 - ax^2 - bx - c)^2 dx$. ¿Cuál es el mínimo valor de la integral?
- *19. Calcule a y b de forma que se minimice $\int_0^\pi (\sin x - ax^2 - bx)^2 dx$.
20. Calcule a, b y c de forma que se minimice la integral $J = \int_{-1}^1 (x - a \sin \pi x - b \sin 2\pi x - c \sin 3\pi x)^2 dx$
- *21. Calcule las constantes $a_j, j = 0, 1, \dots, n$ que minimizan $\int_0^\pi \left(f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^n a_k \cos kx \right)^2 dx$
22. Calcule la serie de Fourier en senos de la función $f(x) = x$ en el intervalo $0 < x < \pi$. Suponiendo que la serie converge a x en el intervalo $(0, \pi)$, ¿a qué función podría esperarse que converja la serie en el intervalo $(-\pi, 0)$?
23. Repita el Ejercicio 22, pero calculando ahora una serie de Fourier en cosenos.
24. Suponga que x_1, x_2, \dots, x_n cumplen $x_i \leq x_j$ siempre que $i < j$. Calcule el valor de x que minimiza $\sum_{i=1}^n |x - x_i|$. Trate separadamente los casos de n par e impar. ¿Para qué valores de n es x único? *Sugerencia:* No utilice el cálculo en este problema.

13.5 Problemas paramétricos

En esta sección examinaremos brevemente tres situaciones no relacionadas, en las que se desea diferenciar una función con respecto a un parámetro, en vez de con respecto a las variables básicas de la función. Estas situaciones surgen frecuentemente en matemáticas y sus aplicaciones.

Diferenciación de integrales con parámetros

El Teorema Fundamental del Cálculo indica cómo diferenciar una integral definida con respecto a su límite superior de integración:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

Consideraremos ahora un problema diferente sobre diferenciación de integrales. Si el integrando de una integral definida depende también de variables distintas de la variable integración, entonces la integral será una función de esas otras variables. ¿Cómo calculamos la derivada de una función de ese tipo? Por ejemplo, consideremos la función $F(x)$ definida como

$$F(x) = \int_a^b f(x, t) dt$$

Calcularemos $F'(x)$ tomando la derivada dentro de la integral:

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^b f(x, t) dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt$$

Obsérvese que hemos utilizado d/dx fuera de la integral y $\partial/\partial x$ dentro; esto es porque la integral es una función sólo de x , pero el integrando f es una función de x y de t . Si el integrando depende de más de un parámetro, entonces habría que utilizar derivadas parciales dentro y fuera de la integral:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_a^b f(x, y, t) dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, t) dt$$

La operación de tomar una derivada con respecto a un parámetro dentro de la integral, o *diferenciación dentro de una integral*, parece razonable. Para diferenciar sumas, lo hacemos término a término, y las integrales son límites de sumas. Sin embargo, tanto la diferenciación como la integración requieren tomar límites (límites de cocientes de Newton para las derivadas y límites de sumas de Riemann para las integrales). La diferenciación dentro de una integral requiere cambiar el orden en el cual se toman los dos límites y, por tanto, requiere justificación.

Ya hemos visto otro ejemplo de cambio de orden de límites. Cuando establecimos que las derivadas parciales mixtas con respecto a las mismas variables eran iguales,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

estábamos, de hecho, diciendo que los límites correspondientes a la diferenciación respecto a x e y se pueden tomar en cualquier orden con el mismo resultado. Esto no es verdad en general; lo demostramos bajo la suposición de que ambas derivadas parciales mixtas eran *continuas* (véanse el Teorema 1 y el Ejercicio 16 de la Sección 12.4). En general, se requieren algunas suposiciones para justificar el intercambio de límites. El teorema siguiente da una serie de condiciones que justifican el intercambio de límites que interviene en la diferenciación dentro de una integral.

TEOREMA 5 Diferenciación dentro de una integral

Supongamos que para todo x tal que $c < x < d$ se cumplen las siguientes condiciones:

(i) Las integrales

$$\int_a^b f(x, t) dt \quad \text{y} \quad \int_a^b f_1(x, t) dt$$

existen (bien como integrales propias o bien como integrales impropias convergentes).

(ii) $f_{11}(x, t)$ existe y satisface

$$|f_{11}(x, t)| \leq g(t), \quad a < t < b$$

con

$$\int_a^b g(t) dt = K < \infty$$

Entonces, para todo x tal que $c < x < d$ se cumple

$$\frac{d}{dx} \int_a^b f(x, t) dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt$$

DEMOSTRACIÓN Sea

$$F(x) = \int_a^b f(x, t) dt$$

Si $c < x < d$, $h \neq 0$, y $|h|$ es lo suficientemente pequeño para que $c < x + h < d$, entonces, por la fórmula de Taylor,

$$f(x + h, t) = f(x, t) + hf_1(x, t) + \frac{h^2}{2} f_{11}(x + \theta h, t)$$

para algún valor θ entre 0 y 1. Por tanto,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \int_a^b f_1(x, t) dt \right| \\ &= \left| \int_a^b \frac{f(x+h, t) - f(x, t)}{h} dt - \int_a^b f_1(x, t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b \left| \frac{f(x+h, t) - f(x, t)}{h} - f_1(x, t) \right| dt \\ &= \int_a^b \left| \frac{h}{2} f_{11}(x + \theta h, t) \right| dt \\ &\leq \frac{h}{2} \int_a^b g(t) dt = \frac{Kh}{2} \rightarrow 0 \text{ cuando } h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Entonces,

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \int_a^b f_1(x, t) dt$$

que es el resultado deseado.

