

Bauhaus-Universität Weimar  
Institut für Mathematik/Physik

Material zur Vorlesung

# Grundlagen der Analysis und Gewöhnliche Differentialgleichungen

## Teil 1 - Analysis

für die Studiengänge  
Bauingenieurwesen (B.Sc.)  
Management für Bau, Immobilien, Infrastruktur (B.Sc.)  
Lehramt Bautechnik (B. Sc.)  
Baustoffingenieurwissenschaft

von

Klaus Markwardt

# Inhaltsverzeichnis

<b>Hinweise</b>	<b>3</b>
<b>Notationen</b>	<b>5</b>
<b>1 Funktionen und Abbildungen</b>	<b>7</b>
1.1 Überblick . . . . .	7
1.2 Reelle Funktionen . . . . .	7
1.3 Reellwertige Funktionen . . . . .	14
1.4 Komplexwertige Funktionen . . . . .	14
1.5 Funktionale und Operatoren . . . . .	14
1.6 Vektor- und matrixwertige Funktionen . . . . .	15
1.7 Überblick zu stetigen Funktionen . . . . .	15
1.8 Topologische Grundbegriffe . . . . .	16
1.9 Grenzwerte reeller Funktionen . . . . .	18
1.10 Stetigkeit reeller Funktionen . . . . .	19
<b>2 Differentialrechnung einer reellen Veränderlichen</b>	<b>23</b>
2.1 Grundbegriffe und ihre Interpretation . . . . .	23
2.2 Elementare Differentiationsregeln . . . . .	27
2.3 Differentiation einiger elementarer Funktionen . . . . .	28
2.4 Differentiation der Umkehrfunktion . . . . .	29
2.5 Berechnung von Grenzwerten mit der Regel von de l'Hospital . . . . .	29
2.6 Höhere Ableitungen . . . . .	32
2.7 Differentiation komplexwertiger Funktionen . . . . .	32
2.8 Differentiation vektorwertiger Funktionen . . . . .	32
2.9 Funktions- und Kurvendiskussion . . . . .	33
2.9.1 Monotonieverhalten . . . . .	33
2.9.2 Konvexität und Konkavität . . . . .	33
2.9.3 Extremwerte . . . . .	35
2.9.4 Charakteristika zum Funktionsverlauf . . . . .	36
2.10 Newtonsches Näherungsverfahren . . . . .	38
2.11 Lokale Existenz einer stetig differenzierbaren Umkehrfunktion . . . . .	39

2.12	Mittelwertsätze der Differentialrechnung . . . . .	41
2.13	Taylorformel mit Lagrangeschem Restglied . . . . .	42
2.14	Taylorreihen . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher</b>	<b>48</b>
3.1	Überblick und Grafische Darstellungen . . . . .	48
3.2	Grundbegriffe . . . . .	48
3.3	Charakterisierung von Definitionsbereichen . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Differentialrechnung mehrerer reeller Veränderlicher</b>	<b>50</b>
4.1	Partielle Ableitungen erster Ordnung . . . . .	50
4.2	Grafiken zu Stetigkeit und Differenzierbarkeit . . . . .	52
4.3	Partielle Ableitungen höherer Ordnung . . . . .	61
4.4	Gradient, Richtungsableitung , totales Differential . . . . .	62
4.5	Jacobi-Matrix und Verallgemeinerte Kettenregel . . . . .	66
4.5.1	Allgemeines . . . . .	66
4.5.2	Beispiele für die Jacobi-Matrix (Funktionalmatrix) . . . . .	67
4.6	Taylor-Formel mehrere unabhängige Variable . . . . .	70
4.7	Lokale Existenz und Differenzierbarkeit der impliziten Funktion . . . . .	71
4.8	Freie Extremwertaufgaben . . . . .	74
4.9	Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen . . . . .	76
4.10	Anwendungen . . . . .	76
<b>5</b>	<b>Integralrechnung einer reellen Veränderlichen</b>	<b>77</b>
5.1	Unbestimmte Integration . . . . .	77
5.1.1	Einige Grundintegrale und Beispiele für unbestimmte Integrale . . . . .	77
5.1.2	Partielle Integration . . . . .	79
5.1.3	Substitutionsregel . . . . .	80
5.2	Bestimmtes Integral . . . . .	80
5.2.1	Definition . . . . .	80
5.2.2	Partielle Integration . . . . .	80
5.2.3	Substitutionsregel . . . . .	80
5.2.4	Anwendung - Orthogonalität von Funktionensystemen . . . . .	81

5.3	Riemann-Integral . . . . .	83
5.3.1	Definition und Approximationseigenschaften . . . . .	83
5.3.2	Numerische Integration . . . . .	84
5.3.3	Weitere Eigenschaften des Riemann-Integrals . . . . .	85
5.4	Uneigentliche Integrale . . . . .	86
<b>6</b>	<b>Reelle und komplexe Fourier-Entwicklungen</b>	<b>89</b>
6.1	Trigonometrische Polynome und Frequenzspektren . . . . .	89
6.2	Fourierreihen . . . . .	90
<b>7</b>	<b>Integralrechnung mehrerer reeller Veränderlicher</b>	<b>97</b>
<b>8</b>	<b>Parameterintegrale</b>	<b>101</b>
8.1	Stetigkeit und Integrierbarkeit . . . . .	101
8.2	Differentiation von Parameterintegralen . . . . .	102

## Hinweise

### Abschließende Prüfung schriftlich = Prüfungsklausur von 180 Minuten

#### Verwendbare Hilfsmittel:

Dieses Skript (Teil 1 - Analysis), die Fortsetzung Teil 2 : Differentialgleichungen und ein Taschenrechner. Beide Skripte können auf den Rückseiten der ausgedruckten Seiten handschriftlich ergänzt werden, mehr nicht! Unabhängig davon dürfen gerechnete Übungs- und Belegaufgaben nicht benutzt werden. Keine Benutzung von Büchern und Formelsammlungen.

#### Voraussetzung für die Zulassung zur Prüfung:

Erfolgreiche Bearbeitung des zur Vorlesung gehörigen Beleges  
 Aufgabenstellungen und Abgabetermine der Belegteile sowie die Regeln zur Anerkennung des Beleges werden auf der Homepage von Frau DM Schmidt (siehe unten) bekannt gegeben.

#### Übungen wöchentlich einmal, durchgeführt von

Dipl.-Math. Gudrun Schmidt, Coudraystraße 13B, Zimmer 204  
 Homepage : <http://webuser.uni-weimar.de/~schmidt3/>

Dr. rer. nat. Klaus Markwardt, Coudraystraße 13B, Zimmer 204  
 Homepage: <http://webuser.uni-weimar.de/~markward/>

Homepage des Instituts für Mathematik und Physik :  
<http://www.uni-weimar.de/Bauing/mathe/mathe.html>

#### Sekretariat der Professur Angewandte Mathematik

Tina Liesigk, Coudraystraße 13B Zimmer 103  
 E-mail : [tina.liesigk@uni-weimar.de](mailto:tina.liesigk@uni-weimar.de)  
 Tel.: 0-3643-584277

Weitere Hinweise und Informationen zur Vorlesung auf meiner Homepage:  
<http://www.uni-weimar.de/~markward/>

Bei dem in das Netz gestellte Material handelt es sich in der Regel lediglich um ein grobes Gerüst, das in den Lehrveranstaltungen wesentlich ergänzt und verfeinert wird. Dies betrifft insbesondere auch eine Reihe grundlegender Formeln und Beispiele.

An anderer Stelle wurden jedoch im Hinblick auf eine Abrundung des Stoffes (Erleichterung weiterführender Studien) sowie die bessere Einbindung in weiterführende Theorien und Anwendungen auch Fakten angedeutet, die nicht Gegenstand der schriftlichen Prüfung sind.

**Achten Sie hier bitte auf die entsprechenden Informationen in den Lehrveranstaltungen.**

**Auswahl von an der Universitätsbibliothek vorhandenen Lehrbüchern und Formelsammlungen**  
(Lehrbuchsammlung)

Siehe Literaturverzeichnis:

[5], [6], [11], [2], [3], [14], [9], [17], [8], [12], [13], [15], [7], [1] und [4].

**Internetskripte:**

**Mathematik-Online** : Vergleiche [10]

In <http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/kurse/> finden Sie

- Broschüre zur Analysis einer Veränderlicher,  
Broschüre zur Analysis mehrerer Veränderlicher  
(bezüglich der Integration gibt es dort einige irritierende Formulierungen, die Grafiken sind jedoch recht anschaulich)  
und den Link Differentialgleichungen
- Formelsammlung als Broschüre
- Link zur Fourier-Analysis
- Lineare Algebra als Broschüre
- Mathematische Grundlagen als Broschüre
- Numerik als Broschüre (Abschnitt Differentialgleichungen)
- Vektorrechnung als Broschüre
- Vorkurs Mathematik (Analysis sowie Lineare Algebra und Geometrie)

Quelle zur Schulmathematik: [16]

Man beachte, dass für die Vorlesung nur Teile der obigen Manuskripte und Internetquellen relevant sind. Weitere Hinweise innerhalb des Manuskripts.

## Notationen

$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen, $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$C^k(\mathbb{R})$	Raum der in $\mathbb{R}$ k-mal stetig differenzierbaren Funktionen
$C^k(\mathcal{I})$	Raum der auf einem Intervall $\mathcal{I}$ k-mal stetig differenzierbaren Funktionen
$L^p(\mathbb{R})$	$f \in L^p(\mathbb{R})$ , wenn $\int_{-\infty}^{\infty}  f(t) ^p dt$ existiert
$M_n(f)$	$\int_{-\infty}^{\infty} t^n f(t) dt$ , stetiges Moment n-ter Ordnung
$supp(f)$	Träger der Funktion $f$
$\delta(t)$	Delta-Distribution (Diracstoß)
$\delta_{lk}$	Kroneckersymbol
$\mathcal{F}(f), \hat{f}$	$\mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$ , Fourier-Transformation
$\omega$	Kreisfrequenz : $\omega = 2\pi\xi$
$\xi$	Frequenz
$f^{(n)}$	n-te Ableitung einer reellen Funktion
$\mathcal{L}(f)$	$\mathcal{L}(f)(z) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-zt} dt$ , $z \in \mathbb{C}$ , Laplace-Transformation
$\chi_A$	charakteristische Funktion der Menge A
$Re(f), Im(f)$	Real- bzw. Imaginärteil von $f$
$\langle f, g \rangle$	$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \bar{g}(t) dt$ Skalarprodukt in $L^2(\mathbb{R})$
$\ f\  = \ f\ _2$	$\ f\  = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ , Norm in $L^2(\mathbb{R})$
$\lfloor c \rfloor$	größtes Ganzes einer reellen Zahl $c$ (engl. : floor), größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich $c$ ist (Gaußklammer)
$\lceil c \rceil$	ganzzahliges Aufrunden einer reellen Zahl $c$ (engl. : ceil), kleinste ganze Zahl, die größer oder gleich $c$ ist

Vector Sets	
$\mathbb{R}^n$	set of $n$ -dimensional vectors with real components
$\mathbb{C}^n$	set of $n$ -dimensional vectors with complex components
$\mathbb{Z}^n$	set of $n$ -dimensional vectors with whole-numbered components
$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$	vectors

Set of Matrices	
$(n, m)$ -matrix	a matrix with $n$ rows and $m$ columns
$\mathbb{R}^{(n,m)}$	set of $(n, m)$ -matrices with real entries
$\mathbb{C}^{(n,m)}$	set of $(n, m)$ -matrices with complex entries
$\mathbb{Z}^{(n,m)}$	set of $(n, m)$ -matrices with whole-numbered entries
$A, B, C$	matrices
$a_{ij}$	entry from row $i$ and column $j$ regarding matrix $A$
$\det(A)$	determinant of the matrix $A$

other Notions	
$\forall u \in \mathbb{C}^n$	for all $n$ -dimensional vectors with complex entries
$A \in \mathbb{R}^{(n,m)}$	$A$ is a real $(n, m)$ -matrix

### Lower case Greek alphabet

name	character	name	character	name	character
alpha	$\alpha$	iota	$\iota$	rho	$\rho$
beta	$\beta$	kappa	$\kappa$	sigma	$\sigma$
gamma	$\gamma$	lambda	$\lambda$	tau	$\tau$
delta	$\delta$	mu	$\mu$	upsilon	$\upsilon$
epsilon	$\epsilon$	nu	$\nu$	phi	$\phi$
zeta	$\zeta$	xi	$\xi$	chi	$\chi$
eta	$\eta$	omicron	$o$	psi	$\psi$
theta	$\theta$	pi	$\pi$	omega	$\omega$

# 1 Funktionen und Abbildungen

## 1.1 Überblick

**Definition 1.1.** Ausgehend von zwei gegebenen Mengen  $\mathcal{D}$  und  $Y$  wird eine Vorschrift  $f$ , die jedem  $x \in \mathcal{D}$  genau ein Element  $y \in Y$  zuordnet, eine Funktion (oder Abbildung) von  $\mathcal{D}$  nach  $Y$  genannt.  
Schreibweise:

$$\begin{aligned} y &= f(x), & f: \mathcal{D} &\rightarrow Y \\ \text{oder} & & x &\longmapsto f(x), & f: \mathcal{D} &\rightarrow Y \end{aligned} \quad (1.1)$$

Formal kann eine Funktion  $f$  als Teilmenge der Produktmenge

$$f \subseteq \mathcal{D} \times Y = \{(x, y) \mid x \in \mathcal{D}, y \in Y\}$$

charakterisiert werden, wobei jedes  $x \in \mathcal{D}$  in genau einem Paar als erste Komponente vorkommt. Es muss also immer

$$(x, y) \in f \quad \text{und} \quad (x, \check{y}) \in f \quad \implies \quad y = \check{y}$$

gelten. Nur dann ist die Schreibweise (1.1) gestattet. Insbesondere wird  $\mathcal{D}$  stets ausgeschöpft.

Die Menge  $Y$  in (1.1) muss nicht unbedingt ausgeschöpft werden. Der Wertebereich  $\mathcal{W} = f(\mathcal{D})$  (die Menge aller Bilder von  $\mathcal{D}$ ) ist also eine echte oder eine unechte Teilmenge von  $Y$ .

$$\mathcal{W} \subseteq Y$$

Grundlegende Eigenschaften von Funktionen (Abbildungen):  
injektiv, surjektiv, bijektiv

Komposition (Verknüpfung) von Funktionen, inverse Funktionen (Umkehrfunktionen)  
Vergleiche:

[http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/kurse/kurs9/kurs9\\_broschuere.pdf](http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/kurse/kurs9/kurs9_broschuere.pdf)

und <http://de.wikipedia.org/wiki/Umkehrfunktion>

Beispiele:

1.  $f(x) = 2x - 1$

Wegen

$$y = 2x - 1 \quad \iff \quad x = \frac{y+1}{2}$$

folgt  $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$ .

2.  $f(x) = \frac{x^2-1}{2x}$ ,  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

Wegen

$$y = \frac{x^2-1}{2x} \quad \iff \quad x = y + \sqrt{y^2+1}$$

folgt  $f^{-1}(x) = x + \sqrt{x^2+1}$ ,  $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ .

## 1.2 Reelle Funktionen

Identische Abbildung :

$$I_{\mathcal{D}}: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D} \quad \text{bedeutet} \quad x \longmapsto x \quad \text{für alle} \quad x \in \mathcal{D}$$

Reelle Funktionen :

$$f: \mathcal{D} \rightarrow Y \quad \text{mit} \quad \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \quad \text{und} \quad Y \subseteq \mathbb{R}$$

oder in kürzerer Form ausgedrückt

$$f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$$

Oft sind die Definitionsbereiche reeller Funktionen Intervalle. In den Anwendungen sind sie meist zumindest als Vereinigungsmenge von endlich oder abzählbar unendlich vielen Intervallen darstellbar.

Mit  $a < b$  wird

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} && \text{ein abgeschlossenes,} \\ [a, b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} && \text{ein halboffenes,} \\ (a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} && \text{ein halboffenes und} \\ (a, b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} && \text{ein offenes} \end{aligned}$$

Intervall endlicher Länge. Intervalle unendlicher Länge kennzeichnet man analog wie folgt.

$$\begin{aligned} [a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} \\ (a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \\ (-\infty, a] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\} \\ (-\infty, a) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} \end{aligned}$$

Üblich sind auch die folgenden Schreibweisen

$$\begin{aligned} [a, b[ &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \\ ]a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \\ ]a, b[ &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \\ [a, \infty[ &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} \\ ]a, \infty[ &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \\ ]-\infty, a] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\} \\ ]-\infty, a[ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}, \end{aligned}$$

die wir in der Regel nicht verwenden.

### Inverse Funktionen (Umkehrfunktionen)

Auch für eine reelle Funktion  $f: \mathcal{D} \rightarrow Y$  gilt :

$f$  besitzt genau dann eine inverse Funktion  $f^{-1}$ , wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.

1.  $Y = \mathcal{W}$  ist der Wertebereich von  $f$  (Surjektivität geht aus der Nutzung des Symbols  $\mathcal{W}$  hervor)
2. Aus  $f(x_1) = f(x_2)$  folgt stets  $x_1 = x_2$  (Injektivität) .

Für die inverse Funktion  $f^{-1}: \widetilde{\mathcal{D}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{W}}$  gilt stets  $\widetilde{\mathcal{D}} = \mathcal{W}$  und  $\widetilde{\mathcal{W}} = \mathcal{D}$  .

Dies ist mfür beliebige inverse Abbildungen, also nicht nur für reelle Funktionen gültig.

### Monotonieeigenschaften

Gegeben : Reelle Funktion  $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{W}$  und beliebige  $x_1, x_2 \in \mathcal{D}$

Dann heißt  $f$

**monoton wachsend**, wenn

$$x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$$

**streng monoton wachsend**, wenn

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

**monoton fallend**, wenn

$$x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$$

**streng monoton fallend**, wenn

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$$

Eine reelle Funktion  $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{W}$  heißt **monoton**, wenn sie auf ganz  $\mathcal{D}$  entweder monoton wachsend oder monoton fallend ist.

Eine reelle Funktion  $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{W}$  heißt **streng monoton**, wenn sie auf ganz  $\mathcal{D}$  entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.

**Satz 1.2.** Eine reelle Funktion, die sowohl monoton wachsend als auch monoton fallend ist, nimmt auf ihrem ihrem Definitionsbereich überall denselben konstanten Wert an.

Nur die konstanten Funktionen erfüllen also diese beiden Monotonieeigenschaften.

**Satz 1.3.** Jede streng monotone Funktion  $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{W}$  besitzt eine Umkehrfunktion  $f^{-1}$  .

Ist  $f$  streng monoton wachsend, dann trifft dies auch für die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  zu.

Ist  $f$  streng monoton fallend, dann auch die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  .

**Satz 1.4.** Für reelle Funktionen  $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  und reelle Zahlen  $\alpha$  gilt stets :

$$f \text{ und } g \text{ monoton wachsend} \implies f + g \text{ monoton wachsend}$$

$$\alpha \geq 0 \text{ und } f \text{ monoton wachsend} \implies \alpha f \text{ monoton wachsend}$$

$$\alpha \leq 0 \text{ und } f \text{ monoton wachsend} \implies \alpha f \text{ monoton fallend}$$

$$\begin{aligned} f \text{ streng monoton wachsend und } g \text{ monoton wachsend} \\ \implies f + g \text{ streng monoton wachsend} \end{aligned}$$

$\alpha > 0$  und  $f$  streng monoton wachsend  $\implies \alpha f$  streng monoton wachsend

$\alpha < 0$  und  $f$  streng monoton wachsend  $\implies \alpha f$  streng monoton fallend

$f(x) \geq 0$  und  $g(x) \geq 0$  für alle  $x \in \mathcal{D}$  }  $\implies fg$  monoton wachsend  
 $f$  und  $g$  monoton wachsend

$f(x) > 0$  und  $g(x) > 0$  für alle  $x \in \mathcal{D}$  }  $\implies fg$  streng monoton wachsend  
 $f$  streng monoton wachsend  
 $g$  monoton wachsend

$f(x) > 0$  für alle  $x \in \mathcal{D}$  }  $\implies \frac{1}{f}$  streng monoton fallend  
 $f$  streng monoton wachsend

Im Gegensatz dazu :

$f$  streng monoton wachsend  $\implies f^{-1}$  streng monoton wachsend

$f$  Symbol für reelle Funktion : Interpretation von  $\frac{1}{f}$  und  $f^{-1}$  !

Wie ändern sich die obigen Aussagen, wenn in den Prämissen (linken Seiten) jeweils "wachsend" durch "fallend" ersetzt wird.

Komposition von Funktionen, auch Verkettung oder Hintereinanderausführung genannt

Komposition zweier Funktionen  $h$  und  $g$  :  $g \circ h$

$$(g \circ h)(x) = g(h(x))$$

$h$  wird dabei als innere und  $g$  als äußere Funktion bezeichnet.

Beachte : Wenn  $f = g \circ h$  existiert, dann gilt für die Wertebereiche i.a. nur  $\mathcal{W}_f \subseteq \mathcal{W}_g$  .

**Satz 1.5.** Für reelle Funktionen  $h: \mathcal{D}_h \rightarrow \mathcal{W}_h$  ,  $g: \mathcal{D}_g \rightarrow \mathcal{W}_g$  mit  $\mathcal{W}_h \subseteq \mathcal{D}_g$  und der Komposition  $g \circ h: \mathcal{D}_h \rightarrow \mathcal{W}_g$  gilt

$g$  und  $h$  monoton wachsend  $\implies g \circ h$  monoton wachsend

$g$  und  $h$  streng monoton wachsend  $\implies g \circ h$  streng monoton wachsend

$g$  und  $h$  monoton fallend  $\implies g \circ h$  monoton wachsend

$g$  und  $h$  streng monoton fallend  $\implies g \circ h$  streng monoton wachsend

$g$  monoton wachsend und  $h$  monoton fallend  $\implies g \circ h$  monoton fallend

$g$  streng monoton wachsend und  $h$  streng monoton fallend  
 $\implies g \circ h$  streng monoton fallend

Man gewinne weitere Aussagen durch Vertauschen von "wachsend" und "fallend" in den obigen Prämissen. Siehe Monotoniekriterien in Abschnitt 2.9

**Definition 1.6.** Eine reelle Funktion  $f$  heißt konvex auf einem Intervall  $\mathcal{I}$ , wenn

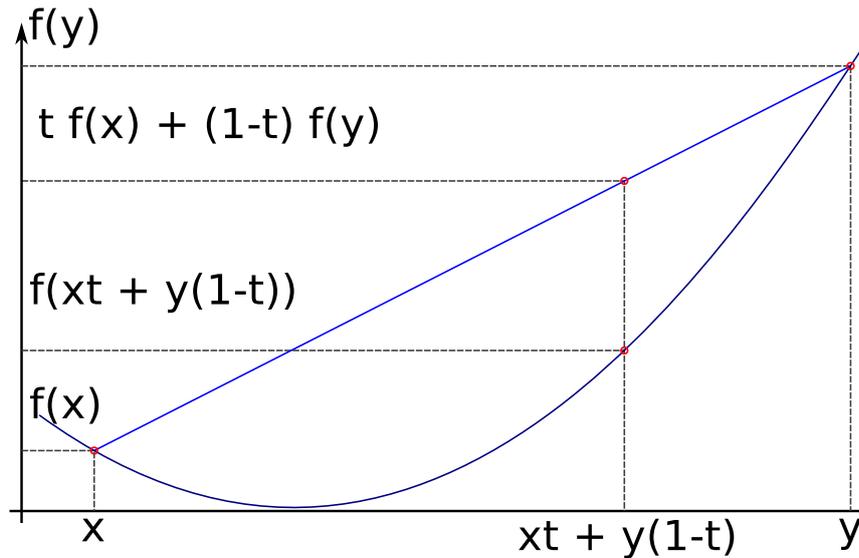
für alle  $x_1, x_2 \in \mathcal{I}$  und alle  $t \in (0, 1)$

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \tag{1.2}$$

gilt. Sie heißt streng konvex auf  $\mathcal{I}$ , wenn an Stelle von (1.2) sogar

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) < tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

gilt.



Hinweis: In der Abbildung  $x$  durch  $x_1$  und  $y$  durch  $x_2$  ersetzen.  
Abbildung aus [http://de.wikipedia.org/wiki/Konvexe\\_Funktion](http://de.wikipedia.org/wiki/Konvexe_Funktion)

**Satz 1.7.** Eine reelle Funktion  $f$  wird genau dann konvex auf einem Intervall  $\mathcal{I}$ , wenn aus  $x_1, x, x_2 \in \mathcal{I}$  und  $x_1 < x < x_2$  stets

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

folgt. Strenge Konvexität liegt genau dann vor, wenn stattdessen sogar

$$f(x) < \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

gilt.

Man interpretiere den auf der rechten Seite der Ungleichungen stehenden Ausdruck (Geradengleichung in Zweipunktform).

Ersetzt man in Definition 1.6 die Relation  $\leq$  durch  $\geq$  bzw. die Relation  $<$  durch  $>$ , dann erhält die Definitionen zur Konkavität bzw. strengen Konkavität.

Entsprechend sind die beiden Ungleichungen in Satz 1.7 zu ändern, um Kriterien zur Konkavität zu erhalten.

Bemerkungen zur Notation:

An Stelle von konvex nutzen einige den Begriff konvex von unten.

An Stelle von konkav nutzen einige den Begriff konvex von oben.

$$f(x) \text{ konvex} \iff -f(x) \text{ konkav.}$$

$$f(x) \text{ streng konvex} \iff -f(x) \text{ streng konkav}$$

Jede streng konvexe Funktion ist auch konvex, aber nicht jede konvexe Funktion ist streng konvex.

**Satz 1.8.** Eine auf einem Intervall  $\mathcal{I}$  definierte Funktion  $f: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ , die sowohl konvex als auch konkav ist, nimmt die Gestalt  $f(x) = ax + b$  an.

**Satz 1.9.** Für auf einem Intervall  $\mathcal{I}$  definierte Funktionen  $f: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  und reelle Zahlen  $\alpha, \beta$  gilt:

$$f \text{ und } g \text{ konvex} \implies f + g \text{ konvex}$$

$$\alpha \geq 0 \text{ und } f \text{ konvex} \implies \alpha f \text{ konvex}$$

$$\alpha \geq 0, \beta \geq 0 \text{ und } f, g \text{ konvex} \implies \alpha f + \beta g \text{ konvex}$$

$$\alpha \leq 0 \text{ und } f \text{ konvex} \implies \alpha f \text{ konkav}$$

$$f \text{ streng konvex und } g \text{ konvex} \implies f + g \text{ streng konvex}$$

$$\alpha > 0 \text{ und } f \text{ streng konvex} \implies \alpha f \text{ streng konvex}$$

$$\alpha > 0, \beta \geq 0, f \text{ streng konvex und } g \text{ konvex} \implies \alpha f + \beta g \text{ streng konvex}$$

$$\alpha < 0 \text{ und } f \text{ streng konvex} \implies \alpha f \text{ streng konkav}$$

$$\left. \begin{array}{l} f: \mathcal{I}_f \rightarrow \mathcal{I}_g, \quad g: \mathcal{I}_g \rightarrow \mathbb{R} \\ u = f(x) \text{ konvex} \\ g(u) \text{ konvex} \\ g(u) \text{ monoton wachsend} \end{array} \right\} \implies g(f(x)) \text{ konvex}$$

$$\left. \begin{array}{l} f: \mathcal{I}_f \rightarrow \mathcal{I}_g, \quad g: \mathcal{I}_g \rightarrow \mathbb{R} \\ u = f(x) \text{ streng konvex} \\ g(u) \text{ streng konvex} \\ g(u) \text{ streng monoton wachsend} \end{array} \right\} \implies g(f(x)) \text{ streng konvex}$$

Kriterien für Konvexität bzw. Konkavität mit Hilfe der Differentialrechnung im Abschnitt 2.9.

### Spezielle Beispiele für reelle Funktionen:

1. Potenzfunktionen, vgl. Abb. 1

Vgl. Abbildung aus <http://de.wikipedia.org/wiki/Potenzfunktion>  
und [www.stem.de/index.html?html/schule/mathematik/potenzfunktionen.htm](http://www.stem.de/index.html?html/schule/mathematik/potenzfunktionen.htm)

2. Absolutbetrag

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x|$$

Er ist bekanntlich definiert durch

$$|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

und besitzt für beliebige  $\lambda, x, y \in \mathbb{R}$  mit

$$\begin{aligned} |x| &\geq 0 \\ |x| = 0 &\iff x = 0 \\ |\lambda \cdot y| &= |\lambda| \cdot |y| \\ |x + y| &\leq |x| + |y| \quad (\text{Dreiecksungleichung}) \end{aligned}$$

die Eigenschaften einer Norm, vgl.

[http://de.wikipedia.org/wiki/Normierter\\_Raum](http://de.wikipedia.org/wiki/Normierter_Raum)  
Unmittelbare Folgerungen sind

$$\begin{aligned} |x| &= |-x| \\ |x - y| &\geq ||x| - |y|| \end{aligned}$$

3. Charakteristische Funktion einer Menge  $A \subseteq \mathcal{D}$

$$\chi_A: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

4. Heaviside-Funktion

$$H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq 0 \\ 1 & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

oder kürzer

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq 0 \\ 1 & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

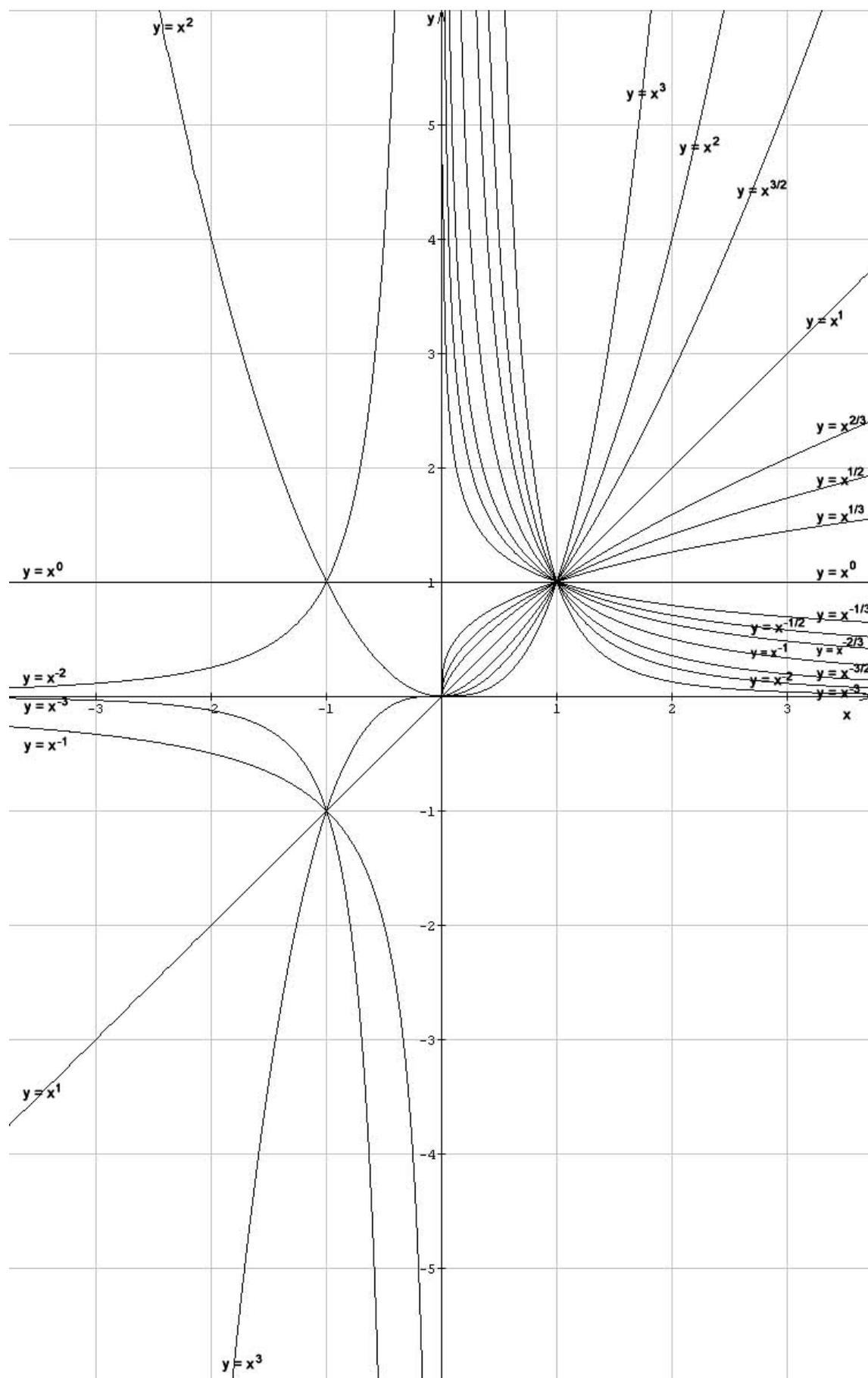
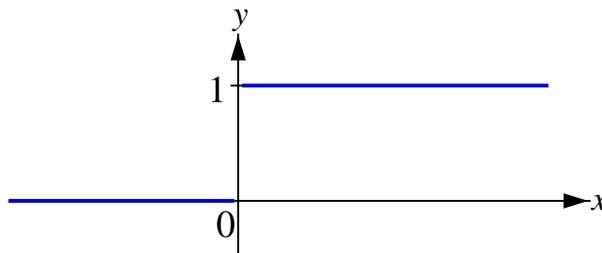
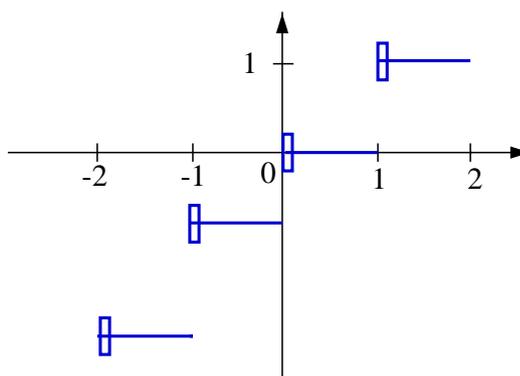


Abbildung 1: Potenzfunktionen



5. Gaußklammern:  
auch Ganzzahl-Funktion, Abrundungsfunktion (engl. *floor(x)* )

$$\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\} \quad \text{für reelles } x$$



Entsprechend: Aufrundungsfunktion (engl. ceiling function, *ceil(x)*)

$$\lceil x \rceil := \min\{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq x\}$$

6. Signumsfunktion

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}, \quad \mathcal{D} = \mathbb{R}$$

7. Polynome, gebrochen rationale Funktionen, trigonometrische Funktionen, Arcusfunktionen, Exponential- und Logarithmusfunktionen, Hyperbelfunktionen

Vergleiche :

[http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/kurse/kurs9/kurs9\\_broschuere.pdf](http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/kurse/kurs9/kurs9_broschuere.pdf)

[http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/kurse/kurs1/kurs1\\_broschuere.pdf](http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/kurse/kurs1/kurs1_broschuere.pdf)

<http://de.wikipedia.org/wiki/Potenzfunktion>

<http://de.wikipedia.org/wiki/Lagrange-Polynom>

<http://de.wikipedia.org/wiki/Polynomdivision>

[http://de.wikipedia.org/wiki/Rationale\\_Funktion](http://de.wikipedia.org/wiki/Rationale_Funktion)

[http://de.wikipedia.org/wiki/Trigonometrische\\_Funktion](http://de.wikipedia.org/wiki/Trigonometrische_Funktion)

[http://de.wikipedia.org/wiki/Formelsammlung\\_Geometrie](http://de.wikipedia.org/wiki/Formelsammlung_Geometrie)

<http://de.wikipedia.org/wiki/Exponentialfunktion>

<http://de.wikipedia.org/wiki/Logarithmus>

[http://de.wikipedia.org/wiki/Kreis-\\_und\\_Hyperbelfunktionen](http://de.wikipedia.org/wiki/Kreis-_und_Hyperbelfunktionen)

- 8.

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad \mathcal{D} = D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

- 9.

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad \mathcal{D} = D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

- 10.

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad \mathcal{D} = D(f) = \mathbb{R}$$

11. Stückweise konstante Funktionen (Treppenfunktionen)

12. Lineare Funktionen und stückweise lineare Funktionen

Unterschied zu linearen Abbildungen

13. n-te Wurzelfunktion,  $n \in \mathbb{N}$

$$f(x) = \sqrt[n]{x}, \quad \mathcal{D} = D(f) = [0, +\infty)$$

### 1.3 Reellwertige Funktionen

Reellwertige Funktionen

$$f: \mathcal{D} \rightarrow Y \quad \text{mit} \quad Y \subseteq \mathbb{R}$$

oder in kürzerer Form ausgedrückt

$$f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$$

Jede reellwertige Funktion ist eine (spezielle) komplexwertige

$$f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}.$$

Wenn wir (im engeren Sinne) von reellwertigen Funktionen sprechen wird in der Regel  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$  oder  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}^n$  vorausgesetzt. Bei andersartigen Definitionsbereichen wird von reellen Funktionalen gesprochen.

Beispiele für reellwertige Funktionen :

1. Euklidische Norm im  $\mathbb{R}^n$

$$\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$$

Für den ersten Teil kann auch

$$\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad \text{mit} \quad \mathbb{R}_+ = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$$

geschrieben werden.

2. Maximumnorm im  $\mathbb{R}^n$

$$\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$$

3. Summennorm  $\mathbb{R}^n$

$$\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

### 1.4 Komplexwertige Funktionen

Komplexwertige Funktionen

$$f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$$

Wenn wir von komplexwertigen Funktionen sprechen, dann wird  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$  oder  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}^n$  vorausgesetzt. (Den Begriff komplexe Funktion verwenden wir nicht. Bei diesem werden  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$  und  $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{C}$  für  $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{W}$  vorausgesetzt. Siehe Differenzierbarkeit im Komplexen)

Wichtige Beispiele für uns sind von der Form  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  wie etwa

$$f(t) = A e^{i(\alpha t + \beta)} = A \cos(\alpha t + \beta) + i A \sin(\alpha t + \beta),$$

und

$$g(t) = A \exp(-\gamma t + i(\alpha t + \beta)) = A e^{-\gamma t} e^{i(\alpha t + \beta)} = A e^{-\gamma t} \cos(\alpha t + \beta) + i A e^{-\gamma t} \sin(\alpha t + \beta)$$

mit  $A, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ .

### 1.5 Funktionale und Operatoren

1. Beispiel für einen linearen Operator :

Es sei  $C^k(\mathcal{I})$  der Raum aller reellen Funktionen, die auf einem Intervall  $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$   $k$ -mal stetig differenzierbar sind. Mit  $C^0(\mathcal{I})$  oder auch  $C(\mathcal{I})$  wird dann die Menge aller auf dem Intervall  $\mathcal{I}$  stetigen Funktionen bezeichnet. Differentiationsoperator  $D$

$$D: C^1(\mathcal{I}) \rightarrow C(\mathcal{I}) \quad \text{mit}$$

$$D: g(t) \mapsto g'(t), \quad \mathcal{D}: g \mapsto g' \quad \text{oder} \quad D: g \mapsto \frac{dg}{dt}$$

2. Beispiel für ein lineares Funktional :

Eine bestimmte Integration

$$\mathfrak{J}_{[0,1]}: C([0,1]) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit}$$

$$\mathfrak{J}_{[0,1]}: g(t) \mapsto \int_0^1 g(t) dt$$

oder knapper und mathematisch exakter

$$\mathfrak{J}_{[0,1]} : g \mapsto \int_0^1 g(t) dt \quad \text{mit } g \in C([0, 1])$$

3. Beispiel für einen linearen Operator :

Eine Integration mit variabler oberer Grenze  $x \in [0, 1]$

$$\mathfrak{J} : C([0, 1]) \rightarrow C^1([0, 1]) \quad \text{mit}$$

$$\mathfrak{J} : g \mapsto \int_0^x g(t) dt$$

## 1.6 Vektor- und matrixwertige Funktionen

1. Vektorwertige Funktionen einer reellen Variablen

- Schräger Wurf  
- Parameterdarstellung von Kreis, Ellipse und Hyperbel,  
Vergleiche

[http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/kurse/kurs9/kurs9\\_broschuere.pdf](http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/kurse/kurs9/kurs9_broschuere.pdf)

Vergleiche auch Quadriken/Kegelschnitt in

[http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/kurse/kurs10/kurs10\\_broschuere.pdf](http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/kurse/kurs10/kurs10_broschuere.pdf)

- Schraubenlinie der Ganghöhe  $h$  (Kurve im  $\mathbb{R}^3$ )  
- Körper auf Bahnkurve im  $\mathbb{R}^3$

2. Matrixwertige Funktionen einer reellen Variablen

Beispiel: Wronski-Matrix und Wronski-Determinante

Vgl. <http://de.wikipedia.org/wiki/Wronski-Determinante>  
und

[http://de.wikipedia.org/wiki/Fundamentalsystem\\_\(Mathematik\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Fundamentalsystem_(Mathematik)) Mit Hilfe der Wronski-Determinante kann man ein System reeller Funktionen auf lineare Unabhängigkeit testen, wenn diese hinreichend oft differenzierbar sind. Dies spielt in der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen eine Rolle. Für  $n$  reelle Funktionen  $y_1, \dots, y_n$  auf einem Intervall  $\mathcal{I}$  ist die Wronski-Matrix definiert durch

$$\Phi(x) := \begin{pmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

3. Vektorwertige Funktionen mehrerer reeller Variabler

Kraftfelder, Strömungsfelder in der Mechanik

[http://de.wikipedia.org/wiki/Kraftfeld\\_%28Physik%29](http://de.wikipedia.org/wiki/Kraftfeld_%28Physik%29)

4. Matrixwertige Funktionen mehrerer reeller Variabler

Verzerrungs- und Spannungstensoren

<http://de.wikipedia.org/wiki/Kontinuumsmechanik>

<http://de.wikipedia.org/wiki/Str%C3%B6mungsfeld>

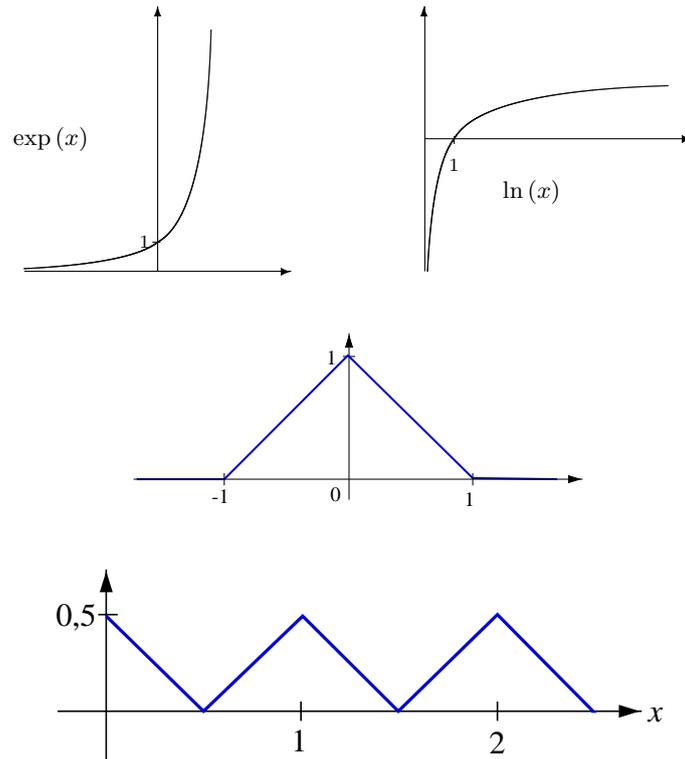
## 1.7 Überblick zu stetigen Funktionen

Von einer stetigen Funktion oder Abbildung

$$f : \mathcal{D} \rightarrow Y$$

ist grob gesprochen dann die Rede, wenn verschwindend kleine Änderungen des Argumentes  $x \in \mathcal{D}$  nur zu verschwindend kleinen Änderungen des Funktionswertes  $y \in Y$  führen. Diese Änderungen werden in metrischen Räumen mit Hilfe von Abständen gemessen. Ein derartiges Konzept ist erforderlich, denn Argumente und Funktionswerte müssen nicht unbedingt reelle Zahlen sein. Dies zeigen bereits die obigen Beispiele. Bei reellen Funktionen bedeutet Stetigkeit insbesondere, dass im Funktionsverlauf (im Graphen der Funktion) keine Sprünge auftreten dürfen. Funktionen können natürlich nur dort stetig sein, wo sie definiert sind. Das Gegenteil von stetig ist unstetig.

