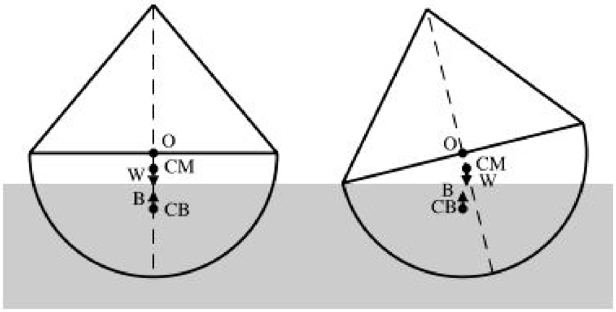

Figura 7.42

por qué, imagine que la boya se desplaza ligeramente de su posición vertical, como se muestra la figura de la derecha. Obsérvese que CM todavía está en el eje de simetría de la boya, pero CB está en la línea vertical que pasa por O. Las fuerzas **W** y **B** ya no actúan en la misma recta, pero su par de torsión es tal que tiende a rotar la boya de nuevo a su posición vertical. Si CM hubiera estado por encima de O en la figura de la izquierda, el par de torsión habría tendido a volcar la boya una vez que ésta se desplazara incluso muy poco desde la posición vertical.

Una viga de madera tiene sección cruzada con forma de cuadrado y gravedad específica 0.5, por lo que flotará con la mitad de su volumen sumergido (*véase* la Figura 7.43). Suponiendo que flota horizontalmente en el agua, ¿cuál es la orientación estable de la sección cruzada cuadrada con respecto a la superficie del agua? En particular, ¿flotará la viga con la parte plana hacia arriba o con la arista hacia arriba? Demuestre sus afirmaciones. Puede resultar de utilidad Maple o algún otro programa de matemáticas por computador.

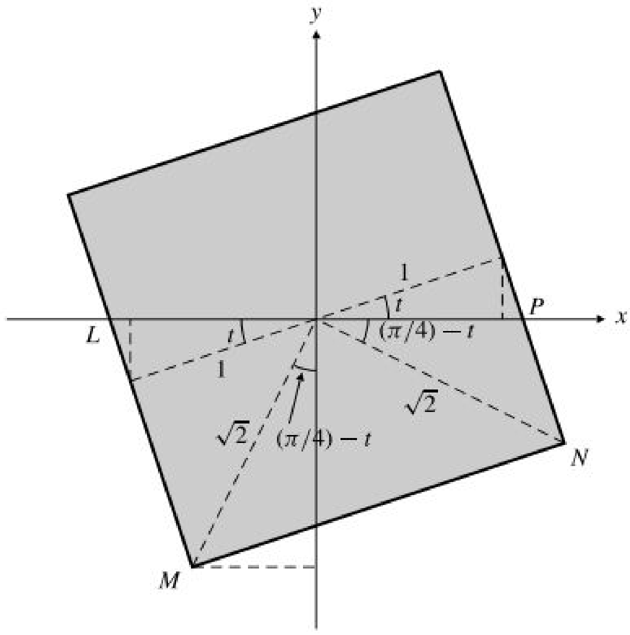

Figura 7.43

7.6 Otras aplicaciones en física

En esta sección presentaremos algunos ejemplos del uso de la integración para calcular magnitudes que aparecen en física y mecánica.

Presión hidrostática

La **presión** p a una profundidad h bajo la superficie de un líquido es la fuerza por unidad de área que se realiza sobre una superficie plana horizontal situada a esa profundidad, debido al peso del líquido que hay por encima de ella. Por tanto, p se expresa como

$$p = \delta g h$$

siendo δ la densidad del líquido y g la aceleración de la gravedad donde está situado el fluido (*véase* la Figura 7.44). Para el caso del agua en la superficie de la tierra tenemos, aproximadamente, $\delta = 1000$ kg/m^3 y $g = 9.8$ m/s^2, por lo que la presión a la profundidad de h m es

$$p = 9800h \text{ N/m}^2$$

La unidad de fuerza que se utiliza es el newton (N); 1 N = 1 kg·m/s^2, y corresponde a la fuerza que, aplicada sobre una masa de 1 kg, produce sobre la misma una aceleración de 1 m/s^2.