Observación Se puede demostrar que la conclusión del Teorema 5 se mantiene también sólo bajo la suposición de que $f_1(x, t)$ es continua en el rectángulo cerrado y acotado $c \leq x \leq d$, $a \leq t \leq b$. No podemos demostrarlo aquí; la prueba se basa en una sutil propiedad denominada *continuidad uniforme* que poseen las funciones continuas en conjuntos cerrados y acotados de \mathbb{R}^n (véase el Apéndice IV para el caso de $n = 1$). En cualquier caso, el Teorema 5 es más útil para nuestros fines porque permite integrales impropias.

Ejemplo 1 Calcule $\int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt$.

Solución Partiendo de la integral impropia convergente

$$\int_0^{\infty} e^{-s} ds = \lim_{R \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{-s}}{-1} \right|_0^R = \lim_{R \rightarrow \infty} (1 - e^{-R}) = 1$$

introduciremos un parámetro mediante el cambio $s = xt$, $ds = x dt$ (con $x > 0$), con lo que obtenemos

$$\int_0^{\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$$

Ahora diferenciaremos n veces (cada una de las integrales resultantes converge):

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} -te^{-xt} dt &= -\frac{1}{x^2} \\ \int_0^{\infty} (-t)^2 e^{-xt} dt &= (-1)^2 \frac{2}{x^3} \\ &\vdots \\ \int_0^{\infty} (-t)^n e^{-xt} dt &= (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} \end{aligned}$$

Haciendo $x = 1$ obtenemos

$$\int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt = n!$$

Nótese que este resultado se podría haber obtenido mediante integración por partes (n veces) o mediante una fórmula de reducción. Este método es un poco más sencillo.

Observación El lector debe comprobar que la función $f(x, t) = t^k e^{-xt}$ cumple las condiciones del Teorema 5 para $x > 0$ y $k \geq 0$. Nosotros normalmente no lo comprobaremos.

Ejemplo 2 Calcule $F(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t} dt$ para $x > 0$, $y > 0$.

Solución Tenemos

$$\frac{\partial F}{\partial x} = - \int_0^{\infty} e^{-xt} dt = -\frac{1}{x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \int_0^{\infty} e^{-yt} dt = \frac{1}{y}$$

Se deduce entonces que

$$F(x, y) = -\ln x + C_1(y) \quad \text{y} \quad F(x, y) = \ln y + C_2(x)$$

Comparando estas dos fórmulas de F , tenemos que concluir que $C_1(y) = \ln y + C$ para alguna constante C . Por tanto,

$$F(x, y) = \ln y - \ln x + C = \ln \frac{y}{x} + C$$

Como $F(1, 1) = 0$, debemos tener $C = 0$ y $F(x, y) = \ln(y/x)$.

Observación Podemos combinar el Teorema 5 y el Teorema Fundamental del Cálculo para diferenciar una integral con respecto a un parámetro que aparezca en los límites de integración y en el integrando. Si

$$F(x, b, a) = \int_a^b f(x, t) dt$$

entonces, por la Regla de la Cadena,

$$\frac{d}{dx} F(x, b(x), a(x)) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial b} \frac{db}{dx} + \frac{\partial F}{\partial a} \frac{da}{dx}$$

De acuerdo con esto, tenemos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt \\ &= \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt + f(x, b(x))b'(x) - f(x, a(x))a'(x) \end{aligned}$$

Se requiere que $a(x)$ y $b(x)$ sean diferenciables en x y, para la aplicación del Teorema 5, que $a \leq a(x) \leq b$ y $a \leq b(x) \leq b$ para todo x tal que $c < x < d$.

Ejemplo 3 Resuelva la ecuación integral

$$f(x) = a - \int_b^x (x-t)f(t) dt$$

Solución Supongamos, por el momento, que la ecuación tiene una solución lo suficientemente bien comportada para permitir la diferenciación dentro de la integral. Diferenciando dos veces, obtenemos

$$f'(x) = -(x-x)f(x) - \int_b^x f(t) dt = -\int_b^x f(t) dt$$

$$f''(x) = -f(x)$$

La última ecuación es la ecuación diferencial del movimiento armónico simple. Obsérvese que la ecuación dada de f y la de f' implican las condiciones iniciales

$$f(b) = a \quad \text{y} \quad f'(b) = 0$$

De acuerdo con esto, podemos expresar la solución general de $f''(x) = -f(x)$ de la forma

$$f(x) = A \cos(x-b) + B \sin(x-b)$$

Las condiciones iniciales implican, entonces, que $A = a$ y $B = 0$, por lo que la solución pedida es $f(x) = a \cos(x-b)$. Finalmente, nótese que esta función es de hecho lo suficientemente suave para permitir la diferenciación dentro de la integral y es, por tanto, la solución de la ecuación integral dada (si lo desea, verifíquelo en la ecuación integral).