Beispiele für stetige reelle Funktionen:



## 1.8 Topologische Grundbegriffe

(In dieser allgemeinen Form nicht relevant für die Prüfung)

Um Definitionsbereiche und Grenzwerte reellwertiger Funktionen systematisch untersuchen zu können, werden ein Umgebungsbegriff sowie einige (topologische) Punkt- und Mengencharakterisierungen benötigt. Dabei interpretieren wir Zahlenmengen als spezielle Punktmengen und setzen Punkte in Beziehung zu gegebenen Definitionsbereichen.

Begonnen wird mit der Einführung der Begriffe in  $\mathbb{R}$ . Diese werden zur Charakterisierung reeller Funktionen benutzt. Dann erfolgt die Verallgemeinerung der Begriffe auf den  $\mathbb{R}^n$  und ihre Nutzung zur Charakterisierung von Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher

$$f : X \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad X \subseteq \mathbb{R}^n$$

**Definition 1.10.** Offene 'Kugelumgebung' eines Punktes  $p \in \mathbb{R}$  :

$$U(p, \varepsilon) := \{x \in \mathbb{R} : |x - p| < \varepsilon\} \quad \text{wobei} \quad 0 < \varepsilon$$

$U(p, \varepsilon)$  wird häufig benutzt und als  $\varepsilon$ -Umgebung des Punktes (der Zahl)  $p$  bezeichnet.

Verallgemeinerung:

$U(P, \varepsilon)$  als  $\varepsilon$ -Umgebung eines Punktes  $P \in \mathbb{R}^n$  definieren, Offene Kugel mit dem Radius  $\varepsilon$  und dem Mittelpunkt  $P$

**Definition 1.11.** Eine nichtleere Menge  $X \subseteq \mathbb{R}$  heißt offen, wenn zu jedem  $p \in X$  eine  $\varepsilon$ -Umgebung  $U(p, \varepsilon)$  existiert, die in  $X$  enthalten ist.

**Definition 1.12.** Es sei  $X \subseteq \mathbb{R}$ . Dann heißt  $a \in \mathbb{R}$  ein Häufungspunkt (Häufungswert) von  $X$ , wenn in jeder Umgebung von  $a$  unendlich viele Punkte von  $X$  liegen.

Fügt man zur Menge  $X$  alle Häufungspunkte von  $X$  hinzu, dann erhält man den Abschluss von  $X$ . Dieser wird durch  $\overline{X}$  gekennzeichnet.

Im Falle  $X = \overline{X}$  nennt man  $X$  eine abgeschlossene Menge (abgeschlossene Teilmenge von  $\mathbb{R}$ )

- Ein Häufungspunkt der Menge  $X$  muss nicht unbedingt zu  $X$  gehören.
- $X$  ist genau dann abgeschlossen, wenn alle Häufungspunkte von  $X$  zu  $X$  gehören.
- $a \in \mathbb{R}$  ist genau dann ein Häufungspunkt von  $X \subseteq \mathbb{R}$ , wenn es eine Folge

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad x_n \in X \setminus \{a\} \quad \text{gibt, für die} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{gilt.}$$

**Satz 1.13.** Jeder Häufungspunkt von  $\overline{X}$  ist bereits in  $\overline{X}$  enthalten. Ausgehend von  $\overline{X}$  können demzufolge keine neuen Häufungspunkte gebildet werden.  $\overline{X}$  ist also stets eine abgeschlossene Menge, d.h. es gilt immer  $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$

**Satz 1.14.** In einer abgeschlossenen Menge  $X$  folgt aus  $x_n \in X$  und  $x_n \rightarrow q$  stets  $q \in X$ .

**Bemerkung 1.15.** Reelle Funktionen der Analysis besitzen in der Regel Definitionsbereiche, die entweder offene Mengen sind oder die durch Hinzunahme von Häufungspunkten aus offenen Mengen konstruiert werden können. Dabei treten insbesondere Definitionsbereiche auf, die als Abschluss offener Mengen interpretierbar sind (alle Häufungspunkte werden hinzugenommen). Letzteres sind spezielle abgeschlossene Mengen. All diese genannten Mengen enthalten keine isolierten Punkte.

**Definition 1.16.**  $p \in X$  heißt ein isolierter Punkt von  $X \subset \mathbb{R}$ , wenn es ein  $\varepsilon > 0$  gibt, so dass  $U(p, \varepsilon) \cap X = \{p\}$  gilt.

Definitionsbereiche mit isolierten Punkte spielen im folgenden Text keine Rolle. Sie werden oft bewusst ausgeschlossen, um Grenzwert- und Stetigkeitsaussagen für Funktionen klarer formulieren zu können. Jeder Punkt  $p$  einer Menge  $X$  (d.h.  $p \in X$ ) ist entweder ein isolierter Punkt oder ein Häufungspunkt von  $X$ . Alle Punkte der in Bemerkung 1.15 charakterisierten Mengen  $X$  sind deshalb Häufungspunkte dieser Mengen.

**Definition 1.17.** Ein Punkt  $a$  wird als Randpunkt der Menge  $X$  bezeichnet, wenn in jedem  $U(a, \varepsilon)$  mit  $\varepsilon > 0$  mindestens ein zu  $X$  gehöriger und ein nicht zu  $X$  gehöriger Punkt liegen. Die Menge aller Randpunkte von  $X$  wird der Rand von  $X$  genannt.

Obige Definition sagt nichts darüber aus, ob der Randpunkt  $a$  selbst zur Menge  $X$  gehört oder nicht. Ein Häufungspunkt  $a$  von  $X$ , der nicht zu  $X$  gehört, ist immer ein Randpunkt von  $X$ .

**Definition 1.18.** Ein Punkt  $a \in X$  der kein Randpunkt von  $X$  ist, wird als innerer Punkt von  $X$  bezeichnet.

Ist  $a$  innerer Punkt von  $X$ , dann gibt es eine  $\varepsilon$ -Umgebung  $U(a, \varepsilon)$ , die in  $X$  enthalten ist. Offene Mengen enthalten nur innere Punkte.

- Nach oben beschränkte Mengen, nach unten beschränkte Mengen, beschränkte Mengen
- Maximum, Supremum (obere Grenze), Minimum, Infimum (untere Grenze),
- Eine abgeschlossene beschränkte Menge wird kompakt genannt.
- Zusammenhängende Menge
- Konvexe Menge

Die Verallgemeinerung der obigen Begriffe auf den  $\mathbb{R}^n$  (speziell für  $n = 2$  und  $n = 3$ ) erfolgt in der Vorlesung. Insbesondere betrachten wir dort folgende Definitionen und Aussagen.

**Definition 1.19** (Konvexe Menge). Eine Menge  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  wird konvex genannt, wenn mit je zwei Punkten  $P, Q \in X$  immer auch deren Verbindungsstrecke ganz in  $X$  liegt.

$$\overline{PQ} := \{\lambda P + (1 - \lambda)Q \mid 0 \leq \lambda \leq 1\} \subseteq X$$

## Weitere Begriffe

- Eine Teilmenge  $X$  des  $\mathbb{R}^n$  heißt zusammenhängend, wenn sich zwei beliebige Punkte  $P$  und  $Q$  aus  $X$  durch eine Kurve verbinden lassen, die ganz in  $X$  liegt.  
(Korrekt wären die Bezeichnungen: wegzusammenhängend, pfadzusammenhängend oder kurvenweise zusammenhängend)  
Weg von  $P$  nach  $Q$  im  $\mathbb{R}^n$  ist als stetige Abbildung

$$x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad x(0) = P \quad \text{und} \quad x(1) = Q$$

definierbar.

- Nicht zusammenhängende Mengen
- Eine zusammenhängende Menge kann mehrfach zusammenhängend sein.
- Einfach zusammenhängende Menge  $X$  :  
 $X$  ist zusammenhängend und jeder geschlossene (doppelpunktsfreie) Weg in  $X$  lässt sich innerhalb von  $X$  stetig zu einem Punkt zusammenziehen.

Beispiele, Definitionsbereiche reellwertiger Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

## 1.9 Grenzwerte reeller Funktionen

**Definition 1.20.** (Grenzwert einer reellen Funktion)

Es sei  $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  eine reelle Funktion,  $a$  ein Häufungspunkt des Definitionsbereiches  $\mathcal{D}$  und  $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ . Wenn dann aus

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad x_n \in \mathcal{D} \setminus \{a\} \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad (1.3)$$

$$\text{stets} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c \quad \text{folgt,}$$

$$\text{schreibt man kurz} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \quad (1.4)$$

und nennt  $c$  im Falle  $c \in \mathbb{R}$  den Grenzwert der Funktion  $f$  an der Stelle  $a$ .

In den Fällen  $c = \infty$  und  $c = -\infty$  wird von uneigentlichen Grenzwerten oder auch von bestimmter Divergenz gesprochen.

Lässt man in der Voraussetzung (1.3) auch die uneigentlichen Häufungspunkte  $a = +\infty$  bzw.  $a = -\infty$  zu, dann kann man für Funktionen mit nicht beschränkten Definitionsbereichen analog zu (1.4) die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c \quad (1.5)$$

definieren.

1. Ob die Grenzwerte (1.4) oder (1.5) existieren, hängt natürlich nicht nur vom Definitionsbereich  $\mathcal{D}$  sondern auch von der Funktion  $f$  ab.
2. Die mit den uneigentlichen Häufungspunkten  $a = +\infty$  bzw.  $a = -\infty$  verbundenen Grenzwerte (1.5) sind einseitige Grenzwerte.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) & \text{ ist ein linksseitiger und} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) & \text{ ein rechtsseitiger Grenzwert.} \end{aligned}$$

3. Auch bei reellem (eigentlichem)  $a$  in (1.3) muss  $a$  nicht unbedingt zum Definitionsbereich  $\mathcal{D}$  gehören.
4. Ist  $a$  in Definition 1.20 ein linker Randpunkt des Definitionsbereiches  $\mathcal{D}$ , dann kann man (1.4) als rechtsseitigen Grenzwert interpretieren und schreibt

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = c.$$

Ist  $a$  ein rechter Randpunkt des Definitionsbereiches  $\mathcal{D}$ , dann wird (1.4) ein linksseitiger Grenzwert und es kann

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = c$$

geschrieben werden.

Einseitige Grenzwerte sind jedoch auch von Interesse, wenn der Grenzpunkt  $a$  des Argumentes ein innerer Punkt des Definitionsbereiches ist.

**Definition 1.21.** (Einseitige Grenzwerte reeller Funktionen)

Es sei  $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  eine reelle Funktion,  $a$  ein Häufungspunkt von  $\mathcal{D} \cap (a, \infty)$  und  $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ . Wenn dann aus

$$x_n \in \mathcal{D} \cap (a, \infty) \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad (1.6)$$

$$\text{stets} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c \quad \text{folgt,}$$

$$\text{schreibt man kurz} \quad \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = c \quad (1.7)$$

und nennt  $c$  den rechtsseitigen Grenzwert der Funktion  $f$  an der Stelle  $a$ .

Ist  $a$  dagegen ein Häufungspunkt von  $\mathcal{D} \cap (-\infty, a)$  und folgt aus

$$x_n \in \mathcal{D} \cap (-\infty, a) \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad (1.8)$$

$$\text{stets} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c,$$

$$\text{dann schreibt man kurz} \quad \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = c \quad (1.9)$$

und nennt  $c$  den linksseitigen Grenzwert der Funktion  $f$  an der Stelle  $a$ .

In den Fällen  $c = \infty$  und  $c = -\infty$  wird von uneigentlichen Grenzwerten oder auch von bestimmter Divergenz bezüglich dieser Grenzübergänge gesprochen.

**Satz 1.22.** Falls  $a$  sowohl ein Häufungspunkt von  $\mathcal{D} \cap (a, \infty)$  als auch von  $\mathcal{D} \cap (-\infty, a)$  ist, dann gilt:

Der (zweiseitige) Grenzwert (1.4) existiert genau dann, wenn die beiden einseitigen (1.7), (1.9) existieren und übereinstimmen. In diesem Falle gilt

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Elementare Beispiele : Vergleiche Grenzwert(Funktion) in  
[http://de.wikipedia.org/wiki/Grenzwert\\_\(Funktion\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Grenzwert_(Funktion))

Funktion	rechtsseitiger Grenzwert	linksseitiger Grenzwert	beidseitiger Grenzwert
$\frac{\sin(x)}{x}$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(x)}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
$\frac{x+1}{x^2-1}$	$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+1}{x^2-1} = -\frac{1}{2}$	$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+1}{x^2-1} = -\frac{1}{2}$	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2-1} = -\frac{1}{2}$
$\operatorname{sgn}(x)$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sgn}(x) = +1$	$\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1$	existiert nicht
$\frac{1}{x}$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$	unbestimmt divergent
$\frac{1}{ x }$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{ x } = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{ x } = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{ x } = +\infty$

Grenzwerte von differenzierbaren reellen Funktionen können oft mit der Regel von l'Hospital berechnet werden. Darauf gehen wir im Abschnitt 2.5 genauer ein.

Man vergleiche auch

[http://de.wikipedia.org/wiki/Regel\\_von\\_L%E2%80%99Hospital](http://de.wikipedia.org/wiki/Regel_von_L%E2%80%99Hospital)

Sehr grundlegend ist die Verträglichkeit der Grenzwertbildung mit den arithmetischen Operationen.

**Satz 1.23.** Die reellen Funktionen  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  mögen die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = p \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = q$$

besitzen. Dann gelten die Aussagen

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = p \pm q$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha f(x) = \alpha p \quad \text{für beliebiges } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = p \cdot q$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{p}{q}, \quad \text{falls } q \neq 0$$

**Satz 1.24.**

Gilt  $|f(x)| \leq |g(x)|$  in einer Umgebung von  $a$ , dann folgt aus

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \quad \text{stets} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0.$$

**Bemerkung 1.25.** Für linksseitige und rechtsseitige Grenzwerte reeller Funktionen gelten analog zu Satz 1.23 und Satz 1.24 formulierte Grenzwertsätze.

**Bemerkung 1.26.** Die Aussagen der Sätze 1.23 und 1.24 bleiben für reellwertige Funktionen  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  gültig (Zur Erinnerung : Jetzt wird  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$  vorausgesetzt).

## 1.10 Stetigkeit reeller Funktionen

Bei den folgenden Betrachtungen wird vorausgesetzt, dass der Definitionsbereich  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$  keine isolierten Punkte enthält. Praktisch kann man dies immer so einrichten.

**Definition 1.27.** Eine reelle Funktion

$$f : \mathcal{D} \rightarrow Y \quad (\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \quad \text{und} \quad Y \subseteq \mathbb{R})$$

heißt stetig in  $a \in \mathcal{D}$ , wenn für jede Folge  $x_n$  mit dem Grenzwert  $a$  die Funktionswerte  $f(x_n)$  gegen  $f(a)$  konvergieren.

$$\text{Kurz:} \quad x_n \longrightarrow a \quad \implies \quad f(x_n) \longrightarrow f(a)$$

Andere Schreibweisen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \implies \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$$

oder kürzer :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

- Stetigkeit in  $a$  bedeutet also, dass dort Grenzübergang und Funktionswertbildung vertauscht werden können.
- Stetigkeit an der Stelle  $a$  liegt vor, wenn der Grenzwert (1.4) existiert und mit dem Funktionswert  $f(a)$  übereinstimmt.

( $\varepsilon$ - $\delta$ )-Definition der Stetigkeit einer Funktion  $f$  an einer festen Stelle  $a$ :

Zu jedem (beliebig kleinen)  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\delta > 0$  mit

$$|x - a| < \delta \quad \implies \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad (1.10)$$

Die Auswahl eines derartigen  $\delta$  hängt im Regelfall von  $\varepsilon$  ab, d.h.  $\delta = \delta(\varepsilon)$ . Je kleiner  $\varepsilon$  ist, um so kleiner muss  $\delta$  i.a. gewählt werden.

Abschwächung dieses Stetigkeitsbegriffes: Einseitige Stetigkeit

- Linksseitige Stetigkeit an der Stelle  $a$ :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) \quad \text{vergleiche linksseitigen Grenzwert (1.9)} \quad (1.11)$$

- Rechtsseitige Stetigkeit an der Stelle  $a$ :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \quad \text{vergleiche rechtsseitigen Grenzwert (1.7)}$$

- In einem inneren Punkt  $a$  von  $\mathcal{D}$  ist  $f : \mathcal{D} \rightarrow Y$  genau dann stetig, wenn  $f$  dort linksseitig und rechtsseitig stetig ist.

- Eine Funktion ist stetig auf ihrem Definitionsbereich  $\mathcal{D}$ , wenn sie in jedem Punkt  $a$  von  $\mathcal{D}$  stetig ist.

$f : \mathcal{D} \rightarrow Y$  wird dann kurz eine stetige Funktion genannt.

Schreibweise:  $f \in C(\mathcal{D})$

Jetzt gilt (1.10) für alle  $a \in \mathcal{D}$ , wobei bei der Auswahl von  $\delta$  i.a. aber  $\delta = \delta(\varepsilon, a)$  berücksichtigt werden muss.

Kann jedoch für eine stetige Funktion  $f$  die Größe  $\delta = \delta(\varepsilon)$  unabhängig für alle  $a \in \mathcal{D}$  gewählt werden, dann nennt man  $f$  gleichmäßig stetig auf  $\mathcal{D}$ .

- (Satz von Cantor) Jede stetige Funktion  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  ist gleichmäßig stetig.
- Eine Funktion  $f$  ist stetig auf einem Intervall  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{D}$ , wenn sie in jedem Punkt von  $\mathcal{I}$  stetig ist. Der Graph von  $f$  ist dann über diesem Intervall zusammenhängend. Die Funktion  $f$  besitzt dann keine Sprung- oder Polstellen in  $\mathcal{I}$ .
- Anschauliche Bilder: <http://www.mathematik-online.org/>  
Genauer: Abschnitt Stetigkeit in [http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/kurse/kurs1/kurs1\\_broschuere.pdf](http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/kurse/kurs1/kurs1_broschuere.pdf)

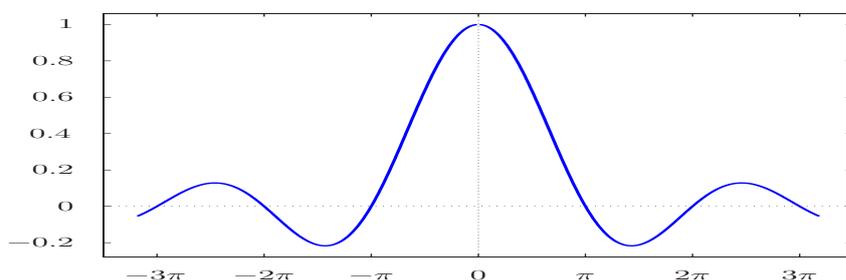
Bemerkungen zu einseitiger Stetigkeit, einseitigen Grenzwerten und stückweise (abschnittsweise) definierten Funktionen

Für in einem Punkt  $x_0$  oder in einem Intervall  $\mathcal{I}$  stetige Funktionen  $f$  und  $g$  gilt :

Addition, Subtraktion und Multiplikation,  
Division bei nicht verschwindendem Nenner  
sowie Komposition (Verkettung)  $f(g(x))$   
führen auf in  $x_0$  oder  $\mathcal{I}$  stetige Funktionen

Stetigkeit der *sinc*-Funktion :

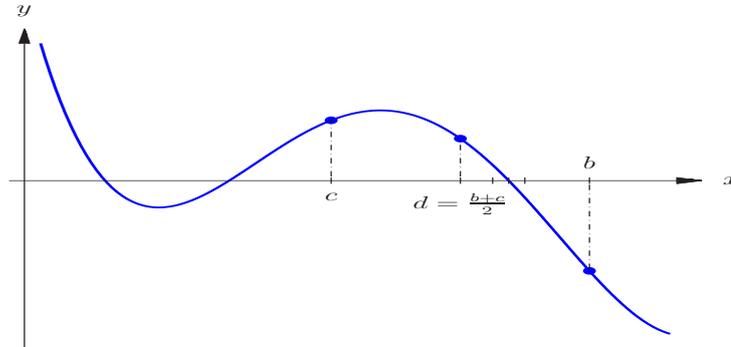
$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \forall x \neq 0 \quad \text{ist stetig fortsetzbar mit} \quad \text{sinc}(0) := 0$$



**Satz 1.28** (Zwischenwertsatz von Bolzano). Eine auf einem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  stetige reelle Funktion  $f$  nimmt jeden zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  liegenden Wert an.

**Algorithmus 1.29** (Bisektionsverfahren, Intervallhalbierungsverfahren oder Halbierungsmethode). *Es handelt sich um ein numerisches Verfahren zur Nullstellenbestimmung. Dabei wird eine Folge von Intervallschachtelungen, die sich auf eine Lösung von  $f(x) = 0$  zusammenzieht, erzeugt.*

*Ausgangspunkt : Stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(a)f(b) \leq 0$ .*



Vgl. Grafik in

[http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/kurse/kurs1/kurs1\\_broschuere.pdf](http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/kurse/kurs1/kurs1_broschuere.pdf)

**Algorithmus 1.30** (Sekantenverfahren). *Bei dem Sekantenverfahren handelt es sich um ein numerisches Verfahren zur näherungsweisen Lösung einer reellen Gleichung des Typs  $f(x) = 0$ .*

*Das Verfahren verwendet folgende Iterationsvorschrift:*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n)$$

*Dabei wird mit zwei Näherungswerten  $x_0, x_1$  begonnen.*

Vgl. <http://de.wikipedia.org/wiki/Sekantenverfahren>

**Satz 1.31** (Fixpunktsatz). *Bildet eine stetige reelle Funktion  $f$  das Intervall  $[a, b]$  in  $[a, b]$  ab, so existiert ein  $x_*$  mit  $f(x_*) = x_*$*

**Satz 1.32** (Extrema stetiger Funktionen). *Eine auf einem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  stetige Funktion hat dort mindestens ein Minimum und mindestens ein Maximum.*

**Definition 1.33** (Lipschitz-Stetigkeit). *Eine Funktion  $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Lipschitz-stetig auf einem Intervall  $\mathcal{I}$ , wenn*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K |x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{I}$$

*mit einer Konstanten  $K$  gilt.*

Beispiele prüfen :

$$\mathcal{I} = (0, 1); \quad f(x) : \quad x^2, \quad \sqrt{x}, \quad \frac{1}{x}$$

Jede auf einem Intervall  $\mathcal{I}$  Lipschitz-stetige Funktion ist dort gleichmäßig stetig.

**Satz 1.34** (Banachscher Fixpunktsatz). *Bildet eine Funktion  $f$  das Intervall  $[a, b]$  in sich ab und gilt*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K |x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in [a, b]$$

*mit einer Konstanten  $K < 1$  (von  $x_1, x_2$  unabhängig), so existiert ein eindeutig bestimmter Fixpunkt  $x_*$ . Jede Iterationsfolge*

$$x_{i+1} = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad x_0 \in [a, b]$$

*konvergiert dann gegen diesen Fixpunkt.*

*Fehlerabschätzungen:*

$$\begin{aligned} |x_n - x_*| &\leq \frac{K^n}{1-K} |x_1 - x_0| && \text{a priori} \\ |x_n - x_*| &\leq \frac{1}{1-K} |x_{n+1} - x_n| && \text{a posteriori} \end{aligned}$$

**Definition 1.35** (Gleichmäßige Stetigkeit). *Eine Funktion  $f$  heißt gleichmäßig stetig auf einem Intervall  $\mathcal{I}$ ,*

*wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta(\varepsilon) > 0$  existiert,*

*so dass für alle  $x, a \in \mathcal{I}$  mit  $|x - a| \leq \delta(\varepsilon)$*

*die Ungleichung  $|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$  gilt.*

**Bemerkung 1.36.** Wenn  $f$  stetig, aber nicht gleichmäßig stetig auf  $\mathcal{I}$  ist, dann gilt

$$\delta = \delta(\varepsilon, a)$$

**Satz 1.37.** Wenn  $\mathcal{I}$  ein abgeschlossenes Intervall ist, dann gilt :  
Gleichmäßige Stetigkeit  $\iff$  Stetigkeit

**Satz 1.38.** Jede auf einem offenen Intervall  $\mathcal{I}$  konvexe Funktion  $f : \mathcal{I}$  ist dort stetig.

## 2 Differentialrechnung einer reellen Veränderlichen

### 2.1 Grundbegriffe und ihre Interpretation

- Ableitung einer reellen Funktion  $y = f(x)$ ,  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  an der Stelle  $x_o \in \mathcal{D}$  :  
Der Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{(x_o + \Delta x) - x_o} \quad \text{für } \Delta x \rightarrow 0 \quad (2.1)$$

wird im Falle seiner Existenz die Ableitung von  $f$  an der Stelle  $x_o$  genannt.  
Schreibweise :

$$\frac{df}{dx}(x_o) = f'(x_o) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{(x_o + \Delta x) - x_o} \quad (2.2)$$

$\Delta x$  in (2.1) heißt Zuwachs der unabhängigen Veränderlichen  $x$ .

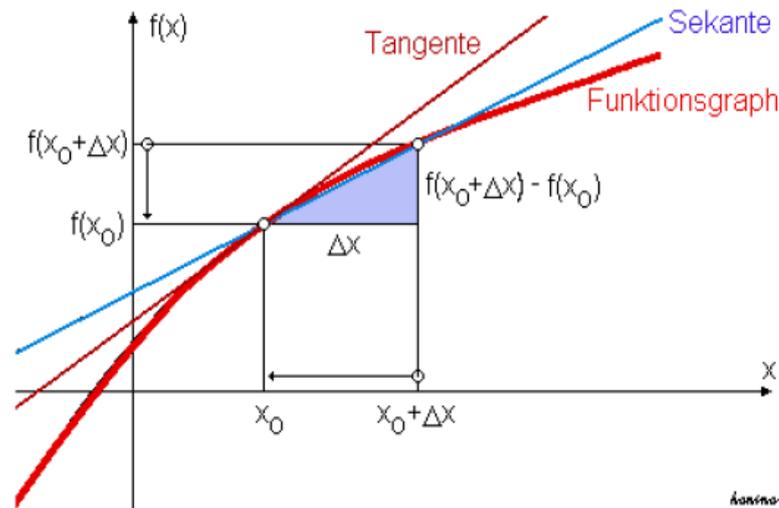


Abbildung aus <http://de.wikipedia.org/wiki/Differentialrechnung>

Andere Darstellungsweise für (2.2):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \frac{dy}{dx} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow \frac{df}{dx} \quad \text{für } \Delta x \rightarrow 0 \quad (2.3)$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{bzw.} \quad \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Die Ausdrücke  $df$ ,  $dy$  und  $dx$  nennt man Differentiale. Sie werden oft als infinitesimal kleine Größen interpretiert.

Die Ableitung an einer Stelle  $x_o$  ist dann (nach Leibniz) der Proportionalitätsfaktor zwischen infinitesimalen Änderungen  $dx$  des Eingabewertes und den daraus resultierenden infinitesimalen Änderungen  $df$  des Funktionswertes.  $df$  entspricht dabei der infinitesimalen Änderung  $dy$  der abhängigen Variablen.

Einer verschwindend kleinen Änderung  $dx$  der unabhängigen Variablen  $x$  wird damit eine verschwindend kleine Änderung  $df$  des Funktionswertes  $f$  zugeordnet.

$$dy = f'(x_o) dx, \quad dx \mapsto dy \quad \text{bei festgehaltenem } x_o \quad (2.4)$$

Zwischen dem Differential  $dx$  und dem Differential  $dy$  besteht also eine lineare Beziehung. Üblich ist anstelle von (2.4) natürlich auch die Schreibweise  $df = f'(x_o) dx$ .

Die lineare Beziehung (2.4) zwischen den Differentialen ist abhängig von der Auswahl des Argumentes  $x_o$ , in dessen Umgebung die Funktion betrachtet wird.

- Veranschaulichen lässt sich der Grenzübergang zur Ableitung an einer Stelle  $x_o$  als Näherung der Tangentensteigung durch eine Folge von Sekantensteigungen, siehe Formel (2.1) und die zugehörige Abbildung. Dort ist eine positive Ableitung an einer Stelle  $x_o$  veranschaulicht.
- Anwendungen :  
In mathematischen Anwendungen (z.B. Kettenregel, Integration von Differentialgleichungen, unbestimmte und bestimmte Integration durch Substitution) rechnet man mit Differentialen fast wie mit normalen Variablen. Bei

der Modellierung in Mechanik, Physik und anderen angewandten Gebieten geht man ähnlich vor. Die Ableitung von physikalischen Größen ist ihre momentanen Änderungsrate. In den Wirtschaftswissenschaften spricht man auch häufig von Grenzwerten (z. B. Grenzkosten, Grenzproduktivität eines Produktionsfaktors etc.).

- Wie z.B. in der Fehlerrechnung ist es oft sinnvoll,  $df$  bzw.  $dy$  und  $dx$  als kleine (nicht unbedingt infinitesimal kleine) Größen zu interpretieren.

Bei der mathematischen Definition der Differentiale geht man sogar davon aus, dass  $dy$  und  $dx$  beliebige Größen sind, die lediglich durch die lineare Abbildung (2.4) aneinander gebunden sind. Jedem  $f'(x_0)$  wird also eine lineare Abbildung zugeordnet.

- Für den Neigungswinkel  $\alpha$  der in  $x_0$  angelegten Tangente gilt:

$$\tan \alpha = f'(x_0). \quad (2.5)$$

Wird er von der positiven x-Achse aus zur Tangente im entgegengesetzten Uhrzeigersinn (positive Orientierung) gemessen, dann ordnet man ein  $\alpha \geq 0$  zu. Bei negativer Messorientierung entsteht demzufolge ein  $\alpha \leq 0$ . Hier reicht es sich auf  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$  zu beschränken.

- Die Ableitung der Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$  beschreibt das Verhalten dieser Funktion in einer kleinen Umgebung von  $x_0$ .

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \Rightarrow \Delta f \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$$

oder

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$$

Mit  $x = x_0 + \Delta x$  entsteht

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad (2.6)$$

Die Approximation der Funktion  $f$  durch diese Tangentenfunktion liefert eine lokale Charakterisierung von  $f$  in einer hinreichend kleinen Umgebung  $U(x_0, \varepsilon)$ .

- Genauer :

Über die Ableitung in einem Punkt  $x_0$  wird eine lineare Funktion definiert:

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Unter allen möglichen linearen Funktionen  $g(x) = ax + b$  approximiert  $T(x)$  die Funktion  $f(x)$  lokal am besten.

Bezeichnet man eine Funktion als differenzierbar, ohne sich auf eine bestimmte Stelle  $x_0$  zu beziehen, dann bedeutet dies die Differenzierbarkeit an jeder Stelle  $x$  des Definitionsbereiches  $\mathcal{D}$ . In jedem Punkt des Graphen kann dann eine eindeutig bestimmte Tangente angelegt werden. Entsprechend ist die Formulierung

differenzierbar auf einer Menge  $A \subseteq \mathcal{D}$

zu interpretieren.

In den Formeln (2.1) bis (2.5) wird dann oft  $x_0$  durch  $x$  ersetzt, um die Abhängigkeit der definierten Größen und Beziehungen von der unabhängigen Variablen  $x$  deutlich zu machen. (Schreiben Sie diese Formeln auf!)

Für die Beziehung zwischen den Differentialen einer differenzierbaren Funktion  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  gilt dann allgemein

$$dy = f'(x) dx, \quad dx \mapsto dy \quad \text{für jedes feste } x \in \mathcal{D}$$

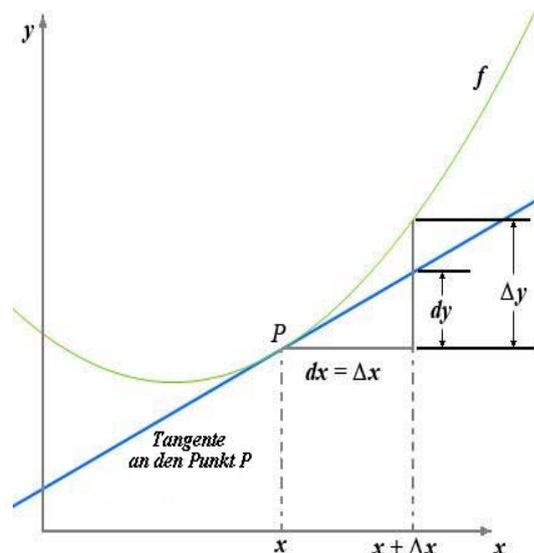


Abbildung aus [http://de.wikipedia.org/wiki/Differential\\_\(Mathematik\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Differential_(Mathematik))

In der oberen Abbildung steht  $\Delta y$  für die Differenz der Funktionswerte. Sie veranschaulicht den Zusammenhang zwischen  $\Delta y$  und  $dy$ .

**Beispiel 2.1.** (Elementare Berechnung einer Ableitungsfunktion)

Vgl. <http://de.wikipedia.org/wiki/Differentialrechnung>

Gesucht sei die Ableitung von  $f(x) = x^2 - 3x + 2$ . Dann berechnet man den Differenzenquotienten als

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ &= \frac{((x_0 + \Delta x)^2 - 3(x_0 + \Delta x) + 2) - (x_0^2 - 3x_0 + 2)}{\Delta x} \\ &= \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 3x_0 - 3\Delta x + 2 - x_0^2 + 3x_0 - 2}{\Delta x} \\ &= \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 3\Delta x}{\Delta x} \\ &= 2x_0 + \Delta x - 3. \end{aligned}$$

und erhält im Grenzübergang  $\Delta x \rightarrow 0$  die Ableitung

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x - 3) = 2x_0 - 3.$$

Also gilt:  $f'(x) = 2x - 3$ .

Elementare Funktionen sind in der Regel auf Intervallen  $\mathcal{I}$  oder allgemeiner auf Mengen der Gestalt

$$\bigcup_k \mathcal{I}_k \quad (\text{alle } \mathcal{I}_k \text{ sind Intervalle})$$

differenzierbar.

**Bemerkung 2.2.** Eine differenzierbare Funktion  $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$  ist immer stetig. Die Umkehrung gilt jedoch nicht, d.h. es gibt stetige Funktionen, die an einer oder an mehreren Stellen nicht differenzierbar sind.

**Bemerkung 2.3.** Es sei  $\mathcal{D}$  ein Intervall  $\mathcal{I}$  der Gestalt  $[a, b]$ ,  $(a, b]$  oder  $[a, b)$ .

Wenn man eine Funktion  $f: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  in diesen Fällen differenzierbar nennt, dann muss die Ableitung in den zu  $\mathcal{I}$  gehörigen Randpunkten natürlich als einseitige Ableitung interpretiert werden.

Im Falle  $\mathcal{I} = (a, b]$  geht es somit um die linksseitige Ableitung von  $f$  im Randpunkt  $b$

$$\frac{d^- f}{dx}(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Alle anderen Punkte sind hier innere Punkte, in denen Differenzierbarkeit als zweiseitige Differenzierbarkeit zu interpretieren ist.

Im Falle  $\mathcal{I} = [a, b)$  geht es entsprechend um die rechtsseitige Ableitung von  $f$  im Randpunkt  $a$

$$\frac{d^+ f}{dx}(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Im Falle  $\mathcal{I} = [a, b]$  gibt es dagegen zwei Randpunkte, in denen die Ableitungen als einseitige Ableitungen zu ermitteln sind.

Wenn Randpunkte zum Definitionsbereich gehören und in ihnen Differenzierbarkeit vorliegt, dann können die üblichen Bezeichnungen  $f'(a)$  bzw.  $f'(b)$  für die obigen einseitigen Ableitungen benutzt werden.

Im Falle eines inneren Punktes muss jedoch zwischen einseitiger Differenzierbarkeit und Differenzierbarkeit unterschieden werden, wie das folgende Beispiel zeigt.

**Beispiel 2.4.** (Eine stetige aber nicht überall differenzierbare Funktion)

$f(x) = |x|$  ist an der Stelle 0 nicht differenzierbar:

Für alle  $x > 0$  gilt nämlich  $f(x) = x$  und damit

$$\frac{d^+ f}{dx}(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = 1.$$

Für alle  $x < 0$  gilt dagegen  $f(x) = -x$  und folglich

$$\frac{d^- f}{dx}(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1.$$

Rechts- und linksseitige Ableitung existieren. Sie stimmen aber nicht überein. Die Funktion ist an der Stelle 0 also nicht differenzierbar. Die Differenzierbarkeit der Funktion an allen anderen Stellen liegt dagegen vor. Insbesondere gilt

$$f'(0_+) = \lim_{x \rightarrow 0_+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0_+} 1 = 1 \implies \frac{d^+ f}{dx}(0) = f'(0_+) \quad (2.7)$$

Die rechtsseitige Ableitung an der Stelle 0 stimmt hier mit dem rechtsseitigen Grenzwert  $f'(0_+)$  der Ableitungen  $f'(x)$  überein. Damit wird  $\frac{d^+ f}{dx}$  an der Stelle 0 rechtsseitig stetig.

Analog gilt

$$f'(0_-) = \lim_{x \rightarrow 0_-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0_-} \{-1\} = -1 \implies \frac{d^- f}{dx}(0) = f'(0_-). \quad (2.8)$$

Die linksseitige Ableitung an der Stelle 0 ist hier also gleich dem linksseitigen Grenzwert  $f'(0_-)$  der Ableitungen  $f'(x)$ . Damit wird  $\frac{d^- f}{dx}$  an der Stelle 0 linksseitig stetig.

Aus der Existenz einseitiger Ableitungen folgt jedoch nicht immer ihre einseitige Stetigkeit. Ebenso ergibt sich aus der Existenz der Ableitung  $f'(x)$  nicht zwingend ihre Stetigkeit oder einseitige Stetigkeit in jedem Punkt  $x_0$  ihres Definitionsbereiches.

**Bemerkung 2.5.** Es gibt also insbesondere Funktionen, die differenzierbar aber nicht stetig differenzierbar sind. Es kann also die Ableitung  $f'(x)$  in einem Intervall existieren, ohne dass sie in jedem Punkt stetig ist. Das folgende Beispiel möge dies etwas illustrieren.

**Beispiel 2.6.** Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

ist in jedem Punkt, den Nullpunkt  $x = 0$  eingeschlossen, differenzierbar. Deshalb ist  $f(x)$  auch überall stetig. Die Ableitung ergibt sich zu

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Diese Ableitung ist an der Stelle  $x = 0$  nicht stetig. Sie ist dort nicht einmal einseitig stetig (weder linksseitig noch rechtsseitig), denn

$$\text{keine der beiden Gleichungen} \quad \frac{d^+ f}{dx}(0) = f'(0_+) \quad \text{und} \quad \frac{d^- f}{dx}(0) = f'(0_-)$$

ist erfüllt. Die einseitigen Grenzwerte der Ableitungen  $f'(0_+)$  und  $f'(0_-)$  existieren nämlich beide nicht. Für die einseitigen Ableitungen gilt natürlich

$$\frac{d^- f}{dx}(0) = \frac{d^+ f}{dx}(0) = f'(0) = 0$$

Trotz der angedeuteten Probleme wird manchmal davon abgesehen, Bezeichnungen wie in (2.7) und (2.8) zu nutzen, um einseitige Ableitungen mathematisch korrekt von den entsprechenden einseitigen Grenzwerten der Ableitungen zu unterscheiden. In theoretisch anspruchsvolleren Ingenieurmodellen wird dies unter Umständen problematisch.

Für uns wird bezüglich der Anwendungen die folgende Definition grundlegende Bedeutung haben.

**Definition 2.7.** (Stetige Differenzierbarkeit) Eine reelle Funktion  $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt stetig differenzierbar, wenn ihre Ableitung  $f'$  überall auf  $\mathcal{D}$  existiert und stetig ist.

Mit  $C^1(\mathcal{D})$  als dem linearen Raum der in  $\mathcal{D}$  (mindestens) einmal stetig differenzierbaren Funktionen kennzeichnet man dies mit  $f \in C^1(\mathcal{D})$ .

Ist  $\mathcal{I}$  ein halboffenes oder ein abgeschlossenes Intervall, dann folgt aus  $f \in C^1(\mathcal{I})$  die einseitige stetige Differenzierbarkeit in den zum Definitionsbereich gehörigen Randpunkten.

Das letzte Beispiel 2.6 zeigt :

Selbst wenn eine Funktion überall differenzierbar ist ( $f'$  also auf dem Definitionsbereich  $\mathcal{D}$  existiert), muss die Ableitung nicht stetig sein. Es gilt dort insbesondere

$$\begin{aligned} f &\notin C^1(\mathcal{D}) && \text{wenn } \mathcal{D} = \mathbb{R} \\ f &\in C^1(\mathcal{D}) && \text{wenn } \mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

Differenzierbarkeit einer auf einem Intervall definierten reellen Funktion bedeutet anschaulich :

Der Graph der Funktion ist zusammenhängend und verläuft knickfrei. Außerdem gibt es keine vertikale Tangente.

Bei der Betrachtung praktischer Beispiele liegen Stetigkeit und Differenzierbarkeit von  $f(x)$  sowie die Stetigkeit von  $f'(x)$  abgesehen von isolierten Punkten des Definitionsbereiches vor.

## 2.2 Elementare Differentiationsregeln

Mit den folgenden Regeln kann man u.a. die Differentiation zusammengesetzter Funktionen über die Differentiation einfacherer Funktionen realisieren.  $f$ ,  $g$  und  $h$  seien in ihrem Definitionsbereich differenzierbare Funktionen.

- Konstante Funktion  $f(x) \equiv a = \text{const}$

$$(a)' = 0 \quad (2.9)$$

- Potenzregel

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad \text{für } n \in \mathbb{Z} \quad (2.10)$$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad \text{für } x > 0 \quad \text{und } \alpha \in \mathbb{R} \quad (2.11)$$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad \text{für } x \geq 0 \quad \text{und reelle } \alpha \geq 1 \quad (2.12)$$

$0^0$  ist i.a. nicht definiert, soll hier jedoch ausnahmsweise als 1 interpretiert werden.

- Faktorregel (konstanter Faktor)

$$(a \cdot f)' = a \cdot f' \quad (2.13)$$

- Summenregel

$$(g \pm h)' = g' \pm h' \quad (2.14)$$

- Produktregel

$$(g \cdot h)' = g' \cdot h + g \cdot h' \quad (2.15)$$

- Quotientenregel

$$\left(\frac{g}{h}\right)' = \frac{g' \cdot h - g \cdot h'}{h^2} \quad (2.16)$$

- Kettenregel

$$(g \circ h)'(x) = g(h(x))' = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

oder

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{dh} \frac{dh}{dx}$$

- Logarithmische Ableitung

Aus der Kettenregel folgt für die Ableitung des natürlichen Logarithmus einer Funktion

$$(\ln(f))' = \frac{f'}{f}$$

Ein Bruch der Form  $\frac{f'}{f}$  wird logarithmische Ableitung genannt.

- Ableitung einer verallgemeinerten Exponentialfunktion (Basis  $g(x) > 0$  nicht konstant)

Um  $f(x) = g(x)^{h(x)}$  zu differenzieren, nutzt man, dass Potenzen mit positiver Basis und reellen Exponenten über die Exponentialfunktion  $e^u = \exp(u)$  dargestellt werden können

$$f(x) = \exp([\ln g(x)] \cdot h(x))$$

$$\text{wegen } e^{\alpha \cdot \beta} = (e^\alpha)^\beta \quad \text{und } \gamma = e^{\ln \gamma} \quad \text{mit } \alpha = \ln \gamma.$$

Die Anwendung der Kettenregel und der Produktregel ergibt

$$f'(x) = \left( h'(x) \ln(g(x)) + h(x) \frac{g'(x)}{g(x)} \right) g(x)^{h(x)}$$

### 2.3 Differentiation einiger elementarer Funktionen

Funktion	Ableitung
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a \quad (a > 0, a \neq 1)$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0, a \neq 1, x > 0)$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \quad (x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2})$
$f(x) = \cot x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x) \quad (x \neq k\pi)$

Funktion	Ableitung
$f(x) = \sinh x$	$f'(x) = \cosh x$
$f(x) = \cosh x$	$f'(x) = \sinh x$
$f(x) = \tanh x$	$f'(x) = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$
$f(x) = \coth x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x \quad (x \neq 0)$
$f(x) = \arcsin x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad ( x  < 1)$
$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad ( x  < 1)$
$f(x) = \arctan x$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
$f(x) = \operatorname{arccot} x$	$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$
$f(x) = \operatorname{arsinh} x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x) = \operatorname{arcosh} x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x > 1)$
$f(x) = \operatorname{artanh} x$	$f'(x) = \frac{1}{1-x^2} \quad ( x  < 1)$
$f(x) = \operatorname{arcoth} x$	$f'(x) = \frac{1}{1-x^2} \quad ( x  > 1)$

## 2.4 Differentiation der Umkehrfunktion

Existiert zu  $f : \mathcal{D}_x \rightarrow \mathcal{W}_x$  die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : \mathcal{D}_y \rightarrow \mathcal{W}_y,$$

so ist diese bekanntlich durch

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y) \quad \text{und} \quad f^{-1} : \mathcal{W}_x \rightarrow \mathcal{D}_x$$

charakterisiert.