Las moléculas de un líquido interactúan de tal manera que la presión a cualquier profundidad actúa de igual forma en todas las direcciones. La presión contra una superficie vertical es la misma que la presión contra una superficie horizontal. Éste es el **principio de Pascal**.

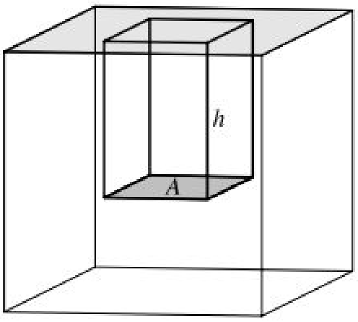

Figura 7.44 El volumen de líquido que hay por encima del área A es $V = Ah$. El peso de este líquido es $\delta Vg = \delta ghA$, por lo que la presión (fuerza por unidad de área) a la profundidad h es $p = \delta gh$.

La fuerza total que realiza un líquido sobre una superficie horizontal (por ejemplo, sobre el fondo del tanque que contiene un líquido) se calcula multiplicando el área de esa superficie por la presión existente a la profundidad a la que se encuentra la superficie. Sin embargo, para el caso de superficies que no sean horizontales, la presión no es constante en toda la superficie y la fuerza total no se puede determinar de forma tan sencilla. En este caso se divide la superficie en elementos de área dA, cada uno de los cuales estará a una profundidad concreta h, y después se suman (es decir, se integran) los correspondientes elementos de fuerza $dF = \delta gh\, dA$ para obtener la fuerza total.

Ejemplo 1 Una pared vertical de un abrevadero tiene la forma de una placa semicircular de radio R m con su parte curva hacia abajo. Si el abrevadero está lleno, de forma que el agua llega hasta la parte superior de la placa, calcule la fuerza total que realiza el agua sobre la placa.

Solución La longitud de una banda horizontal en la superficie de la placa situada a profundidad h m y de anchura dh m (*véase* la Figura 7.45) es de $2\sqrt{R^2 - h^2}$ m. Por tanto, su área es $dA = 2\sqrt{R^2 - h^2}\, dh$ m^2. La fuerza que realiza el agua sobre esta banda es

$$dF = \delta gh\, dA = 2\delta gh\sqrt{R^2 - h^2}\, dh$$

Por tanto, la fuerza total que se realiza sobre la placa es

$$F = \int_{h=0}^{h=R} dF = 2\delta g \int_0^R h\sqrt{R^2 - h^2}\, dh \qquad \text{Sea } u = R^2 - h^2$$
$$du = -2h\,dh$$
$$= \delta g \int_0^{R^2} u^{1/2}\, du = \delta g \frac{2}{3} u^{3/2}\Big|_0^{R^2}$$
$$\approx \frac{2}{3} \times 9800R^3 \approx 6533R^3 \text{ N}$$

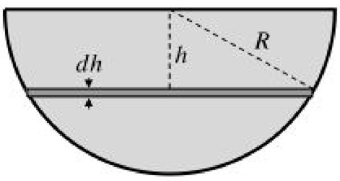

Figura 7.45

Ejemplo 2 **(Fuerza sobre una presa)** Calcule la fuerza total sobre una sección de 100 m de largo de una presa que tiene una altura vertical de 10 m, si la superficie que contiene al agua esté inclinada un ángulo de 30° con respecto a la vertical y el agua llega hasta la parte superior de la presa.