Envolventes

Una ecuación $f(x, y, c) = 0$ en la que interviene un parámetro c , además de las variables x e y , representa una familia de curvas en el plano xy . Considérese, por ejemplo, la familia

$$f(x, y, c) = \frac{x}{c} + cy - 2 = 0$$

Esta familia está formada por todas las rectas que cortan a los ejes coordenados en los puntos $(2c, 2/c)$. La Figura 13.20 muestra alguna de estas rectas. Parece que hay una curva a la que todas las rectas son tangentes. Esta curva se denomina *envolvente* de la familia de rectas.

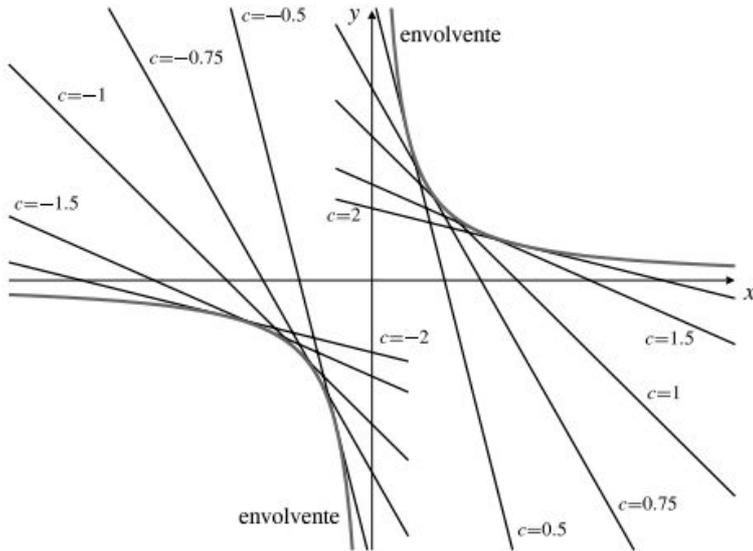


Figura 13.20 Familia de rectas y su envolvente.

En general, una curva \mathcal{C} se denomina **envolvente** de la familia de curvas de ecuaciones $f(x, y, c) = 0$ si, para todo valor de c , la curva $f(x, y, c) = 0$ es tangente a \mathcal{C} en algún punto que depende de c .

En la familia de curvas de la Figura 13.20, parece que la envolvente puede ser la hipérbola rectangular $xy = 1$. Verificaremos esto tras desarrollar un método para determinar la ecuación de la envolvente de una familia de curvas. Supongamos que la función $f(x, y, c)$ tiene derivadas parciales primeras continuas y que la envolvente es una curva suave.

Para cada valor de c , la curva $f(x, y, c) = 0$ es tangente a la envolvente en un punto (x, y) que depende de c . Expresemos esta dependencia en la forma explícita $x = g(c)$, $y = h(c)$; estas ecuaciones son las ecuaciones paramétricas de la envolvente. Como (x, y) está en la curva $f(x, y, c) = 0$, tenemos

$$f(g(c), h(c), c) = 0$$

!! ATENCIÓN !!

Es un argumento sutil. Tómese el tiempo que necesite e intente comprender cada paso del desarrollo.

Diferenciando esta ecuación con respecto a c , obtenemos

$$f_1 g'(c) + f_2 h'(c) + f_3 = 0 \tag{*}$$

donde las derivadas parciales de f se evalúan en $(g(c), h(c), c)$.

La pendiente de la curva $f(x, y, c) = 0$ en $(g(c), h(c), c)$ se puede obtener diferenciando implícitamente su ecuación con respecto a x :

$$f_1 + f_2 \frac{dy}{dx} = 0$$

Por otra parte, la pendiente de la envolvente $x = g(c)$, $y = h(c)$ en ese punto es $dy/dx = h'(c)/g'(c)$. Como la curva y la envolvente son tangentes en $(g(c), h(c), c)$, sus pendientes deben ser iguales. Por tanto,

$$f_1 + f_2 \frac{h'(c)}{g'(c)} = 0, \quad \text{de forma que} \quad f_1 g'(c) + f_2 h'(c) = 0$$

Combinando esto con la ecuación (*) obtenemos $f_3(x, y, c) = 0$ en todos los puntos de la envolvente.

La ecuación de la envolvente se puede obtener eliminando c en las ecuaciones

$$f(x, y, c) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial c} f(x, y, c) = 0$$

Ejemplo 4 Calcule la envolvente de la familia de rectas

$$f(x, y, c) = \frac{x}{c} + cy - 2 = 0$$

Solución Eliminamos c en las ecuaciones

$$f(x, y, c) = \frac{x}{c} + cy - 2 = 0 \quad \text{y} \quad f_3(x, y, c) = -\frac{x}{c^2} + y = 0$$

Estas ecuaciones se pueden resolver fácilmente y se obtiene $x = c$ e $y = 1/c$. Esto quiere decir que la envolvente es $xy = 1$, como planteábamos anteriormente.

Ejemplo 5 Calcule la envolvente de la familia de circunferencias

$$(x - c)^2 + y^2 = c$$

Solución En este caso, $f(x, y, c) = (x - c)^2 + y^2 - c$. La ecuación de la envolvente se obtiene eliminando c en la pareja de ecuaciones

$$f(x, y, c) = (x - c)^2 + y^2 - c = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial c} f(x, y, c) = -2(x - c) - 1 = 0$$

De la segunda ecuación, $x = c - \frac{1}{2}$, y entonces, de la primera, $y^2 = c - \frac{1}{4}$. Por consiguiente, la envolvente es la parábola

$$x = y^2 - \frac{1}{4}$$

La Figura 13.21 muestra esta envolvente y algunas circunferencias de la familia.