**Satz 2.8.** (Differentiation der inversen Funktion)

Zur reellen Funktion  $f : \mathcal{D}_x \rightarrow \mathcal{W}_x$  existiere die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : \mathcal{D}_y \rightarrow \mathcal{W}_y,$$

Dann gilt für jeden inneren Punkt  $x_o$  von  $\mathcal{D}_x$  :

Ist  $f$  in  $x_o$  differenzierbar mit  $f'(x_o) \neq 0$ , dann wird auch die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  an der Stelle  $y_o = f(x_o)$  differenzierbar mit

$$(f^{-1})'(y_o) = \frac{1}{f'(x_o)} \tag{2.17}$$

Eine andere Schreibweise für (2.17) wäre

$$\frac{dx}{dy}(y_o) = \frac{1}{\frac{dy}{dx}(x_o)} \quad \text{mit} \quad y_o = f(x_o)$$

Betrachtet man in Satz 2.8 alle Differenzierbarkeitspunkte  $x$  mit  $\frac{dy}{dx} = f'(x) \neq 0$ , so gilt für diese stets

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \quad \text{beziehungsweise} \quad \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1$$

**Bemerkung 2.9.** Werden die Voraussetzungen in Satz 2.8 dahingehend abgeschwächt, dass nur die rechtsseitige Ableitung  $f'(x_{o+})$  mit  $f'(x_{o+}) \neq 0$  existiert, dann gilt an Stelle von (2.17) noch

$$(f^{-1})'(y_{o+}) = \frac{1}{f'(x_{o+})} \quad \text{falls} \quad f'(x_{o+}) > 0$$

$$(f^{-1})'(y_{o-}) = \frac{1}{f'(x_{o+})} \quad \text{falls} \quad f'(x_{o+}) < 0$$

für die fallweise existierende einseitige Ableitung der Umkehrfunktion.

Existiert die linksseitige Ableitung  $f'(x_{o-})$  mit  $f'(x_{o-}) \neq 0$ , dann gilt entsprechend

$$(f^{-1})'(y_{o-}) = \frac{1}{f'(x_{o-})} \quad \text{falls} \quad f'(x_{o-}) > 0$$

$$(f^{-1})'(y_{o+}) = \frac{1}{f'(x_{o-})} \quad \text{falls} \quad f'(x_{o-}) < 0$$

Damit kann die Formel (2.17) insbesondere auf Randpunkte der Definitionsbereiche von  $f$  und  $f^{-1}$  übertragen werden.

## 2.5 Berechnung von Grenzwerten mit der Regel von de l'Hospital

Mit der Regel von de l'Hospital können unbestimmte Ausdrücke der Form

$$\left[ \frac{0}{0} \right], \quad \left[ \frac{+\infty}{+\infty} \right], \quad \left[ \frac{+\infty}{-\infty} \right], \quad \left[ \frac{-\infty}{+\infty} \right], \quad \left[ \frac{-\infty}{-\infty} \right], \tag{2.18}$$

$$[0 \cdot (\pm\infty)], \quad [\infty - \infty], \quad [-\infty + \infty], \quad [0^0], \quad [\infty^0], \quad [1^\infty]$$

berechnet werden (nicht in allen Spezialfällen möglich, nicht immer vorteilhaft). Diese unbestimmten Ausdrücke charakterisieren das asymptotische Verhalten von Teilausdrücken bei Grenzübergängen in zusammengesetzten Funktionen.

Beispiele:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{(x - \pi)^{\frac{3}{2}}}{\sin x}, \quad \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{(\pi - x)^{\frac{3}{2}}}{\tan x} \quad \text{sind von der Form} \quad \left[ \frac{0}{0} \right],$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(|x|)}{x^{-1}}, \quad \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{(x - \pi)^{-1}}{\cot(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{(x - \pi)^{-1}}{\cot x}, \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x - \pi)^{-1}}{\cot x}$$

sind von der Form  $\left[ \begin{array}{c} \pm\infty \\ \pm\infty \end{array} \right]$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} x \ln |x|, \quad \lim_{x \rightarrow \pi^+} (x - \pi) \cot x, \quad \lim_{x \rightarrow \pi^-} (x - \pi) \cot x, \quad \lim_{x \rightarrow \pi} (x - \pi) \cot x$$

sind von der Form  $[0 \cdot (\pm\infty)]$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{1}{x} + \ln x \right\}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \left\{ \frac{1}{x^2} + \ln(|x|) \right\}, \quad \lim_{x \rightarrow \pi^+} \{(x - \pi)^{-1} - \cot x\}, \quad \lim_{x \rightarrow \pi^-} \{(x - \pi)^{-1} - \cot x\}$$

sind von der Form  $[\infty - \infty]$  bzw.  $[-\infty + \infty]$

Die eckigen Klammern in (2.18) wurden benutzt, um zu unterstreichen, dass diese Ausdrücke an sich nicht existieren. Sie repräsentieren lediglich bestimmte Formen von Grenzübergängen.

Verhalten von Zähler und Nenner und der entsprechenden Tangenten beim Grenzübergang für

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - \pi) + 2 \cdot 10^4 \cdot \left(\frac{x - \pi}{6}\right)^5}{\sin(\pi x)}$$

sind in der unteren Abbildung veranschaulicht.

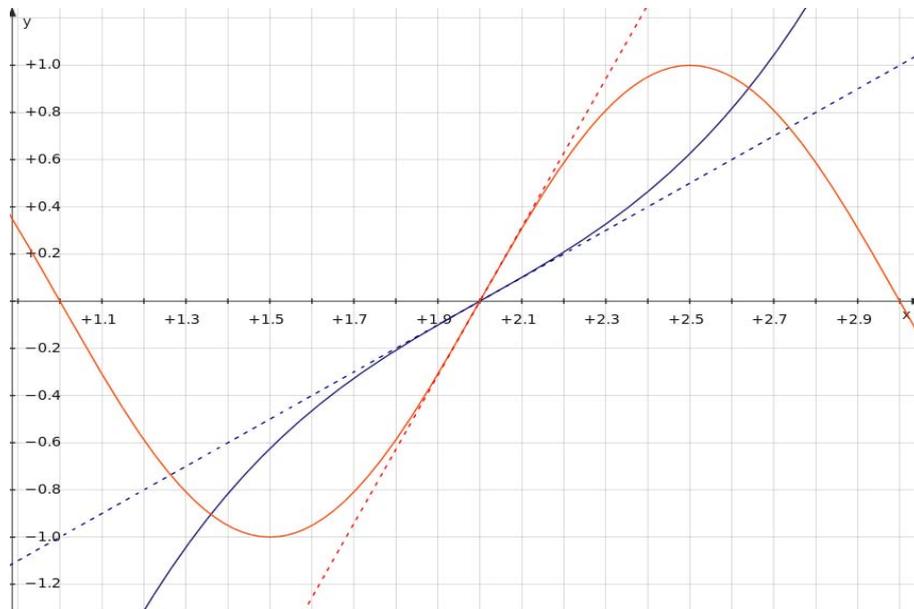


Abbildung aus [http://de.wikipedia.org/wiki/Regel\\_von\\_L'Hospital](http://de.wikipedia.org/wiki/Regel_von_L'Hospital)

Der folgende Satz kann in seiner allgemeinen Form mit dem Satz 2.37 (kommt später, verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung) bewiesen werden. Setzt man zusätzlich die Differenzierbarkeit in den Randpunkten voraus, dann ergibt sich die dortige Behauptung unmittelbar aus der Definition des Differentialquotienten 2.2.

**Satz 2.10.** (Regeln von de l'Hospital)

Die Funktionen  $f$  und  $g$  seien differenzierbar auf einem offenen Intervall  $\mathcal{I} = (a, b)$ , wobei  $g'(x) \neq 0$  für alle  $x \in \mathcal{I}$  erfüllt sei.

Dann gelten die folgenden Aussagen:

1. In den Fällen

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$$

oder

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = \pm\infty,$$

folgt für den linksseitigen Grenzwert von  $\frac{f(x)}{g(x)}$  an der Stelle  $b$

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad (2.19)$$

falls der entsprechende Grenzwert von  $\frac{f'(x)}{g'(x)}$  existiert.

2. In den Fällen

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$$

oder

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \pm\infty$$

folgt für den rechtsseitigen Grenzwert von  $\frac{f(x)}{g(x)}$  an der Stelle  $a$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad (2.20)$$

falls der entsprechende Grenzwert von  $\frac{f'(x)}{g'(x)}$  existiert.

**Bemerkung 2.11.** (Folgerungen aus der Regel von de l'Hospital)

Die Aussagen von (2.19) bleiben gültig, wenn im Falle 1  $b$  durch  $+\infty$  ersetzt wird:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad (2.21)$$

Die Aussagen von (2.20) bleiben gültig, wenn im Falle 2  $a$  durch  $-\infty$  ersetzt wird:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad (2.22)$$

**Folgerung 2.12.** Die Funktionen  $f$  und  $g$  seien differenzierbar auf  $(a, c) \cup (c, b)$  mit  $a < c < b$ , wobei dort  $g'(x) \neq 0$  erfüllt sei.

Dann folgt aus

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$$

oder aus

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \pm\infty$$

für den Grenzwert von  $\frac{f(x)}{g(x)}$  an der Stelle  $c$

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad (2.23)$$

falls der entsprechende Grenzwert von  $\frac{f'(x)}{g'(x)}$  existiert.

**Bemerkung 2.13.** Die Regeln können unter Umständen mehrfach angewendet werden. Es ist jedoch stets (natürlich auch schon bei der erstmaligen Anwendung) darauf zu achten, dass ein unbestimmter Ausdruck der Form (2.18) vorliegt.

**Bemerkung 2.14.** Unbestimmte Ausdrücke deren Grenzwerte formal die Gestalt

$$[0 \cdot \pm\infty], \quad [\infty - \infty], \quad [0^0], \quad [\infty^0], \quad [1^\infty]$$

haben, können eventuell nach Überführung in Quotientenform auf obige Weise berechnet werden. Bei den letzten drei Formen erfolgt dies so:

1. Anwendung der Logarithmusfunktion

2. Grenzwertbestimmung des entstandenen Ausdrucks

3. Grenzwertbestimmung des ursprünglich gegebenen Ausdrucks

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow c} \{f(x)\}^{g(x)} \iff \beta = \ln(\alpha) = \lim_{x \rightarrow c} \{g(x) \cdot \ln f(x)\}$$

$\beta$  berechnen, dann folgt  $\alpha = e^\beta$

**Beispiele 2.15.**

$$\begin{aligned} G_1 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\left(\frac{1}{2 \ln x}\right)} \text{ ist von der Form } [0^0] \\ \implies \ln G_1 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left\{ \left(\frac{1}{2 \ln x}\right) \ln x \right\} = \frac{1}{2} \implies G_1 = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \\ \text{Warum existiert } \lim_{x \rightarrow 0} x^{\left(\frac{1}{2 \ln x}\right)} &\text{ nicht?} \end{aligned}$$

Auch

$$\begin{aligned} G_2 &= \lim_{x \rightarrow 0} (x^2)^{\left(\frac{1}{\ln|x|}\right)} \text{ ist von der Form } [0^0] \\ \implies \ln G_2 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{1}{\ln|x|}\right) \ln x^2 \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\ln|x|} 2 \ln|x| \right\} \implies G_2 = e^2 \end{aligned}$$

Entsprechend zeigt man ohne Nutzung des letzten Resultates

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2)^{\left(\frac{1}{-\ln|x|}\right)} = e^{-2}.$$

## 2.6 Höhere Ableitungen

Ist die Ableitung einer Funktion  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  wiederum differenzierbar, so lässt sich die zweite Ableitung von  $f$  als Ableitung von  $f' : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  definieren. Auf dieselbe Weise können dann auch dritte, vierte und höhere Ableitungen definiert werden. Eine Funktion kann dementsprechend einfach differenzierbar, zweifach differenzierbar, sein. Ist die  $n$ -te Ableitung  $f^{(n)} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so schreiben wir  $f \in C^n(\mathcal{D})$ .

Die zweite Ableitung hängt z. B. mit der Krümmung des Graphen von  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  zusammen. Sie besitzt auch weitreichende physikalische Anwendungen. Zum Beispiel ist die erste Ableitung des Weges  $x(t)$  nach der Zeit  $t$  die Momentangeschwindigkeit  $v(t) = \dot{x}(t)$  und die zweite Ableitung die (momentane) Beschleunigung  $a(t) = \ddot{x}(t)$ . Die Schreibweise  $\dot{x}(t)$  für Ableitungen einer beliebigen Funktion nach der Zeit ist in der Physik üblich.

Höhere Ableitungen können auf verschiedene Weisen geschrieben werden:

$$f'' = f^{(2)} = \frac{d^2 f}{dx^2},$$

$$f''' = f^{(3)} = \frac{d^3 f}{dx^3}, \quad \text{usw.}$$

Im Falle der Beschleunigung :

$$\ddot{x}(t) = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

**Bemerkung 2.16.** *Produktregel und Höhere Ableitungen - Leibnizregel*

Die Ableitung  $n$ -ter Ordnung für ein Produkt aus zwei  $n$ -fach differenzierbaren Funktionen  $f$  und  $g$  ergibt sich aus

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Die hier auftretenden Ausdrücke der Form  $\binom{n}{k}$  sind wie üblich die Binomialkoeffizienten.

## 2.7 Differentiation komplexwertiger Funktionen

Mit konstanten Parametern  $A, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  werden folgende Beispiele differenziert.

$$f(t) = A e^{i(\alpha t + \beta)} = A \cos(\alpha t + \beta) + i A \sin(\alpha t + \beta)$$

$$f'(t) = i \alpha A e^{i(\alpha t + \beta)} = i \alpha A \cos(\alpha t + \beta) + i \alpha i A \sin(\alpha t + \beta)$$

$$f'(t) = i \alpha A e^{i(\alpha t + \beta)} = i \alpha A \cos(\alpha t + \beta) - \alpha A \sin(\alpha t + \beta)$$

und

$$g(t) = A \exp(-\gamma t + i(\alpha t + \beta)) = A e^{-\gamma t} e^{i(\alpha t + \beta)} = A e^{-\gamma t} \cos(\alpha t + \beta) + i A e^{-\gamma t} \sin(\alpha t + \beta)$$

$$g'(t) = (-\gamma + i \alpha) A \exp(-\gamma t + i(\alpha t + \beta)) = (-\gamma + i \alpha) A e^{-\gamma t} e^{i(\alpha t + \beta)}$$

## 2.8 Differentiation vektorwertiger Funktionen

Mit

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T \quad \text{bzw.} \quad x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$$

werden zusammenhängende ebene bzw. räumliche Kurven beschrieben, wenn alle Komponenten  $x_k(t)$  stetige reelle Funktionen sind. In technischer Mechanik und Physik werden diese Kurven meist in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  durchlaufen. Existieren die Zeitableitungen

$$\dot{x}(t) = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t))^T \quad \text{bzw.} \quad \dot{x}(t) = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dot{x}_3(t))^T$$

$$\ddot{x}(t) = (\ddot{x}_1(t), \ddot{x}_2(t))^T \quad \text{bzw.} \quad \ddot{x}(t) = (\ddot{x}_1(t), \ddot{x}_2(t), \ddot{x}_3(t))^T$$

dann sind  $v(t) = \dot{x}(t)$  bzw.  $a(t) = \ddot{x}(t)$  als (momentaner) Geschwindigkeits- bzw. Beschleunigungsvektor zu interpretieren.

Es muss zwischen

Geschwindigkeitsvektor = Geschwindigkeit und Bahngeschwindigkeit

Beschleunigungsvektor = Beschleunigung und Bahnbeschleunigung

unterschieden werden.

Bahngeschwindigkeit im  $\mathbb{R}^3$  :

$$|v(t)| = \sqrt{[\dot{x}_1(t)]^2 + [\dot{x}_2(t)]^2 + [\dot{x}_3(t)]^2}$$

Bahnbeschleunigung im  $\mathbb{R}^3$  :

$$a_T = \frac{d|v(t)|}{dt}$$

Die Bahnbeschleunigung ist die Komponente des Beschleunigungsvektors, die in Richtung der Tangenten zeigt. Das ist die Projektion des Beschleunigungsvektors auf die Tangentenrichtung, die mit der Durchlaufrichtung des Massenpunktes übereinstimmt.

## 2.9 Funktions- und Kurvendiskussion

### 2.9.1 Monotonieverhalten

Das offene Intervall  $\mathcal{I}$  im folgenden Satz kann auch nicht beschränkt sein.

Beschränktes offenes Intervall :  $\mathcal{I} = (a, b)$  mit  $-\infty < a < b < \infty$

Nicht beschränkte offene Intervalle :  $\mathcal{I} = (-\infty, \infty)$ ,  $\mathcal{I} = (-\infty, b)$ ,  $\mathcal{I} = (a, \infty)$

**Satz 2.17.** Für jede auf einem offenen Intervall  $\mathcal{I}$  differenzierbare Funktion  $f$  gilt :

1.  $f$  wird genau dann monoton wachsend auf  $\mathcal{I}$ , wenn  $f'(x) \geq 0$  auf  $(a, b)$  ist.
2.  $f$  wird genau dann monoton fallend auf  $\mathcal{I}$ , wenn  $f'(x) \leq 0$  auf  $(a, b)$  ist.

**Satz 2.18.** Für jede auf einem Intervall  $[a, b]$  stetige und auf  $(a, b)$  differenzierbare Funktion  $f$  gilt :

1.  $f$  wird genau dann monoton wachsend auf  $[a, b]$ , wenn  $f'(x) \geq 0$  auf  $(a, b)$  ist.
2.  $f$  wird genau dann monoton fallend auf  $[a, b]$ , wenn  $f'(x) \leq 0$  auf  $(a, b)$  ist.

Die Folgerungen für Intervalle vom Typ  $\mathcal{I} = [a, \infty)$  und  $\mathcal{I} = (-\infty, b]$  liegen auf der Hand.

Offensichtlich gilt :

Ist  $f$  auf  $(a, b)$  monoton wachsend und auf  $[a, b]$  stetig, dann wird  $f$  auch auf  $[a, b]$  monoton wachsend.

Ist  $f$  auf  $(a, b)$  streng monoton wachsend und auf  $[a, b]$  stetig, dann wird  $f$  auch auf  $[a, b]$  streng monoton wachsend.

Analoge Aussagen hierzu erhält man bei durchgehendem Ersetzen von wachsend durch fallend.

**Satz 2.19.** Für jede auf einem Intervall  $\mathcal{I}$  differenzierbare Funktion  $f$  gilt :

1.  $f$  wird genau dann streng monoton wachsend auf  $\mathcal{I}$ , wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.

$$f'(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in \mathcal{I}$$

und

auf **keinem** Teilintervall  $(\alpha, \beta) \subseteq \mathcal{I}$  gilt  $f'(x) = 0$  für alle  $x \in (\alpha, \beta)$ .

2.  $f$  wird genau dann streng monoton fallend auf  $\mathcal{I}$ , wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.

$$f'(x) \leq 0 \text{ für alle } x \in \mathcal{I}$$

und

auf **keinem** Teilintervall  $(\alpha, \beta) \subseteq \mathcal{I}$  gilt  $f'(x) = 0$  für alle  $x \in (\alpha, \beta)$ .

Strenge Monotonie liegt also genau dann vor, wenn die strengen Ungleichungen  $f'(x) > 0$  oder  $f'(x) < 0$  höchstens in isolierten Punkten verletzt werden.

Folgerungen :

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 \text{ für alle } x \in \mathcal{I} &\implies f \text{ streng monoton wachsend auf } \mathcal{I} \\ f'(x) < 0 \text{ für alle } x \in \mathcal{I} &\implies f \text{ streng monoton fallend auf } \mathcal{I} \end{aligned}$$

### 2.9.2 Konvexität und Konkavität

**Satz 2.20.** Für jede auf einem Intervall  $\mathcal{I}$  differenzierbare Funktion  $f$  gilt :

1.  $f$  wird genau dann konvex auf  $\mathcal{I}$ , wenn die Ableitung  $f'$  dort monoton wachsend ist.
2.  $f$  wird genau dann streng konvex auf  $\mathcal{I}$ , wenn die Ableitung  $f'$  dort streng monoton wachsend ist.
3.  $f$  wird genau dann konkav auf  $\mathcal{I}$ , wenn die Ableitung  $f'$  dort monoton fallend ist.
4.  $f$  wird genau dann streng konkav auf  $\mathcal{I}$ , wenn die Ableitung  $f'$  dort streng monoton fallend ist.

**Satz 2.21.** Für eine auf einem Intervall  $\mathcal{I}$  differenzierbare Funktion  $f$  gilt :

1.  $f$  wird genau dann konvex auf  $\mathcal{I}$ , wenn für jede in einem beliebigen Punkt  $x_o \in \mathcal{I}$  angelegte

Tangente  $T_o(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$  die Ungleichung

$$T_o(x) \leq f(x) \text{ für alle } x \in \mathcal{I} \text{ erfüllt ist.}$$

2.  $f$  wird genau dann streng konvex auf  $\mathcal{I}$ , wenn für jede dieser Tangenten

$$T_o(x) < f(x) \text{ für alle } x \in \mathcal{I} \setminus \{x_o\} \text{ erfüllt ist.}$$

Die Umkehrung der obigen Ungleichungen liefert entsprechende Aussagen für die Konkavität bzw. strenge Konkavität.

**Satz 2.22.** Die reelle Funktion  $f$  sei zweimal differenzierbar auf dem Intervall  $\mathcal{I}$ . Dann gilt

1.  $f$  ist genau dann konvex auf  $\mathcal{I}$ , wenn  $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{I}$  gilt.
2.  $f$  ist genau dann streng konvex auf  $\mathcal{I}$ , wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.

$$f''(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in \mathcal{I} \text{ und} \\ \text{auf keinem Teilintervall } (\alpha, \beta) \subseteq \mathcal{I} \text{ gilt } f''(x) = 0 \text{ für alle } x \in (\alpha, \beta)$$

Interpretation der Bedingung zur 2. Aussage :

Die Ungleichung  $f''(x) > 0$  darf nur in isolierten Punkten verletzt werden.

Auch hier gilt: Die Umkehrung der Ungleichungen liefert entsprechende Kriterien für Konvexität bzw. strenge Konvexität.

Strenge Konvexität (strenge Konkavität) auf  $\mathcal{I}$  liegt also genau dann vor, wenn dort die strengen Ungleichungen  $f''(x) > 0$  (  $f''(x) < 0$  ) höchstens in isolierten Punkten verletzt werden.

Folgerungen :

$$f''(x) > 0 \text{ für alle } x \in \mathcal{I} \implies f \text{ streng monoton wachsend auf } \mathcal{I} \\ f''(x) < 0 \text{ für alle } x \in \mathcal{I} \implies f \text{ streng monoton fallend auf } \mathcal{I}$$

### Nachweis von Konvexität und Konkavität unter abgeschwächten Voraussetzungen :

(von Ingenieurstudenten selten benutzt )

Eine überall links- und rechtsseitig differenzierbare Funktion  $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann konvex, wenn ihre "Ableitung" monoton wachsend ist. Diese Monotonieeigenschaft ist folgendermaßen zu interpretieren :

$$\text{Aus } x_1 \leq x_2 \text{ folgt stets } \frac{d^-f}{dx}(x_1) \leq \frac{d^+f}{dx}(x_1) \leq \frac{d^-f}{dx}(x_2) \leq \frac{d^+f}{dx}(x_2)$$

Bei rechtsseitigem Fortschreiten eines Kurvenpunktes dreht sich die (einseitige) Tangente nur nach links (Anstieg kann sich höchstens vergrößern). Sie kann natürlich stückweise ihre Richtung beibehalten (nur Konvexität).

Die Konkavitätsbedingung ergibt sich wie üblich.

**Bemerkung 2.23.** (Krümmung  $\kappa$  für ebene Kurven)

1. Ebene Kurve sei in der Gestalt  $y = f(x)$ ,  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben  $f''(x)$  existiere auf  $\mathcal{D}$ :

$$\kappa(x) = \frac{f''(x)}{[1 + [f'(x)]^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (2.24)$$

2. Kurve sei in Parameterdarstellung  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))^T \quad t \in \mathcal{I}$  gegeben,  $x''(t)$  existiere auf  $\mathcal{I}$

$$\kappa(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{([\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.25)$$

Der Parameter  $t$  muss hier nicht unbedingt die Zeit sein. Oft wird als Parameter die Bogenlänge  $s$  verwendet. Dann ist in (2.25) der Parameter  $t$  durch  $s$  zu ersetzen.

Elastostatik des schlanken Balkens : Durchbiegung  $w$  mit  $y = w(x)$ ,  $w : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$

$$|w'(x)| \ll 1 \text{ auf } [0, L] \implies \text{Approximation } \kappa(x) \approx f''(x)$$

Bemerkungen zu (2.24) :

$|f''(x)| > 0$  positive Krümmung, Kurve links gekrümmt, strenge Konvexität

$|f''(x)| < 0$  negative Krümmung, Kurve rechts gekrümmt, strenge Konkavität

### 2.9.3 Extremwerte

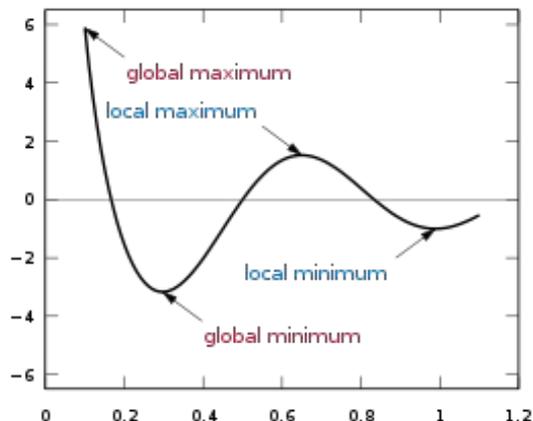


Abbildung aus [http://en.wikipedia.org/wiki/Maxima\\_and\\_minima](http://en.wikipedia.org/wiki/Maxima_and_minima)  
Extrema von

$$f(x) = \frac{\cos(3\pi x)}{x}, \quad f : [0, 1 ; 1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

Begriffe klären:

Extremum : Minimum oder Maximum,  
inneres Extremum, Randextremum,  
inneres Minimum, Randminimum, inneres Maximum, Randmaximum,  
lokales Extremum und globales Extremum,  
lokales Minimum und globales Minimum=Minimum,  
lokales Maximum und globales Maximum=Maximum.

Echte Extremwerte (auch eigentliche genannt) :

echtes lokales Minimum und echtes (globales) Minimum,  
echtes lokales Maximum und echtes (globales) Maximum

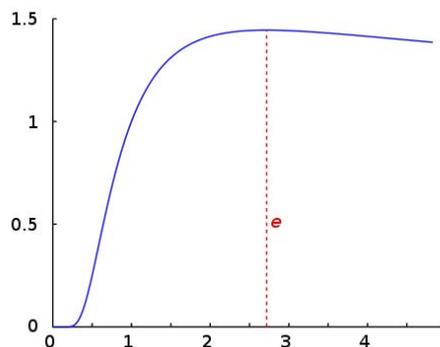


Abbildung aus [http://en.wikipedia.org/wiki/Maxima\\_and\\_minima](http://en.wikipedia.org/wiki/Maxima_and_minima)

$$y = f(x) = \sqrt[3]{x} \text{ mit maximalem Definitionsbereich}$$

An der inneren Stelle  $x_0 = e$  wird ein echtes globales Maximum angenommen.

Existenz globaler Extremwerte:

**Satz 2.24.** Jede stetige Funktion  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  ist beschränkt. Sie nimmt für mindestens ein Argument  $x_1$  ihr Minimum und für mindestens ein Argument  $x_2$  ihr Maximum an.

Unter den Voraussetzungen des obigen Satzes existieren also Punkte  $x_1, x_2 \in [a, b]$  mit

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \text{für alle } x \in [a, b].$$

$$\implies f(x_1) \text{ Minimum der Funktion}$$

$$\implies f(x_2) \text{ Maximum der Funktion}$$

Dabei gibt es Funktionen, für die das Minimum an mehreren Stellen angenommen wird oder für die das Maximum an mehreren Stellen angenommen wird. Ob der jeweilige Extremwert in einem Randpunkt oder in einem inneren Punkt angenommen wird, hängt ebenfalls vom ausgewählten Beispiel ab.

**Satz 2.25.** (*Extrema von konvexen und konkaven Funktionen*)

1. Ein lokales Minimum einer konvexen Funktion ist auch ein globales Minimum.
2. Besitzt eine streng konvexe Funktion ein Minimum, so wird dieses an nur einer Stelle angenommen.
3. Eine streng konvexe Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  besitzt ein Minimum, das an genau einer Stelle angenommen wird.
4. Ein lokales Maximum einer konvexen Funktion ist auch ein globales Maximum.
5. Besitzt eine streng konvexe Funktion ein Maximum, so wird dieses an nur einer Stelle angenommen.
6. Eine streng konvexe Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  besitzt ein Maximum, das an genau einer Stelle angenommen wird.

**Anwendung der Differentialrechnung zur Berechnung von Extremwerten :**

(Vgl. <http://de.wikipedia.org/wiki/Extremwert> und Literatur)

**Satz 2.26.** Für eine differenzierbare Funktion  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  erhält man die folgenden Aussagen, falls  $x_0$  ein innerer Punkt von  $\mathcal{D}$  ist.

1. Nimmt  $f$  einen lokalen Extremwert an, dann folgt  $f'(x_0) = 0$ . (Notwendiges Kriterium)
2. Es sei  $f$  zweimal differenzierbar. Dann gilt

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{in } x_0 \text{ wird ein echtes lokales Minimum angenommen,}$$

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) < 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{in } x_0 \text{ wird ein echtes lokales Maximum angenommen.}$$

3. Ändert  $f'(x)$  beim Durchgang durch  $x_0$  sein Vorzeichen, so wird in  $x_0$  ein echter lokaler Extremwert angenommen.  $f$  besitzt dort im Falle

$$x_\ell, x_r \in U(x_0, \varepsilon), \quad x_\ell < x_0 < x_r \quad \Longrightarrow \quad f'(x_\ell) < 0 < f'(x_r) \quad (2.26)$$

ein echtes lokales Minimum  
und im Falle

$$x_\ell, x_r \in U(x_0, \varepsilon), \quad x_\ell < x_0 < x_r \quad \Longrightarrow \quad f'(x_\ell) > 0 > f'(x_r) \quad (2.27)$$

ein echtes lokales Maximum.

Die  $\varepsilon$ -Umgebung  $U(x_0, \varepsilon)$  kann dabei entsprechend klein gewählt werden.

4. Ist der Definitionsbereich der Funktion  $f$  ein Intervall ( $\mathcal{D} = \mathcal{I}$ ) und gelten die Vorzeichenbedingungen (2.26) bzw. 2.27 **ohne** die Einschränkungen  $x_\ell, x_r \in U(x_0, \varepsilon)$ , dann besitzt  $f$  an der Stelle  $x_0$  das einzige echte Minimum bzw. das einzige echte Maximum. Im ersten Fall ist die Funktion streng konvex, im zweiten Fall streng konkav.

## 2.9.4 Charakteristika zum Funktionsverlauf

(Vgl. <http://de.wikipedia.org/wiki/Kurvendiskussion> und Literatur)

Maximaler Definitionsbereich, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Symmetrieeigenschaften, gerade und ungerade Funktionen, Periodizität, Flachpunkt, Wendepunkt, Sattelpunkte (Wendepunkt mit horizontaler Tangente), Nullstelle, Polstelle, Lücke (hebbare Unstetigkeit),

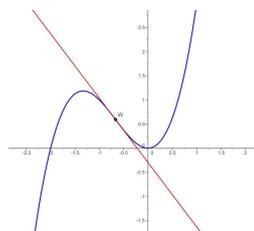


Abbildung aus <http://de.wikipedia.org/wiki/Wendepunkt>

**Beispiel 2.27.** Verhalten im Unendlichen (asymptotisches Verhalten):

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 5}{5x - 5} = \frac{x^3 - x^2}{5x - 5} + \frac{1}{x - 1} = \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{x - 1}$$

hat eine Polstelle bei  $x_0 = 1$ . Die Parabel  $p(x) = \frac{1}{5}x^2$  charakterisiert als Asymptote das Verhalten von  $f$  im Unendlichen (hier sowohl für  $x \rightarrow +\infty$  als auch für  $x \rightarrow -\infty$ ).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - p(x)] = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - p(x)] = 0,$$

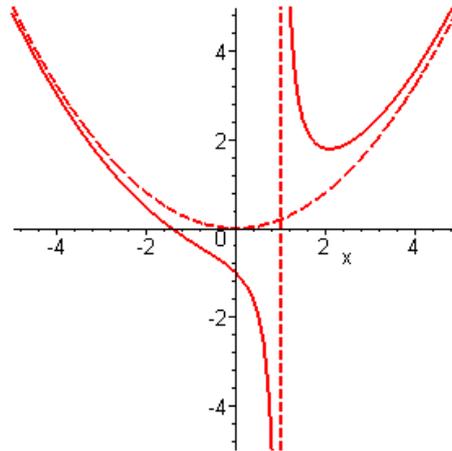


Abbildung aus <http://de.wikipedia.org/wiki/Asymptote>

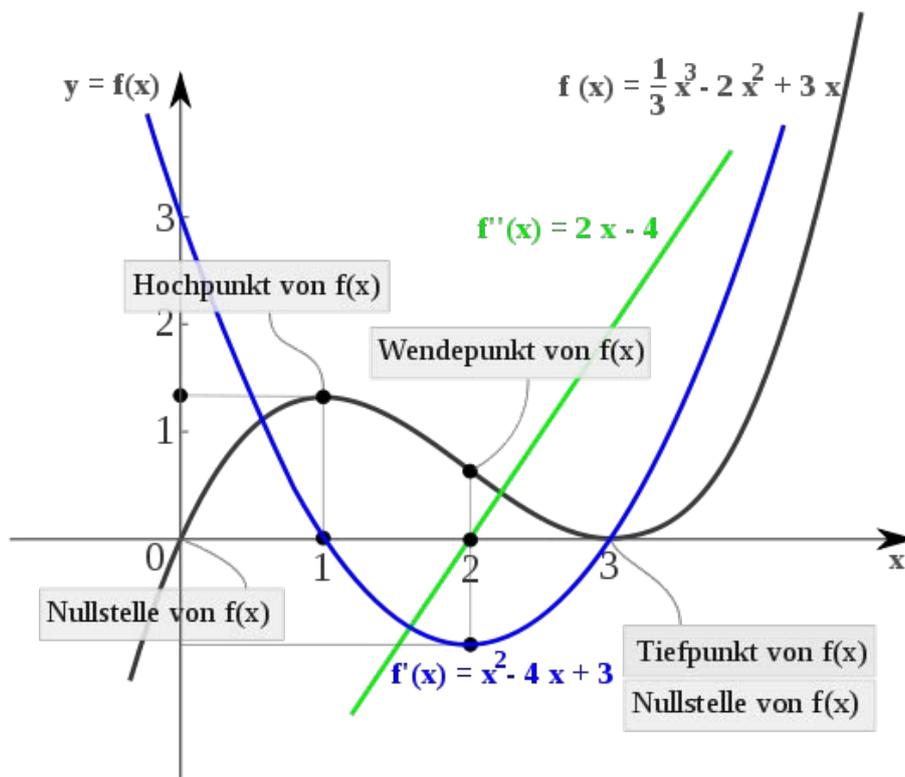
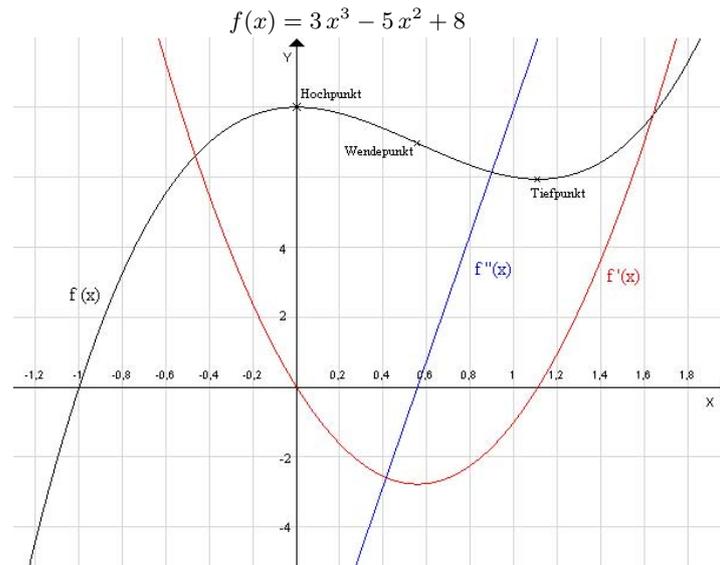
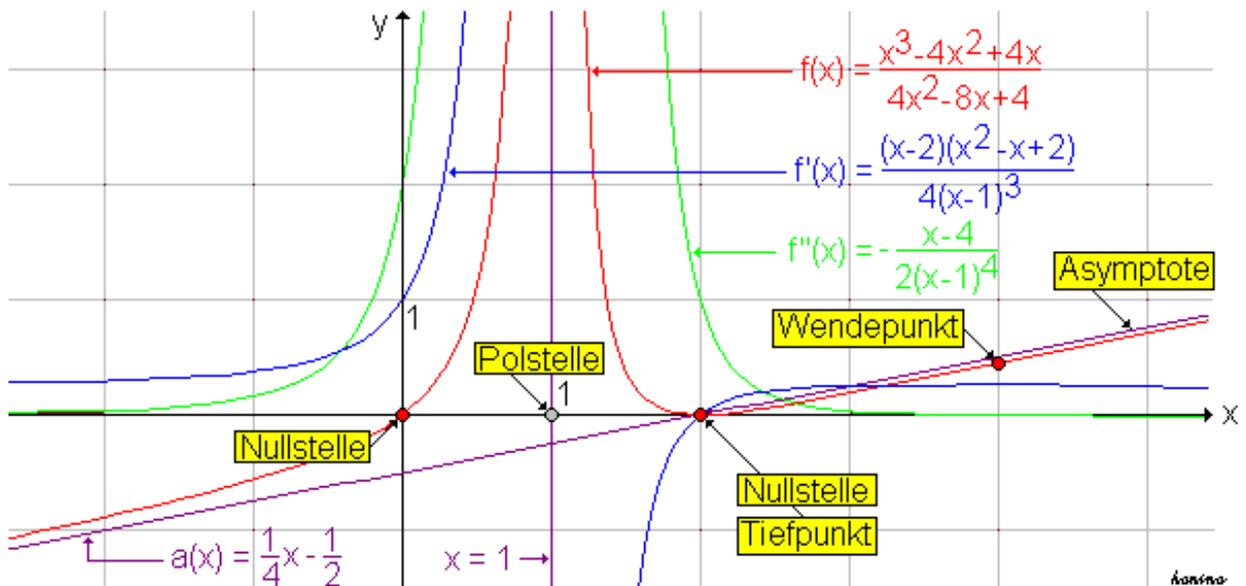


Abbildung aus <http://de.wikipedia.org/wiki/Differentialrechnung>

Abbildung aus <http://de.wikipedia.org/wiki/Kurvendiskussion>Abbildung aus <http://de.wikipedia.org/wiki/Kurvendiskussion>

Hochpunkt  $\mapsto$  echtes lokales Maximum

Tiefpunkt  $\mapsto$  echtes lokales Minimum

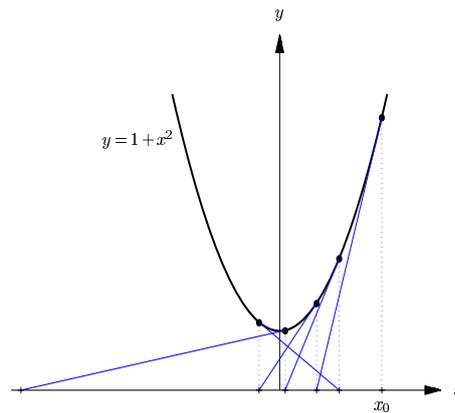
Die Begriffe Hochpunkt und Tiefpunkt benutzen wir nicht.

## 2.10 Newtonsches Näherungsverfahren

Vergleiche Animation in <http://de.wikipedia.org/wiki/Newton-Verfahren>

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{mit Startwert } x_0$$

Newtonsches Verfahren - ziellos und endlos:



Aber die folgende Anwendung des Newtonverfahrens wird sinnvoll:  
Gesucht ist für  $a > 0$  die Nullstelle von

$$f(x) = 1 - \frac{a}{x^2} \quad f'(x) = \frac{2a}{x^3}$$

Newton-Iteration:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1 - \frac{a}{x_n^2}}{\frac{2a}{x_n^3}} = x_n - \frac{x_n^3}{2a} + \frac{x_n}{2} = \frac{x_n}{2} \left( 3 - \frac{x_n^2}{a} \right)$$

Mit dem Startwert  $x_o := \frac{1+a}{2}$  konvergiert das Verfahren gegen die Nullstelle.

**Satz 2.28.** *Es existiere eine Nullstelle  $\tilde{x}$  von  $f(x)$  und in einem Intervall  $[a, b]$  mit  $a < \tilde{x} < b$  seien die folgenden Bedingungen erfüllt :*

$$f \in C^2([a, b]), \quad f'(x) \neq 0 \quad \text{auf } [a, b].$$

*Liegt dann der  $n_o$ -te Näherungswert  $x_{n_o}$  hinreichend nahe bei der Nullstelle  $\tilde{x}$ , dann gilt mit einer Konstanten  $C > 0$*

$$|\tilde{x} - x_{n+1}| \leq C |\tilde{x} - x_n|^2 \quad \text{für alle } n \geq n_o$$

Anschauliche Interpretation ab  $n_o$ -tem Schritt :

Bei jedem weiteren Schritt der Newton-Iteration verdoppelt sich etwa die Anzahl der gültigen Dezimalstellen.

Das Newton-Verfahren ist unter obigen Voraussetzungen ein lokal konvergentes Verfahren. Konvergenz der in der Newton-Iteration erzeugten Folge zu einer Nullstelle ist also nur garantiert, wenn der Startwert  $x_o$  schon ausreichend nahe an der Nullstelle liegt. Ist der Startwert zu weit weg, kann alles mögliche passieren.

## 2.11 Lokale Existenz einer stetig differenzierbaren Umkehrfunktion

Jetzt geht es um eine Modifikation von Satz 2.8 mit größerer Bedeutung für die Anwendungen. Im Kapitel 3 werden die folgenden Aussagen dann auf Abbildungen  $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$  verallgemeinert (Satz zur Existenz der stetig differenzierbaren Umkehrabbildung). Vorerst jedoch der Fall  $n = 1$ .

Die Existenz der Umkehrfunktion  $f^{-1}$  wird im Gegensatz zu Satz 2.8 nicht mehr vorausgesetzt. Es werden stattdessen Bedingungen formuliert, unter denen eine auf einem offenen Intervall  $\mathcal{I}$  definierte Funktion  $f: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  in einer offenen Umgebung  $U_0 \subseteq \mathcal{I}$  eines Punktes  $x_0$  invertierbar und stetig differenzierbar ist.

**Beispiel 2.29.**

$$y = f(x) = \sin x, \quad x_0 = 0, \quad U_0 = \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), \quad W_0 = f(U_0) = (-1, 1),$$

$$\text{also } f: U_0 \rightarrow W_0, \quad f \in C^1(U_0) \quad \text{wobei } f'(x_0) = 1 \neq 0 \quad \text{gilt.}$$

↓

$$x = f^{-1}(y) = \arcsin y \quad \text{oder} \quad f^{-1}(x) = \arcsin x, \quad f^{-1}: W_0 \rightarrow U_0, \quad f^{-1} \in C^1(W_0)$$

Mit dem zugehörigen abgeschlossenen Intervall  $\overline{U}_0 = \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$  bleibt die Fortsetzung

$f: \overline{U}_0 \rightarrow \overline{W}_0$  invertierbar mit  $f^{-1}(x) = \arcsin x$ . Diese auf dem abgeschlossenen Intervall  $\overline{W}_0$  definierte Funktion ist aber in den Randpunkten von  $\overline{W}_0$  nicht mehr differenzierbar.

Nachzuweisende Aussage oberhalb des Beispiels also folgendermaßen konkretisieren:  
Zu einer geeigneten Einschränkung  $f: U_0 \rightarrow f(U_0)$  existiert die inverse Funktion

$$f^{-1}: f(U_0) \rightarrow U_0.$$

Der Wertebereich  $W_0 = f(U_0)$  der Einschränkung von  $f$ , also der Definitionsbereich von  $f^{-1}$ , ist dabei ebenfalls ein offenes Intervall. Die Voraussetzungen des folgenden Satzes werden so gewählt, dass  $f^{-1}$  stetig differenzierbar wird, vgl. Beispiel 2.29.