Solución El agua de una capa horizontal de espesor dh m a la profundidad de h m hace contacto con la presa formando una banda sesgada de anchura $dh \sec 30° = (2/\sqrt{3})\, dh$ m (*véase* la Figura 7.46). El área de esta banda es $dA = (200/\sqrt{3})\, dh$ m^2, y la fuerza que realiza el agua sobre dicha banda es

$$dF = \delta gh\, dA = \frac{200}{\sqrt{3}} \times 1000 \times 9.8h\, dh \approx 1\,131\,600h\, dh \text{ N}$$

La fuerza total sobre la sección de la presa es, por tanto,

$$F \approx 1\,131\,600 \int_0^{10} h\,dh = 1\,131\,600 \times \frac{10^2}{2} \approx 5.658 \times 10^7 \text{ N}$$

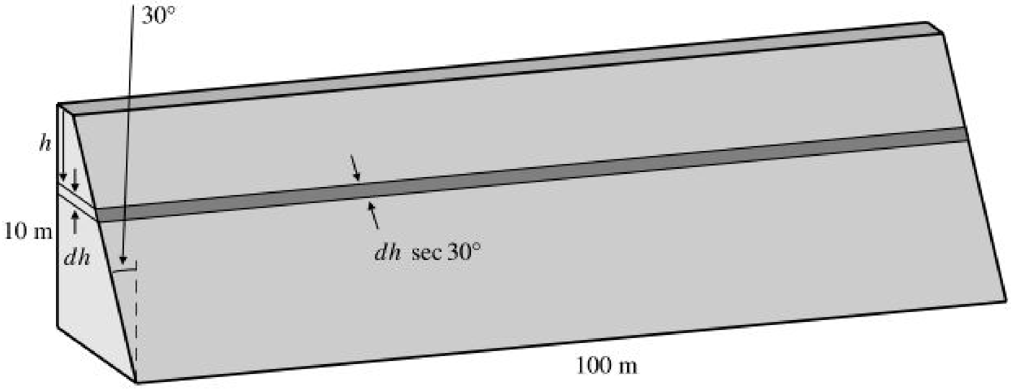

Figura 7.46

Trabajo

Cuando una fuerza actúa sobre un objeto para mover dicho objeto, se dice que se ha realizado un **trabajo** sobre el objeto. La cantidad de trabajo que realiza una fuerza constante se mide mediante el producto de la fuerza por la distancia que recorre el objeto. Se supone que la fuerza actúa en la dirección del movimiento.

$$\text{Trabajo} = \text{Fuerza} \times \text{Distancia}$$

El trabajo está siempre relacionado con una fuerza particular. Si otras fuerzas actúan sobre un objeto y hacen que se mueva en una dirección opuesta a la fuerza F, se dice que el trabajo se realiza *contra* la fuerza F.

Supongamos que una fuerza en la dirección del eje x mueve un objeto desde $x = a$ hasta $x = b$ en la dirección de ese eje, y que la fuerza varía de forma continua con la posición x del objeto. Es decir, $F = F(x)$ es una función continua. El elemento de trabajo realizado por la fuerza al mover el objeto una distancia muy pequeña desde x hasta $x + dx$ es $dW = F(x)\,dx$, por lo que el trabajo total realizado por la fuerza es

$$W = \int_{x=a}^{x=b} dW = \int_a^b F(x)\,dx$$

Ejemplo 3 **(Compresión o descompresión de un muelle)** Por la **Ley de Hooke**, la fuerza $F(x)$ que se requiere para extender (o comprimir) un muelle elástico hasta que alcance un valor de x más largo (o más corto) que su longitud natural es proporcional a x:

$$F(x) = kx$$

siendo k la **constante de elasticidad** del muelle. Si se requiere una fuerza de 2000 N para extender un muelle 4 cm desde su longitud natural, ¿cuánto trabajo debe realizarse en esa extensión?

Solución Como $F(x) = kx = 2000$ N cuando $x = 4$ cm, debemos tener que $k = 2000/4 = 500$ N/cm. El trabajo realizado al extender el muelle 4 cm es

$$W = \int_0^4 kx\,dx = k\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^4 = 500\,\frac{\text{N}}{\text{cm}} \times \frac{4^2\text{ cm}^2}{2} = 4000\text{ N}\cdot\text{cm} = 40\text{ N}\cdot\text{m}$$

Es decir, se realiza un trabajo de 40 newtons-metro (julios) al alargar el muelle 4 cm.

Ejemplo 4 **(Trabajo realizado para vaciar un tanque)** Un tanque en forma de cono circular recto invertido, con un radio de 3 m en su parte superior y una profundidad de 4 m, está lleno de agua. ¿Cuánto trabajo se debe realizar (contra la gravedad) para extraer con una bomba todo el agua del tanque por encima de su borde superior?