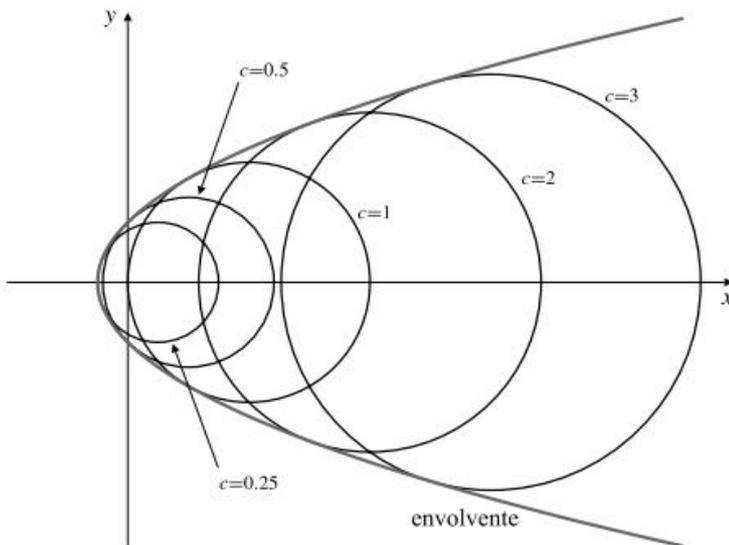


Figura 13.21 Las circunferencias $(x - c)^2 + y^2 = c$ y su envolvente.

Se puede utilizar una técnica similar para obtener la envolvente de una familia de superficies. Será una superficie tangente a todos los miembros de la familia.

Ejemplo 6 (El cono de Mach) Supongamos que el sonido viaja con una velocidad c en el aire en calma, y que un avión supersónico viaja a una velocidad $v > c$ por el eje x , de forma que su posición en el instante t es $(vt, 0, 0)$. Calcule la envolvente en el instante t de las ondas sonoras creadas por la aeronave en instantes anteriores. Véase la Figura 13.22.

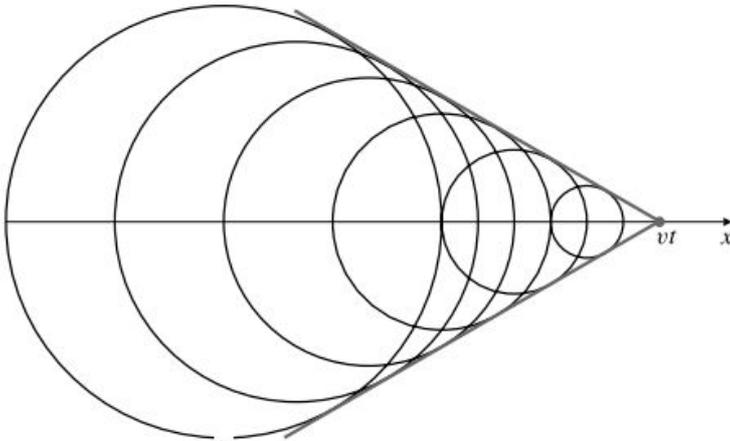


Figura 13.22 El cono de Mach.

Solución El sonido creado por la aeronave en el instante $\tau < t$ se expande en un frente de ondas esférico con velocidad c . El centro de este frente de ondas es $(v\tau, 0, 0)$, la posición de la aeronave en el instante τ . En el instante t el radio de este frente de ondas es $c(t - \tau)$, por lo que su ecuación es

$$f(x, y, z, \tau) = (x - v\tau)^2 + y^2 + z^2 - c^2(t - \tau)^2 = 0 \quad (*)$$

En el instante t la envolvente de todos esos frentes de ondas creados en instantes anteriores τ se puede obtener eliminando el parámetro τ de la ecuación anterior y la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial \tau} f(x, y, z, \tau) = -2v(x - v\tau) + 2c^2(t - \tau) = 0$$

Despejando τ en esta última ecuación, se obtiene $\tau = \frac{vx - c^2t}{v^2 - c^2}$. Por lo tanto,

$$x - v\tau = x - \frac{v^2x - vc^2t}{v^2 - c^2} = \frac{c^2}{v^2 - c^2}(vt - x)$$

$$t - \tau = t - \frac{vx - c^2t}{v^2 - c^2} = \frac{v}{v^2 - c^2}(vt - x)$$

Sustituimos estas dos expresiones en la ecuación (*) para eliminar τ :

$$\frac{c^4}{(v^2 - c^2)^2}(vt - x)^2 + y^2 + z^2 - \frac{c^2v^2}{(v^2 - c^2)^2}(vt - x)^2 = 0$$

$$y^2 + z^2 = \frac{c^2}{(v^2 - c^2)^2}(v^2 - c^2)(vt - x)^2 = \frac{c^2}{v^2 - c^2}(vt - x)^2$$

La envolvente es el cono

$$x = vt - \frac{\sqrt{v^2 - c^2}}{c} \sqrt{y^2 + z^2}$$

que se extiende hacia atrás en la dirección x desde su vértice en $(vt, 0, 0)$, la posición de la aeronave en el instante t . Se denomina **cono de Mach**. En un determinado punto, el sonido de la aeronave no se oír hasta que el cono alcance dicho punto.