**Satz 2.30.** (Existenz einer stetig differenzierbaren Umkehrfunktion)

Es sei  $x_0$  ein festgehaltener innerer Punkt eines offenen Intervalls  $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ . Dann gilt:  
Ist eine Funktion  $f: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar mit

$$y_0 = f(x_0) \quad \text{und} \quad y'_0 = f'(x_0) \neq 0, \quad (2.28)$$

so existiert ein offenes Intervall  $U_0 \subseteq \mathcal{I}$  mit  $x_0 \in U_0$ . Die Einschränkung

$$f: U_0 \rightarrow W_0 \quad \text{mit} \quad W_0 = f(U_0) \quad (2.29)$$

wird dabei streng monoton und invertierbar mit einem offenen Intervall  $W_0$  als Wertebereich. Für die zu (2.29) gehörige Umkehrfunktion gilt

$$f^{-1}: W_0 \rightarrow U_0 \quad \text{ist stetig differenzierbar.} \quad (2.30)$$

Mit beliebigen  $x \in U_0$  und mit  $y = f(x)$  folgt

$$x = f^{-1}(y), \quad \frac{dx}{dy} = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}. \quad (2.31)$$

Aus den speziellen Vorgaben (2.28) erhält man

$$x_0 = f^{-1}(y_0) \quad \text{und} \quad \frac{dx}{dy}(y_0) = (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}(x_0)} = \frac{1}{y'_0}. \quad (2.32)$$

Ist  $f'(x_0) > 0$  in (2.28), dann werden die in (2.29) und (2.30) definierten Funktionen streng monoton wachsend.  
Ist  $f'(x_0) < 0$  in (2.28), dann werden diese beiden Funktionen streng monoton fallend.

**Folgerung 2.31.** Unter den Bedingungen des letzten Satzes folgen aus (2.28) und (2.32) die linearen Approximationen

$$f(x) \approx T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = y_0 + y'_0(x - x_0) \quad \text{in der Nähe von } x_0$$

und

$$f^{-1}(y) \approx T^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) + (f^{-1})'(y_0)(y - y_0) = x_0 + \frac{1}{y'_0}(y - y_0), \quad (2.33)$$

Letztere kann in einer hinreichend kleinen Umgebung von  $y_0$  genutzt werden.

Auch für diese linearen Approximationen gilt:

$T^{-1}$  ist die zu  $T$  inverse Funktion (nicht der Kehrwert). Die Gleichung  $y = y_0 + y'_0(x - x_0)$  ist nämlich eindeutig nach  $x$  auflösbar mit  $x = x_0 + \frac{1}{y'_0}(y - y_0)$ .

Hier wurde bisher davon abgesehen beim Übergang zur Umkehrfunktion die Variablen  $x$  und  $y$  zu vertauschen. In späteren Verallgemeinerungen wird dies auch nicht geschehen (z. B. Koordinatentransformationen im  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$ ). Damit kann man dort direkt an diese Betrachtungen anknüpfen.

Die grafische Darstellung reeller Funktionen wird jedoch anschaulicher, wenn man  $x$  als unabhängige Variable und  $y$  als abhängige Variable betrachtet.

**Bemerkung 2.32.** Das Festhalten von  $x$  als unabhängiger Variabler und  $y$  als abhängiger Variabler, also die Nutzung von  $y = f^{-1}(x)$  kann in Satz 2.30 durch gewisse Modifikationen ab Formel (2.31) plausibel gemacht werden. Die vor (2.31) stehenden Formulierungen bleiben gültig.

Ausgehend von  $y = f(x)$  entsteht nach Vertauschen von  $x$  und  $y$  in (2.31)

$$y \in U_0 \quad \text{und} \quad x = f(y) \quad \implies \quad y = f^{-1}(x), \quad \frac{dy}{dx} = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

Aus den speziellen Werten in (2.28) folgt mit

$$\begin{aligned} \tilde{x}_0 &= y_0, & \tilde{y}_0 &= x_0 \\ \tilde{y}_0 &= f^{-1}(\tilde{x}_0) \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx}(\tilde{x}_0) = (f^{-1})'(\tilde{x}_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}(\tilde{y}_0)} = \frac{1}{y'_0}. \end{aligned}$$

Die Approximation (2.33) bekommt für  $f^{-1}(x)$  die Form

$$f^{-1}(x) \approx T^{-1}(x) = f^{-1}(\tilde{x}_0) + (f^{-1})'(\tilde{x}_0)(x - \tilde{x}_0) = \tilde{y}_0 + \frac{1}{y'_0}(x - \tilde{x}_0)$$

Bei der in Beispiel 2.29 realisierten lokalen Invertierung von  $f(x) = \sin x$  konnte die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  durch den einfachen analytischen Ausdruck  $f^{-1}(x) = \arcsin x$  angegeben werden. Oft ist man jedoch nicht in der Lage  $f^{-1}$  in analytisch geschlossener Form darzustellen. Wenn es eine derartige Darstellung gibt, die zu kompliziert ist, hilft dies in der Regel auch wenig. In solchen Fällen ist der obige Satz 2.30 hilfreich :

Nach Berechnung von  $f$  und  $f'$  an einer einzigen Stelle  $x_0$  kann die Existenz einer lokalen Inversen  $f^{-1}$  von  $f$  schnell gezeigt werden, kann die Art der strengen Monotonie dabei verifiziert werden, können lineare Approximationen von  $f$  und  $f^{-1}$  aufgestellt werden.

Das obige Prinzip der lokalen Invertierbarkeit verbunden mit der Berechnung der Ableitung  $(f^{-1})'(y_0)$  wird in Kapitel 3 verallgemeinert. Angewandt wird es z.B. in der technischen Mechanik (nichtlineare Materialgesetze, Koordinatentransformationen) und Physik. Die lokalen linearen Approximationen von  $f$  und  $f^{-1}$  sind dabei vielseitig nutzbar.

## 2.12 Mittelwertsätze der Differentialrechnung

Die folgenden Mittelwertsätze können benutzt werden, um viele der obigen Sätze exakt zu beweisen. Sie besitzen jedoch auch vielfältige praktische Anwendungen (z. B. Fehlerabschätzung von Approximationspolynomen).

**Satz 2.33.** (Satz von Rolle)

Ist eine reelle Funktion  $f$  im offenen Intervall  $(a, b)$  differenzierbar, im abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  stetig und gilt  $f(a) = f(b)$ , dann muss die Ableitung im Intervall  $(a, b)$  mindestens eine Nullstelle haben.

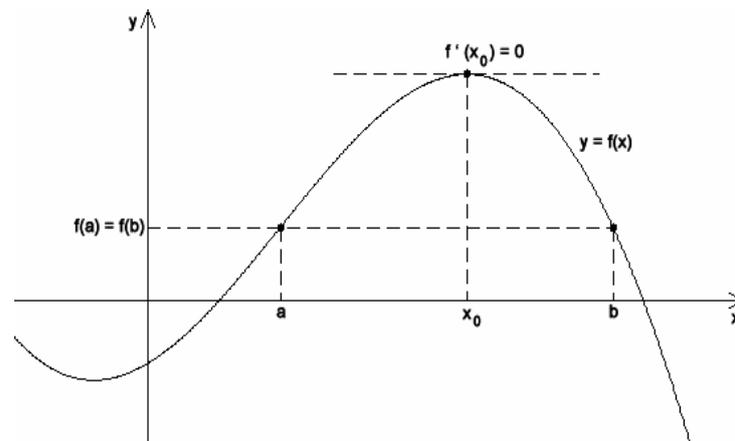


Abbildung 2: Satz von Rolle

Abb. aus [http://de.wikipedia.org/wiki/Satz\\_von\\_Rolle](http://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Rolle)

Anschaulich bedeutet dies: Auf dem Graphen der Funktion  $f$  gibt es zwischen zwei Kurvenpunkten mit übereinstimmenden Funktionswerten mindestens einen Kurvenpunkt mit waagrechter Tangente.

**Folgerung 2.34.** Zwischen zwei Nullstellen einer differenzierbaren Funktion liegt eine Nullstelle der Ableitung.

Der Satz von Rolle ist ein Spezialfall des folgenden Mittelwertsatzes.

**Satz 2.35.** (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

Ist eine reelle Funktion  $f$  im offenen Intervall  $(a, b)$  differenzierbar und im abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  stetig, dann gibt es mindestens ein

$$x_0 \in (a, b) \quad \text{mit} \quad f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (2.34)$$

**Folgerung 2.36.** Stetig differenzierbare Funktionen sind lokal Lipschitz-stetig.

**Satz 2.37.** (Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

Die reellen Funktionen  $f$  und  $g$  seien im offenen Intervall  $(a, b)$  differenzierbar und im abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  stetig. Außerdem gelte für  $x \in (a, b)$  stets  $g'(x) \neq 0$ .

Dann existiert mindestens ein  $x_0 \in (a, b)$  mit

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \quad (2.35)$$

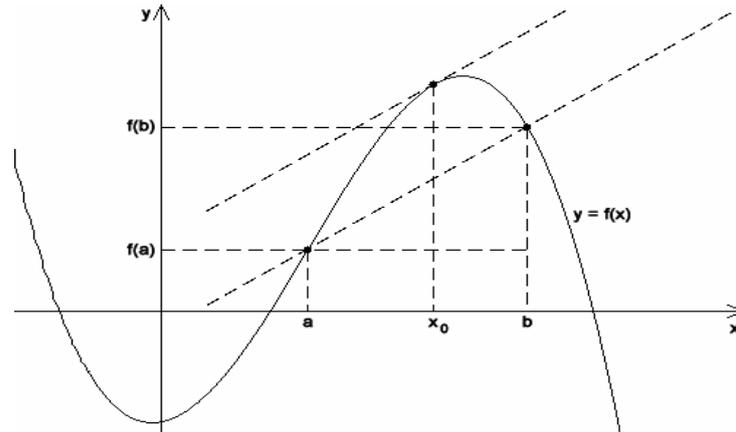


Abbildung 3: Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Vgl. [http://de.wikipedia.org/wiki/Mittelwertsatz\\_der\\_Differentialrechnung](http://de.wikipedia.org/wiki/Mittelwertsatz_der_Differentialrechnung)

**Bemerkung 2.38.** Wegen  $g'(x) \neq 0$  folgt strenge Monotonie und damit  $g(b) - g(a) \neq 0$ . Der Beweis des verallgemeinerten Mittelwertsatzes ergibt sich unter Anwendung des Satzes von Rolle auf die Funktion

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} (g(x) - g(a)).$$

## 2.13 Taylorformel mit Lagrangeschem Restglied

Vorerst folgende Voraussetzungen :

1. Es sei  $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall mit  $a \in \mathcal{I}$ .
2.  $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  sei eine stetig differenzierbare Funktion.
3. In allen inneren Punkten von  $\mathcal{I}$  sei  $f$  zweimal differenzierbar.

Falls  $\mathcal{I}$  ein offenes Intervall ist, folgt die 2. Voraussetzung aus der Existenz von  $f''(x)$  auf  $\mathcal{I}$ . Nur in dem Fall, dass der obige Punkt  $a$  ein Randpunkt ist, muss in den Anwendungen von einem halboffenen Intervall ausgegangen werden. Dann ist die stetige Differenzierbarkeit von  $f$  im Randpunkte  $a$  zusätzlich zu fordern.

**Satz 2.39.** Unter den obigen Voraussetzungen gilt für die Taylor-Entwicklung 1. Ordnung von  $f$  an der Stelle  $a$

$$T_1(x) := f(a) + f'(a)(x - a).$$

mit

$$f(x) = T_1(x) + R_1(x) := f(a) + f'(a)(x - a) + R_1(x) \quad (2.36)$$

die die Restgliedabschätzung

$$R_1(x) = \frac{f^{(2)}(\xi)}{(2)!} (x - a)^2 \quad (\text{Lagrangesche Form des Restgliedes}),$$

wobei  $\xi = \xi(a, x)$  im Falle  $x \neq a$  eine echte Zwischenstelle von  $a$  und  $x$  ist.

$$a < x \implies a < \xi < x \text{ oder } x < a \implies x < \xi < a$$

Das Taylorpolynom 1. Ordnung von  $f$  liefert eine Linearisierung von  $f$ , die in einer Umgebung von  $a$  genutzt werden kann. Dabei ist eine Abschätzung des Fehlers  $R_1(x)$  hilfreich.

Jetzt zu Taylorpolynomen beliebiger Ordnung

**Satz 2.40.** (mit Definition)

1. Es sei  $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall mit  $a \in \mathcal{I}$ .
2.  $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  sei eine  $n$  mal stetig differenzierbare Funktion.
3. In allen inneren Punkten von  $\mathcal{I}$  sei  $f$  eine  $(n + 1)$  mal differenzierbare Funktion.

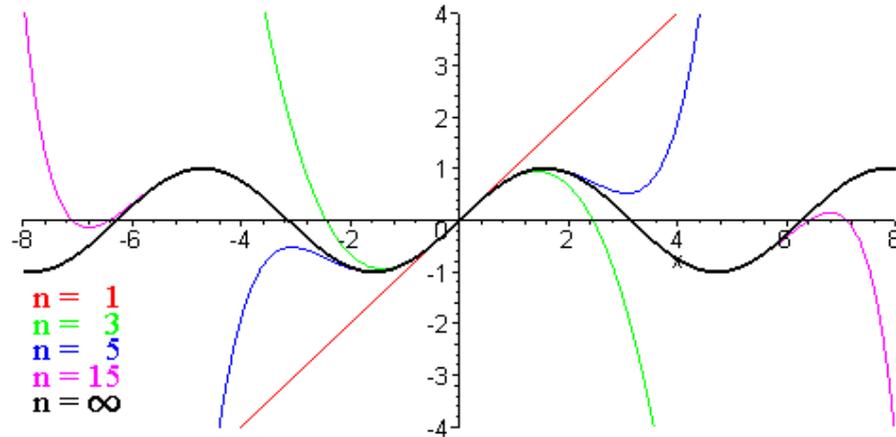


Abbildung 4: Taylorpolynome der Sinusfunktion  
 Abb. aus <http://de.wikipedia.org/wiki/Taylor-Formel>

Dann gilt für die Taylor-Entwicklung  $n$ -ter Ordnung von  $f$  an der Stelle  $a$

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n. \end{aligned} \quad (2.37)$$

mit

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) \quad (2.38)$$

die Restgliedabschätzung

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad (\text{Lagrangesche Form des Restgliedes}), \quad (2.39)$$

wobei  $\xi = \xi(a, x)$  im Falle  $x \neq a$  eine echte Zwischenstelle von  $a$  und  $x$  ist.

Der Fehler, der beim Ersetzen von  $f(x)$  durch  $T_n(x)$  in einer Umgebung von  $a$  entsteht, kann über (2.39) durch Ungleichungen der Gestalt  $|R_n(x)| \leq \dots$  abgeschätzt werden.

**Beispiel 2.41.** Einige Taylorpolynome der Sinusfunktion an der Entwicklungsstelle  $a = 0$  sind in Abb. 4 dargestellt.

**Folgerung 2.42.** Gilt mit einem  $s > 0$

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq M \quad \text{für alle } x \text{ mit } |x-a| \leq s$$

dann kann das Restglied durch

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} s^{n+1} \quad \text{für alle } x \in [a-s, a+s] \cap \mathcal{I} \quad (2.40)$$

abgeschätzt werden. Dies ist eine Abschätzung durch eine Konstante. Wählt man speziell  $s = |x-a|$  für alle möglichen  $s$ , so folgt

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x-a|^{n+1} \quad \text{für alle } x \in \mathcal{I} \quad (2.41)$$

Dies ist eine Abschätzung mit einer variablen rechten Seite. Sie liefert im Regelfall kleinere relative Fehler in gewissen Umgebungen von  $a$ .

Hinweis zur allgemeinen Bestimmung von  $M$  :

Obige Schranke  $M$  möglichst klein wählen. Der kleinste mögliche Wert für  $M$  in (2.40) und (2.41) ist

$$M = \max_x |f^{(n+1)}(x)| \quad \text{mit } x \in [a-s, a+s] \cap \mathcal{I}$$

Korrekt wäre die Verwendung von  $\sup$  statt die von  $\max$ .

**Beispiel 2.43.** Das Taylorpolynom 3. Ordnung  $T_3(x)$  der Sinusfunktion an der Entwicklungsstelle  $a = 0$  hat die Gestalt

$$\sin(x) \approx T_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

Liegt  $x \neq 0$  zwischen  $-\frac{\pi}{4}$  und  $\frac{\pi}{4}$ , dann gilt für die relative Abweichung der Approximation

$$\left| \frac{T_3(x) - \sin(x)}{\sin(x)} \right| \leq 5 \cdot 10^{-3}$$

Weitere Taylorpolynome von  $y = \sin x$  an der Entwicklungsstelle  $a = 0$  sind

$$T_4(x) = x - \frac{x^3}{6}, \quad T_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}, \quad T_6(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}, \quad T_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

Da hier für alle Ableitungen  $|f^{(n+1)}(x)| \leq 1$  gilt, folgt

$$|R_5(x)| = |\sin(x) - T_5(x)| \leq \frac{1}{6!} |x|^6$$

$T_5(x)$  und  $T_6(x)$  stimmen hier überein, so dass auch

$$|R_5(x)| = |\sin(x) - T_5(x)| \leq \frac{1}{7!} |x|^7$$

gilt. Diese Abschätzung ist für  $|x| \leq \frac{\pi}{2}$  deutlich besser. Vgl. Abb. 4.

Folgende Näherungsformeln werden häufig verwendet:

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &\approx 1 + \frac{x}{2} && \text{für } x \ll 1 \\ \frac{1}{1-x} &\approx 1 + x && \text{für } x \ll 1 \\ \frac{1}{1+x} &\approx 1 - x && \text{für } x \ll 1 \\ \ln(1+x) &\approx x && \text{für } x \ll 1 \end{aligned}$$

## 2.14 Taylorreihen

**Definition 2.44.** Es seien  $\mathcal{I}$  ein reelles Intervall und

$$f : \mathcal{I} \mapsto \mathbb{R}$$

eine beliebig oft differenzierbare Funktion. Mit  $a \in \mathcal{I}$  heißt die formal gebildete Potenzreihe

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = & \tag{2.42} \\ f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \dots \end{aligned}$$

die Taylor-Reihe von  $f$  im Entwicklungspunkt  $a$ . Im Spezialfall  $a = 0$  wird die Taylor-Reihe auch MacLaurinsche Reihe genannt. Vgl. [http://de.wikipedia.org/wiki/MacLaurinsche\\_Reihe](http://de.wikipedia.org/wiki/MacLaurinsche_Reihe)

**Bemerkung 2.45.** Die Taylor-Reihe (2.42) konvergiert für ein  $x \in \mathcal{I}$  gegen die Funktion  $f(x)$ , wenn das in (2.39) definierte Restglied  $R_n(x)$  für dieses  $x$  konvergiert. Mit einer geeigneten Restgliedabschätzung für allgemeines  $n$  kann also versucht werden, die Konvergenz nachzuweisen.

**Bemerkung 2.46.** Die Taylor-Reihe konvergiert gleichmäßig auf einem Intervall

$$\mathcal{I}_s = [a-s, a+s] \subseteq \mathcal{I}, \quad s > 0$$

gegen die Funktion  $f(x)$ , wenn das Restglied  $R_n(x)$  dort gleichmäßig gegen 0 konvergiert. Mit einer geeigneten Restgliedabschätzung die für allgemeines  $n$  und alle  $x \in \mathcal{I}_{sp}$  gilt, kann also versucht werden, diese gleichmäßige Konvergenz nachzuweisen.

**Bemerkung 2.47.** Die Taylor-Reihe konvergiert demzufolge gleichmäßig auf dem Intervall

$$\mathcal{I}_{sp} = [a-s, a+s] \subseteq \mathcal{I}$$

gegen die Funktion  $f(x)$ , wenn die durch

$$a_n = \max_x |f^{(n+1)}(x)| \frac{s^{n+1}}{(n+1)!} \quad x \in [a-s, a+s]$$

definierte Folge  $a_n$  gegen 0 konvergiert. Das Restglied kann dann gemäß

$$|R_n(x)| \leq a_n$$

abgeschätzt werden.

**Satz 2.48.** Wenn zur Funktion  $f$  eine Abschätzung der Gestalt

$$|f^{(n)}(x)| \leq C \cdot M^n \quad \text{für alle } n > n_0 \quad \text{und alle } x \in [a - s, a + s] \quad (2.43)$$

gefunden werden kann, wobei die Konstanten  $C$  und  $M$  von  $n$  und  $x$  unabhängig sind, dann konvergiert die Taylorreihe auf diesem Intervall absolut und gleichmäßig gegen die Funktion  $f(x)$ .

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n \quad \text{für alle } x \in [a - s, a + s] \quad (2.44)$$

*Proof.* Ersetzt man in Formel (2.40)  $M$  durch  $C \cdot M^{n+1}$  so folgt

$$|R_n(x)| \leq \frac{C}{(n+1)!} (M \cdot s)^{n+1} \quad \text{für alle } x \in [a - s, a + s].$$

Aus der Taylorreihe der Funktion  $e^x$  an der Stelle  $x = M \cdot s$  folgen die gleichmäßige Konvergenz des Restgliedes gegen 0 und die Konvergenzaussagen bezüglich der Reihe.  $\square$

**Satz 2.49.** Der Konvergenzradius einer Taylorreihe als spezieller Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x - a)^n$$

wird durch

$$\varrho = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{n!}{f^{(n)}(a)} \right|} \quad \text{mit} \quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad (2.45)$$

beziehungsweise durch

$$\varrho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| (n+1) \frac{f^{(n)}(a)}{f^{(n+1)}(a)} \right|, \quad (2.46)$$

wenn die Grenzwerte auf den rechten Seiten existieren.

Die Taylorreihe

$$\begin{aligned} &\text{konvergiert absolut für} && |x - a| < \varrho. \\ &\text{Sie ist divergent für} && |x - a| > \varrho. \end{aligned}$$

Für jedes feste  $r$  mit  $r < \varrho$  konvergiert sie absolut und gleichmäßig auf dem durch

$$|x - a| \leq r < \varrho$$

definierten Intervall.

Im uneigentlichen Fall  $\varrho = +\infty$  gilt :

Die Taylorreihe konvergiert absolut für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Sie konvergiert gleichmäßig auf jedem abgeschlossenen Intervall  $[-r, r]$ .

**Bemerkung 2.50.** Bei endlichem Konvergenzradius  $\varrho$  kann die Taylorreihe in den Randpunkten des Konvergenzintervalls  $a - \varrho$  und in  $a + \varrho$  entweder konvergent oder divergent sein. Dies ist allgemein nicht entscheidbar, d.h. hier müssen gesondert Untersuchungen des jeweiligen Spezialfalls durchgeführt werden.

**Bemerkung 2.51.** Erwähnt werden soll hier auch, dass es im letzten Satz nur um die Konvergenz der Taylorreihe geht. Es sind jedoch Funktionen  $f(x)$  konstruierbar, deren Taylorreihen zwar einen Konvergenzradius  $\varrho > 0$  besitzen, die aber innerhalb des Konvergenzradius nicht gegen die gegebene Funktion  $f(x)$  sondern gegen eine andere Funktion konvergieren. Derartige Taylorentwicklungen sind jedoch nicht mit Standardanwendungen des Ingenieurs verbunden, so dass dieses Problem hier nicht näher untersucht werden muss. Wenn die Funktion  $f(x)$  als analytische Funktion fortsetzbar ist (vgl. Komplexe Funktionentheorie, nicht Gegenstand der Vorlesungen), dann kann dieser pathologische Fall ohnehin nicht eintreten. Dann konvergiert die Taylorreihe zu  $f(x)$  innerhalb ihres Konvergenzradius absolut und gleichmäßig gegen  $f(x)$ . Dies soll hier stets vorausgesetzt werden. Durch eine geeignete Restgliedabschätzung ist dies gegebenenfalls nachweisbar. Bei den von uns untersuchten Beispielen ist diese Voraussetzung stets erfüllt.

Unter obiger Voraussetzung gilt folgende Aussage.

**Bemerkung 2.52.** Taylorreihen können innerhalb ihres Konvergenzradius gliedweise differenziert und integriert werden. Man vollziehe dies an den folgenden Beispielen.

**Beispiel 2.53.** Häufig verwendete Taylorreihen sind

$$\begin{aligned}
 e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \\
 \sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \\
 \cos(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \\
 \ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad \text{für alle } x \in (-1, 1) \\
 \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad \text{für alle } x \in (-1, 1)
 \end{aligned}$$

Wählt man  $x := \frac{y-1}{y+1}$  für ein  $y > 0$ , dann erhält man mit der letzten Formel  $\ln(y)$ . Die letzte Reihe konvergiert schneller als die darüber stehende und ist somit für praktische Rechnungen besser geeignet. Man beachte :

$$\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)} \quad \text{für } b > 0$$

Weitere Taylorreihen siehe <http://de.wikipedia.org/wiki/Taylorreihe> und [10], vgl. auch <http://de.wikipedia.org/wiki/Potenzreihe>

**Bemerkung 2.54.** Taylorreihen sind spezielle Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n. \quad (2.47)$$

Hinsichtlich der Konvergenz sind drei Fälle zu unterscheiden:  
Die Reihe konvergiert

1. nur für  $x = x_0$ , Konvergenzradius  $\varrho = 0$ , praktisch uninteressant
2. auf einem endlichen Intervall  $(x_0 - \varrho, x_0 + \varrho)$  mit dem Mittelpunkt  $x_0$ , d. h. endlicher Konvergenzradius
3. auf ganz  $\mathbb{R}$ , also unendlicher Konvergenzradius

Der Konvergenzradius  $\varrho$  lässt sich allgemein mit der Formel von Cauchy-Hadamard berechnen (Oben sind nur Spezialfälle für die Ermittlung von  $\varrho$  angegeben.)

$$\varrho = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{|c_n|})}$$

Limes superior ist dabei der größte Häufungspunkt einer Folge, hier der Folge  $\sqrt[n]{|c_n|}$ . Derart allgemeine Berechnungen werden wir nicht durchführen. Die Konvergenzradien der oberen Beispiele sind angegeben. Bei konkreten Anwendungen entnehme man sie der Literatur. Grundsätzlich gilt

$$|x - x_0| < \varrho \implies (2.47) \text{ ist absolut konvergent}$$

$$|x - x_0| > \varrho \implies (2.47) \text{ ist divergent}$$

$$|x - x_0| = \varrho \implies \text{Konvergenz von (2.47) allgemein nicht entscheidbar}$$

Auf jedem abgeschlossenen Teilintervall von  $(x_0 - \varrho, x_0 + \varrho)$  liegt gleichmäßige Konvergenz vor. Bei unendlichem Konvergenzradius ist dies als gleichmäßige Konvergenz auf jedem abgeschlossenen Intervall zu interpretieren.

**Satz 2.55.** Sind die Potenzreihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k$$

absolut konvergent in  $(x_0 - \varrho, x_0 + \varrho)$  (kleineres  $\varrho$  von beiden Konvergenzradien wählen), dann gilt

$$\left( \sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

mit

$$c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} \quad (2.48)$$

Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

ist dabei ebenfalls absolut konvergent in  $(x_0 - \varrho, x_0 + \varrho)$ .

Die Berechnung der Koeffizienten  $c_n$  gemäß (2.48), d. h. unter Anwendung der diskreten Faltung (auch Cauchy-Faltung genannt), ist verbunden mit einer speziellen Anordnung der zu summierenden Produkte

$$\begin{array}{cccc} a_0 b_0 & a_0 b_1 & a_0 b_2 & a_0 b_3 \\ & / & / & / \\ a_1 b_0 & a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ & / & / & / \\ a_2 b_0 & a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \end{array}$$

Mit Hilfe des letzten Satzes können Quotienten von Potenzreihen zumindest näherungsweise berechnet werden.

**Beispiel 2.56.** Vgl. [http://en.wikipedia.org/wiki/Taylor\\_series](http://en.wikipedia.org/wiki/Taylor_series)

Man berechne an der Stelle  $x_0 = 0$  das Taylorpolynom 4. Ordnung von

$$g(x) = \frac{e^x}{\cos x}$$

Wegen

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^5)$$

und

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6)$$

folgt mit dem Ansatz

$$\frac{e^x}{\cos x} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

nach Multiplikation mit dem Nenner

$$\begin{aligned} e^x &= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots) \cos x \\ &= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots) \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right) \\ &= a_0 + a_1 x + \left(a_2 - \frac{a_0}{2}\right) x^2 + \left(a_3 - \frac{a_1}{2}\right) x^3 + \left(a_4 + \frac{a_0}{4!} - \frac{a_2}{2}\right) x^4 + O(x^5). \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich bis zur 4. Ordnung liefert schließlich

$$\frac{e^x}{\cos x} = 1 + x + x^2 + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{2} + O(x^5).$$

### 3 Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher

#### 3.1 Überblick und Grafische Darstellungen

Vergleiche

[http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/kurse/kurs15/kurs15\\_broschuere.pdf](http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/kurse/kurs15/kurs15_broschuere.pdf)  
<http://statmath.wu.ac.at/~leydold/MOK/HTML/>,  
 andere Quellen (siehe Einleitung) und Abschnitt 4.2

#### 3.2 Grundbegriffe

**Norm :**

In einem Vektorraum  $V$  über dem Körper der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  hat eine Norm  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  für beliebige  $x, y \in V$  und beliebige  $\alpha \in \mathbb{R}$  die folgenden Eigenschaften

$$\|x\| \geq 0 \quad (3.1)$$

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad (\text{Definitheit}) \quad (3.2)$$

$$\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \quad (3.3)$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{Dreiecksungleichung}) \quad (3.4)$$

Wir werden vorerst nur den Vektorraum  $V = \mathbb{R}^n$  also den  $n$ -dimensionalen Vektorraum betrachten. Ein Vektorraum mit einer Norm heißt normierter Vektorraum oder normierter Raum. Der  $\mathbb{R}^n$  mit der Euklidischen Norm ist also ein (spezieller) normierter Vektorraum.

$$\text{Euklidische Norm : } \|x\| = \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

**Abstand :**

Im zwei- und dreidimensionalen Raum stimmt der Euklidische Abstand mit dem anschaulichen Abstand überein. Im allgemeineren Fall des  $n$ -dimensionalen Euklidischen Raumes ist er für zwei Punkte oder zwei Vektoren definiert durch die Euklidische Norm des Differenzvektors zwischen den beiden Punkten. Sind die Punkte  $x$  und  $y$  gegeben durch die kartesischen Koordinaten

$$x = (x_1, \dots, x_n) \quad \text{und} \quad y = (y_1, \dots, y_n),$$

dann gilt

$$d(x, y) = |x - y| = \|x - y\|_2 = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Da der Euklidische Abstand über eine Norm definiert wird, ist er translationsinvariant.

Neben dem Euklidischen Abstand gibt es eine Reihe weiterer Abstandsmaße, die für uns hier jedoch nicht von Interesse sind.

Ein Abstand besitzt folgende Eigenschaften :

$$d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad (3.5)$$

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad (\text{Definitheit}) \quad (3.6)$$

$$d(x, y) = d(y, x) \quad (\text{Symmetrie}) \quad (3.7)$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad (\text{Dreiecksungleichung}) \quad (3.8)$$

$$(3.9)$$

Als  $\varepsilon$ -Umgebung eines Punktes  $x \in \mathbb{R}^n$ , kurz  $U(x, \varepsilon)$ , wird jede offene Kugelumgebung von  $x$  bezeichnet ( $x$  ist Mittelpunkt, siehe Skizze). Im  $\mathbb{R}^2$  ist dies speziell eine offene Kreisumgebung.

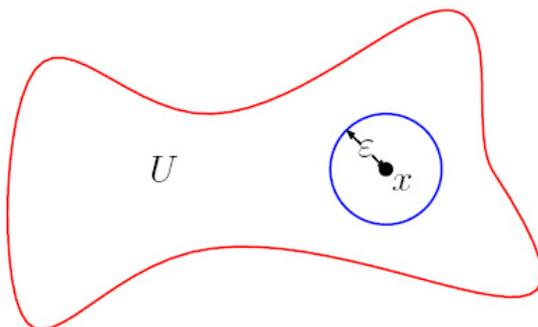
Nimmt man die Randpunkte hinzu, so entsteht eine abgeschlossene Kugelumgebung (abgeschlossene Kreisumgebung) von  $x$ , die mit  $\overline{U(x, \varepsilon)}$  gekennzeichnet wird. .

- Konvergenz von Vektorfolgen (Punktfolgen) bzw. Grenzwerte im  $\mathbb{R}^n$  über den Euklidischen Abstand definieren

$$x_n \rightarrow y \quad \text{genau dann, wenn} \quad d(x_n, y) \rightarrow 0$$

beziehungsweise für Punkte

$$P_n \rightarrow Q \quad \text{genau dann, wenn} \quad d(P_n, Q) \rightarrow 0$$

Abbildung 5:  $\varepsilon$ -Umgebung

Diese Konvergenz liegt genau dann vor, wenn jede Komponente der Vektorfolge (Punktfolge) konvergiert. Im  $\mathbb{R}^2$  bedeutet dies mit  $P_n = (x_n, y_n)$  und  $Q = (x, y)$

$$P_n \longrightarrow Q \quad \text{genau dann, wenn} \quad x_n \longrightarrow x, \quad y_n \longrightarrow y$$

Im  $\mathbb{R}^3$  gilt mit  $P_n = (x_n, y_n, z_n)$  und  $Q = (x, y, z)$  entsprechend

$$P_n \longrightarrow Q \quad \text{genau dann, wenn} \quad x_n \longrightarrow x, \quad y_n \longrightarrow y, \quad z_n \longrightarrow z$$

- Definitionsbereiche für Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher :

$$f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Der Definitionsbereich ist hier also eine echte oder unechte Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ . Man geht wiederum davon aus, dass  $\mathcal{D}$  keine isolierten Punkte enthält.

Ein Häufungspunkt des Definitionsbereiches  $\mathcal{D}$  ist ein innerer Punkt von  $\mathcal{D}$  oder ein Randpunkt von  $\mathcal{D}$ . Ein innerer Punkt gehört stets zu  $\mathcal{D}$ .

Ein Randpunkt von  $\mathcal{D}$  kann zu  $\mathcal{D}$  gehören oder auch nicht. Dies hängt vom gegebenen Definitionsbereich ab. Enthält  $\mathcal{D}$  alle seine Randpunkte, dann heißt  $\mathcal{D}$  abgeschlossen.

Ist jeder Punkt von  $\mathcal{D}$  ein innerer Punkt, dann nennt man  $\mathcal{D}$  eine offene Menge.

**Definition 3.1.** (Grenzwert einer reellen Funktion)

Es seien

$$f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$$

eine reellwertige Funktion und  $Q$  ein Häufungspunkt des Definitionsbereiches  $\mathcal{D}$ . Wenn dann aus

$$P_n \quad \text{mit} \quad P_n \in \mathcal{D} \setminus \{Q\} \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = Q \tag{3.10}$$

$$\text{stets} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(P_n) = g \quad \text{folgt,}$$

$$\text{schreibt man kurz} \quad \lim_{P \rightarrow Q} f(P) = g \tag{3.11}$$

und nennt  $g$  den Grenzwert der Funktion  $f$  an der Stelle  $Q$ .

In den Fällen  $g = \infty$  und  $g = -\infty$  wird von uneigentlichen Grenzwerten oder auch von bestimmter Divergenz gesprochen.

**Definition 3.2.** Eine reellwertige Funktion

$$f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R} \quad (\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n)$$

heißt stetig in  $Q \in \mathcal{D}$ , wenn für jede Folge  $P_n$  mit dem Grenzwert  $Q$  die Funktionswerte  $f(P_n)$  gegen  $f(Q)$  konvergieren.

$$\text{Kurz:} \quad P_n \longrightarrow Q \quad \implies \quad f(P_n) \longrightarrow f(Q)$$

Andere Schreibweisen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P \quad \implies \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(P_n) = f(P)$$

$$\text{oder kürzer :} \quad \lim_{P \rightarrow Q} f(P) = f(Q)$$

- Stetigkeit in  $Q$  bedeutet also, dass dort Grenzübergang und Funktionswertbildung vertauscht werden können.
- Stetigkeit im Punkte  $Q \in \mathcal{D}$  liegt vor, wenn der Grenzwert (3.11) existiert und mit dem Funktionswert  $f(Q)$  übereinstimmt.

### 3.3 Charakterisierung von Definitionsbereichen

Charakterisierung von Mengen  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$  und von Punkten  $P$  bezüglich ihrer Lage zu  $\mathcal{D}$  (Topologische Begriffe):

- Offene Kugelumgebung von  $P$
- abgeschlossene Kugelumgebung von  $P$
- Offene Menge
- Abgeschlossene Menge
- Innerer Punkt einer Menge  $\mathcal{D}$
- Randpunkt einer Menge  $\mathcal{D}$
- Rand  $\partial\mathcal{D}$  einer Menge  $\mathcal{D}$
- Abschluss  $\overline{\mathcal{D}}$  einer Menge  $\mathcal{D}$
- Beschränkte Mengen
- Kompakte Mengen

**Zusammenhang:** Eine Menge  $\mathcal{D}$  heißt zusammenhängend, wenn sich zwei beliebige Punkte  $P$  und  $Q$  aus  $\mathcal{D}$  durch eine Kurve verbinden lassen, die ganz in  $\mathcal{D}$  liegt.

- Beispiele für nicht zusammenhängende Mengen
- Eine zusammenhängende Menge kann mehrfach zusammenhängend sein.
- Einfach zusammenhängende Menge  $\mathcal{D}$  :  
Jeder geschlossene Weg in  $\mathcal{D}$  lässt sich innerhalb von  $\mathcal{D}$  stetig zu einem Punkt zusammenziehen.

Gebiete und Bereiche im  $\mathbb{R}^n$  :

- Gebiet : Offene und zusammenhängende Menge
- Bereich : Abschluss eines Gebietes

**Definition 3.3** (Konvexe Menge). Eine Menge  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$  wird konvex genannt, wenn mit je zwei Punkten  $P, Q \in \mathcal{D}$  immer auch deren Verbindungsstrecke ganz in  $\mathcal{D}$  liegt.

$$\overline{PQ} := \{\lambda P + (1 - \lambda)Q \mid 0 \leq \lambda \leq 1\} \subseteq \mathcal{D}$$

Funktionen und Abbildungen :

- Reellwertige und vektorwertige Funktionen
- Parameterdarstellung Flächen im  $\mathbb{R}^3$

## 4 Differentialrechnung mehrerer reeller Veränderlicher

### 4.1 Partielle Ableitungen erster Ordnung

**Definition 4.1.** Gegeben seien  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ .

$U \subset \mathcal{D}$  sei eine offene Umgebung eines festen Punktes  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ , ( $\mathbf{x}$  ist damit innerer Punkt des Definitionsbereiches)

$$z = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{D}$$

Falls für die natürliche Zahl  $k$  mit  $k = 1, \dots, n$  der Grenzwert

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_k + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)}{h}$$

existiert, dann nennt man ihn die partielle Ableitung von  $f$  nach der  $k$ -ten Variablen im Punkte  $\mathbf{x}$ . Die Funktion  $f$  heißt im Punkt  $\mathbf{x}$  partiell differenzierbar, wenn alle  $n$  partiellen Ableitungen existieren.

Existiert eine partielle Ableitung für alle  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$  (oder auf einer Teilmenge von  $\mathcal{D}$ ), so ist sie dort eine reellwertige Funktion.