Ecuaciones con perturbaciones

En matemáticas aplicadas aparecen frecuentemente ecuaciones insolubles para las que se desea obtener soluciones al menos aproximadas. Algunas veces estas ecuaciones resultan de añadir un término extra a lo que de otra forma sería una ecuación simple y fácil de resolver. Este término extra se denomina **perturbación** de la ecuación más simple. A menudo esta perturbación tiene un coeficiente menor que los otros términos de la ecuación, es decir, es una **perturbación pequeña**. En este caso se pueden obtener soluciones aproximadas a la ecuación perturbada sustituyendo el coeficiente pequeño por un parámetro y calculando un desarrollo en polinomios de Maclaurin con respecto a ese parámetro. Un ejemplo servirá para clarificar el método.

Ejemplo 7 Calcule una solución aproximada de la ecuación

$$y + \frac{1}{50} \ln(1 + y) = x^2$$

Solución Sin el término del logaritmo, la ecuación tendría claramente la solución $y = x^2$. Sustituycamos el coeficiente $1/50$ por el parámetro ϵ y busquemos una solución $y = \mathcal{Y}(x, \epsilon)$ a la ecuación

$$y + \epsilon \ln(1 + y) = x^2 \quad (*)$$

de la forma

$$y = \mathcal{Y}(x, \epsilon) = \mathcal{Y}(x, 0) + \epsilon y_\epsilon(x, 0) + \frac{\epsilon^2}{2!} y_{\epsilon\epsilon}(x, 0) + \dots$$

donde los subíndices ϵ indican derivadas con respecto a ϵ . Calcularemos términos hasta segundo orden en ϵ . Evidentemente, $\mathcal{Y}(x, 0) = x^2$. Diferenciando dos veces la ecuación (*) con respecto a ϵ y evaluando los resultados en $\epsilon = 0$, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \epsilon} + \ln(1 + y) + \frac{\epsilon}{1 + y} \frac{\partial y}{\partial \epsilon} &= 0 \\ \frac{\partial^2 y}{\partial \epsilon^2} + \frac{2}{1 + y} \frac{\partial y}{\partial \epsilon} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\frac{1}{1 + y} \frac{\partial y}{\partial \epsilon} \right) &= 0 \\ y_\epsilon(x, 0) &= -\ln(1 + x^2) \\ y_{\epsilon\epsilon}(x, 0) &= \frac{2}{1 + x^2} \ln(1 + x^2) \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\mathcal{Y}(x, \epsilon) = x^2 - \epsilon \ln(1 + x^2) + \frac{\epsilon^2}{1 + x^2} \ln(1 + x^2) + \dots$$

y la ecuación dada tiene como solución aproximada

$$y \approx x^2 - \frac{\ln(1 + x^2)}{50} + \frac{\ln(1 + x^2)}{2500(1 + x^2)}$$

Se pueden utilizar técnicas de perturbación similares para sistemas de ecuaciones y para ecuaciones diferenciales.

Ejercicios 13.5

1. Sea $F(x) = \int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1}$ para $x > -1$. Mediante diferenciación repetida de F , calcule la integral

$$\int_0^1 t^x (\ln t)^n dt$$

2. Sustituyendo t por xt en la integral muy conocida

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

y diferenciando con respecto a x , calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} t^4 e^{-t^2} dt$$

3. Calcule $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-xt^2} - e^{-yt^2}}{t^2} dt$ para $x > 0, y > 0$.

4. Calcule $\int_0^1 \frac{t^x - t^y}{\ln t} dt$ para $x > -1, y > -1$.

5. Sabiendo que $\int_0^{\infty} e^{-xt} \sin t dt = \frac{1}{1+x^2}$ para $x > 0$ (que se puede demostrar mediante integración por partes), calcule

$$\int_0^{\infty} t e^{-xt} \sin t dt \quad \text{y} \quad \int_0^{\infty} t^2 e^{-xt} \sin t dt$$

- * 6. Utilizando el Ejercicio 5, calcule para $x > 0$

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt$$

Demuestre que $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$ y, a partir de aquí, calcule la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{x \rightarrow 0} F(x)$$

7. Calcule $\int_0^{\infty} \frac{dt}{x^2 + t^2}$ y utilice el resultado como ayuda para calcular

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{(x^2 + t^2)^2} \quad \text{y} \quad \int_0^{\infty} \frac{dt}{(x^2 + t^2)^3}$$

8. Calcule $\int_0^x \frac{dt}{x^2 + t^2}$ y utilice el resultado como ayuda para calcular

$$\int_0^x \frac{dt}{(x^2 + t^2)^2} \quad \text{y} \quad \int_0^x \frac{dt}{(x^2 + t^2)^3}$$

9. Calcule $f^{(n+1)}(a)$ si $f(x) = 1 + \int_a^x (x-t)^n f(t) dt$.

Resuelva las ecuaciones integrales de los Ejercicios 10-12.

10. $f(x) = Cx + D + \int_0^x (x-t)f(t) dt$

11. $f(x) = x + \int_0^x (x-2t)f(t) dt$

12. $f(x) = 1 + \int_0^1 (x+t)f(t) dt$

Calcule las envolventes de las familias de curvas de los Ejercicios 13-18.

13. $y = 2cx - c^2$ 14. $y - (x-c)\cos c = \sin c$

15. $x \cos c + y \sin c = 1$ 16. $\frac{x}{\cos c} + \frac{y}{\sin c} = 1$

17. $y = c + (x-c)^2$ 18. $(x-c)^2 + (y-c)^2 = 1$

19. ¿Tiene envolvente toda familia de curvas del plano dependientes de un parámetro? Intente calcular la envolvente de $y = x^2 + c$.

20. ¿Para qué valores de k tiene envolvente la familia de curvas $x^2 + (y-c)^2 = kc^2$?

21. Intente calcular la envolvente de la familia $y^3 = (x+c)^2$. ¿Son las curvas de la familia tangentes a la envolvente? ¿Qué ha obtenido realmente en este caso? Compare este ejercicio con el Ejemplo 3 de la Sección 13.3.

- *22. Demuestre que si una familia de superficies dependientes de dos parámetros $f(x, y, z, \lambda, \mu) = 0$ tiene envolvente, entonces la ecuación de dicha envolvente se puede obtener eliminando λ y μ de las ecuaciones

$$f(x, y, z, \lambda, \mu) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} f(x, y, z, \lambda, \mu) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu} f(x, y, z, \lambda, \mu) = 0$$

23. Calcule la envolvente de la familia de planos dependientes de dos parámetros

$$x \sin \lambda \cos \mu + y \sin \lambda \sin \mu + z \cos \lambda = 1$$

24. Calcule la envolvente de la familia de esferas dependientes de dos parámetros

$$(x-\lambda)^2 + (y-\mu)^2 + z^2 = \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2}$$

En los Ejercicios 25-27, calcule los términos en ϵ hasta segundo orden de la solución y de las ecuaciones dadas.

25. $y + \epsilon \operatorname{sen} \pi y = x$ 26. $y^2 + \epsilon e^{-y^2} = 1 + x^2$ *29. Utilice métodos de perturbaciones para calcular valores aproximados de x e y en el sistema $x + 2y - \frac{1}{100} e^{-x} = 3$, $x - y + \frac{1}{100} e^{-y} = 0$. Calcule todos los términos en $\epsilon = 1/100$ hasta segundo orden.
27. $2y + \frac{\epsilon x}{1 + y^2} = 1$
28. Utilice métodos de perturbaciones para calcular y con un error menor que 10^{-8} sabiendo que $y + (y^5/100) = 1/2$.

13.6 Método de Newton

Un problema que aparece frecuentemente en matemáticas aplicadas es el de determinar, con algún grado de precisión deseada, una raíz (es decir, una solución r) de una ecuación de la forma

$$f(r) = 0$$

La raíz se denomina **cero** de la función f . En la Sección 4.6 presentamos el Método de Newton, un método simple pero potente para determinar raíces de funciones que sean lo suficientemente suaves. El método parte de una *estimación* aproximada x_0 de la raíz r de la función f , y procede después calculando aproximaciones sucesivas x_1, x_2, \dots , mediante la fórmula

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Si la estimación inicial x_0 no está muy lejos de r , y si $|f'(x)|$ no es muy pequeña ni $|f''(x)|$ muy grande cerca de r , entonces las aproximaciones sucesivas x_1, x_2, \dots convergerán muy rápidamente a r . Recuérdese que cada nueva aproximación x_{n+1} se obtiene mediante el corte con el eje x de la tangente trazada sobre la gráfica de f , x_n . La tangente a la gráfica $y = f(x)$ en $x = x_n$ tiene como ecuación (véase la Figura 13.23)

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$$

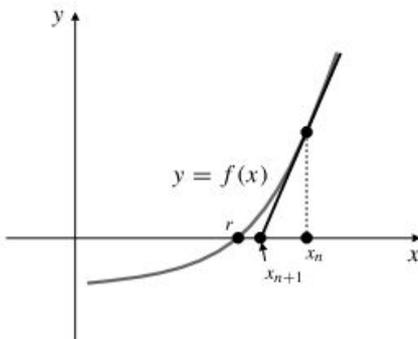


Figura 13.23 x_{n+1} es el corte con el eje x de la tangente en x_n .

El corte con el eje x , x_{n+1} , de esta recta se determina haciendo $y = 0$, $x = x_{n+1}$ en esta ecuación, y el resultado es la fórmula de la caja sombreada anterior.

El Método de Newton se puede ampliar para calcular soluciones de sistemas de m ecuaciones con m variables. Demostraremos aquí cómo adaptar el método para calcular aproximaciones a una solución (x, y) de la pareja de ecuaciones

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

partiendo de una estimación inicial (x_0, y_0) . En circunstancias favorables, observaremos la misma convergencia rápida de las aproximaciones a la raíz que en el caso de una sola variable.