Schreibweise :

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}, \quad f_{x_k}, \quad \partial_{x_k} f \quad \text{oder} \quad \partial_k f$$

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_k}, \quad f_{x_k}(\mathbf{x}), \quad \partial_{x_k} f(\mathbf{x}) \quad \text{oder} \quad \partial_k f(\mathbf{x})$$

$$\frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_k}, \quad f_{x_k}(x_1, \dots, x_n), \quad \partial_{x_k} f(x_1, \dots, x_n)$$

Falls die unabhängigen Variablen nicht mit  $x_1, x_2, \dots, \dots, x_n$  sondern mit  $x, y, z, t, \dots$  usw. bezeichnet werden, nutzt man die in den folgenden Beispielen dargelegte Notation für die partiellen Ableitungen nach  $x, y, \dots$ .  
Im Falle

$u = f(x, y)$  ,  $\mathbf{x} = (x, y)$  erhält man eine der 3 Varianten:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_x, \quad \partial_x f$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}, \quad f_y, \quad \partial_y f$$

oder bei Angabe des variablen Aufpunktes  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x}, \quad f_x(\mathbf{x}), \quad \partial_x f(\mathbf{x})$$

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial y}, \quad f_y(\mathbf{x}), \quad \partial_y f(\mathbf{x})$$

bzw. bei Angabe der unabhängigen Variablen  $x, y \in \mathbb{R}$  der Funktion  $f$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad f_x(x, y), \quad \partial_x f(x, y)$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, \quad f_y(x, y), \quad \partial_y f(x, y)$$

Im Falle von drei und mehr Veränderlichen gilt beispielsweise

$u = f(x, y, z, t)$  ,  $\mathbf{x} = (x, y, z, t)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial t}$$

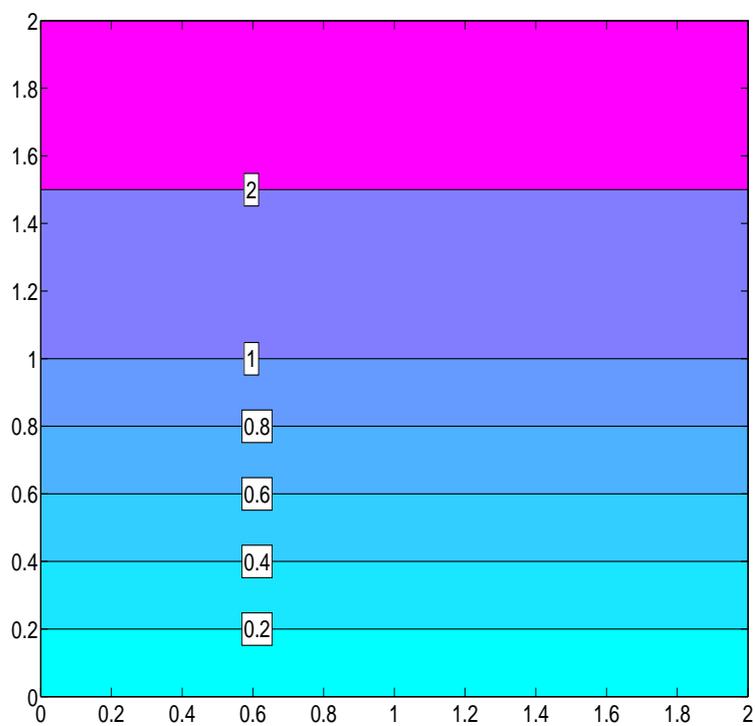
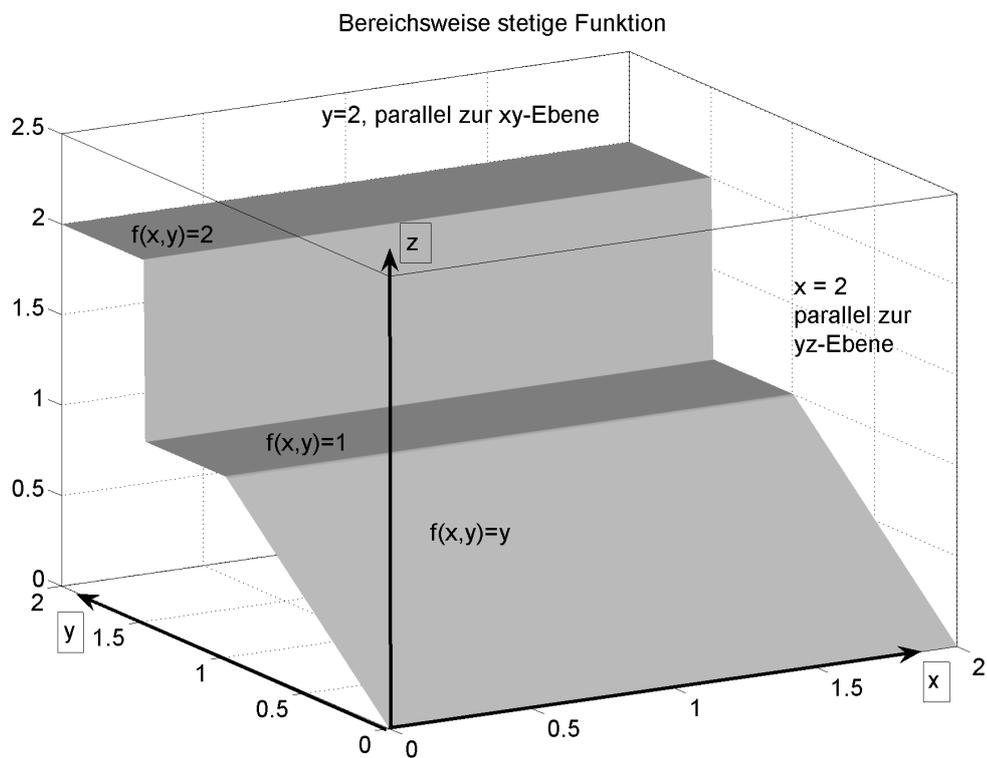
$$f_x, \quad f_y, \quad f_z, \quad f_t$$

$$\partial_x f, \quad \partial_y f, \quad \partial_z f, \quad \partial_t f$$

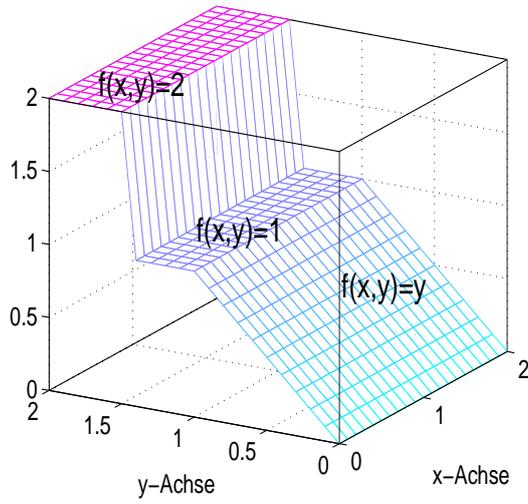
bzw.

$$\frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial y}, \quad \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial z}, \quad \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial t}.$$

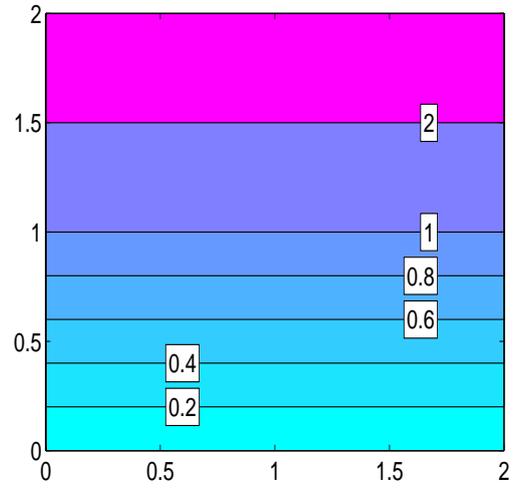
## 4.2 Grafiken zu Stetigkeit und Differenzierbarkeit



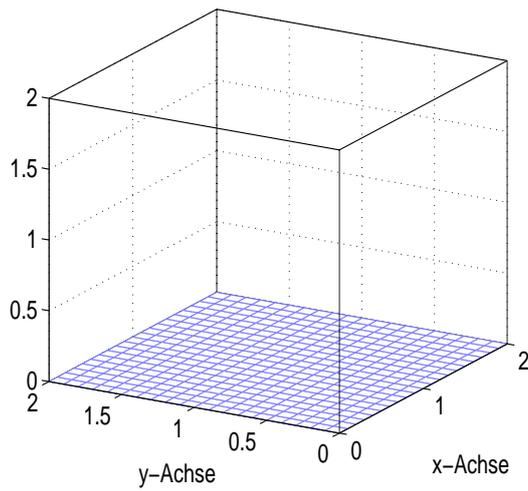
Bereichsweise stetige Funktion



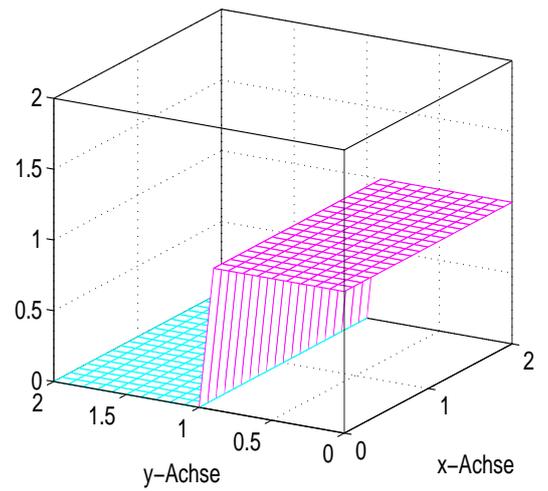
Höhenlinien

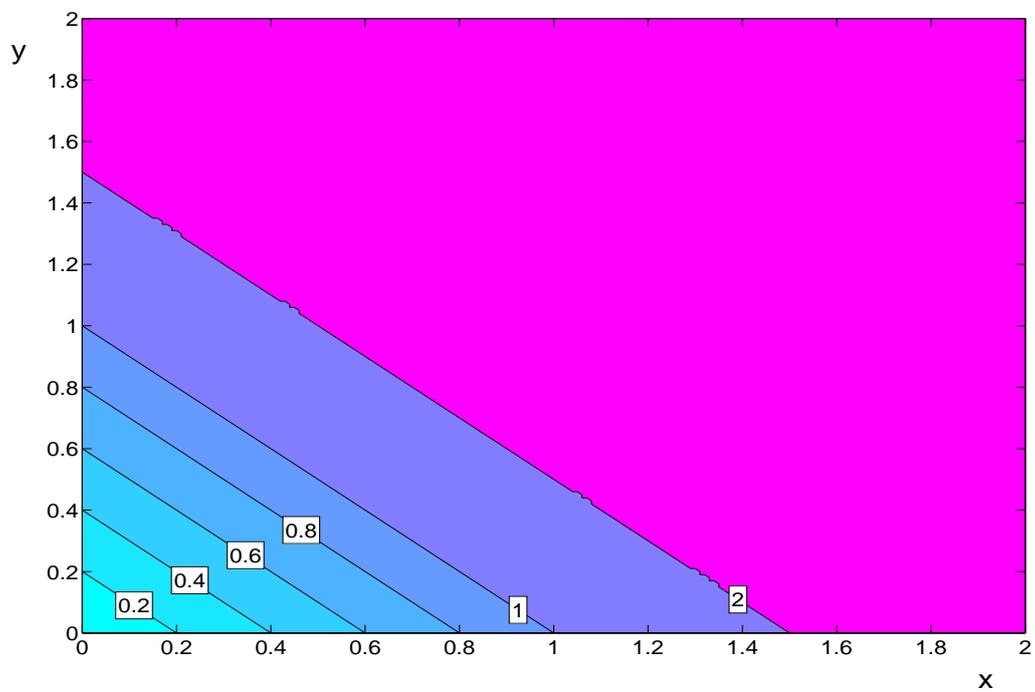
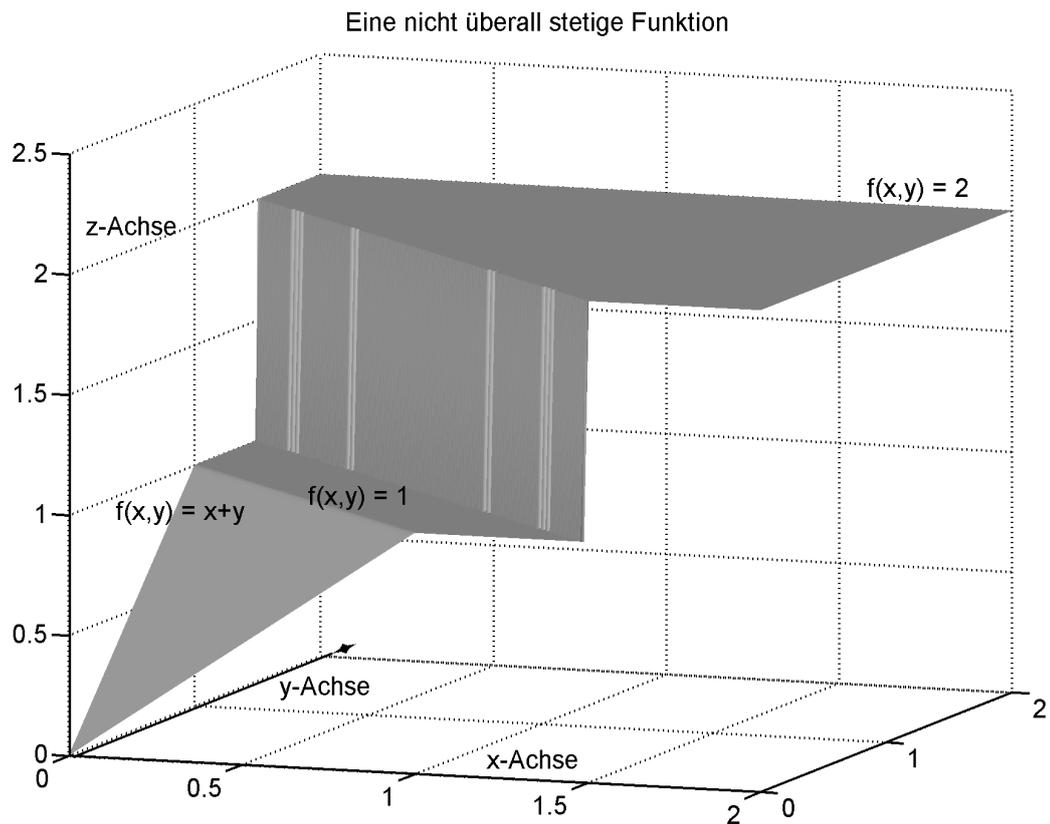


Partielle Ableitung  $f_x(x,y)$

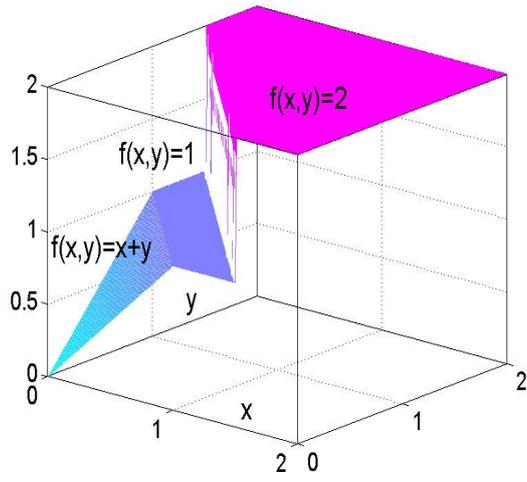


Partielle Ableitung  $f_y(x,y)$

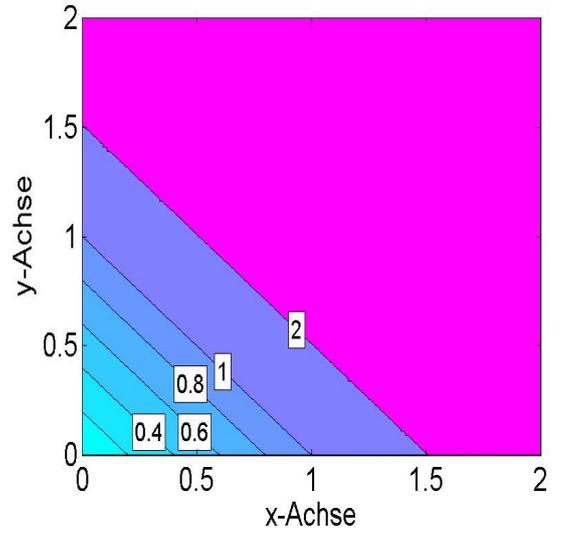




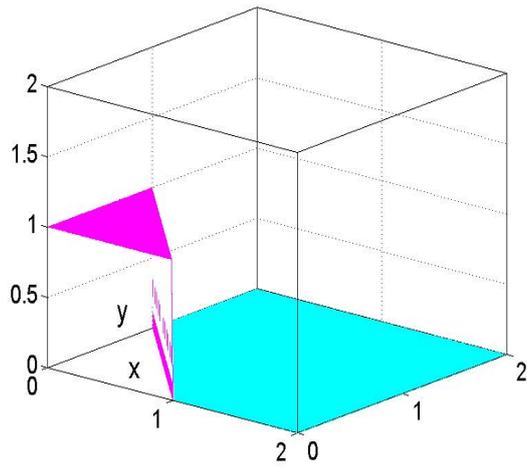
Bereichsweise stetige Funktion



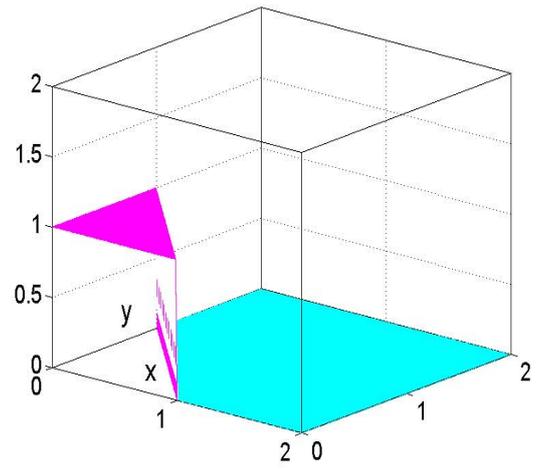
Höhenlinien



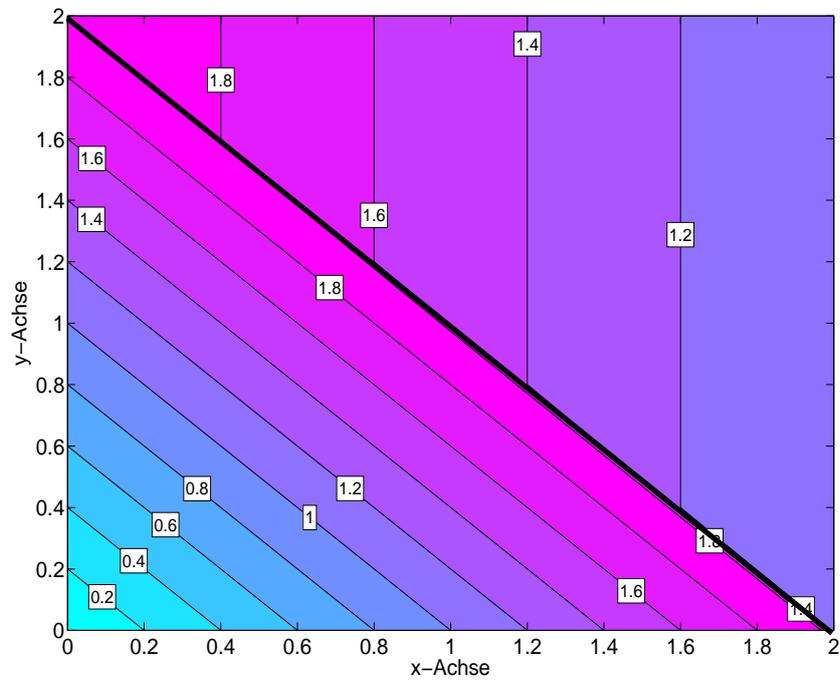
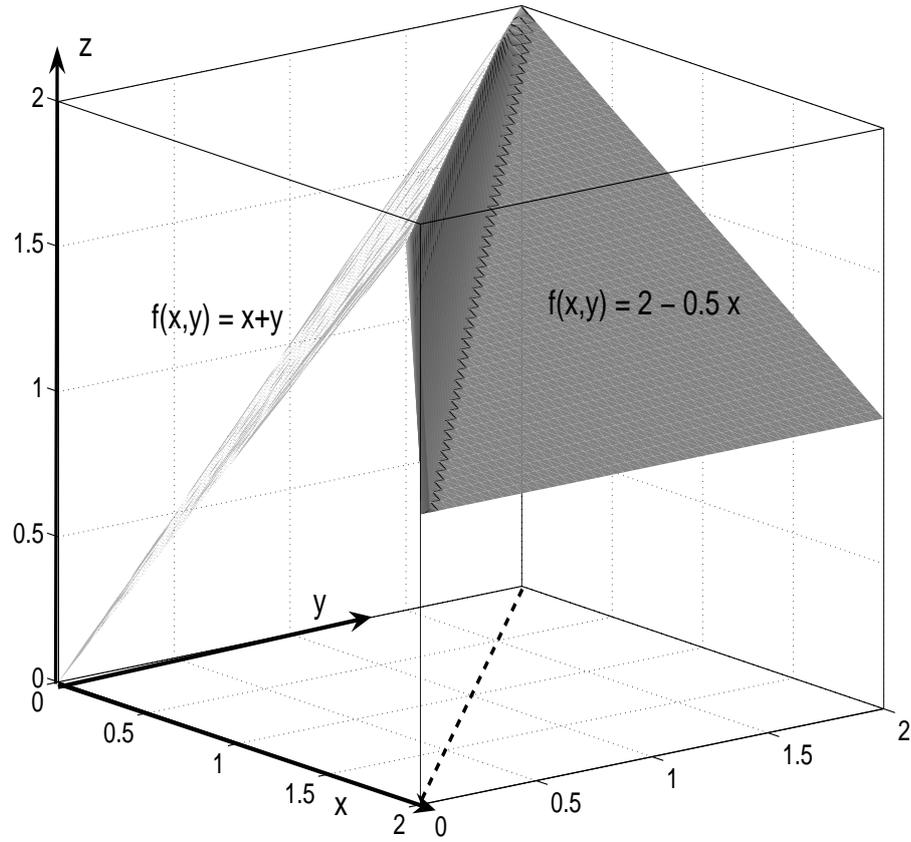
Partielle Ableitung  $f_x(x,y)$

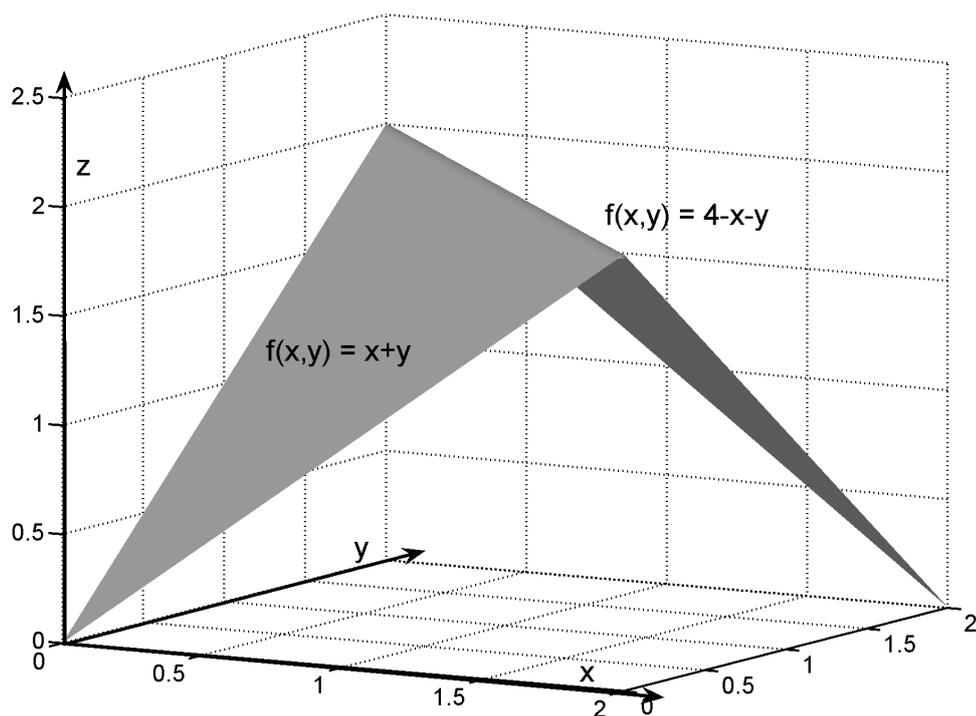


Partielle Ableitung  $f_y(x,y)$

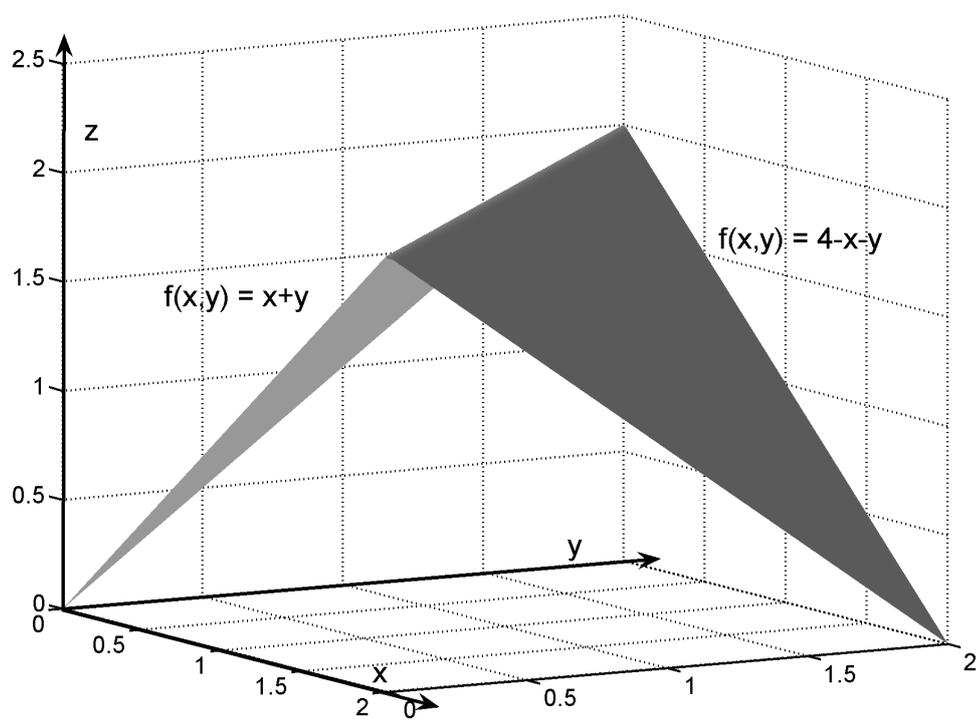


## Eine unstetige Funktion

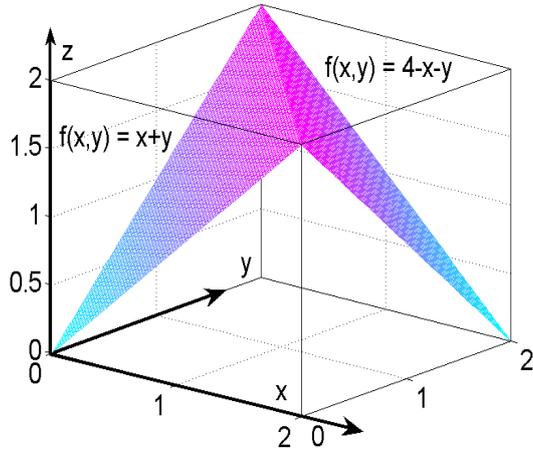


Eine auf  $[0,2] \times [0,2]$  stetige Funktion

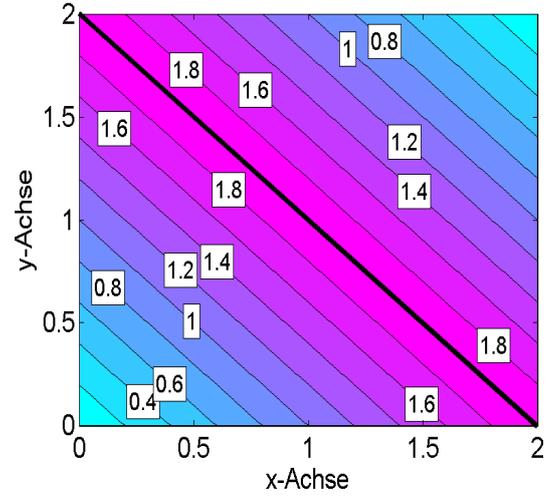
In anderer Perspektive



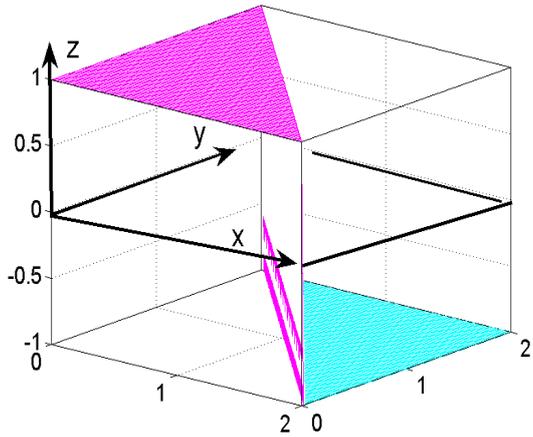
Bereichsweise stetige Funktion



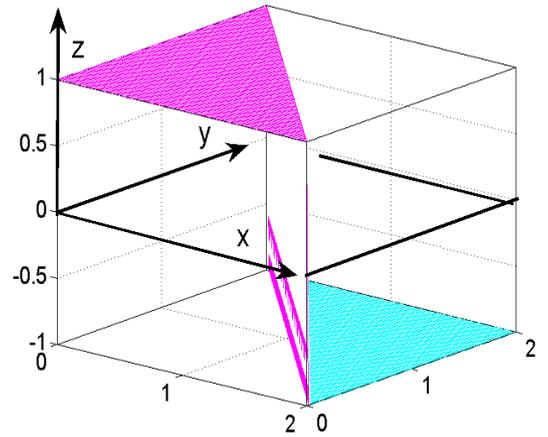
Höhenlinien



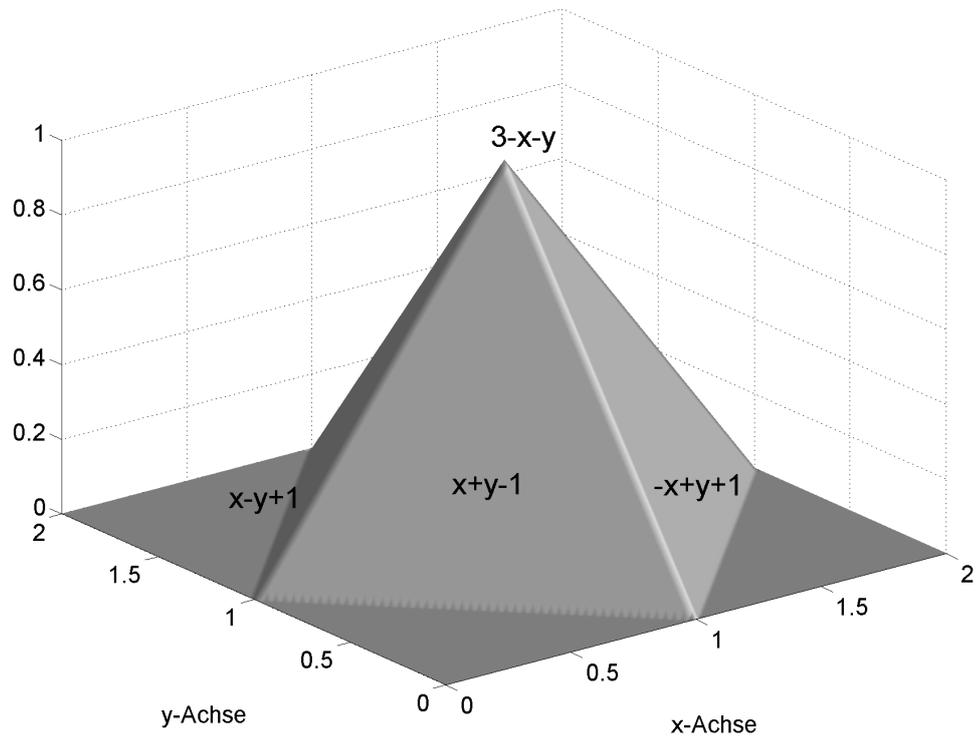
Partielle Ableitung  $f_x(x,y)$



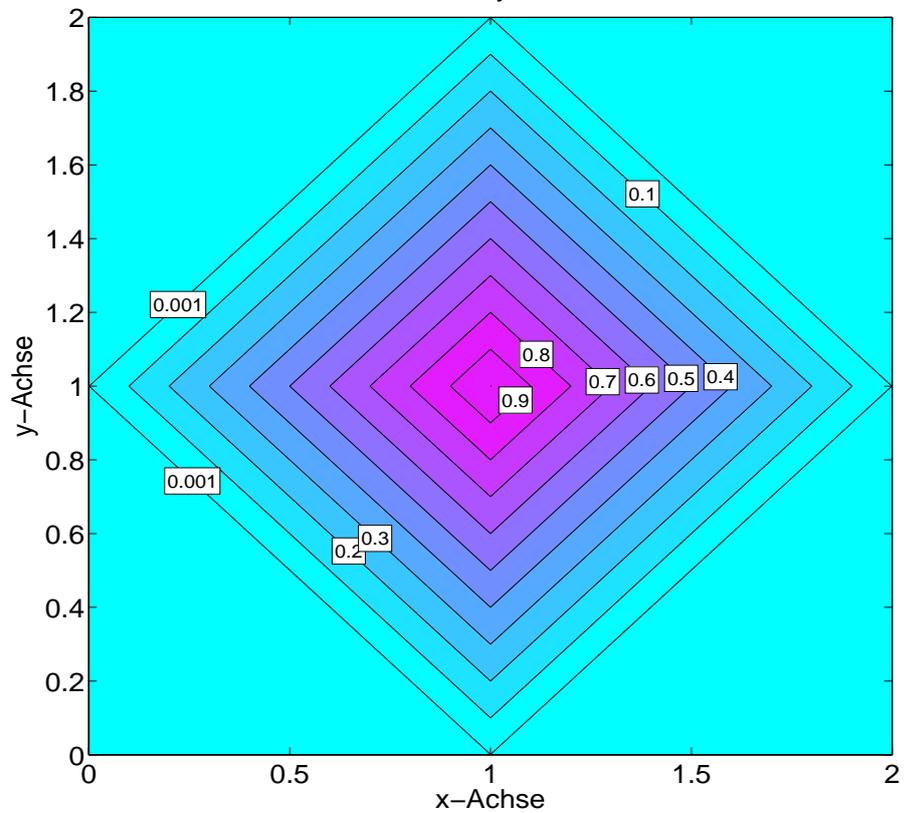
Partielle Ableitung  $f_y(x,y)$

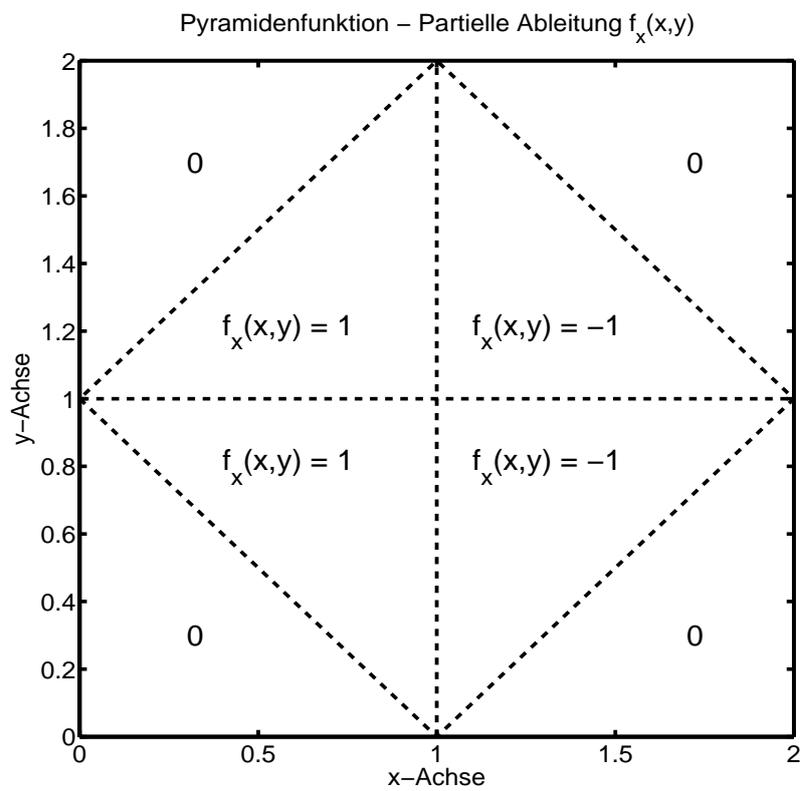
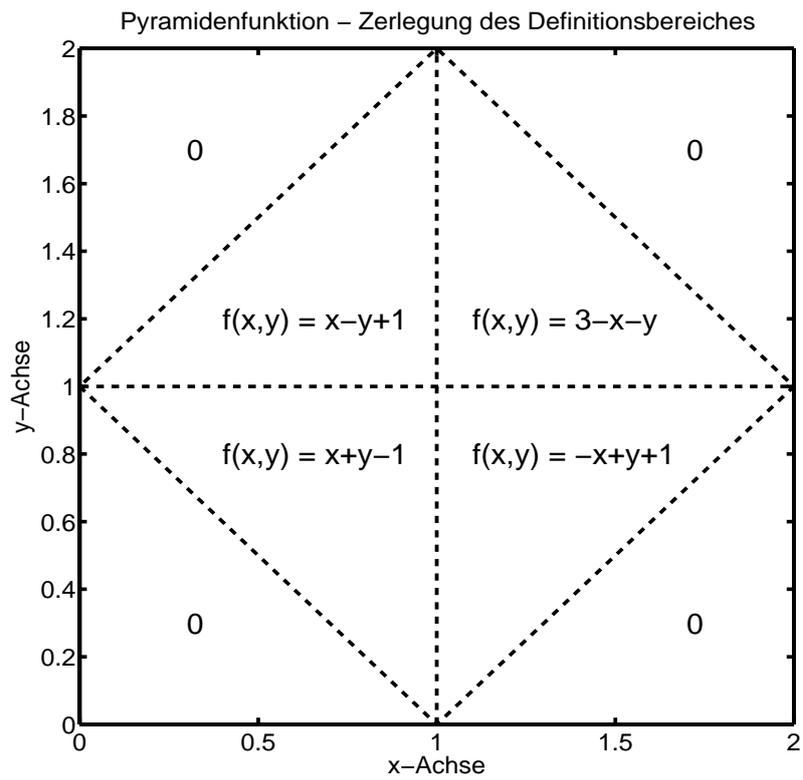


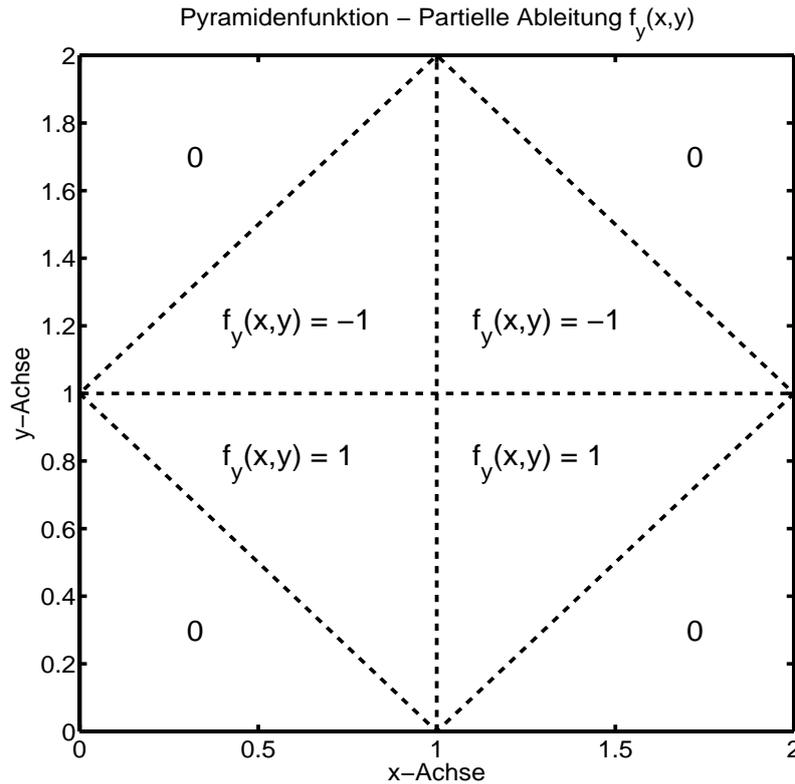
Eine Pyramidenfunktion, bereichsweise definiert  $f(x,y) = \dots$



Höhenlinien der Pyramidenfunktion







### 4.3 Partielle Ableitungen höherer Ordnung

Ausgehend von einer offenen Menge

$$\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad f : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R}$$

sollen zu  $z = f(x, y)$  stetige partielle Ableitungen erster Ordnung auf  $\mathcal{D}$  existieren:

$$f_x : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R}, \quad f_y : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R}$$

Wenn diese Funktionen wiederum partiell differenzierbar sind, gilt

$$\begin{aligned} f_{xx} &:= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right), & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &:= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \\ f_{yy} &:= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right), & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &:= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ f_{xy} &:= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right), & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &:= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \\ f_{yx} &:= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right), & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &:= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

für die zweiten Ableitungen von  $f$ .

Im Falle  $z = f(x_1, x_2)$  werden die Bezeichnungen

$$f_{x_i, x_k} := \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i} := \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \quad i, k \in \{1, 2\}$$

benutzt. Eine entsprechende Notation gilt für die Kennzeichnung höherer Ableitungen, also für Ableitungen dritter, vierter und allgemein für Ableitungen  $n$ -ter Ordnung. Der Fall  $n > 4$  ist jedoch praktisch nicht von Interesse.

Hinsichtlich der Reihenfolge der partiellen Differentiation gilt der Satz von Schwarz :

Für zweimal stetig differenzierbare Funktionen ist die Reihenfolge der partiellen Differentiation nicht entscheidend für das Ergebnis.

**Satz 4.2** (Satz von Schwarz). Sei  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$  eine offene Menge und  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ . Die Funktion  $z = f(x, y)$  besitze stetige partielle Ableitungen  $f_x(x, y)$  und  $f_y(x, y)$ . Wenn die eine zweite partielle Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

existiert und stetig ist, dann existiert auch die andere zweite partielle Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right).$$

Diese ist dann ebenfalls stetig und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

#### 4.4 Gradient, Richtungsableitung , totales Differential

**Definition 4.3.** Den Vektor

$$\nabla f := \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^T \quad (4.1)$$

bezeichnet man als Gradienten der Funktion

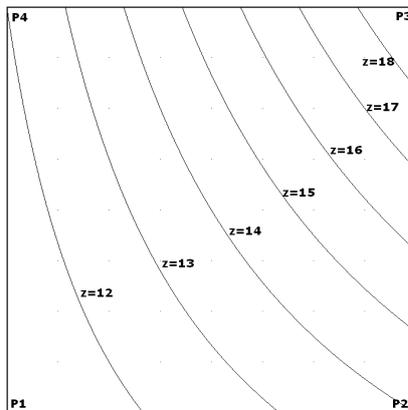
$$u = f(x_1, \dots, x_n),$$

wenn die aufgeführten partiellen Ableitungen existieren. Bei Anwendung von (4.1) werden kartesische Koordinaten  $x_1, \dots, x_n$  vorausgesetzt.

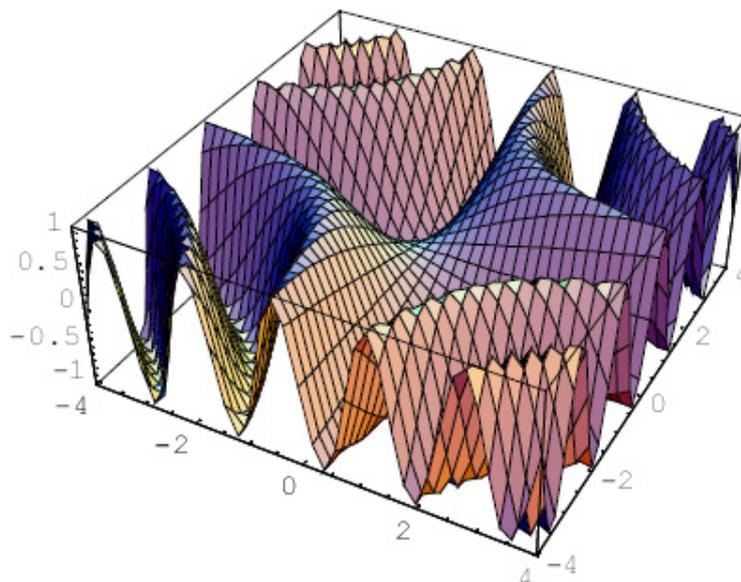
Alternative Schreibweise :  $\text{grad } f$

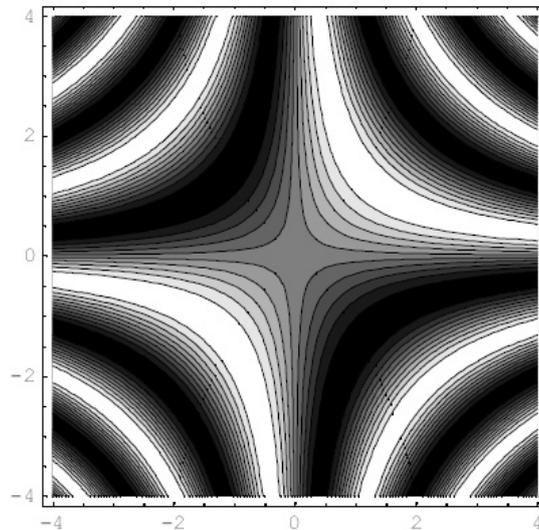
Der Gradient einer Funktion  $f$  (eines Skalarfeldes  $f$ ) ist definiert als ein Vektor von partiellen Ableitungen. Er existiert daher nur an den Stellen, an denen  $f$  bezüglich aller unabhängigen Variablen (Koordinaten) partiell differenzierbar ist.

Der Gradient ist also ein mathematischer Operator, der auf (reellwertige) Funktionen (Skalarfelder) angewandt werden kann. Dabei erhält man ein Vektorfeld, welches die Richtung



Höhenlinien zu  $z = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y + x \cdot y + 11$



Graph der Funktion  $z = \sin(x \cdot y)$ Höhenlinien zu  $z = \sin(x \cdot y)$ 

des größten Zuwachses der Funktion angibt. Der Betrag des Gradienten liefert die maximale Zuwachsrate selbst. Im Falle zweier unabhängiger Veränderlicher ist dieser der Anstieg der in Gradientenrichtung angelegten Tangenten. Liegt ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum der Funktion  $f$  in einem Punkte

$$\mathbf{P}_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$$

vor, so gilt

$$\text{grad } f(\mathbf{P}_0) = \vec{\mathbf{0}}$$

Für den Fall einer reellwertigen Funktion in zwei unabhängigen Veränderlichen (eines ebenen Skalarfeldes)

$$z = f(\mathbf{x}) = f(x, y)$$

ist der Gradient in kartesischen Koordinaten definiert als

$$\text{grad } f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Höhenlinien (Niveaulinien) werden in Karten benutzt, um in einer ebenen Abbildung des Geländes die Höheninformationen darzustellen. Hierzu werden Punkte gleicher Höhe durch eine Kurve verbunden, die dann in die  $xy$ -Ebene projiziert wird.

Interpretiert man die Höhenkarte einer Landschaft als eine Funktion  $z = f(x, y)$ , die jedem Ort die Höhe  $z$  an dieser Stelle zuordnet, dann ist der Gradient von  $f$  an jeder Stelle  $(x, y)$  (wo er definiert ist) ein Vektor der  $xy$ -Ebene in Richtung des steilsten Anstieges. Seine Länge ist ein Maß für die Steilheit dieses Anstieges.

Der Gradient zeigt immer in die Richtung einer Normalen der jeweiligen Höhenlinie. Dabei ist der Gradient so orientiert, dass er in die Richtung wachsender Funktionswerte des Skalarfeldes weist. (Es geht momentan auf dem steilsten Weg bergauf, wenn man in die durch den Gradienten vorgegebene Richtung marschiert). Diese Richtung kann sich von Punkt zu Punkt ändern.

In der Abbildung Gradientenfelder stellen die Grauschattierungen zwei Skalarfelder  $z = f(x, y)$  dar, wobei schwarz dem höchsten Funktionswert entspricht. Die Pfeile repräsentieren die zugehörigen Gradientenfelder.

Für den Fall einer reellwertigen Funktion in drei unabhängigen Veränderlichen (eines räumlichen Skalarfeldes, z. B. eines räumlichen Temperaturfeldes)

$$u = f(\mathbf{x}) = f(x, y, z)$$

ist der Gradient in kartesischen Koordinaten definiert durch

$$\text{grad } f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

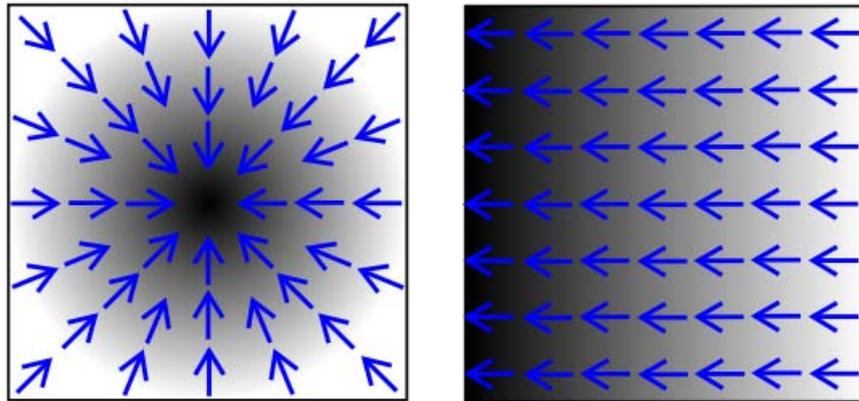


Abbildung 6: Gradientenfelder  
aus [http://de.wikipedia.org/wiki/Gradient\\_%28Mathematik%29](http://de.wikipedia.org/wiki/Gradient_%28Mathematik%29)

Niveaulächen zur Funktion  $u = f(x, y, z)$  sind die durch

$$f(x, y, z) = C = \text{const}$$

entstehenden Flächen im  $\mathbb{R}^3$ . Der Gradient von  $f$  an der Stelle  $(x, y, z)$  ist jetzt ein Vektor des  $\mathbb{R}^3$  in Richtung des größten (differenziellen) Zuwachses (z. B. der Temperatur). Seine Länge ist ein Maß für die Größe dieses maximalen Zuwachses.