La idea es como sigue. Las dos superficies $z = f(x, y)$ y $z = g(x, y)$ se cruzan formando una curva que a su vez corta al plano xy en el punto cuyas coordenadas son la solución deseada. Si (x_0, y_0) está cerca de ese punto, entonces los planos tangentes a las dos superficies en (x_0, y_0) se cortarán formando una recta. Ésta cortará al plano xy en un punto (x_1, y_1) que debería estar más cerca de la solución que (x_0, y_0) . Podemos determinar fácilmente (x_1, y_1) . Los planos tangentes $z = f(x, y)$ y $z = g(x, y)$ en (x_0, y_0) tienen como ecuaciones

$$z = f(x_0, y_0) + f_1(x_0, y_0)(x - x_0) + f_2(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$z = g(x_0, y_0) + g_1(x_0, y_0)(x - x_0) + g_2(x_0, y_0)(y - y_0)$$

La recta de intersección de estos dos planos corta al plano xy en el punto (x_1, y_1) que cumple

$$f_1(x_0, y_0)(x_1 - x_0) + f_2(x_0, y_0)(y_1 - y_0) + f(x_0, y_0) = 0$$

$$g_1(x_0, y_0)(x_1 - x_0) + g_2(x_0, y_0)(y_1 - y_0) + g(x_0, y_0) = 0$$

Resolviendo estas dos ecuaciones para obtener x_1 y y_1 resulta

$$x_1 = x_0 - \frac{fg_2 - f_2g}{f_1g_2 - f_2g_1} \Big|_{(x_0, y_0)} = x_0 - \frac{\begin{vmatrix} f & f_2 \\ g & g_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{vmatrix}} \Big|_{(x_0, y_0)}$$

$$y_1 = y_0 - \frac{f_1g - fg_1}{f_1g_2 - f_2g_1} \Big|_{(x_0, y_0)} = y_0 - \frac{\begin{vmatrix} f_1 & f \\ g_1 & g \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{vmatrix}} \Big|_{(x_0, y_0)}$$

Obsérvese que el denominador en cada una de estas expresiones es el determinante jacobiano $\partial(f, g)/\partial(x, y)|_{(x_0, y_0)}$. Éste es otro ejemplo en el que el jacobiano resulta ser el análogo en el caso multivariable a la derivada de una función de una variable.

Continuando de esta forma generamos aproximaciones sucesivas (x_n, y_n) de acuerdo con las fórmulas

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\begin{vmatrix} f & f_2 \\ g & g_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{vmatrix}} \Big|_{(x_n, y_n)}$$

$$y_{n+1} = y_n - \frac{\begin{vmatrix} f_1 & f \\ g_1 & g \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{vmatrix}} \Big|_{(x_n, y_n)}$$

El procedimiento se detiene cuando se alcanza la precisión deseada.

Ejemplo 1 Calcule la raíz del sistema

$$x(1 + y^2) - 1 = 0, \quad y(1 + x^2) - 2 = 0$$

con la suficiente precisión para asegurar que los miembros izquierdos de las ecuaciones se anulan hasta la sexta cifra decimal.

Solución Un dibujo de las gráficas de las dos ecuaciones (véase la Figura 13.24) en el plano xy indica que el sistema sólo tiene una raíz cerca del punto $(0.2, 1.8)$. La aplicación del Método de Newton requiere calcular sucesivamente las cantidades

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x(1 + y^2) - 1, & f_1(x, y) &= 1 + y^2, & f_2(x, y) &= 2xy \\ g(x, y) &= y(1 + x^2) - 2, & g_1(x, y) &= 2xy, & g_2(x, y) &= 1 + x^2 \end{aligned}$$

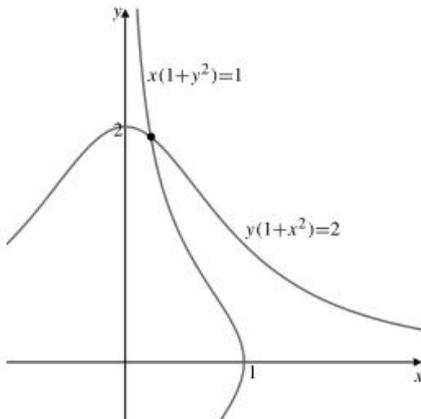


Figura 13.24 Las dos gráficas se cortan cerca del punto $(0.2, 1.8)$.

Utilizando una calculadora o un computador, podemos calcular los valores sucesivos de (x_n, y_n) empezando en $x_0 = 0.2, y_0 = 1.8$:

Tabla 1. Raíz cerca de $(0.2, 1.8)$

n	x_n	y_n	$f(x_n, y_n)$	$g(x_n, y_n)$
0	0.200 000	1.800 000	-0.152 000	-0.128 000
1	0.216 941	1.911 349	0.009 481	0.001 303
2	0.214 827	1.911 779	-0.000 003	0.000 008
3	0.214 829	1.911 769	0.000 000	0.000 000

Los valores de esta tabla se han calculado secuencialmente en una hoja de cálculo mediante el método que se sugiere posteriormente. Se han redondeado para incluirlos en la tabla, pero en los cálculos sucesivos se han utilizado los valores sin redondear. Si se utilizaran los valores (redondeados) de x_n e y_n que se muestran en la tabla para calcular $f(x_n, y_n)$ y $g(x_n, y_n)$, los resultados podrían variar ligeramente.

Las aproximaciones deseadas a las raíces son los valores de x_n e y_n de la última línea de la tabla anterior. Nótese la rapidez de convergencia. Sin embargo, hay que realizar muchos cálculos de funciones para cada iteración del método. En el caso de sistemas grandes el Método de Newton es demasiado ineficiente computacionalmente para ser práctico. En la práctica se utilizan otros métodos que requieren más iteraciones pero menos cálculos por iteración.