Der Gradient zeigt immer in die Richtung einer Normalen der Niveauläche, die den betrachteten Aufpunkt  $(x, y, z)$  enthält. Dabei ist der Gradient, wie gesagt, so orientiert, dass er in die Richtung wachsender Funktionswerte des Skalarfeldes weist. Er gibt die Richtung maximalen Wachstums an.

**Definition 4.4** (Richtungsableitung). *Unter einer Richtungsableitung versteht man die Ableitung, also den Anstieg eines Skalarfeldes*

$$u = f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$$

in Richtung eines Einheitsvektors  $\vec{e}$

$$\text{also } \vec{e} = (e_1, \dots, e_n)^T \quad \text{mit} \quad \sum_{k=1}^n e_k^2 = 1.$$

Das bedeutet

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + t\vec{e}) - f(\vec{x})}{t}.$$

Wenn die Richtung durch einen beliebigen Vektor  $\vec{v} \neq \vec{0}$  vorgegeben ist, so ist oben

$$\vec{e} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

zu setzen.

Der Betrag des Gradienten stimmt mit der Richtungsableitung der Funktion in Gradientenrichtung überein. Allgemeiner gilt :

Ist  $f$  in einer Umgebung von  $\vec{x}$  differenzierbar und existieren stetige partielle Ableitungen in einer Umgebung von  $\vec{x}$ , dann kann man die Richtungsableitung als Skalarprodukt berechnen

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}} = \langle \text{grad } f, \vec{e} \rangle,$$

was ausmultipliziert

$$\langle \text{grad } f, \vec{e} \rangle = \vec{e} \cdot \text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} e_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} e_n$$

bedeutet.

Für die folgenden Betrachtungen soll vorausgesetzt werden dass die Funktion  $u = f(\mathbf{x})$  in einer Umgebung eines Punktes stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzt. Dann ist die Funktion in diesem Punkte total differenzierbar (oder kurz differenzierbar, vgl. [5], S. 479 f.f.). Diese Eigenschaft soll hier nicht näher erläutert werden. In

diesem Falle existieren die oben erklärten Richtungsableitungen. Sie können wie angegeben mit Hilfe des Gradienten berechnet werden.

Weiterhin sind die Begriffe totales oder vollständiges Differential und Tangentialebene dann sinnvoll bzw. erklärbar.

Für eine Funktion  $z = f(x, y)$  von zwei unabhängigen Variablen versteht man unter dem totalen Differential den linearen Differentialausdruck

$$dz = df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Für eine Funktion  $u = f(x, y, z)$  von drei unabhängigen Variablen ist das totale Differential entsprechend durch

$$du = df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

erklärt. Allgemein gilt für  $u = f(x_1, \dots, x_n)$

$$du = df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

Das totale Differential  $df$  (hier auch  $dz$  und  $du$ ) beschreibt näherungsweise die Änderung der gegebenen Funktion  $f$  und damit die Änderung der abhängigen Variablen bei kleinen Änderungen  $dx, dy$  bzw.  $dx, dy, dz$  oder  $dx_1, \dots, dx_n$  der unabhängigen Veränderlichen  $x, y$  bzw.  $x, y, z$  oder  $x_1, \dots, x_n$ .

Differenzen von Funktionswerten können bei vielen Problemen praktisch durch die Differentiale  $dz$  bzw.  $du$  der abhängigen Veränderlichen (siehe oben) bzw. durch das Differential  $df$  der Funktion  $f$  ersetzt werden.

Wenn alle partiellen Ableitungen erster Ordnung von  $z = f(x, y)$  in einer Umgebung von  $(x_0, y_0)$  stetig sind, dann gilt:

Die zugehörige Tangentialebene  $T_1(x, y)$  in einem Punkte  $(x_0, y_0, z_0)$  mit  $z_0 = f(x_0, y_0)$  existiert und kann durch

$$T_1(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \quad (4.4)$$

bzw.

$$T_1(x, y) = z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

beschrieben werden.  $T_1$  in (4.4) ist das zu  $f$  gehörige Taylorpolynom erster Ordnung (hier zwei unabhängige Variable) im Punkte  $(x_0, y_0)$ . In einer hinreichend kleinen Umgebung dieses Punktes gilt

$$f(x, y) \approx T_1(x, y)$$

Das Taylorpolynom zweiter Ordnung zu  $f$  im Punkte  $(x_0, y_0)$  hat die Form

$$T_2(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2} [f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2],$$

vorausgesetzt alle partiellen Ableitungen existieren und sind stetig in einer Umgebung von  $(x_0, y_0)$ .

Das zu  $u = f(x, y, z)$  gehörige Taylorpolynom erster Ordnung (drei unabhängige Variable) im Punkte  $(x_0, y_0, z_0)$  lautet

$$T_1(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0)$$

vorausgesetzt alle partiellen Ableitungen existieren und sind stetig in einer Umgebung von  $(x_0, y_0, z_0)$

## 4.5 Jacobi-Matrix und Verallgemeinerte Kettenregel

### 4.5.1 Allgemeines

Vergleiche

<http://de.wikipedia.org/wiki/Jacobi-Matrix> und

[http://de.wikipedia.org/wiki/Verallgemeinerte\\_Kettenregel](http://de.wikipedia.org/wiki/Verallgemeinerte_Kettenregel)

Ausgehend von einem Gebiet  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$  mit  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  und

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

soll  $\mathbf{f}$  eine stetig differenzierbare Abbildung  $\mathbf{f} : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R}^m$  sein.

Das bedeutet :

Jede Komponente  $f_k(\mathbf{x})$  besitzt stetige partielle Ableitungen nach allen Variablen (Koordinaten)  $x_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Die Jacobi-Matrix oder Funktionalmatrix  $J_{\mathbf{f}}$  der Abbildung  $\mathbf{f}$  ist dann wie folgt definiert :

$$J_{\mathbf{f}} = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n}, \quad i \text{ Zeilenindex, } j \text{ Spaltenindex}$$

Anschaulicher

$$\mathbf{J}_{\mathbf{f}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

In einer kleinen Umgebung eines Punktes

$$\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n), \quad \mathbf{p} \in \mathcal{D}$$

kann die Jacobi-Matrix zur Approximation der Abbildung (hier vektorwertige Funktion) verwendet werden

$$\mathbf{f}(x_1, \dots, x_n) \approx \mathbf{f}(p_1, \dots, p_n) + \mathbf{J}_{\mathbf{f}}(p_1, \dots, p_n) \begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ \vdots \\ x_n - p_n \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

Kürzer :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{p}) + \mathbf{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{p})(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \quad (4.7)$$

An Stelle von  $\mathbf{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{p})$  wird oft auch  $\mathbf{f}'(\mathbf{p})$  geschrieben.

$$\mathbf{f}'(\mathbf{p}) = \mathbf{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{p})$$

Mit dieser Bezeichnung wird unterstrichen, dass es sich bei der Jacobi-Matrix um eine Ableitungsmatrix handelt. Damit geht (4.7) über in

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{p}) + \mathbf{f}'(\mathbf{p})(\mathbf{x} - \mathbf{p}).$$

Um die rechte Seite für festes  $\mathbf{p}$  zu berechnen muss vorab durch Differentiation die Jacobi-Matrix  $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$  ermittelt werden. Dann ist in  $\mathbf{f}'$  der gegebene Vektor  $\mathbf{x} = \mathbf{p}$  als Argument einzusetzen.

Die durch die rechte Seite von (4.6) bzw. 4.7 erklärte affine Abbildung

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{p}) + \mathbf{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{p})(\mathbf{x} - \mathbf{p})$$

bzw.

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{p}) + \mathbf{f}'(\mathbf{p})(\mathbf{x} - \mathbf{p})$$

entspricht der Taylor-Approximation erster Ordnung für eine vektorwertige Funktion.

Die formale Analogie zu der früher betrachteten Taylorentwicklung für reelle Funktionen ist offensichtlich (Fall  $m = 1$ ,  $n = 1$ ).

Für  $m = 1$  und allgemeines  $n \in \mathbb{N}$  entspricht die Jacobi-Matrix dem transponierten Gradienten einer reellwertigen Funktion  $f$ .

Das totale Differential  $d\mathbf{f}$  einer vektorwertigen Funktion  $\mathbf{f}$  an der Stelle  $\mathbf{p}$  ist definiert durch

$$d\mathbf{f} = \begin{pmatrix} df_1 \\ \vdots \\ df_m \end{pmatrix} = \mathbf{f}'(\mathbf{p}) d\mathbf{x} = \mathbf{J}_{\mathbf{f}}(p_1, \dots, p_n) \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix} \quad \text{mit } d\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{p}$$

Wegen (4.7) gilt

$$d\mathbf{f} \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{p}) = \Delta\mathbf{f}.$$

$\Delta\mathbf{f}$  ist dabei der Differenzvektor der Funktionswerte (vektorwertige Funktion!).

Ersetzt man in (4.7)  $\mathbf{x}$  durch  $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$  und  $\mathbf{p}$  durch  $\mathbf{x}$ , so geht diese Formel in die häufig benutzte Gestalt

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}) \Delta\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

über. Für die Differentiale gilt entsprechend

$$d\mathbf{f} = \begin{pmatrix} df_1 \\ \vdots \\ df_m \end{pmatrix} = \mathbf{f}'(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathbf{f}'(x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix} \quad \text{mit } d\mathbf{x} = \Delta\mathbf{x}$$

Totales Differential für Vektorfunktionen :

Taylor-Approximation erster Ordnung für eine vektorwertige Funktion

Für  $m = 1$  wird die Jacobi-Matrix der transponierte Gradient von  $f$ .

## 4.5.2 Beispiele für die Jacobi-Matrix (Funktionalmatrix)

**Beispiel 4.5.** Vektorwertige Funktion mit 2 unabhängigen Variablen und 2 Komponenten

$$\vec{\mathbf{f}} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$$

sei differenzierbar in einem Gebiet  $\mathcal{D}$

$$\vec{\mathbf{f}}(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$$

Jacobi-Matrix :

$$\mathbf{J}(\vec{\mathbf{f}}) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} u(x, y) & \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial x} v(x, y) & \frac{\partial}{\partial y} v(x, y) \end{pmatrix}$$

**Beispiel 4.6.** Jacobi-Matrix (Funktionalmatrix) für eine vektorwertige Funktion mit 3 unabhängigen Variablen und 3 Komponenten

$$\vec{\mathbf{f}} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$$

sei differenzierbar in einem Gebiet  $\mathcal{D}$

$$\vec{\mathbf{f}}(x, y, z) = \begin{pmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{pmatrix}$$

Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}(\vec{\mathbf{f}})$  :

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} u(x, y, z) & \frac{\partial}{\partial y} u(x, y, z) & \frac{\partial}{\partial z} u(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial x} v(x, y, z) & \frac{\partial}{\partial y} v(x, y, z) & \frac{\partial}{\partial z} v(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial x} w(x, y, z) & \frac{\partial}{\partial y} w(x, y, z) & \frac{\partial}{\partial z} w(x, y, z) \end{pmatrix}$$

**Beispiel 4.7.**

$$\vec{\mathbf{f}} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 y + z \\ xy^2 + z \\ xy + z^2 \end{pmatrix}$$

Jacobi-Matrix :

$$\mathbf{J}(\vec{\mathbf{f}}) = \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 1 \\ y^2 & 2xy & 1 \\ y & x & 2z \end{pmatrix}$$

Jacobi-Determinante:

$$\det(\mathbf{J}) = 6x^2 y^2 z - x^2 y - xy^2$$

**Beispiel 4.8.** Vektorfunktion und totales Differential :  
2 unabhängige Variable und 2 Komponenten

$$\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2, \quad \vec{\mathbf{f}} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\mathbf{J}(\vec{\mathbf{f}})(P_0) = \mathbf{J}(\vec{\mathbf{f}})(x_0, y_0) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}(x_0, y_0)$$

Approximation von  $\vec{f}$  in kleiner Umgebung von  $P_0$  :

$$\vec{f}(x, y) \approx \vec{f}(x_0, y_0) + \mathbf{J}(\vec{f})(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}(x, y) \approx \vec{f}(x_0, y_0) + d\vec{f}$$

mit dem Differential

$$d\vec{f} = \mathbf{J}(\vec{f})(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \mathbf{J}(\vec{f})(P_0) \cdot d\vec{r}$$

**Beispiel 4.9.** Vektorfunktion und totales Differential :  
2 unabhängige Variable und 3 Komponenten

$$\mathbf{J}(\vec{f})(P_0) = \mathbf{J}(\vec{f})(x_0, y_0) = \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y)}(x_0, y_0)$$

Approximation von  $\vec{f}$  in kleiner Umgebung von  $P_0$  :

$$\vec{f}(x, y) \approx \vec{f}(x_0, y_0) + d\vec{f}$$

$$d\vec{f} = \mathbf{J}(\vec{f})(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \mathbf{J}(\vec{f})(P_0) \cdot d\vec{r}$$

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} u(x, y) & \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial x} v(x, y) & \frac{\partial}{\partial y} v(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial x} w(x, y) & \frac{\partial}{\partial y} w(x, y) \end{pmatrix}$$

**Beispiel 4.10.** Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten :

$$\begin{aligned} x &= x(r, \varphi) = r \cos(\varphi) \\ y &= y(r, \varphi) = r \sin(\varphi) \end{aligned} \tag{4.8}$$

mit  $0 \leq r$  und  $-\pi < \varphi \leq \pi$  (oft auch  $0 \leq \varphi < 2\pi$ )  
Die Jacobi-Matrix dieser Koordinaten-Transformation

$$\mathbf{J}(\vec{r}) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } \det(\mathbf{J}) = r \geq 0.$$

Interpretation der Spalten von  $\mathbf{J}$  !

Kartesische Koordinaten in Polarkoordinaten, also Umkehrtransformation von (4.8)

$$r = r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{Abstand vom Nullpunkt im } \mathbb{R}^2$$

$$\varphi = \varphi(x, y) = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{für } y \geq 0 \\ -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{für } y < 0 \end{cases} \quad \text{der Fall } -\pi < \varphi \leq \pi$$

$$\frac{\partial(r, \varphi)}{\partial(x, y)} = \left( \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\frac{\sin(\varphi)}{r} & \frac{\cos(\varphi)}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ -\frac{y}{r^2} & \frac{x}{r^2} \end{pmatrix}$$

Analog für Zylinderkoordinaten : Jacobi-Matrix mit Interpretation der Spalten, Jacobi-Determinante

**Beispiel 4.11.** Kugelkoordinaten in kartesische Koordinaten (Standard 1a) :Vergleiche Abbildung in <http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/kurse/kurs8/seite3.html>

$$\begin{aligned}
 x &= r \sin(\vartheta) \cos(\varphi) & \text{mit } -\pi < \varphi \leq \pi \\
 y &= r \sin(\vartheta) \sin(\varphi) & \text{und } 0 \leq \vartheta \leq \pi \\
 z &= r \cos(\vartheta) & \text{Nordpol : } \vartheta = 0, \quad \text{Südpol : } \vartheta = \pi
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Jacobi-Matrix :

$$\mathbf{J} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \vartheta)} = \begin{pmatrix} \sin(\vartheta) \cos(\varphi) & -r \sin(\vartheta) \sin(\varphi) & r \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta) \sin(\varphi) & r \sin(\vartheta) \cos(\varphi) & r \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) & 0 & -r \sin(\vartheta) \end{pmatrix}$$

Jacobi-Determinante :

$$\det(\mathbf{J}) = -\sin(\vartheta) r^2 \leq 0$$

Interpretation der Spalten von  $\mathbf{J}$ .

Kartesische Koordinaten in Kugelkoordinaten (Standard 1a):

Umkehrtransformation von (4.9)

$$\begin{aligned}
 r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{ist jetzt Abstand vom Nullpunkt im } \mathbb{R}^3 \\
 \varphi &= \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{für } y \geq 0 \\ -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{für } y < 0 \end{cases} \quad \text{mit } -\pi < \varphi \leq \pi \\
 \vartheta &= \operatorname{arccot}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \quad \text{mit } 0 < \vartheta < \pi
 \end{aligned}$$

Jacobi-Matrix dieser Umkehrtransformation :

$$\frac{\partial(r, \varphi, \vartheta)}{\partial(x, y, z)} = \left( \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \vartheta)} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \sin(\vartheta) & \sin(\varphi) \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \\ -\frac{\sin(\varphi)}{r \sin(\vartheta)} & \frac{\cos(\varphi)}{r \sin(\vartheta)} & 0 \\ \frac{\cos(\varphi) \cos(\vartheta)}{r} & \frac{\cos(\vartheta) \sin(\varphi)}{r} & -\frac{\sin(\vartheta)}{r} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} & \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ -\frac{y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} & 0 \\ \frac{zx}{\sqrt{x^2 + y^2} (x^2 + y^2 + z^2)} & \frac{zy}{\sqrt{x^2 + y^2} (x^2 + y^2 + z^2)} & -\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + z^2} \end{pmatrix}$$

Jacobi-Determinante dieser Umkehrtransformation :

$$\det \frac{\partial(r, \varphi, \vartheta)}{\partial(x, y, z)} = -\frac{1}{r^2 \sin(\vartheta)} = -\frac{1}{r \sqrt{r^2 - z^2}} < 0$$

**Beispiel 4.12.** Jacobi-Matrix für Kugelkoordinaten (Standard 1b) :Nur die Reihenfolge der Koordinaten  $r, \varphi, \vartheta$  beim Aufbau von  $\mathbf{J}$  wird gegenüber dem vorigen Beispiel geändert. Diese Koordinatenwahl ist üblich in der Physik.

$$x = r \sin(\vartheta) \cos(\varphi), \quad y = r \sin(\vartheta) \sin(\varphi), \quad z = r \cos(\vartheta) \geq 0.$$

Jacobi-Matrix :

$$\mathbf{J} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \vartheta, \varphi)} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \sin(\vartheta) & r \cos(\varphi) \cos(\vartheta) & -r \sin(\varphi) \sin(\vartheta) \\ \sin(\varphi) \sin(\vartheta) & r \sin(\varphi) \cos(\vartheta) & r \cos(\varphi) \sin(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) & -r \sin(\vartheta) & 0 \end{pmatrix}$$

Jacobi-Determinante :

$$\det(\mathbf{J}) = \sin(\vartheta) r^2 \geq 0$$

Fahren Sie analog zu Beispiel 4.11 fort.

**Beispiel 4.13.** *Geographische Koordinaten : 2. Variante der Kugelkoordinaten (Erde als Kugel approximiert)*  
 $r$  : Abstand vom Erdmittelpunkt

$\vartheta$  : geographischen Breite (nach Umrechnung in Grad)  
 $\vartheta = \text{const}$  : Breitenkreis (nach Umrechnung in Grad)  
 $\vartheta > 0$  : Nördlicher Breitengrad (Breitenkreis),  $\vartheta < 0$  : Südlicher Breitengrad

$\varphi$  : geographischen Länge (nach Umrechnung in Grad)  
 $\varphi = \text{const}$  : Längengrad (Verläuft von Pol zu Pol)  
 $\varphi > 0$  : Östlicher Längengrad (Längengrad),  $\varphi < 0$  : Westlicher Längengrad

Beispiel Längengrad  $13,5^\circ$  Ost. Dort liegen z. B. Greifswald, Berlin, Passau.  
 Vergleiche Abb. in [http://de.wikipedia.org/wiki/Geographische\\_Koordinaten](http://de.wikipedia.org/wiki/Geographische_Koordinaten)  
 Man beachte: Dort Verwendung anderer Parameter  $\lambda \mapsto \varphi$  und  $\varphi \mapsto \vartheta$ .

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\vartheta) \cos(\varphi) & r \text{ ist Abstand vom Nullpunkt im } \mathbb{R}^3 \\ y &= r \cos(\vartheta) \sin(\varphi) & \text{mit } -\pi < \varphi \leq \pi \\ z &= r \sin(\vartheta) & \text{und } -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Nordpol : } \vartheta = \frac{\pi}{2}, \quad \text{Äquator : } \vartheta = 0, \quad \text{Südpol : } \vartheta = -\frac{\pi}{2}$$

Jacobi-Matrizen :

$$\mathbf{J}_{g_1} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \vartheta, \varphi)} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cos(\vartheta) & -r \cos(\varphi) \sin(\vartheta) & -r \sin(\varphi) \cos(\vartheta) \\ \sin(\varphi) \cos(\vartheta) & -r \sin(\varphi) \sin(\vartheta) & r \cos(\varphi) \cos(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & r \cos(\vartheta) & 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$\det(\mathbf{J}_{g_1}) = -\cos(\vartheta) r^2 \leq 0.$$

Änderung der Reihenfolge der krummlinigen Koordinaten :

$$\mathbf{J}_{g_2} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \vartheta)} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cos(\vartheta) & -r \sin(\varphi) \cos(\vartheta) & -r \cos(\varphi) \sin(\vartheta) \\ \sin(\varphi) \cos(\vartheta) & r \cos(\varphi) \cos(\vartheta) & -r \sin(\varphi) \sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & 0 & r \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

mit

$$\det(\mathbf{J}_{g_2}) = \cos(\vartheta) r^2 \geq 0.$$

Fahren Sie analog zu Beispiel 4.11 fort.

## 4.6 Taylor-Formel mehrere unabhängige Variable

Vergleiche

[http://de.wikipedia.org/wiki/Taylor-Formel#Taylor-Formel\\_im\\_Mehrdimensionalen](http://de.wikipedia.org/wiki/Taylor-Formel#Taylor-Formel_im_Mehrdimensionalen)

<http://de.wikipedia.org/wiki/Multiindex>

Die Thematik wird in dieser allgemeinen Form in der Vorlesung nicht behandelt.

Lediglich spezielle Varianten der unten stehenden Formel (4.14) werden im nächsten Abschnitt diskutiert und dort in einfacherer Form eingeführt.

### Multiindizes

Aus notationstechnischen Gründen (knappe und übersichtliche Darstellungsweise von mathematischen Formeln und Zusammenhängen) fasst man häufig mehrere Indizes zu einem Multiindex zusammen.

Ein Multiindex wird hier als ein  $n$ -Tupel nichtnegativer ganzer Zahlen definiert,  $n \in \mathbb{N}$ .  $a$  ist also ein Multiindex, wenn gilt

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad a_k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad 1 \leq k \leq n$$

Mit

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad a_k \in \mathbb{R}$$

sollen hier  $n$ -Tupel von reellen Variablen  $x_k$  bezeichnet werden.

Es gelten die folgenden Vereinbarungen

$$|a| = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad (4.10)$$

$$a! = \prod_{i=1}^n a_i! = a_1! \cdot a_2! \cdot \dots \cdot a_n! \quad (4.11)$$

$$x^a = \prod_{i=1}^n x_i^{a_i} = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n} \quad (4.12)$$

Dabei wird (4.10) als Länge (nicht mit der Länge eines Vektors verwechseln) und (4.11) als Fakultät des Multiindex bezeichnet. Durch (4.12) wird ein Monom definiert.

Mit diesen Vereinbarungen lässt sich der verallgemeinerte binomische Satz in der Form :

$$(x_1 + \dots + x_n)^k = \sum_{|a|=k} \frac{k!}{a!} x^a, k \in \mathbb{N}$$

schreiben. Die Summe läuft dabei über alle Multiindizes  $a$  der Länge  $k$ .

Ordnet man den Multiindizes der Form

$$j = (j_1, j_2, \dots, j_m)$$

die Differentialoperatoren

$$D^j f := \frac{\partial^{|j|}}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_m^{j_m}} f \quad (4.13)$$

der Ordnung  $|j|$  zu und verwendet man die von (4.12) abgeleiteten Formeln

$$(x - x_0)^j = \left[ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \end{pmatrix} \right]^{\begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \\ \vdots \end{pmatrix}} = (x_1 - x_1^0)^{j_1} \cdot (x_2 - x_2^0)^{j_2} \dots (x_m - x_m^0)^{j_m}$$

für

$$x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)^T \quad (0 \text{ ist Index, keine Potenz})$$

dann kann eine **Taylor-Formel in Multiindex-Darstellung** formuliert werden.

**Satz 4.14** (Taylor-Formel mit Restglied). *Es sei  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$  eine offene und konvexe Menge,  $k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$  und  $x_0 \in \mathcal{D}$ .*

*Die Funktion  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  besitze mindestens bis zur Ordnung  $(k+1)$  stetige partielle Ableitungen in  $\mathcal{D}$ .*

*Dann gibt es für jedes  $x \in \mathcal{D}$  ein  $z \in \mathcal{D}$  mit*

$$f(x) = \sum_{|j| \leq k} \frac{D^j f(x_0)}{j!} (x - x_0)^j + \sum_{|j|=k+1} \frac{D^j f(z)}{j!} (x - x_0)^j \quad (4.14)$$

*Für  $z$  gilt insbesondere*

$$z = x_0 + \vartheta(x_0, x) (x - x_0) \quad \text{mit} \quad 0 < \vartheta < 1$$

**Bemerkung 4.15.** *Das stets zwischen 0 und 1 liegende  $\vartheta$  im vorigen Satz hängt dabei wie formuliert vom Entwicklungspunkt  $x_0 \in \mathcal{D}$  und vom Aufpunkt  $x \in \mathcal{D}$  (in dem  $f(x)$  durch die Taylorformel approximiert werden soll) ab.*

*Der Punkt  $z$  liegt also immer auf der Verbindungslinie zwischen  $x_0$  und  $x$ . Das Restglied*

$$R_k(x) = \sum_{|j|=k+1} \frac{D^j f(z)}{j!} (x - x_0)^j$$

*kann oft wie im Falle einer Veränderlichen betragsmäßig abgeschätzt werden (Maximum des Betrages)*

## 4.7 Lokale Existenz und Differenzierbarkeit der impliziten Funktion

Einführendes Beispiel :

$$x^2 + 3y^2 = 7 \implies F(x, y) = x^2 + 3y^2 - 7 = 0$$

An der Stelle  $(x_o, y_o) = (2, 1)$  gilt  $F(x_o, y_o) = 0$ . Der Punkt  $P_o = (x_o, y_o)$  liegt also auf der durch  $F(x, y) = 0$  definierten Kurve des  $\mathbb{R}^2$ . Es handelt sich hier um eine Ellipse.

In diesem Beispiel gibt es eine Umgebung  $U(P_o) \subseteq \mathbb{R}^2$ , in der  $F(x, y) = 0$  eindeutig nach  $y$  auflösbar ist (eindeutige lokale Auflösbarkeit). Es existiert hier also genau eine auf einem Intervall  $\mathcal{I}$  definierte Funktion

$$y = g(x), \quad g : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(x, g(x)) = 0 \quad \text{und} \quad (x, g(x)) \in U(P_o) \quad \text{für alle} \quad x \in \mathcal{I}$$

Für diese Funktion gilt natürlich  $g(x_o) = y_o$ , wobei  $x_o$  ein innerer Punkt des Intervalls  $\mathcal{I}$  ist.

Sind obige Voraussetzungen erfüllt, so sagt man, dass die Funktion  $y = g(x)$  implizit durch die Gleichung  $F(x, y) = 0$  gegeben ist. In unserem speziellen Beispiel ist die Gleichung  $F(x, y) = 0$  geschlossen auflösbar, d.h. man kann  $g(x)$  durch eine bekannte elementare Funktion darstellen

$$g(x) = \frac{1}{3} \sqrt{21 - 3x^2}.$$

Dies ist jedoch nicht immer so. Oft ist eine existierende implizite Funktion nur näherungsweise in einer Umgebung von  $x_o$  darstellbar.

Besitzt  $F(x, y)$  stetige partielle Ableitungen erster Ordnung, dann kann die Gleichung  $F(x, y(x)) = 0$  unter Nutzung der verallgemeinerten Kettenregel differenziert werden

$$F_x(x, y) + F_y(x, y) y' = 0 \tag{4.15}$$

Für  $y = g(x)$  gilt also

$$y'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} = -\frac{F_x(x, g(x))}{F_y(x, g(x))} \quad \text{falls} \quad F_y(x, g(x)) \neq 0.$$

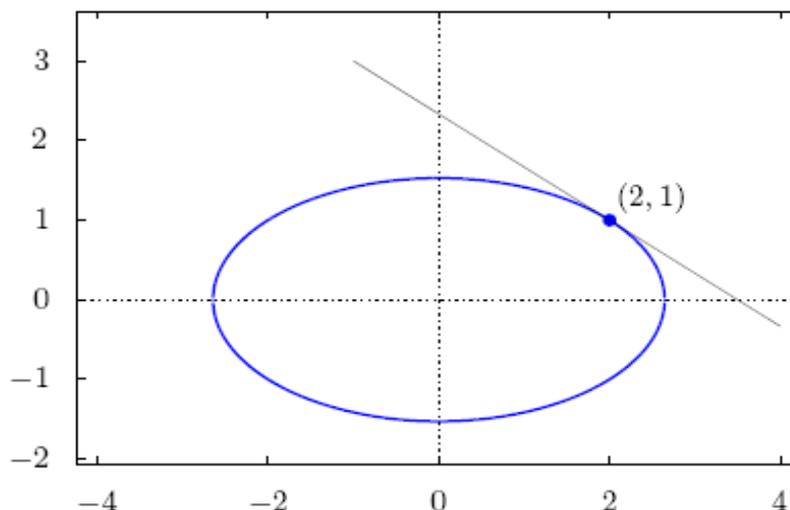
Ist  $y = g(x)$  nicht geschlossen darstellbar, dann kann wegen  $y_o = g(x_o)$  mit

$$y'(x_o) = -\frac{F_x(x_o, y_o)}{F_y(x_o, y_o)}$$

zumindest die Ableitung an der Stelle  $x_o$  berechnet werden. Bezogen auf unser Beispiel folgt

$$F_x(x, y) = 2x, \quad F_y(x, y) = 6y, \quad y'(2) = -\frac{F_x(2, 1)}{F_y(2, 1)} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

Damit haben wir den Anstieg der in der unteren Abb. skizzierten Tangente berechnet, ohne die Auflösung  $y = g(x)$  zu benutzen.



Besitzt  $F(x, y)$  stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung, dann liefert eine weitere Differentiation von (4.15) unter Nutzung der verallgemeinerten Kettenregel

$$F_{xx}(x, y) + 2F_{xy}(x, y) y' + F_{yy}(x, y) [y']^2 + F_y(x, y) y'' = 0. \tag{4.16}$$

Kennt man  $y = g(x)$  und  $y' = g'(x)$ , dann kann im Falle  $F_y(x, y) \neq 0$  die zweite Ableitung  $y'' = g''(x)$  berechnet werden. Speziell für  $y_o = g(x_o)$  wird nach Bestimmung von  $y'_o = g'(x_o)$  die Ermittlung von  $y''_o = g''(x_o)$  möglich, wenn  $F_y(x_o, y_o) \neq 0$  ist :

$$F_{xx}(x_o, y_o) + 2F_{xy}(x_o, y_o) y'_o + F_{yy}(x_o, y_o) [y'_o]^2 + F_y(x_o, y_o) y''_o = 0$$

Besitzt  $F(x, y)$  für  $n > 2$  stetige partielle Ableitungen bis zur Ordnung  $n$ , dann erhält man aus (4.16) durch sukzessive Differentiation Formeln zur Berechnung von  $y^{(n)} = g^{(n)}(x)$  beziehungsweise  $y_o^{(n)} = g^{(n)}(x_o)$ . Dabei ist die verallgemeinerte Kettenregel anzuwenden. Für die eindeutige Berechnung von  $y_o^{(n)}$  ist stets  $F_y(x_o, y_o) \neq 0$  erforderlich. Die sukzessive Berechnung von  $y_o', y_o'', \dots, y_o^{(n)}$  ermöglicht die Approximation der durch  $y_o = g(x_o)$  gegebenen impliziten Funktion. Beispielsweise

$$g(x) \approx T_1(x) = y_o + y_o'(x - x_o),$$

$$g(x) \approx T_2(x) = y_o + y_o'(x - x_o) + \frac{y_o''}{2}(x - x_o)^2$$

**Satz 4.16.** (Lokale Existenz und Differenzierbarkeit der impliziten Funktion, zweidim. Fall)

Es sei

$$F(x, y), \quad F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \text{Definitionsbereich } \mathcal{D} \text{ offene Menge}$$

eine stetig differenzierbare Funktion zweier reeller Variabler. Für einen Punkt  $(x_o, y_o) \in \mathcal{D}$  gelte

$$F(x_o, y_o) = 0 \quad \text{und} \quad F_y(x_o, y_o) \neq 0. \quad (4.17)$$

Dann folgen die Aussagen:

1. Es gibt ein offenes Intervall  $\mathcal{I}$  mit  $x_o \in \mathcal{I}$  und ein offenes Intervall  $\mathcal{J}$  mit  $y_o \in \mathcal{J}$ , so dass zu jedem  $x \in \mathcal{I}$  genau ein  $y \in \mathcal{J}$  existiert, so dass

$$F(x, y) = 0$$

erfüllt ist. Die dadurch definierte Funktion  $g : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{J}$  genügt also der Gleichung

$$F(x, g(x)) = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathcal{I}.$$

Insbesondere gilt  $y_o = g(x_o)$ .

2. Die Funktion  $g : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{J}$  ist stetig differenzierbar. Für jedes  $x \in \mathcal{I}$  gilt

$$g'(x) = -\frac{F_x(x, g(x))}{F_y(x, g(x))}$$

Dieser Satz sichert also die lokale Existenz der impliziten Funktion und die stetige Differenzierbarkeit.

Verallgemeinerung auf mehr als zwei Variable siehe [5], S.516, Satz 6.15. Aus dieser Verallgemeinerung folgt der häufig benutzte Satz über die lokale Existenz einer stetig differenzierbaren Umkehrabbildung. Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung von Satz 2.30, der für reelle Funktionen formuliert wurde.

**Satz 4.17.** Der Definitionsbereich  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$  einer stetig differenzierbaren Abbildung  $\mathbf{f} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$  sei eine offene Menge. Für alle  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$  mit  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$  existiert zur Abbildung

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

also die Jacobi-Matrix

$$\mathbf{J}_{\mathbf{f}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

mit stetigen Elementen. Ist diese Jacobi-Matrix in einem Punkte  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)^T$  aus  $\mathcal{D}$  regulär, dann gilt :

1. Es gibt eine offene Umgebung  $U$  von  $\mathbf{p}$ , die durch  $\mathbf{f}$  umkehrbar eindeutig auf eine offene Umgebung  $V$  von  $\mathbf{q} = \mathbf{f}(\mathbf{p})$  abgebildet wird. Zu  $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{f} : U \longrightarrow V$  existiert also  $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})$ ,  $\mathbf{f}^{-1} : V \longrightarrow U$ .

Mit der Vereinbarung  $\mathbf{g} = \mathbf{f}^{-1}$  kann dies durch

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \iff \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{g}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} g_1(\mathbf{y}) \\ g_2(\mathbf{y}) \\ \vdots \\ g_n(\mathbf{y}) \end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(g_1(\mathbf{y}), g_2(\mathbf{y}), \dots, g_n(\mathbf{y})) \\ f_2(g_1(\mathbf{y}), g_2(\mathbf{y}), \dots, g_n(\mathbf{y})) \\ \vdots \\ f_n(g_1(\mathbf{y}), g_2(\mathbf{y}), \dots, g_n(\mathbf{y})) \end{pmatrix}, \quad \text{kurz } \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{y}))$$

und

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})) \\ g_2(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})) \\ \vdots \\ g_n(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})) \end{pmatrix}, \quad \text{kurz } \mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$$

ausgedrückt werden.

2. Diese Umkehrabbildung  $\mathbf{f}^{-1}: V \rightarrow U$  ist stetig differenzierbar. Für die zu  $\mathbf{g} = \mathbf{f}^{-1}$  und  $\mathbf{f}$  gehörigen Jacobi-Matrizen gilt

$$\frac{\partial \mathbf{f}^{-1}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y}) = \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \right)^{-1} \quad \text{für alle } \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \text{mit } \mathbf{x} \in U$$

oder ausführlicher

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial y_1} & \frac{\partial g_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial y_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}^{-1},$$

wobei unter Berücksichtigung von  $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  die linke Matrix an der Stelle  $\mathbf{y}$  und die rechte Matrix an der Stelle  $\mathbf{x}$  zu berechnen ist. Die linke Funktionalmatrix bleibt also in der Umgebung  $V$  von  $\mathbf{q}$  regulär. Für die rechte trifft dies in der Umgebung  $U$  von  $\mathbf{p}$  zu.

Hinweis: Regularität einer Jacobi-Matrix in einem Punkte bedeutet, dass dort die zugehörige Determinante (Jacobi-Determinante) verschwindet.

## 4.8 Freie Extremwertaufgaben

**Satz 4.18.** (mit Definition) Ausgehend von  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$  sei eine Funktion

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$$

gegeben, die stetige partielle Ableitungen erster Ordnung in allen inneren Punkten von  $\mathcal{D}$  besitzt (d. h.  $f$  ist in allen inneren Punkten von  $\mathcal{D}$  total differenzierbar).

Für einen inneren Punkt  $P_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$  von  $\mathcal{D}$  gilt dann die folgende Aussage:

Besitzt  $f$  in  $P_0$  ein lokales Extremum, so folgt

$$f'(P_0) = \text{grad } f(P_0) = \vec{0} \quad (4.18)$$

Ein Punkt  $P_0$ , in dem (4.18) gilt, wird ein kritischer Punkt genannt.

**Bemerkung 4.19.** Mit Hilfe von (4.18), kann man in der Regel nur die lokalen Extrema finden, die zu inneren Punkten des Definitionsbereiches  $\mathcal{D}$  gehören. Ob in den durch Lösung des Gleichungssystems (4.18) gefundenen inneren Punkten, dann wirklich lokale (oder gar globale) Extrema angenommen werden, muss gesondert untersucht werden (siehe Satz 4.21). Bei Randpunkten von  $\mathcal{D}$  ist das Kriterium (4.18) jedoch nicht anwendbar.

Letzteres bedeutet :

Mit (4.18) werden Randextrema in der Regel nicht entdeckt.

Falls man Randextrema finden will, so müssen detailliertere Untersuchungen angestellt werden. Diese enthalten Betrachtung zu Ableitungen in tangentialen Richtungen des Randes und Vorzeichenuntersuchungen von Richtungsableitungen. Im Rahmen dieser Vorlesung können wir auf die diffizile Frage der Randextrema in allgemeiner Form nicht eingehen. In speziellen Fällen, d. h. bei entsprechend einfach strukturierten Zielfunktionen, kann man jedoch Randextrema durch elementare Betrachtungen ermitteln.

**Bemerkung 4.20.** In vielen Anwendungen spielt die Frage der Randextrema eine grundlegende Rolle.

Vgl. <http://de.wikipedia.org/wiki/Optimierung> und [http://de.wikipedia.org/wiki/Operations\\_Research](http://de.wikipedia.org/wiki/Operations_Research) Insbesondere in den Wirtschafts- und Ingenieurwissenschaften ist dies im Zusammenhang mit Optimierungsverfahren und Operations Research der Fall. (Optimierung von Prozessen oder Verfahren, lineare Optimierung, Entscheidungsprobleme, optimale Lösungen im Rahmen zulässiger Entscheidungsalternativen)

Zurück zu lokalen Extrema in inneren Punkten des Definitionsbereiches :

**Satz 4.21.** Es seien die Bedingungen des Satzes 4.18 erfüllt.  $P_0$  ist damit ein kritischer Punkt von

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$$

Besitzt  $f$  stetige partielle Ableitungen bis zur zweiten Ordnung in einer Umgebung eines kritischen Punktes  $P_0$ , dann gilt:

Hinreichend für ein lokales Extremum in einem kritischen Punkt  $P_0$  ist die Definitheit der Hesse-Matrix  $H(P_0) = H(f, P_0)$ .

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

Insbesondere gilt

- Ist  $H(P_0)$  positiv definit, d. h. sind alle Eigenwerte von  $H(P_0)$  positiv ( $\lambda_k > 0$ ), dann liegt ein Minimum vor.
- Ist  $H(P_0)$  negativ definit, d. h. sind alle Eigenwerte von  $H(P_0)$  negativ, dann liegt ein Maximum vor.
- Ist  $H(P_0)$  indefinit, d. h. es gibt mindestens einen positiven und mindestens einen negativen Eigenwert von  $H(P_0)$ , dann spricht man von einem Sattelpunkt der Funktion (der Fläche). In diesem Fall liegt kein Extrempunkt vor.  
(Die Zahl 0 ist weder positiv noch negativ!)
- Wenn  $H(P_0)$  semidefinit und nicht definit ist, dann kann ohne zusätzliche Betrachtungen keine Entscheidung getroffen werden. Dieser Fall liegt vor, wenn mindestens ein Eigenwert 0 ist und die von 0 verschiedenen Eigenwerte das gleiche Vorzeichen besitzen.

Zur Erinnerung :

Eine reelle symmetrische Matrix  $A$  und die zugehörige quadratische Form  $\vec{v}^T A \vec{v}$  ist

- positiv definit, wenn für all ihre Eigenwerte  $\lambda_k$  die Relation  $\lambda_k > 0$  erfüllt ist,
- negativ definit, wenn für all ihre Eigenwerte  $\lambda_k$  die Relation  $\lambda_k < 0$  erfüllt ist,
- definit, wenn sie positiv oder negativ definit ist,
- positiv semidefinit, wenn für all ihre Eigenwerte  $\lambda_k$  die Relation  $\lambda_k \geq 0$  erfüllt ist,
- negativ semidefinit, wenn für all ihre Eigenwerte  $\lambda_k$  die Relation  $\lambda_k \leq 0$  erfüllt ist,
- semidefinit, wenn sie positiv semidefinit oder negativ semidefinit ist.

Eine Matrix, die sowohl positiv semidefinit als auch negativ semidefinit ist, muss die Nullmatrix sein.

Die Aussagen von Satz 4.21 gewinnt man prinzipiell, indem die Aufgabe der Extremwertbestimmung für eine gegebene Funktion

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

auf die entsprechende Aufgabe bezüglich eines zugehörigen Taylorpolynoms

$$T_2(P) = T_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

von zweiter Ordnung zurückgeführt wird. Dieses Taylorpolynom entsteht durch Entwicklung der Funktion  $f$  in einem Punkt  $P_0$ .

Mit  $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ,  $P_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})^T$  und dem Differenzvektor

$$\mathbf{h} = P - P_0 = (x_1 - x_{01}, x_2 - x_{02}, \dots, x_n - x_{0n})^T$$

(hier alles Spaltenvektoren) gilt für das im Punkte  $P_0$  entwickelte Taylorpolynom zweiter Ordnung die Formel

$$T_2(P) = f(P_0) + f'(P_0) \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2} \mathbf{h}^T \cdot f''(P_0) \cdot \mathbf{h}, \quad (4.20)$$

wobei die Kurzbezeichnungen

$$f'(P_0) = (\text{grad } f(P_0))^T, \quad f''(P_0) = H(P_0), \quad (4.21)$$

benutzt wurden, vgl. (4.19).

$P_0$  ist genau dann ein kritischer Punkt von  $f$ , wenn er kritischer Punkt von  $T_2(P)$  ist, vgl. (4.18) und (4.20). In diesem Fall geht (4.20) über in

$$T_2(P) = f(P_0) + \frac{1}{2} \mathbf{h}^T \cdot f''(P_0) \cdot \mathbf{h}, \quad P_0 \text{ kritischer Punkt} \quad (4.22)$$

Besitzt dieses Taylorpolynom im kritischen Punkt  $P_0$  einen eigentlichen Extremwert oder einen Sattelpunkt, so trifft dies auch auf die Funktion  $f$  zu (Umkehrung gilt nicht). Eigenwertbetrachtungen der Matrix  $f''(P_0) = H(P_0)$  führen schließlich auf Satz 4.21.