Realización del Método de Newton utilizando una hoja de cálculo

Una hoja de cálculo es un entorno ideal para calcular aproximaciones mediante el Método de Newton. Dada una pareja de ecuaciones con dos incógnitas como las del sistema del Ejemplo 1, podemos proceder como sigue:

- (i) En las nueve primeras celdas de la primera fila (A1-I1) se ponen las etiquetas $n, x, y, f, g, f_1, g_2, g_1$ y g_2 .
- (ii) En las celdas A2-A9 se ponen los números $0, 1, 2, \dots, 7$.
- (iii) En las celdas B2 y C2 se ponen los valores iniciales x_0 e y_0 .
- (iv) En las celdas D2-I2 se ponen las fórmulas para calcular $f(x, y), g(x, y), \dots, g_2(x, y)$ en función de los valores de x e y que están en B2 y C2.

- (v) En las celdas B3 y C3 se almacenan las fórmulas del Método de Newton para calcular x_1 e y_1 en función de los valores de x_0 e y_0 , utilizando los valores calculados en la segunda fila. Por ejemplo, la celda B3 debe contener la fórmula

$$+B2 - (D2 * I2 - G2 * E2) / (F2 * I2 - G2 * H2)$$

- (vi) Se reproducen las fórmulas de las celdas D2-I2 en las celdas D3-I3.
- (vii) Se reproducen las fórmulas de las celdas B3-I3 en las celdas B4-I9.

Ahora podemos inspeccionar las sucesivas aproximaciones a x_n e y_n en las columnas B y C. Para utilizar diferentes valores iniciales, basta con sustituir los números de las celdas B2 y C2. Para resolver un sistema diferente de (dos) ecuaciones, basta con sustituir los contenidos de las celdas D2-I2. Es conveniente salvar esta hoja de cálculo para volver a utilizarla con los ejercicios posteriores o con otros sistemas que podamos desear resolver más tarde.

Observación Aunque un análisis detallado de la convergencia de las aproximaciones del Método de Newton está fuera del alcance de este libro, podemos realizar algunas observaciones. En cada paso del proceso de aproximación debemos dividir por J , el determinante jacobiano de f y g respecto a x e y , evaluado en la aproximación obtenida más recientemente. Suponiendo que las funciones y las derivadas parciales que intervienen en las fórmulas son continuas, cuanto mayor sea el valor de J en la solución real, más probable será que las aproximaciones converjan a la solución, y que lo hagan rápidamente. Si J se anula (o si es muy pequeño) en la solución, las aproximaciones sucesivas pueden no converger, aun cuando la estimación inicial esté muy cerca de la solución. Incluso cuando las derivadas parciales primeras de f y g son grandes en la solución, su jacobiano puede ser pequeño si sus gradientes son aproximadamente paralelos en dicha solución. Por tanto, no podemos esperar que la convergencia sea rápida cuando las curvas $f(x, y) = 0$ y $g(x, y) = 0$ se cortan formando un ángulo muy pequeño.

El Método de Newton se puede aplicar a sistemas de m ecuaciones en m variables; las fórmulas son las generalizaciones obvias de las dadas anteriormente para dos funciones.

Ejercicios 13.6

Calcule las soluciones de los sistemas de los Ejercicios 1-6, de forma que los miembros izquierdos de las ecuaciones se anulen hasta la sexta cifra decimal. Esto se puede hacer con la ayuda de una calculadora científica, pero eso consumiría mucho tiempo. Es mucho más fácil programar las fórmulas del Método de Newton en un computador para generar las aproximaciones requeridas. Intente determinar en cada caso *estimaciones iniciales* razonables dibujando las gráficas de las ecuaciones.

- $y - e^x = 0, \quad x - \sin y = 0$ 
- $x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad y - e^x = 0$ (dos soluciones) 
- $x^4 + y^2 - 16 = 0, \quad xy - 1 = 0$ (cuatro soluciones) 
- $x^2 - xy + 2y^2 = 10, \quad x^3y^2 = 2$ (cuatro soluciones) 
- $y - \sin x = 0, \quad x^2 + (y + 1)^2 - 2 = 0$ (dos soluciones) 
- $\sin x + \sin y - 1 = 0, \quad y^2 - x^3 = 0$ (dos soluciones) 

- * 7. Obtenga fórmulas para calcular las aproximaciones sucesivas mediante el Método de Newton a una solución del sistema

$$f(x, y, z) = 0, \quad g(x, y, z) = 0, \quad h(x, y, z) = 0$$

empezando con la estimación inicial (x_0, y_0, z_0) .

- 8. Utilice las fórmulas del Ejercicio 7 para obtener el punto de intersección en el primer octante de las superficies $y^2 + z^2 = 3, \quad x^2 + z^2 = 2$ y $x^2 - z = 0$. 

- 9. Las ecuaciones $y - x^2 = 0$ e $y - x^3 = 0$ tienen evidentemente las soluciones $x = y = 0$ y $x = y = 1$. Intente obtenerlas utilizando la forma de dos variables del Método de Newton con valores iniciales: 

(a) $x_0 = y_0 = 0.1$ y (b) $x_0 = y_0 = 0.9$

¿Cuántas iteraciones se requieren para obtener una precisión de seis cifras decimales en la solución apropiada en cada caso? ¿Cómo explica la diferencia en el comportamiento del Método de Newton para estas ecuaciones cerca de $(0, 0)$ y $(1, 1)$?