Werden in (4.20) die Linearform und die quadratische Form ausmultipliziert, so erhalten wir die Summendarstellung für ein Taylorpolynom 2. Ordnung

$$\begin{aligned} T_2(P) &= f(P_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(P_0)}{\partial x_i} (x_i - x_{0i}) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x_i \partial x_j} (x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j}) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Ändern wir im Falle zweier unabhängiger Veränderlicher

$$n = 2, \quad P = (x_1, x_2)^T, \quad P_0 = (x_{01}, x_{02})^T, \quad \mathbf{h} = P - P_0 = (x_1 - x_{01}, x_2 - x_{02})^T$$

die Bezeichnungen für die Variablen

$$(x_1, x_2) \Rightarrow (x, y), \quad (x_{01}, x_{02}) \Rightarrow (x_0, y_0)$$

so entsteht die bekannte Formel

$$\begin{aligned} T_2(x, y) &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &+ \frac{1}{2} [f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2] \end{aligned} \quad (4.24)$$

Geben Sie analog für  $n = 3$ , also für den Fall dreier unabhängiger Veränderlicher  $x, y, z$ , die Taylorformel zweiter Ordnung in einer derartigen Gestalt an.

$$T_2(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + \dots$$

## 4.9 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

Gemäß Vorlesungen ergänzen.

## 4.10 Anwendungen

Newtonverfahren zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme  
Die Methode der kleinsten Quadrate

## 5 Integralrechnung einer reellen Veränderlichen

### 5.1 Unbestimmte Integration

Vergleiche

<http://de.wikipedia.org/wiki/Integralrechnung>

[http://de.wikipedia.org/wiki/Integralrechnung#Eigenschaften\\_von\\_Stammfunktionen](http://de.wikipedia.org/wiki/Integralrechnung#Eigenschaften_von_Stammfunktionen)

[http://de.wikipedia.org/wiki/Tabelle\\_von\\_Ableitungs-\\_und\\_Stammfunktionen](http://de.wikipedia.org/wiki/Tabelle_von_Ableitungs-_und_Stammfunktionen)

- Als Stammfunktion einer reellen Funktion  $f$  auf einem Intervall  $\mathcal{I}$  bezeichnet man eine zumindest auf diesem Intervall differenzierbare Funktion  $F$ , deren Ableitung  $F'$  auf  $\mathcal{I}$  mit  $f$  übereinstimmt.
- Man kann zu einer Stammfunktion eine Konstante addieren und erhält wieder eine Stammfunktion
- Jede auf einem Intervall  $\mathcal{I}$  definierte stetige Funktion  $f$  hat unendlich viele Stammfunktionen.
- Ist  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ , so ist für jede beliebige reelle Konstante  $C$  auch die durch

$$G(x) = F(x) + C$$

definierte Funktion  $G$  eine Stammfunktion von  $f$ .

Bei Existenz unterscheiden sich zwei verschiedene Stammfunktionen zu gegebenem  $f$  nur um eine Konstante.

- Als unbestimmtes Integral bezeichnet man die Menge aller dieser Stammfunktionen.

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (5.1)$$

- Analytische Auswertung des unbestimmten Integrals bedeutet, unter Anwendung von Regeln die Gesamtheit dieser Stammfunktionen zu finden.
- Die unbestimmte Integration ist die Umkehrung der Differentiation.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \int f(x) dx \right) &= f(x) \\ \int f'(x) dx &= f(x) + C \end{aligned}$$

#### 5.1.1 Einige Grundintegrale und Beispiele für unbestimmte Integrale

Vergleiche

[http://de.wikipedia.org/wiki/Tabelle\\_von\\_Ableitungs-\\_und\\_Stammfunktionen](http://de.wikipedia.org/wiki/Tabelle_von_Ableitungs-_und_Stammfunktionen)

Aus der Kenntnis von Ableitungen kann sofort auf Formeln für unbestimmte Integrale geschlossen werden. Die unten aufgeführten Beispiele gewinnt man so durch Differentiation der angegebenen Stammfunktionen (rechte Seiten).

Einige Integrale sind so genannte Grundintegrale, andere gewinnt man aus diesen durch direkte Interpretation.

Bei Anwendung der in den nächsten Unterabschnitten aufgeführten Integrationsregeln können einige Beispiele auf Grundintegrale zurückgeführt und damit berechnet werden (zur Übung der unbestimmten Integration empfohlen).

**Potenzfunktionen:**

Funktion	$f(x)$	$\implies$	Zugehörige Stammfunktionen	$F(x)$
	0	$\implies$	$C$	(Konstante Funktionen)
$k$	(Konstante Funktion)	$\implies$	$kx + C$	
	$x^n$	$\implies$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	wenn $n \neq -1$
			falls dabei	$n = 0, 1, 2, \dots : x \in \mathbb{R}$
			falls dabei	$n = -2, -3, -4, \dots : x \neq 0$
			falls dabei	$n$ nicht ganzzahlig : $x > 0$
	$x^{-1}$	$\implies$	$\ln x  + C,$	$x \neq 0$

Beispiele:

$$nx^{n-1} \implies x^n + C \quad \text{siehe oben}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \implies \sqrt{x} + C, \quad x > 0$$

$$\frac{-2}{x^3} \implies \frac{1}{x^2} + C, \quad x \neq 0$$

$$\frac{-1}{x^2} \implies \frac{1}{x} + C, \quad x \neq 0$$

$$u'(x) \cdot u(x) \implies \frac{1}{2}(u(x))^2$$

### Exponential- und Logarithmusfunktionen:

Funktion $f(x)$	$\implies$	Zugehörige Stammfunktionen $F(x)$
$e^x$	$\implies$	$e^x + C$
$e^{kx}$	$\implies$	$\frac{1}{k}e^{kx} + C$
$a^x \ln a$	$\implies$	$a^x + C, \quad a > 0, a \neq 1$
$a^x$	$\implies$	$\frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1$
$\ln(x)$	$\implies$	$x \ln(x) - x + C \quad \text{für } x > 0$
$\ln x $	$\implies$	$x \ln x  - x + C \quad \text{für } x < 0 \quad \text{oder für } x > 0$

Letzteres F(x) ist	Stammfunktion	auf $(0, +\infty)$ ,
	Stammfunktion	auf $(-\infty, 0)$ ,
	keine Stammf.	auf $(-\infty, \infty)$ ,
	keine Stammf.	auf $(-1, 2)$

$$\frac{1}{x} \frac{1}{\ln a} \implies \log_a |x| + C, \quad x \neq 0$$

$$\log_a |x| \implies \frac{1}{\ln a}(x \ln|x| - x) + C, \quad x \neq 0$$

Beispiele:

$$|x|^x (\ln|x| + 1) \implies |x|^x + C, \quad x \neq 0, \quad |x|^x = e^{x \ln|x|}$$

$$\frac{u'(x)}{u(x)} \implies \ln|u(x)| + C, \quad u(x) \neq 0$$

$$u'(x) \ln|u(x)| \implies u(x) \ln|u(x)| - u(x) + C, \quad u(x) \neq 0$$

$$\frac{1}{x} (\ln|x|)^n, \quad (n \neq -1) \implies \frac{1}{n+1} (\ln|x|)^{n+1} + C, \quad x \neq 0$$

$$\frac{1}{x} \ln(|x^n|), \quad (n \neq 0) \implies \frac{1}{2n} (\ln|x^n|)^2 + C, \quad x \neq 0$$

$$\frac{1}{x \ln|x|} \implies \ln(\ln|x|) + C, \quad x \neq 0$$

**Trigonometrische und inverse trigonometrische Funktionen:**

Funktion  $f(x)$   $\implies$  Zugehörige Stammfunktionen  $F(x)$

$$\sin x \implies -\cos x + C$$

$$\cos x \implies \sin x + C$$

$$\tan x \implies -\ln(\cos x) + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cot x \implies \ln(\sin x) + C, \quad x \neq k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \implies \tan x + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x) \implies \cot x + C, \quad x \neq k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\arcsin x \implies x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C, \quad x \in (-1, 1)$$

$$\arccos x \implies x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C, \quad x \in (-1, 1)$$

$$\arctan x \implies x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \implies \arcsin x + C, \quad x \in (-1, 1)$$

$$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \implies \arccos x + C, \quad x \in (-1, 1)$$

$$\frac{1}{x^2+1} \implies \arctan x + C, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{x^2}{x^2+1} \implies x - \arctan x + C, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} \implies \frac{1}{2} \left( \frac{x}{x^2+1} + \arctan x \right) + C, \quad x \in \mathbb{R}$$

**5.1.2 Partielle Integration**

Die Regel zur partiellen Integration für unbestimmte Integrale

$$\int f(x) \cdot g'(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) \, dx \quad (5.2)$$

erhält man aus der Produktregel zur Differentialrechnung.

Mit partieller Integration können Rekursionsformeln zur Berechnung von Stammfunktionen aufgestellt werden.

Beispiel: Für  $n \geq 2$  folgt mit

$$f(x) = (x^2 + 1)^{1-n}, \quad f'(x) = (1-n) \frac{2x}{(x^2 + 1)^n}$$

$$g'(x) = 1, \quad g(x) = x$$

unter Nutzung von (5.2)

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} \, dx &= \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + (n-1) \int \frac{2x^2}{(x^2+1)^n} \, dx \\ &= \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + 2(n-1) \left( \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^n} \, dx - \int \frac{1}{(x^2+1)^n} \, dx \right) \end{aligned}$$

Kürzen und entsprechende Auflösung liefert die Rekursionsformel

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n} \, dx = \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} \, dx, \quad n \geq 2$$

Beginnend mit  $n = 2$  und

$$\int \frac{1}{(x^2 + 1)} dx = \arctan(x) + C$$

können die Integrale sukzessive berechnet werden.

### 5.1.3 Substitutionsregel

Die Substitutionsregel der unbestimmten Integration ist das Gegenstück zur Kettenregel der Differentialrechnung. Mit stetig differenzierbarer Funktion

$$u = g(x)$$

gilt

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(u) du$$

- Bei strukturellem Vorliegen der linken Seite :  
Rechte Seite berechnen und dann  $u = g(x)$  einsetzen.
- Rechte Seite mit Hilfe der linken berechnen:  
Hier muss für die Substitution  $u = g(x)$  auf dem zugrunde gelegten Intervall  $\mathcal{I}$   $g'(x) \neq 0$  gefordert werden. Man erhält

$$F(x) + C = \int f(g(x)) \cdot g'(x) dx$$

Einsetzen von  
 $x = g^{-1}(u)$  liefert die Stammfunktion

$$F(u) = F(g^{-1}(u))$$

- Für die beteiligten Differentiale gilt:

$$du = g'(x) dx$$

## 5.2 Bestimmtes Integral

### 5.2.1 Definition

Ist  $f$  eine auf dem kompakten, (also endlichen und abgeschlossenen) Intervall  $[a, b]$  stetige Funktion, so kann man mit einer beliebigen Stammfunktion  $F$  von  $f$  das bestimmte Integral von  $f$  über  $[a, b]$  definieren :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (5.3)$$

Das bestimmte Integral ist hier lediglich als formale Größe definiert. Seine Bedeutung erschließt sich erst mit der Interpretation als Riemann-Integral.

### 5.2.2 Partielle Integration

Die Regel zur partiellen Integration für bestimmte Integrale ist damit

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx \quad (5.4)$$

### 5.2.3 Substitutionsregel

Die Substitutionsregel der bestimmten Integration kann mit stetig differenzierbarer Funktion

$$u = g(x) \quad \text{und} \quad du = g'(x) dx \quad \text{für} \quad x \in [a, b]$$

in der Gestalt

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

formuliert werden. Hiermit wird versucht, die linke Seite (nach dem Erkennen der Struktur) mit Hilfe der rechten zu berechnen.

Schreibt man die Substitutionsregel in der Gestalt

$$\int_{g^{-1}(\alpha)}^{g^{-1}(\beta)} f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(u) du$$

auf, dann dient sie der Berechnung der rechten Seite mit Hilfe der linken, wobei eine geeignete Substitution  $u = g(x)$  gefunden werden muss. Erlaubt ist dieses Verfahren, wenn auf dem offenen Intervall  $(a, b)$  die Ungleichung  $g'(x) \neq 0$  erfüllt ist, denn dann existiert die inverse Funktion  $g^{-1}$ . Wegen der Stetigkeit von  $g$  bedeutet  $g'(x) \neq 0$  auf dem Intervall  $(a, b)$ , dass  $g'(x)$  dort überall positiv oder dort überall negativ ist.

Für die gegebenen Grenzen  $\alpha, \beta$  gilt

$$\alpha = g(a) \quad \text{und} \quad \beta = g(b),$$

damit folgt für die Grenzen im links stehenden Integral

$$a = g^{-1}(\alpha) \quad \text{und} \quad b = g^{-1}(\beta),$$

womit etwas verkürzt

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(u) du$$

geschrieben werden kann.

## 5.2.4 Anwendung - Orthogonalität von Funktionensystemen

Die Basisfunktionen der Fourierreihe für das Intervall  $[0, 2\pi]$

$$\{\cos(nx)\}_n, \quad \{\sin(mx)\}_m, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots, \quad x \in [0, 2\pi]$$

bilden das bekannteste Beispiel für ein orthogonales Funktionensystem. Unter Nutzung der Additionstheoreme

$$\sin(nx) \sin(mx) = \frac{1}{2}(\cos(nx - mx) - \cos(nx + mx)) \quad (5.5)$$

$$\cos(nx) \cos(mx) = \frac{1}{2}(\cos(nx - mx) + \cos(nx + mx)) \quad (5.6)$$

$$\sin(nx) \cos(mx) = \frac{1}{2}(\sin(nx - mx) + \sin(nx + mx)) \quad (5.7)$$

lassen sich die unteren Orthogonalitätsrelationen berechnen. Dabei ist (5.6) wegen

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\alpha)$$

eine unmittelbare Folgerung von (5.5). Ersetzen Sie einfach  $nx$  durch  $nx + \frac{\pi}{2}$  und  $mx$  durch  $mx + \frac{\pi}{2}$ . Danach ist  $\cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha)$  anzuwenden. Die obigen Additionstheoreme können auch schnell aus der Eulerschen Formel

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$$

geschlossen werden.

Die Orthogonalitätsrelationen ergeben sich dann in Gestalt von

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = \begin{cases} \pi & \text{für } n = m, \quad m = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{für } n \neq m, \quad n, m = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (5.8)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = \begin{cases} \pi & \text{für } n = m, \quad m = 1, 2, \dots \\ 2\pi & \text{für } n = m = 0 \\ 0 & \text{für } n \neq m, \quad n, m = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (5.9)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx) \sin(mx) dx = 0 \quad \text{für alle ganzzahligen } n, m \quad (5.10)$$

Formel (5.10) gilt also auch im Falle  $m=n$ .

Häufig werden in den Anwendungen komplexe Fourierentwicklungen durchgeführt, um schwingende Systeme zu analysieren (z. B. Baudynamik). Dabei kommen das komplexwertige Funktionensystem

$$\{\exp(inx)\}_n, \quad n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad x \in [0, 2\pi] \quad (5.11)$$

sowie daraus resultierende Varianten zum Einsatz. Eine andere Schreibweise für das Funktionensystem (5.11) wäre

$$\left\{ e^{i n x} \right\}_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \in [0, 2\pi] \quad (5.12)$$

Der Index  $n$  durchläuft hier die Menge der ganzen Zahlen. Es werden also auch negative Indizes zur Kennzeichnung der Funktionen dieses Systems verwendet. Die zu oben analogen Orthogonalitätsrelationen sind einfacher zu berechnen und lauten

$$\int_0^{2\pi} e^{i n x} \overline{e^{i m x}} dx = \begin{cases} 2\pi & \text{für } n = m, \quad m = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{für } n \neq m, \quad n, m = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (5.13)$$

Man beachte :

$$\overline{e^{i m x}} = e^{-i m x}.$$

In (5.13) könnte kürzer  $m \in \mathbb{Z}$  bzw.  $m, n \in \mathbb{Z}$  geschrieben werden. Die obigen Funktionensysteme charakterisieren harmonische Schwingungen mit

$$\text{den Frequenzen} \quad \xi = \frac{1}{2\pi}, \frac{2}{2\pi}, \dots, \frac{n}{2\pi}, \dots \quad (5.14)$$

$$\text{den Kreisfrequenzen} \quad \omega = 1, 2, \dots, n, \dots \quad (5.15)$$

und der

$$\text{zugehörigen Schwingungsdauer} \quad T = 2\pi, \frac{2\pi}{2}, \dots, \frac{2\pi}{n}, \dots$$

Bekanntlich gilt

$$\omega = 2\pi \xi, \quad T = \frac{1}{\xi} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Mit dem obigen Funktionensystem können Schwingungsvorgänge einer Grundperiode  $T = 2\pi$  bzw. einer Grundfrequenz  $\xi = \frac{1}{2\pi}$  analysiert werden. Das Frequenzspektrum einer periodischen Schwingung mit Grundkreisfrequenz  $\omega = 1$  enthält stets nur die in (5.14) bzw. (5.15) angeführten Frequenzen. Die Berechnung der Intensität, mit der diese verschiedenen Vielfachen der Grundfrequenz auftreten, ist Gegenstand der mathematischen Fourieranalyse.

In der Regel sind periodische Schwingungsvorgänge mit einer beliebigen Grundkreisfrequenz  $\omega_1 = \omega$ , bei der (5.14) und (5.15) durch

$$\text{Frequenzen} \quad \xi_n = \frac{n \cdot \omega}{2\pi}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.16)$$

$$\text{Kreisfrequenzen} \quad \omega_n = n \cdot \omega, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.17)$$

$$\text{Schwingungsdauer} \quad T_n = \frac{2\pi}{n \cdot \omega}, \quad n = 1, 2, \dots$$

zu ersetzen sind (Notation angepasst) zu untersuchen. Dazu müssen die obigen Orthogonalitätsrelationen modifiziert werden. Setzt man jetzt

$$\omega = \omega_1, \quad \xi = \xi_1 = \frac{\omega}{2\pi}, \quad T = T_1 = \frac{2\pi}{\omega}$$

für Grundperiode und Basisfrequenz, so erhält man die erforderlichen Formeln durch Substitution

$$x = \omega \cdot t, \quad dx = \omega dt$$

in den Integralen (5.8), (5.9) (5.10) (5.13). Es entstehen

$$\int_0^T \sin(n \omega t) \sin(m \omega t) dt = \begin{cases} \frac{T}{2} & \text{für } n = m, \quad m = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{für } n \neq m, \quad n, m = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (5.18)$$

$$\int_0^T \cos(n \omega t) \cos(m \omega t) dt = \begin{cases} \frac{T}{2} & \text{für } n = m, \quad m = 1, 2, \dots \\ T & \text{für } n = m = 0 \\ 0 & \text{für } n \neq m, \quad n, m = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (5.19)$$

$$\int_0^T \cos(n \omega t) \sin(m \omega t) dt = 0 \quad \text{für alle ganzzahligen } n, m \quad (5.20)$$

$$\int_0^T e^{i n \omega t} \overline{e^{i m \omega t}} dt = \begin{cases} T & \text{für } n = m, \quad m = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{für } n \neq m, \quad n, m = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (5.21)$$

## 5.3 Riemann-Integral

### 5.3.1 Definition und Approximationseigenschaften

Die Riemann-Integration liefert eine Methode, die anschauliche Vorstellung des (orientierten) Flächeninhaltes zwischen der  $x$ -Achse und dem Graphen einer Funktion präzise zu fassen.

Dieser gesuchte Flächeninhalt wird mit Hilfe des leicht zu berechnenden Flächeninhalts von Treppenfunktionen approximiert.

Vorgehensweise:

1. Definition von Treppenfunktionen als Summe von Rechtecksfunktionen.
2. Definition des Riemann-Integrals

$$\int_a^b f(x) dx$$

für Treppenfunktionen über einem gegebenen kompakten Intervall  $[a, b]$ .

3. Approximation einer auf  $[a, b]$  beschränkten Funktion  $f$  durch Treppenfunktionen bei vorgegebener Zerlegung

$$Z: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots, \dots, \dots, x_{n-1} < x_n = b \quad (5.22)$$

des Intervalls  $[a, b]$ . Die Größe

$$\Delta Z = \max_k (x_k - x_{k-1}) \quad (5.23)$$

heißt dabei die Feinheit der Zerlegung  $Z$ .

Die Funktion  $f$  wird bei gegebener Zerlegung  $Z$  durch Treppenfunktionen eingeschlossen. Das bedeutet:

In jedem Intervall der Zerlegung  $Z$  wird eine entsprechende Rechtecksfunktion mit dem dortigen Supremum (grob gesprochen: Maximalwert von  $f$ )

beziehungsweise

dem dortigen Infimum (grob gesprochen: Minimalwert von  $f$ )

als Funktionswert konstruiert.

Es werden Ober- und Untersummen gebildet, die den gesuchten orientierten Flächeninhalt einschließen.

Die Obersumme entsteht dabei als Riemann-Integral der Treppenfunktion

$$T_{Z,o}(x) \quad \text{mit} \quad f(x) \leq T_{Z,o}(x), \quad x \in [a, b]$$

und die Untersumme als Riemann-Integral der Treppenfunktion mit

$$T_{Z,u}(x) \quad \text{mit} \quad T_{Z,u}(x) \leq f(x), \quad x \in [a, b]$$

Offensichtlich gilt für die Riemann-Integrale der einschließenden Funktionen

$$\int_a^b T_{Z,u}(x) dx \leq \int_a^b T_{Z,o}(x) dx \quad (5.24)$$

und ein sinnvoll definiertes Riemann-Integral für  $f$

$$\int_a^b f(x) dx$$

müsste zwischen diesen beiden Werten liegen.

Ausgehend von  $Z$  gemäß (5.22) werde jetzt durch sukzessive Hinzunahme von Zerlegungspunkten eine ständige Verfeinerung der Zerlegung

$$Z = Z(1) \subset Z(2) \subset \dots \subset \dots \subset Z(m) \subset Z_{m+1} \subset \dots \quad (5.25)$$

mit

$$Z(m): a = x_0(m) < x_1(m) < x_2(m) < \dots < x_{n_m-1}(m) < x_{n_m}(m) = b$$

d. h. eine Folge  $Z(m)$  von Zerlegungen erzeugt, deren Feinheiten, vgl. (5.23), beliebig klein wird.

$$\Delta Z(m) = \max_k [x_k(m) - x_{k-1}(m)] \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad m \rightarrow \infty, \quad 1 \leq k \leq n_m \quad (5.26)$$

$n_m$  ist hier die Anzahl der Teilintervalle der Zerlegung  $Z_m$ , die mit zunehmendem  $m$  wächst.

Für jede Zerlegung aus (5.25) folgt für die im obigen Sinne zugeordneten Treppenfunktionen, vgl. auch (5.24),

$$\underline{\mathfrak{J}}(m) := \int_a^b T_{Z(m),u}(x) dx \leq \bar{\mathfrak{J}}(m) := \int_a^b T_{Z(m),o}(x) dx$$

Für die den einschachtelnden Treppenfunktionen zugeordneten Integrale gilt

$$\underline{\mathcal{J}}(1) \leq \underline{\mathcal{J}}(m) \leq \underline{\mathcal{J}}(m+1) \leq \overline{\mathcal{J}}(m+1) \leq \overline{\mathcal{J}}(m) \leq \overline{\mathcal{J}}(1) \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}$$

Aus der Monotonie und Beschränktheit der Folgen erhält man

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \underline{\mathcal{J}}(m) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \overline{\mathcal{J}}(m)$$

Falls für solch eine Folge einschachtelnder Treppenfunktionen

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \underline{\mathcal{J}}(m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \overline{\mathcal{J}}(m)$$

nennt man die beschränkte Funktion Riemann-integrierbar über dem Intervall  $[a, b]$  und definiert das Riemann-Integral über  $f$  durch

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{m \rightarrow \infty} \underline{\mathcal{J}}(m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \overline{\mathcal{J}}(m).$$

Die Bezeichnung der Integrationsvariablen, hier  $x$  ist dabei unerheblich.

Hinsichtlich der grafischen Darstellungen und weiterer Erläuterungen vergleiche:

<http://de.wikipedia.org/wiki/Integralrechnung>

<http://www.rsg.rothenburg.de/schulleben/fs/mathe/cimu/riemann-integral.htm>

### 5.3.2 Numerische Integration

Bei Existenz des Riemann-Integral kann dieses als Grenzwert sogenannter Zwischensummen (Riemannsche Summen) erklärt werden, wenn die Feinheit der Zerlegung beliebig klein wird.

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) \quad x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k, \quad a = x_0, \quad b = x_n,$$

Vergleiche: [http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/4/riemann\\_sums.4/index.html](http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/4/riemann_sums.4/index.html)

Im praktisch wichtigen Falle äquidistanter Zerlegung mit

$$\Delta x = x_k - x_{k-1} = \text{const} \quad \text{für alle } k$$

folgt mit hinreichend kleinem  $\Delta x$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x \tag{5.27}$$

Bei Einsetzen von

$$\xi_k = x_{k-1}$$

erhält man daraus eine erste Quadraturformel, die linksseitige Rechteckformel.

$$\int_a^b f(x) dx = \Delta x \cdot \left( \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k \cdot \Delta x) \right) + E_n^{(\ell)}(f) \tag{5.28}$$

Das Fehler- oder Restglied  $E_n^{(\ell)}(f)$  ist von der Anzahl  $n$  der Teilintervalle abhängig. Analog entsteht beim Einsetzen von

$$\xi_k = x_k$$

die rechtsseitige Rechteckformel.

$$\int_a^b f(x) dx = \Delta x \cdot \left( \sum_{k=1}^n f(a + k \cdot \Delta x) \right) + E_n^{(r)}(f) \tag{5.29}$$

Das Fehler- oder Restglied  $E_n^{(r)}(f)$  ist wieder von der Anzahl  $n$  der Teilintervalle abhängig. Für die Restglieder in (5.29) und (5.28) gelten mit

$$h = \Delta x = \frac{(b-a)}{n}$$

die Fehlerabschätzungen

$$\left| E_n^{(r)}(f) \right| \leq M_{f'} \frac{(b-a)}{2} h, \quad \left| E_n^{(\ell)}(f) \right| \leq M_{f'} \frac{(b-a)}{2} h \tag{5.30}$$

mit

$$M_{f'} = \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)|.$$

Für  $M_{f'}$  kann (abschwächend) eine beliebige obere Schranke von  $|f'(x)|$  in dem angegebenen Intervall eingesetzt werden.

Besser ist es jedoch in (5.27)

$$f(\xi_k) \text{ durch } \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}$$

zu ersetzen. Man erhält dann die zusammengesetzte Sehnentrapezformel

$$\int_a^b f(x) dx = \Delta x \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} f(a + k \cdot \Delta x) + \frac{1}{2} \cdot f(b) \right) + E^{(n)}(f) \quad (5.31)$$

Sie ist als Mittelwert der beiden Rechtecksformeln interpretierbar. Eine Fehlerabschätzung für das Restglied ist durch

$$|E(f)| \leq \frac{(b-a)}{12} h^2 \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)| \quad (5.32)$$

oder durch

$$|E(f)| \leq \frac{(b-a)}{12} M_{f''} h^2 \quad \text{mit } h = \Delta x = \frac{(b-a)}{n},$$

gegeben, wenn für  $M_{f''}$  eine obere Schranke von  $f''(x)$  im Intervall  $[a, b]$  eingesetzt wird. Voraussetzung ist natürlich, dass  $f$  hinreichend regulär ist. Die zusammengesetzte Sehnentrapezformel konvergiert mit höherer Ordnung als die Rechtecksformeln.

Vergleiche <http://de.wikipedia.org/wiki/Trapezregel>

### 5.3.3 Weitere Eigenschaften des Riemann-Integrals

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

(auch Fundamentalsatz der Analysis genannt) :

Riemann-Integrale über stetige Funktionen auf  $[a, b]$  können mit Hilfe von Stammfunktionen berechnet werden, denn es gilt:

**Satz 5.1.** *Es sei  $f$  eine stetige Funktion auf einem Intervall  $[a, b]$ . Dann gelten die folgenden Behauptungen*

1. *Ist  $F$  auf  $[a, b]$  eine Stammfunktion von  $f$ . Dann ist  $f$  Riemann-integrierbar auf  $[a, b]$  und es gilt*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (5.33)$$

2. *Das durch*

$$F(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi \quad (5.34)$$

definierte Riemann-Integral mit variabler oberer Grenze  $x$  ist eine Stammfunktion von  $f$  über dem Intervall  $[a, b]$ .

Für jede andere zugehörige Stammfunktionen  $G(x)$  gilt dort

$$G(x) = F(x) + C \quad \text{mit geeigneter Konstante } C.$$

Dies bedeutet :

Zu jeder stetigen Funktion auf  $[a, b]$  existiert eine Stammfunktion.

Riemann-Integrale stetiger Funktionen können als bestimmte Integrale interpretiert werden. Diese wurden früher nur auf formale Weise definiert.

Damit sind die oben erklärten Integrationsregeln anwendbar.

**Bemerkung 5.2.** *Bei der Darstellung (5.34) muss im Hinblick auf die korrekte Definition und Ausführung komplizierterer Ausdrücke, die später auftreten, in der Bezeichnung strikt zwischen der Integrationsgrenze (hier  $x$ ) und der Integrationsvariablen (hier  $\xi$ ) unterschieden werden. Abgesehen davon ist die Bezeichnung der Integrationsvariablen eigentlich gleichgültig. In (5.33) hätte man beispielsweise die Integrationsvariable  $x$  durch  $\xi$  oder durch  $t$  ersetzen können, ohne denn Sinn zu ändern. Beispielsweise gilt*

$$\int_2^5 \xi^2 - 3\xi + 2 d\xi = \int_2^5 t^2 - 3t + 2 dt$$

Wegen der Aussage in (5.34) folgt

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(\xi) d\xi = f(x)$$

**Bemerkung 5.3.** Jede auf  $[a, b]$  definierte stückweise stetige und beschränkte Funktion  $f$  ist dort Riemann-integrierbar. Bei geeigneter Zerlegung in  $n$  Teilintervalle kann die Integration durch

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx, \quad a = x_0, \quad b = x_n,$$

realisiert werden. Insbesondere Treppenfunktionen, die den Ausgangspunkt bei der Einführung des Riemann-Integrals bildeten, können auf diese Weise integriert werden. Hierbei erhält man wieder ihre früher festgelegten anschaulichen Integraldefinitionen.

**Satz 5.4** (Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Integralrechnung). Sind

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

stetige Funktionen und gilt  $g(x) \geq 0$  auf  $[a, b]$ , dann existiert ein  $\xi \in (a, b)$  (Zwischenstelle), so dass

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$$

erfüllt ist. Speziell im Falle  $g(x) \equiv 1$  erhält man

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi) \cdot (b - a) \quad \text{für mindestens ein } \xi \in (a, b)$$

Dies ist der Mittelwertsatz der Integralrechnung. Der integrale Mittelwert einer stetigen Funktion

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a} \quad \text{mit} \quad -\infty < a < \xi < b < +\infty$$

wird also an einer Stelle  $\xi$  angenommen. Mit

$$m = \min f(x), \quad M = \max f(x)$$

folgt insbesondere

$$m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \cdot (b - a)$$

Wenn  $f$  nicht stetig ist, gilt der Mittelwertsatz im Allgemeinen nicht.

**Bemerkung 5.5.** Im Beweis des verallgemeinerten Mittelwertsatzes wird beispielsweise die Monotonie des bestimmten Integrals benötigt.

Regeln und Eigenschaften des bestimmten Integrals, wie Monotonie, Linearität usw.

Vergleiche:

<http://de.wikipedia.org/wiki/Integralrechnung>

<http://www.rsg.rothenburg.de/schulleben/fs/mathe/cimu/riemann-integral.htm>

[5], [11], [14], [8] und andere

## 5.4 Uneigentliche Integrale

1. Integrale über unbeschränkte Integranden auf Intervallen endlicher Länge

(a) Singularität bezüglich des rechten Randpunktes

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx$$

(b) Singularität bezüglich des linken Randpunktes

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx$$

(c) Singularität bezüglich eines inneren Punktes  $c$

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \lim_{\gamma \rightarrow 0} \int_{c+\gamma}^b f(x) dx, \quad a < c < b$$

2. Integrale über Intervalle unendlicher Länge

(a) Intervalle der Gestalt  $[a, +\infty)$

$$\int_a^{\infty} f(x) dx := \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

(b) Intervalle der Gestalt  $(-\infty, b]$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx := \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

(c) Intervalle der Gestalt  $(-\infty, +\infty)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{a \rightarrow -\infty} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

Vergleiche <http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/kurse/kurs29/seite20.html>  
 Eines der am häufigsten verwendeten uneigentlichen Integrale ist durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (5.35)$$

gegeben. Ausgehend von diesem Ergebnis (wird später bewiesen) kann man zeigen, dass für die durch

$$f_{\mu, \sigma}(x) := \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma > 0, \quad \mu \in \mathbb{R} \quad (5.36)$$

definierten Gauß'schen Dichtefunktionen gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\mu, \sigma}(x) dx = 1$$

(überprüfen!) Es handelt sich um die Dichtefunktionen der Gauß'schen Normalverteilungen.

Genauer :

Eine stetige Zufallsvariable  $X$  mit (5.36) als Wahrscheinlichkeitsdichte, heißt  $\mu$ - $\sigma$ -normalverteilt oder  $(\mu, \sigma^2)$ -normalverteilt. Der Parameter  $\mu$  entspricht bei diesen speziellen Verteilungsfunktionen dem Erwartungswert  $E(X)$  und der Parameter  $\sigma$  der Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

mit der Varianz oder Streuung  $\text{Var}(X)$ . Für die diesbezüglich auszuwertenden Integrale gilt

$$E(X) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \mu \quad (5.37)$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \sigma^2 \quad (5.38)$$

Mit  $\mu = 0$  und  $\sigma = 1$  erhält man in (5.36) die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung (Erwartungswert 0 und Standardabweichung 1).

$$f_{0,1}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Diese Wahrscheinlichkeitsdichte wird auch Gauß-Funktion, Gauß-Kurve, Gauß-Glocke oder Glockenkurve genannt. Die folgenden Bilder sind aus

<http://de.wikipedia.org/wiki/Normalverteilung>

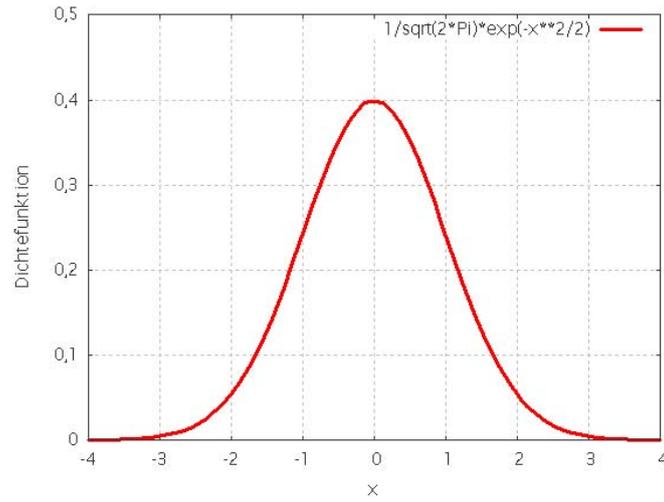
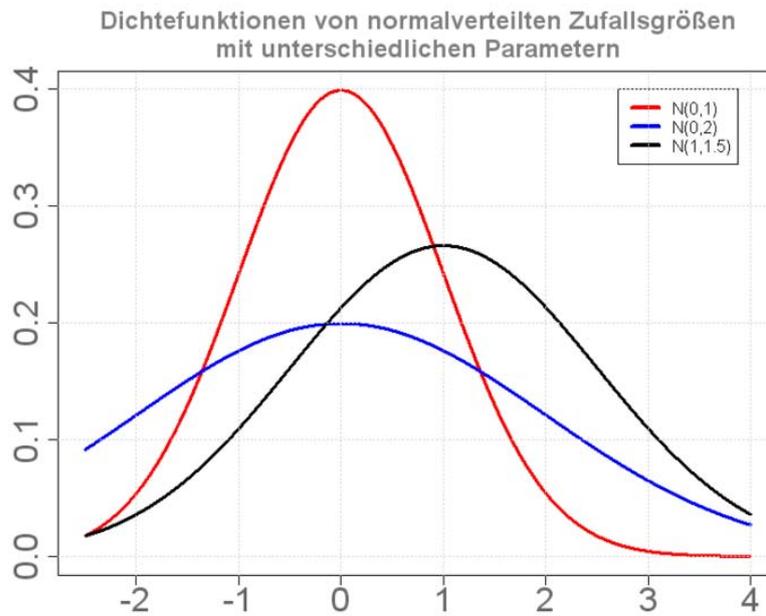


Abbildung 7: Standardnormalverteilung

Verschiedene Parameter  $\mu$  und  $\sigma$

## 6 Reelle und komplexe Fourier-Entwicklungen

### 6.1 Trigonometrische Polynome und Frequenzspektren

Vergleiche

<http://de.wikipedia.org/wiki/Fourierreihe>

[http://de.wikipedia.org/wiki/Trigonometrisches\\_Polynom](http://de.wikipedia.org/wiki/Trigonometrisches_Polynom)

Als Fourierreihe einer periodischen Funktion  $f(x)$  bezeichnet man die Entwicklung dieser Funktion in eine Funktionsreihe aus Sinus- und Kosinusfunktionen.

Die Basisfunktionen der Fourierreihe bilden das bekannteste Beispiel für ein orthogonales Funktionensystem. Im Rahmen der Theorie der Hilberträume werden auch Entwicklungen nach einem beliebigen vollständigen Orthonormalsystem als Fourierreihe bezeichnet. Fourierreihen im klassischen Sinne (solche werden hier betrachtet) entstehen durch Approximation von Funktionen mit trigonometrischen Polynomen.

Ein trigonometrisches Polynom (eine trigonometrische Summe) ist ein Polynom, welches trigonometrische Ausdrücke enthält. Es hat folgende Gestalt

$$\Psi_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k \omega t) + b_k \sin(k \omega t), \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (6.1)$$

$n$  ist der Grad des trigonometrischen Polynoms.

$T$  ist die Periode von  $\Psi_n$ .

Interpretation im Sinne der Schwingungs- und Signalanalyse :

$\omega$  ist die zu  $T$  gehörige Kreisfrequenz.

Für die Basis- oder Grundfrequenz  $\xi$  gilt  $\omega = 2\pi \xi$ .

In (6.1) treten die vielfachen Frequenzen bzw. die vielfachen Kreisfrequenzen

$$\xi_k = k \cdot \xi, \quad \omega_k = k \cdot \omega, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

der Grundfrequenz  $\xi$  (Grundkreisfrequenz  $\omega$ ) auf, sobald  $a_k^2 + b_k^2 \neq 0$  ist.  $\Psi_n$  besitzt ein spezielles Spektrum (diskretes und endliches Frequenzspektrum), das durch

$$a(\xi_k) = a_k, \quad b(\xi_k) = b_k \quad \text{bzw.} \quad a(\omega_k) = a_k, \quad b(\omega_k) = b_k \quad (6.2)$$

gegeben ist, da alle anderen Spektralwerte 0 sind (außer  $\xi_k = k \cdot \xi$  sind in dem Signal/der Funktion keine weitere Frequenzen enthalten).

Der Koeffizient

$$\frac{a_0}{2}$$

repräsentiert den Mittelwert der Funktion  $\Psi_n(t)$ , der als zur Frequenz 0 zugehöriger Spektralwert interpretierbar ist.

Speziell für  $2\pi$ -periodische Funktionen, d.h. für  $T = 2\pi$ , entsteht

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k t) + b_k \sin(k t). \quad (6.3)$$

Die zugehörigen Frequenzen bzw. Kreisfrequenzen sind jetzt

$$\xi_k = \frac{k}{2\pi}, \quad \text{bzw.} \quad \omega_k = k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Das trigonometrische Polynom (6.1) wird in der Ingenieurliteratur oft in eine (reelle) Amplituden-Phasen-Darstellung

$$\Psi_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n A_k \cos(k \omega t - \varphi_k) \quad (6.4)$$

überführt. Zwischen den Koeffizienten der Formen (6.1) und (6.4) gelten die Formeln

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.5)$$

$$\varphi_k = \begin{cases} \arccos \frac{a_k}{A_k} & \text{für } b_k \geq 0, \\ -\arccos \frac{a_k}{A_k} & \text{für } b_k < 0, \\ \text{unbestimmt} & \text{für } A_k = 0 \end{cases} \quad k = 1, 2, 3 \dots \quad (6.6)$$

beziehungsweise

$$a_k = A_k \cdot \cos(\varphi_k), \quad b_k = A_k \cdot \sin(\varphi_k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.7)$$

$\varphi_k$  kann als Bogenmaß zu  $(x, y) = (a_k, b_k)$  mit

$$-\pi < \varphi_k \leq \pi.$$

charakterisiert werden. Mit

$$\alpha = k \omega t, \quad \beta = \varphi_k$$

folgen die obigen Beziehungen zwischen den Spektren von (6.1) und (6.4) gliedweise aus dem Additionstheorem

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \beta \cos \alpha + \sin \alpha \sin \beta$$

(Prüfen Sie dies nach !)

Alternativ zu (6.1) beziehungsweise (6.4) gibt es eine komplexe Darstellung des trigonometrischen Polynoms, die in vielen Anwendungsgebieten (Schwingungsanalysen in Baudynamik und Maschinenbau, Messtechnik, Signalanalyse usw.) häufig genutzt wird. Diese Darstellungsform ermöglicht eine übersichtlichere Formulierung vieler Aufgabenstellungen und einen besseren Zugang zu theoretischen Verallgemeinerungen (Spektralanalyse, Fourier-Transformation). Die komplexe Darstellung ist durch

$$\Psi_n(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega t} \quad (6.8)$$

gegeben, wobei zwischen den Spektren von (6.1) und 6.8 die Relationen

$$2c_0 = a_0, \quad a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = i \cdot (c_k - c_{-k}), \quad k \in \mathbb{N}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{2} \\ c_k &= \frac{a_k - i b_k}{2}, \quad k \in \mathbb{N}, \\ c_{-k} &= \frac{a_k + i b_k}{2}, \quad k \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (6.9)$$

bestehen. Diese Beziehungen gewinnt man durch Anwendung der Eulerschen Formel über

$$\cos(k \omega t) = \frac{1}{2} \left( e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t} \right) \quad (6.10)$$

$$\sin(k \omega t) = \frac{1}{2i} \left( e^{ik\omega t} - e^{-ik\omega t} \right) \quad (6.11)$$

(Prüfen Sie dies nach). Die Spektralwerte sind hier in der Regel komplex, besitzen also Realteil  $Re(c_k)$  und Imaginärteil  $Im(c_k)$ . Die Darstellung (6.8) kann in die Form

$$\Psi_n(t) = \sum_{k=-n}^n |c_k| e^{i(k\omega t - \varphi_k)} = \sum_{k=-n}^n |c_k| e^{-i\varphi_k} e^{ik\omega t} \quad (6.12)$$

gebracht werden. Diese ist mit dem komplexen Amplituden-Phasen-Spektrum

$$\begin{aligned} C_k &= |c_k| = \frac{1}{2} A_k = \frac{1}{2} \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \\ \varphi_k &= \begin{cases} \varphi_k & \text{wie (6.6) für } k = 1, 2, 3 \dots \\ -\varphi_{-k} & \text{für } k = -1, -2, -3 \dots \end{cases} \end{aligned}$$

verbunden, vergleiche diese mit (6.5) und (6.6). Die Beziehung zur reellen Amplituden-Phasen-Darstellung (6.4) kann unmittelbar hergestellt werden.

## 6.2 Fourierreihen

Fourierreihen entstehen als Grenzwerte trigonometrischer Polynome (6.1) für  $n \rightarrow \infty$ . Eine Funktion  $f(t)$  mit der Periode  $T$ , die hinreichend regulär ist (zum Beispiel jede stückweise glatte und beschränkte Funktion), lässt sich in eine Fourierreihe entwickeln.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t), \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (6.13)$$

Ob und wo diese Reihe gegen  $f(t)$  konvergiert und von welcher Art diese Konvergenz dann ist, muss gesondert untersucht werden. Wenn (6.13) konvergiert, dann konvergieren auch die zugehörige reelle Amplituden-Phasen- oder Kosinus-Darstellung (6.4), die komplexe Darstellung (6.8) und die komplexe Amplituden-Phasen-Darstellung (6.12) für  $n \rightarrow \infty$ . Die im vorigen Unterabschnitt aufgeführten Beziehungen zwischen den verschiedenen diskreten Spektren bleiben natürlich gültig. Man erhält jetzt abzählbar unendliche diskrete Spektren.

Wir wollen nur Fourierreihen der Gestalt (6.13) behandeln. Ihr Spektrum ist durch

$$\frac{a_0}{2}, \quad a(\omega_k) = a_k, \quad b(\omega_k) = b_k \quad k \in \mathbb{N} \quad (6.14)$$

mit den vielfachen Kreisfrequenzen (unendlich viele)

$$\omega_k = k \cdot \omega, \quad k \in \mathbb{N}$$

charakterisiert. Mit  $\frac{a_0}{2}$  liegt der integrale Mittelwert vor.

Die diskreten Spektralwerte (6.14) werden hier Fourierkoeffizienten genannt.

Reellwertige Funktionen  $f(t)$  (nur diese sollen betrachtet werden) besitzen ein reelles Spektrum (6.14), d.h. reelle Fourierkoeffizienten. Diese zu (6.13) gehörigen Fourierkoeffizienten können mit

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(k\omega t) dt \quad (6.15)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin(k\omega t) dt \quad (6.16)$$

berechnet werden, wenn die Integrale existieren. Mit  $t_0$  wird dabei eine Verschiebung des Periodizitäts-Intervalls realisiert. Dieses  $t_0$  kann zur Vereinfachung der Rechnung beliebig gewählt werden.

Aus (6.15) folgt insbesondere

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt \quad (6.17)$$

Man vergleiche mit <http://de.wikipedia.org/wiki/Fourierreihe> Hier sind auch einige Übungsaufgaben mit Lösung zu finden.

Häufig verwendete Varianten von (6.15) und (6.16) sind

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt \quad (6.18)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt \quad (6.19)$$

oder

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(k\omega t) dt \quad (6.20)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(k\omega t) dt \quad (6.21)$$

Speziell für  $2\pi$ -periodische Funktionen  $f(t)$ , d.h. für  $T = 2\pi$ , geht (6.13) über in

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k t) + b_k \sin(k t) \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}, \quad \omega = 1, \quad T = 2\pi \quad (6.22)$$

Bei Berechnung der Fourier-Koeffizienten muss in den Formeln (6.15), (6.16), (6.17) (6.18), (6.19) (6.20) und (6.21)  $T = 2\pi$  und  $\omega = 1$  eingesetzt werden. Die Verschiebung um  $t_0$  kann wieder beliebig gewählt werden.

Wenn keine geschlossenen Darstellungsformeln für die Fourier-Koeffizienten (6.13) oder den Spezialfall (6.22) ermittelbar sind, dann kann man die Entwicklung nach dem  $n$ -ten Reihenglied abbrechen. Man erhält eine Approximation des Schwingungsvorgangs durch ein trigonometrisches Polynom, vgl. den vorigen Unterabschnitt. Dabei muss  $n$  so groß gewählt werden, dass alle wesentlichen Schwingungsanteile erfasst werden.

Spezialfälle: Fourierentwicklung gerader und ungerader Funktionen.

Auf den folgenden Seiten werden spezielle periodische Funktionen und die Fourier-Entwicklung einer Rechteckschwingung veranschaulicht.

$$f[x+n \cdot T] = f[x], n \in \mathbf{N}, -\infty < x < \infty.$$

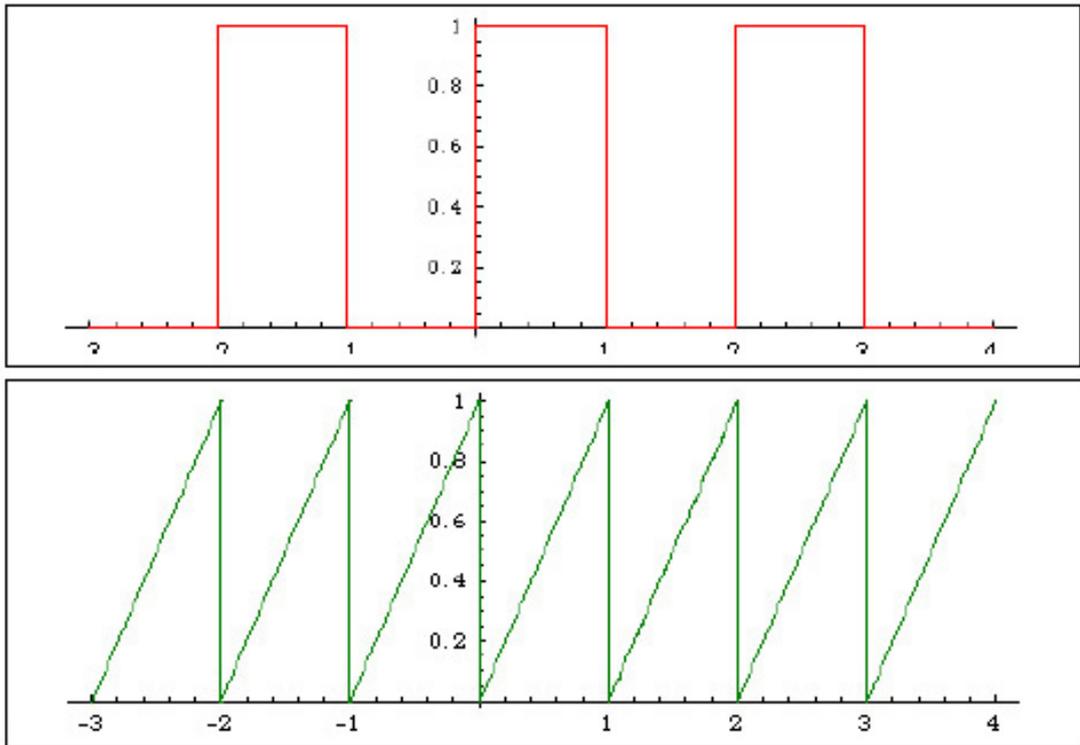


Abbildung 8: Periodische Funktionen

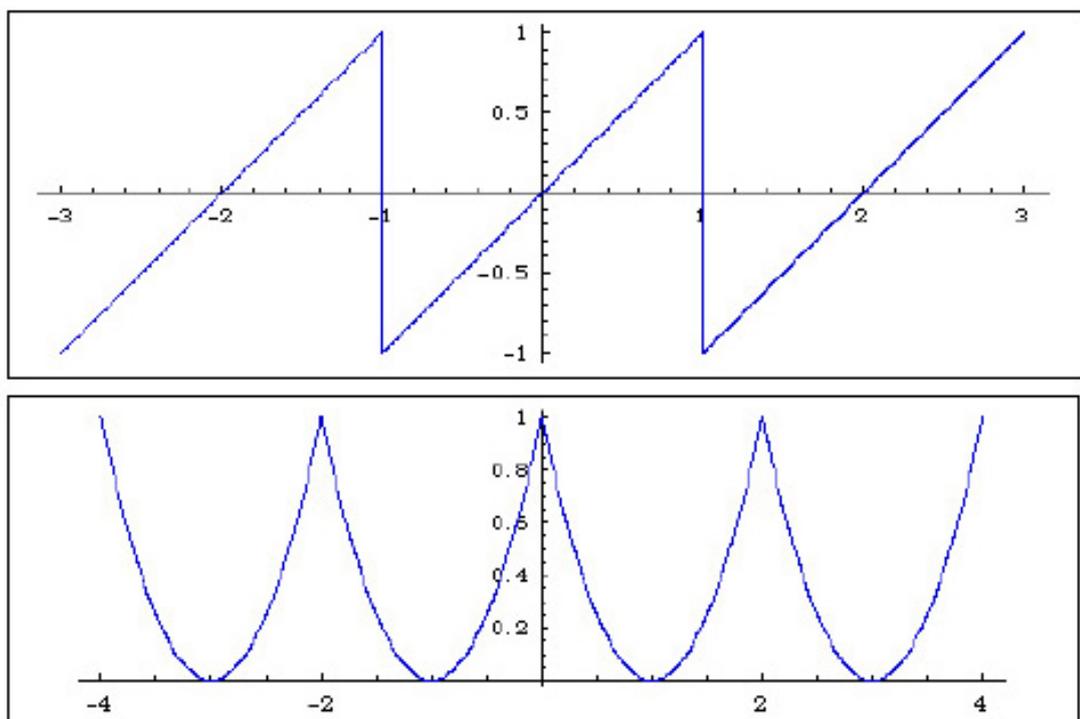
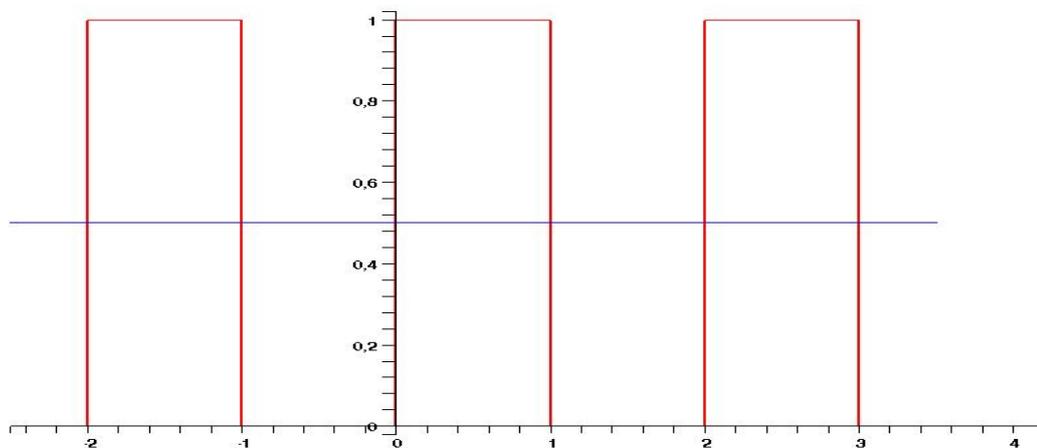
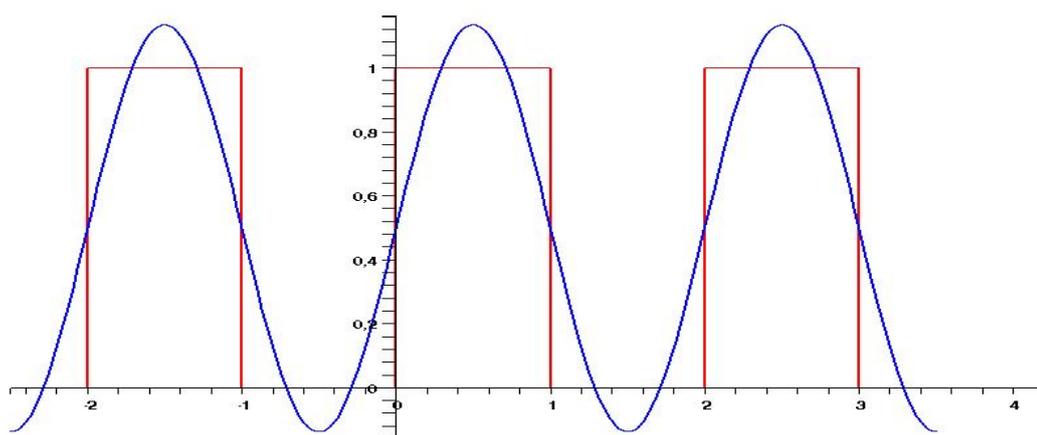


Abbildung 9: Periodische Funktionen

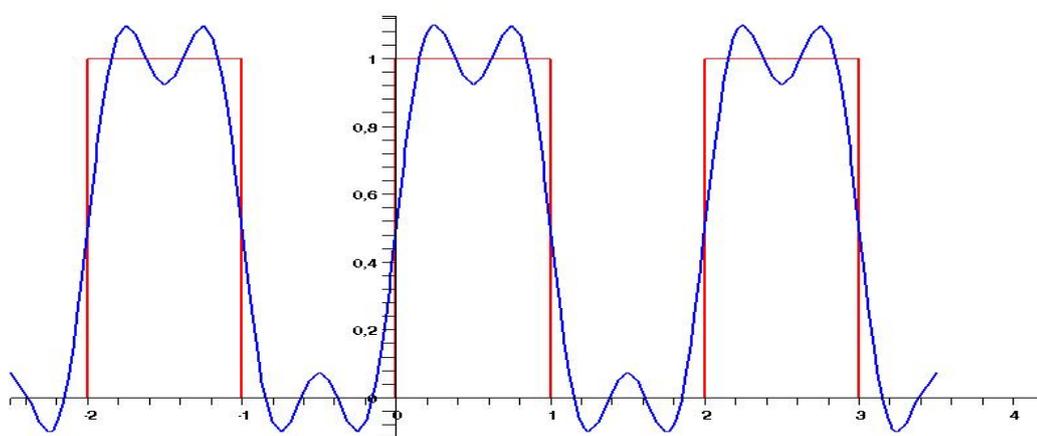
Trigonometrisches Polynom der Ordnung 0  
Mittelwert : blaue Linie



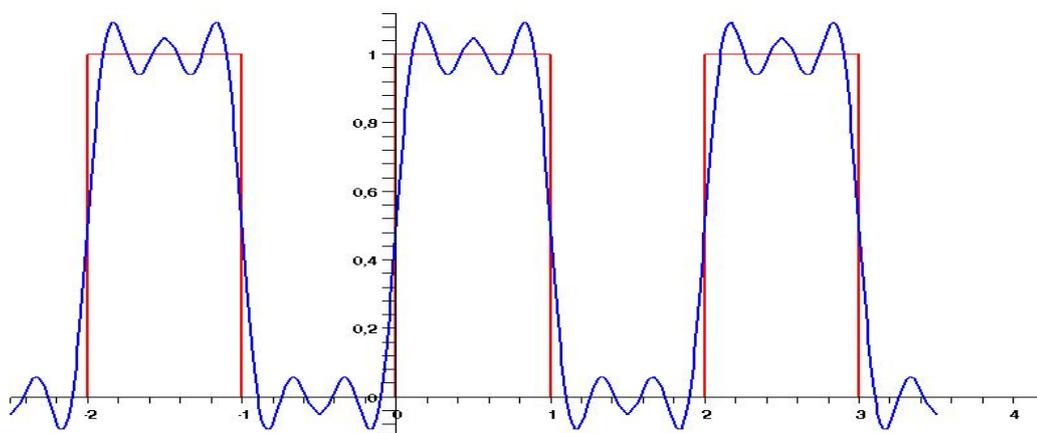
Trigonometrisches Polynom 1. Ordnung



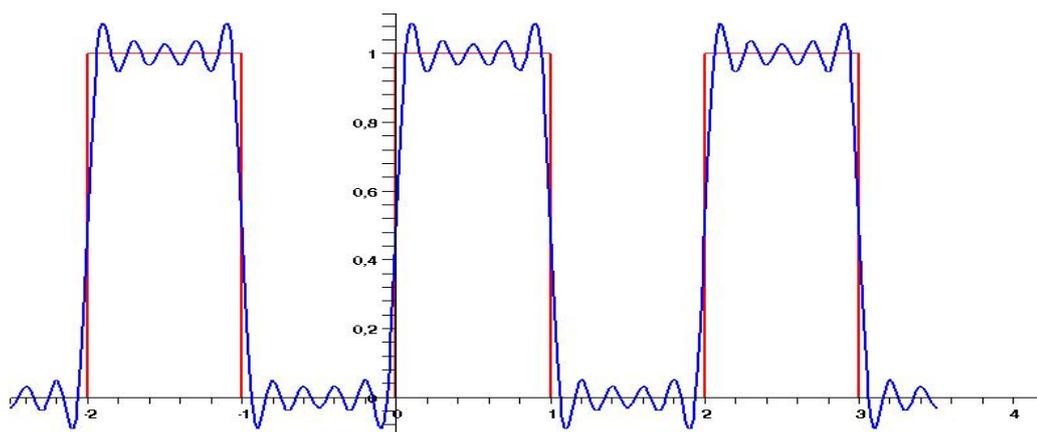
Trigonometrisches Polynom 3. Ordnung



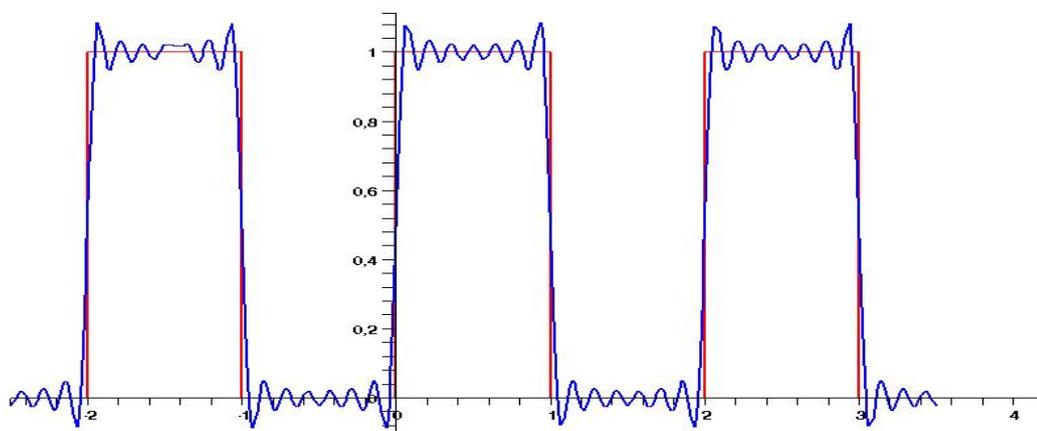
Trigonometrisches Polynom 5. Ordnung



Trigonometrisches Polynom 9. Ordnung



Trigonometrisches Polynom 13. Ordnung



### Dirichletsche Bedingungen

- Das Basisintervall (Periodizitätsintervall  $[0, T]$  oder  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$  oder  $\dots$ ) kann in endlich viele Intervalle zerlegt werden, in denen die Funktion  $f(t)$  stetig und monoton ist.
- Für jede Unstetigkeitsstelle  $\tilde{t}$  existieren der rechtsseitige Grenzwert

$$f(\tilde{t}+)$$

und der linksseitige Grenzwert

$$f(\tilde{t}-)$$

im eigentlichen Sinne (d.h. keine bestimmte Divergenz).

Sind die Dirichletschen Bedingungen erfüllt, dann gilt insbesondere :

- Unstetigkeitsstellen von  $f(t)$  kann es höchstens in den Randpunkten der ausgewählten Zerlegungsintervalle geben.
- Die Funktion  $f(t)$  ist auf ihrem gesamten Definitionsbereich beschränkt.

Periodische Funktionen, die stückweise konstant oder stückweise linear sind, erfüllen auf jeder ausgewählten Periode die Dirichletschen Bedingungen.

**Satz 6.1.** Wenn die Funktion  $f(t)$  die Dirichletschen Bedingungen erfüllt, dann konvergiert die Fourier-Reihe in allen Stetigkeitspunkten  $t$  gegen  $f(t)$ .

An den Unstetigkeitsstellen  $\tilde{t}$  konvergiert sie gegen das arithmetische Mittel der einseitigen Grenzwerte

$$\frac{f(\tilde{t}-) + f(\tilde{t}+)}{2}$$

Um weitere Konvergenzaussagen für Fourier-Reihen zu formulieren, benötigen wir die folgenden Definitionen.

**Definition 6.2.** Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  wird stückweise stetig genannt, wenn sie abgesehen von endlich vielen Stellen  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$  im Intervall  $[a, b]$  stetig ist und in allen Unstetigkeitspunkten  $t_k$  die einseitigen Grenzwerte

$$f(t_k-) = \lim_{t \rightarrow t_k-} f(t) \quad \text{und} \quad f(t_k+) = \lim_{t \rightarrow t_k+} f(t)$$

existieren.

Ist  $U = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  die Gesamtheit aller Unstetigkeitsstellen einer Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , dann ist  $f$  auf  $[a, b] \setminus U$  selbstverständlich stetig. Letzteres ist jedoch nicht hinreichend dafür, dass  $f$  stückweise stetig auf  $[a, b]$  im Sinne der obigen Definition ist (endliche einseitige Grenzwerte!). Jede auf einem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  definierte stückweise stetige Funktion ist beschränkt.

**Definition 6.3.** Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  wird stückweise stetig differenzierbar genannt, wenn sie abgesehen von endlich vielen Stellen  $t_0 < t_1 < \dots < t_m$  im Intervall  $[a, b]$  stetig differenzierbar ist und in all diesen Ausnahmepunkten  $t_k$  die einseitigen Grenzwerte von  $f$  und  $f'$

$$f(t_k-) = \lim_{t \rightarrow t_k-} f(t), \quad f(t_k+) = \lim_{t \rightarrow t_k+} f(t)$$

$$f'(t_k-) = \lim_{t \rightarrow t_k-} f'(t), \quad \text{und} \quad f'(t_k+) = \lim_{t \rightarrow t_k+} f'(t)$$

existieren.

Die so definierte stückweise stetig differenzierbare Funktion ist natürlich auf  $[a, b] \setminus \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$  stetig differenzierbar und damit dort auch stetig (alle Sprung- und Knickstellen sind herausgenommen). Letzteres ist jedoch nicht hinreichend für die stückweise stetige Differenzierbarkeit im obigen Sinne.

Jede auf einem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  definierte stückweise stetig differenzierbare Funktion ist insbesondere beschränkt auf  $[a, b]$  und besitzt auf einer Menge der Gestalt  $[a, b] \setminus \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$  eine stetige und beschränkte Ableitung.

**Definition 6.4.** Es sei  $\mathcal{I}$  ein beliebiges Intervall unendlicher Länge und  $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Eine derartige Funktion  $f$  wird dann stückweise stetig auf  $\mathcal{I}$  genannt, wenn sie stückweise stetig auf jedem Intervall  $[a, b] \subset \mathcal{I}$  ist.

Sie heißt stückweise stetig differenzierbar auf  $\mathcal{I}$ , wenn sie stückweise stetig differenzierbar auf jedem Intervall  $[a, b] \subset \mathcal{I}$  ist.

**Satz 6.5.** Unter der Voraussetzung, dass  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stückweise stetig differenzierbare Funktion mit der Periode  $T$  ist, gilt :

1. Es existieren die in (6.15) und (6.16) definierten Fourierkoeffizienten und die zugehörige Fourier-Reihe (6.13) konvergiert punktweise. Mit  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  gilt

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \quad \text{in jedem Stetigkeitspunkt } t \text{ von } f,$$

$$\frac{f(\tilde{t}-) + f(\tilde{t}+)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \quad \text{in jedem Unstetigkeitspunkt } t \text{ von } f.$$

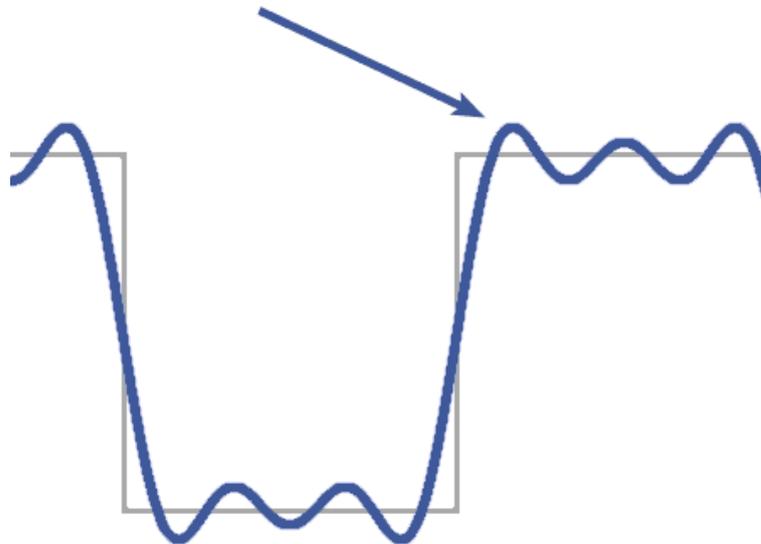
2. Auf jedem abgeschlossenen Intervall  $[\alpha, \beta]$ , in dem die Funktion  $f$  stetig ist, konvergiert die Fourier-Reihe gleichmäßig gegen  $f$ .

Man vergleiche diese Aussagen mit Satz 6.1.

**Bemerkung 6.6** (Gibbssches Phänomen). Als *Gibbssches Phänomen* oder *Ringling* bezeichnet man in der Mathematik das typische Verhalten von Fourierreihen in der Umgebung von Sprungstellen. Entwickelt man eine Fourierreihe aus einer unstetigen Funktion, so ergeben sich an den Unstetigkeitsstellen typische Über- und Unterschwinger, die sich auch dann nicht verringern, wenn man versucht, die Funktion noch besser zu approximieren. Dies liegt daran, dass die Reihe an der Unstetigkeitsstelle nicht mehr gleichmäßig, sondern nur punktweise konvergiert. Die Differenz der zur Sprungstelle benachbarten Über- und Unterschwinger ist zirka 18% größer als die Sprunghöhe der Funktion. Siehe auch Ringing in der Datenkompression, Computergrafik bzw. Elektrotechnik.

Zitat aus [http://de.wikipedia.org/wiki/Gibbssches\\_Ph%C3%A4nomen](http://de.wikipedia.org/wiki/Gibbssches_Ph%C3%A4nomen)

## Überschwinger



*Gibbssches Phänomen*

## 7 Integralrechnung mehrerer reeller Veränderlicher

Simplex - Konvexe Hülle von  $n + 1$  Punkten  $\mathbf{P}_j$  im  $\mathbb{R}^n$

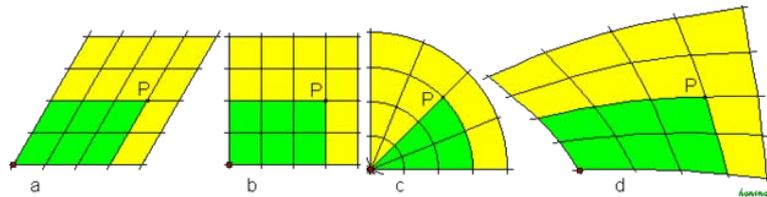
Dabei soll die Punktmenge  $\{\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n\}$  in keiner linearen  $(n-1)$ -dimensionalen linearen Mannigfaltigkeit (Hyperebene) enthalten sein.

$$S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} = \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j \vec{P}_j, \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j = 1, \alpha_j \geq 0\}$$

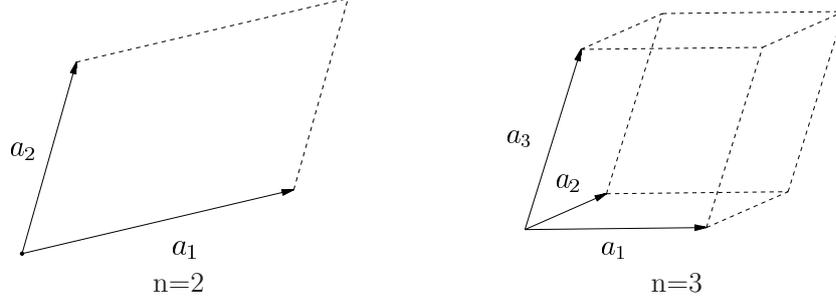
- Geradlinige Koordinatensysteme : Affine Koordinaten
- Geradlinige orthogonale Koordinatensysteme : Kartesische Koordinaten
- Krummlinige Koordinatensysteme : z. B. elliptische Koordinaten
- Krummlinige orthogonale Koordinatensysteme : z. B. ebene Polarkoordinaten, Zylinderkoordinaten, Kugelkoordinaten

### Koordinatensysteme - Veranschaulichung von Grundtypen

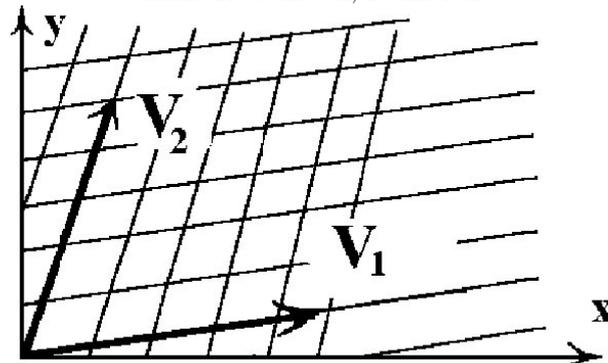
- a) Affine Koordinaten
- b) Kartesische Koordinaten
- c) Krummliniges orthogonales Koordinatensystem
- d) Krummlinige Koordinatensystem



Erzeugung affiner Koordinaten



Affine Koordinaten, 2-dim. Fall



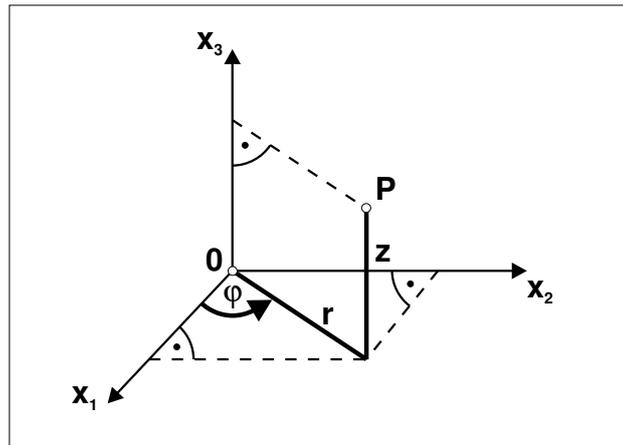
Spezialfall Polarkoordinaten  $r$  und  $\varphi$  :

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos \varphi \\ y &= r \cdot \sin \varphi, \end{aligned} \quad (7.1)$$

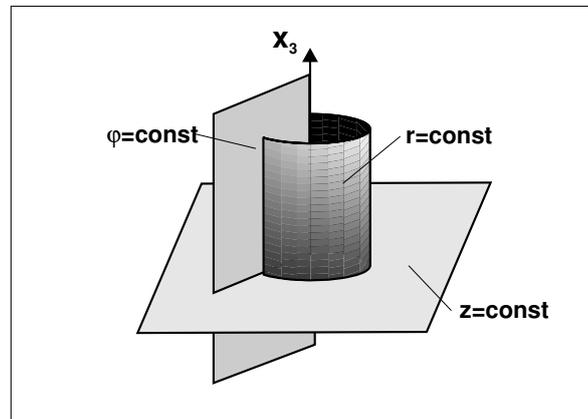
Hieraus erhält man die Funktionaldeterminante für Polarkoordinaten

$$\det(\mathbf{J}) = \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r \quad (7.2)$$

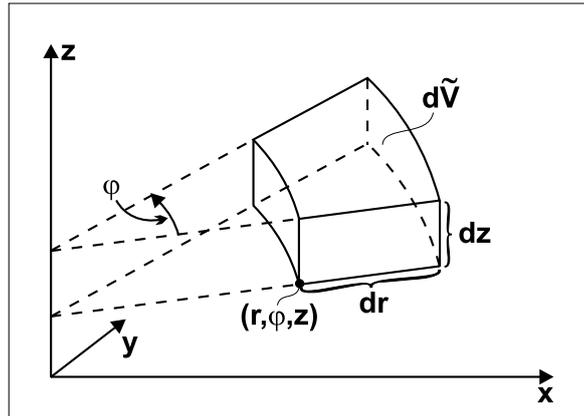
Zylinderkoordinaten  $r, \varphi, z$  und kartesische Koordinaten



Die Zylinderkoordinaten in  $\mathbb{R}^3$



Koordinatenflächen  $r = \text{const}$ ,  
 $\varphi = \text{const}$ ,  $z = \text{const}$



### Volumenelement in räumlichen Zylinderkoordinaten

$$x = r \cos \varphi \quad (7.3)$$

$$y = r \sin \varphi \quad (7.4)$$

$$z = z \quad (7.5)$$

Hier ist  $r$  (oder  $\rho$  im Falle geänderter Notation  $r \mapsto \rho$ ) der Abstand des Aufpunktes von der  $z$ -Achse. Für die Differentiale gilt mit

$$\mathbf{J} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} d\rho \\ d\varphi \\ dz \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\rho \\ d\varphi \\ dz \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d\rho \\ d\varphi \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

Funktionaldeterminante für Zylinderkoordinaten (vgl. Polarkoordinaten):

$$\det(\mathbf{J}) = \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, z)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho \quad (7.6)$$

Für das Volumenelement  $dV$  erhält man damit

$$dV = \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz \quad (7.7)$$

**Kugelkoordinaten** und kartesische Koordinaten :

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi \quad (7.8)$$

$$y = r \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \vartheta$$

$$\text{mit } 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r$$

Die Umkehrtransformation zu (7.8) erfolgt mit den Gleichungen

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (7.9)$$

$$\varphi = \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } y \geq 0, \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } y < 0 \end{cases}$$

$$\vartheta = \operatorname{arccot} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Anschauliche Bedeutung der Kugelkoordinaten :

Sei  $\vec{r}$  der Ortsvektor des Punktes P.

$r = |\vec{r}|$  ist der Abstand des Punktes P vom Koordinatenursprung.

$\vartheta$  (Polarwinkel) ist der Winkel zwischen der positiven z-Achse und  $r$ , gezählt von 0 bis  $\pi$  ( $0^\circ$  bis  $180^\circ$ ).

$\varphi$  (Azimutwinkel) ist der Winkel zwischen der positiven x-Achse und der Projektion von  $\vec{r}$  in die  $xy$ -Ebene, gezählt von 0 bis  $2\pi$  ( $0^\circ$  bis  $360^\circ$ ).

In der Analysis und ihren Anwendungen werden Kugelkoordinaten (im allg. alle Winkel) stets im Bogenmaß angegeben.

### Jacobi-Matrix für Kugelkoordinaten

Die lokalen Eigenschaften einer Koordinatentransformation werden durch die Jacobi-Matrix beschrieben. Für die Transformation von Kugelkoordinaten in kartesische Koordinaten lautet diese

$$\mathbf{J} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \vartheta, \varphi)} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -r \sin \vartheta & 0 \end{pmatrix} \quad (7.10)$$

Die Jacobi-Matrix der dazu inversen Transformation berechnet man am einfachsten als Inverse Matrix von  $\mathbf{J}$  in (7.10). Es gilt :

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{\partial(r, \vartheta, \varphi)}{\partial(x, y, z)} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & \sin \vartheta \sin \varphi & \cos \vartheta \\ \frac{1}{r} \cos \vartheta \cos \varphi & \frac{1}{r} \cos \vartheta \sin \varphi & -\frac{1}{r} \sin \vartheta \\ -\frac{1}{r} \frac{\sin \varphi}{\sin \vartheta} & \frac{1}{r} \frac{\cos \varphi}{\sin \vartheta} & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.11)$$

oder bei Darstellung in kartesischen Koordinaten, verwende  $r$  aus (7.9) :

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} & \frac{z}{r} \\ \frac{xz}{r^2 \sqrt{x^2+y^2}} & \frac{yz}{r^2 \sqrt{x^2+y^2}} & \frac{-(x^2+y^2)}{r^2 \sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{pmatrix}$$

### Differentiale und Volumenelement :

Die Jacobi-Matrix erlaubt es, die Umrechnung von Differentialen übersichtlich zu formulieren.

$$(dx, dy, dz)^T = \mathbf{J} \cdot (dr, d\vartheta, d\varphi)^T \quad (7.12)$$

beziehungsweise

$$(dr, d\vartheta, d\varphi)^T = \mathbf{J}^{-1} \cdot (dx, dy, dz)^T \quad (7.13)$$

Das Volumenelement

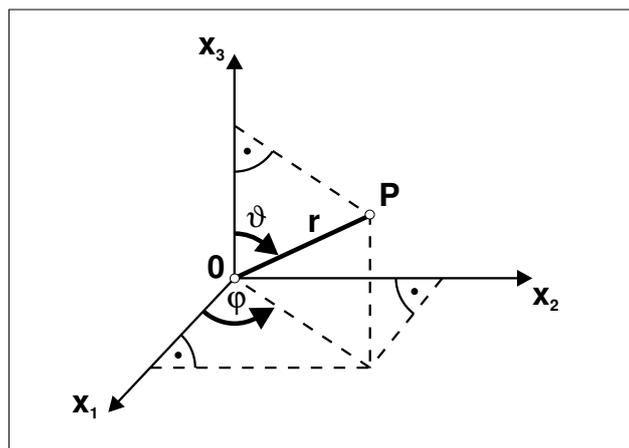
$$dV = dx \, dy \, dz$$

lässt sich mit Hilfe der Funktionaldeterminante

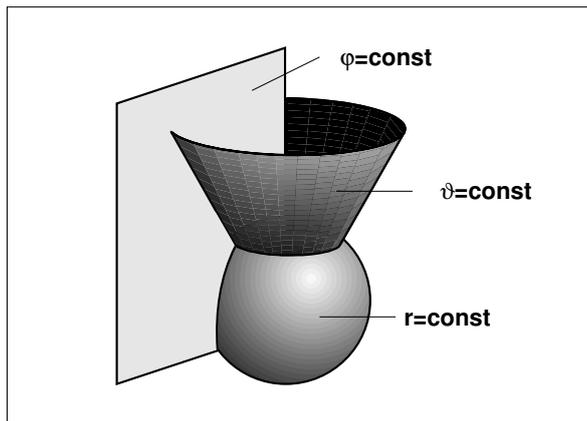
$$\det(\mathbf{J}) = \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \vartheta, \varphi)} = r^2 \sin \vartheta$$

in Kugelkoordinaten ausdrücken :

$$dV = r^2 \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \, dr \quad (7.14)$$



Die Kugelkoordinaten in  $\mathbb{R}^3$



**Koordinatenflächen**  $r = \text{const}$ ,  
 $\vartheta = \text{const}$ ,  $\varphi = \text{const}$

### Sphärische Koordinaten :

$r$  in (7.8) wird 1 gesetzt und nicht als eigenständige Koordinate aufgeführt. Man erhält dann ein Koordinatensystem für die Oberfläche der Einheitskugel. Die zu dieser 2-dim. Mannigfaltigkeit

$$\mathbf{f} : (0, \pi) \times (0, 2\pi) \mapsto \mathbb{R}^3, \quad (\vartheta, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

gehörige Jacobi-Matrix, vgl. (7.10) hat die Gestalt

$$\mathbf{J} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\vartheta, \varphi)} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi & -\sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi & \sin \vartheta \cos \varphi \\ -\sin \vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

Die obige Koordinatenwahl ist internationaler Konsens in der Physik. Manchmal werden die Zeichen  $\vartheta$  und  $\varphi$  gerade im umgekehrten Sinne verwandt, insbesondere in der amerikanischen Literatur. Man sollte daher stets darauf achten, welchen Konventionen ein Autor folgt (vgl. Andere Konventionen in <http://de.wikipedia.org/wiki/Kugelkoordinaten>). So entspricht der oben definierte Polarwinkel  $\vartheta$  nicht der geographische Breite (dem Breitengrad in der Geographie). Diese ist vielmehr als Winkel zwischen der Äquatorialebene und dem Ortsvektor definiert und nimmt Werte zwischen  $-90^\circ$  und  $90^\circ$  an.

Wenn man  $\vartheta$  im Sinne dieser geographischen Breite nutzen möchte, so wird dies über die Darstellung

$$\begin{aligned} x &= r \cos \vartheta \cos \varphi & \vartheta & \text{geographische Breite} \\ y &= r \cos \vartheta \sin \varphi \\ z &= r \sin \vartheta \\ \text{mit} & \quad -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \end{aligned}$$

möglich (nördliche Halbkugel  $\Rightarrow 0 < \vartheta$ , südliche Halbkugel  $\Rightarrow \vartheta < 0$ )

Alle obigen Formeln sind dann dieser geänderten Koordinaten-Transformation anzupassen (vgl. [5], S. 573). Man erhält

$$\mathbf{J} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \vartheta)} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi & -r \cos \vartheta \sin \varphi & -r \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta & 0 & r \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{J}) = \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \vartheta)} = r^2 \cos \vartheta$$

## 8 Parameterintegrale

### 8.1 Stetigkeit und Integrierbarkeit

Vergleiche [5], S. 591 f.f.  $\mathcal{I}$  ist in den folgenden Betrachtungen stets ein beliebiges Intervall.

**Satz 8.1.** Für eine stetige Funktion  $f : [a, b] \times \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  wird auch das Integral

$$F(t) = \int_a^b f(x, t) dx \tag{8.1}$$

eine stetige Funktion  $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  des Parameters  $t$ .

**Satz 8.2.** Ist  $f : [a, b] \times [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, dann gilt

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_a^b f(x, t) dx dt = \int_a^b \int_{t_0}^{t_1} f(x, t) dt dx \quad (8.2)$$

Die Reihenfolge der Integration kann also vertauscht werden.

**Satz 8.3.** Es seien  $\varphi : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\psi : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen mit  $\varphi(t) \leq \psi(t)$ . Außerdem sei die Funktion  $f(x, t)$  stetig auf dem Bereich

$$\mathcal{B} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathcal{I} \text{ und } \varphi(t) \leq x \leq \psi(t)\}. \quad (8.3)$$

Dann wird die durch

$$F(t) = \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f(x, t) dx \quad (8.4)$$

erklärte Funktion ebenfalls stetig.

**Bemerkung 8.4.** Auf die Voraussetzung  $\varphi(t) \leq \psi(t)$  kann im letzten Satz verzichtet werden. Lediglich die Definition des Bereiches (8.3) ist dann zu ändern. Überlegen Sie sich dies anhand von Beispielen.

## 8.2 Differentiation von Parameterintegralen

Vergleiche [5], S. 591 f.f.

**Satz 8.5.** Eine stetige Funktion  $f : [a, b] \times \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  besitze auf ihrem Definitionsbereich  $[a, b] \times \mathcal{I}$  eine stetige partielle Ableitung  $\frac{\partial f(x, t)}{\partial t}$ . Dann ist (8.1) auf  $\mathcal{I}$  nach  $t$  differenzierbar und für diese Ableitung gilt

$$F'(t) = \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx \quad (8.5)$$

Man spricht hier von Differentiation unter dem Integralzeichen. Bei variablen Integrationsgrenzen entsteht eine Verallgemeinerung dieser Formel, die im folgenden Satz betrachtet wird.

**Satz 8.6.** Die Voraussetzungen des Satzes 8.3 seien erfüllt. Außerdem gelte :

- $\varphi(t)$  und  $\psi(t)$  sind differenzierbar.
- Auf einem den Bereich (8.3) umfassenden Gebiet sei  $f(x, t)$  stetig und besitze dort eine stetige partielle Ableitung  $\frac{\partial f(x, t)}{\partial t}$ .

Dann ist

$$F(t) = \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f(x, t) dx \quad (8.6)$$

auf  $\mathcal{I}$  nach dem Parameter  $t$  differenzierbar, wobei

$$F'(t) = \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx + \psi'(t) \cdot f(\psi(t), t) - \varphi'(t) \cdot f(\varphi(t), t) \quad (8.7)$$

gilt.

## Literatur

- [1] H.-J. Bartsch. *Taschenbuch mathematischer Formeln*.
- [2] H. Brauch, Dreyer. *Mathematik für Ingenieure*. Steubenstr. 6, Keller, Lehrbuchsammlung.
- [3] L. Brenner. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Teil II und III*. Steubenstr. 6, Keller, Lehrbuchsammlung.
- [4] Bronstein. *Taschenbuch der Mathematik*.
- [5] W. Burg, Haf. *Höhere Mathematik für Ingenieure, Bd. 1, Analysis*. Steubenstr. 6, Keller, Lehrbuchsammlung.
- [6] W. Burg, Haf. *Höhere Mathematik für Ingenieure, Bd. 3, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Distributionen, Integraltransformationen*. Steubenstr. 6, Keller, Lehrbuchsammlung.
- [7] W. Göhler. *Formelsammlung höhere Mathematik*.
- [8] Grobstich and Strey. *Mathematik für Bauingenieure : Grundlagen, Verfahren und Anwendungen mit MathCAD*. Steubenstr. 6, Keller, Lehrbuchsammlung.
- [9] R. Harbarth. *Differentialrechnung für Funktionen mit mehreren Variablen*. Steubenstr. 6, Keller, Lehrbuchsammlung.
- [10] Höllich, Kratz, Kimmerle, and Hörner. *Mathematik online, broschüren. chapter Kurse*. <http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/kurse/>. Kurse nach Bedarf wählen und dann die Broschüren (Download) zu Analysis einer Veränderlichen, Analysis mehrerer Veränderlicher, Formelsammlung, Lineare Algebra, Numerik, Vorkurs Mathematik.
- [11] A. Leupold. *Mathematik : ein Studienbuch für Ingenieure*. Steubenstr. 6, Keller, Lehrbuchsammlung.
- [12] Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium, mit zahlreichen Beispielen aus Naturwissenschaft und Technik.
- [13] Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler : Übungen*.
- [14] S. Pforr. *Differential- und Integralrechnung für Funktionen mit einer Variablen*. Steubenstr. 6, Keller, Lehrbuchsammlung.
- [15] V. u. K. Precht. *Mathematik für Nichtmathematiker II*.
- [16] Rothenburg. *Reichsstadt-gymnasium rothenburg o.d.t., arbeitsblätter für den mathematikunterricht*. [www.rsg.rothenburg.de/schulleben/fs/mathe/cimu/riemann-integral.htm](http://www.rsg.rothenburg.de/schulleben/fs/mathe/cimu/riemann-integral.htm).
- [17] R. und Vettors. *Grundkurs Mathematik für Bauingenieure*. Steubenstr. 6, Keller, Lehrbuchsammlung.