Solución Una rodaja fina de agua situada a una altura h del vértice inferior del tanque tiene radio r (*véase* la Figura 7.47), siendo $r = \frac{3}{4}h$ por triángulos similares. El volumen de esta rodaja es

$$dV = \pi r^2\,dh = \frac{9}{16}\pi h^2\,dh$$

y su *peso* (la fuerza de la gravedad sobre la masa de agua de la rodaja) es

$$dF = \delta g\,dV = \frac{9}{16}\delta g \pi h^2\,dh$$

La bomba debe subir el agua de este disco (en contra de la gravedad) una distancia de $(4 - h)$ m. El trabajo requerido para ello es

$$dW = \frac{9}{16}\delta g\pi(4 - h)h^2\,dh$$

El trabajo total que hay que realizar para vaciar el tanque es la suma (integral) de todos esos elementos de trabajo realizados para los discos que están entre las profundidades de 0 y 4 m:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^4 \frac{9}{16}\delta g\pi(4h^2 - h^3)\,dh \\ &= \frac{9}{16}\delta g\pi\left(\frac{4h^3}{3} - \frac{h^4}{4}\right)\Bigg|_0^4 \\ &= \frac{9\pi}{16} \times 1000 \times 9{,}8 \times \frac{64}{3} \approx 3{,}69 \times 10^5\ \mathrm{N{\cdot}m} \end{aligned}$$

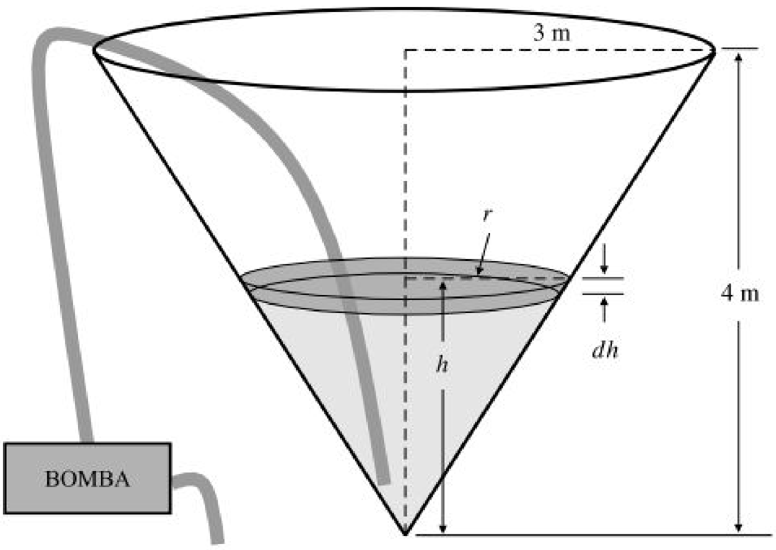

Figura 7.47

Ejemplo 5 **(Trabajo necesario para poner material en órbita)** La fuerza gravitatoria que realiza la tierra sobre una masa m situada a una altura de h m desde su superficie es

$$F(h) = \frac{Km}{(R + h)^2}$$

siendo R el radio de la tierra y K una constante independiente de m y h. Determine, en función de K y R, el trabajo que se debe realizar contra la gravedad para elevar un objeto desde la superficie de la tierra hasta:

(a) una altura H sobre la superficie de la tierra
(b) una altura infinita por encima de la superficie de la tierra.

Solución El trabajo necesario para elevar una masa m desde una altura h hasta una altura $h + dh$ es

$$dW = \frac{Km}{(R+h)^2}\,dh$$

(a) El trabajo total necesario para elevarla desde la altura $h = 0$ hasta la altura $h = H$ es

$$W = \int_0^H \frac{Km}{(R+h)^2}\,dh = \frac{-Km}{R+h}\bigg|_0^H = Km\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+H}\right)$$

Si R y H se miden en metros y F se mide en newtons, entonces W se mide en newtons-metro, o julios.

(b) El trabajo total necesario para elevar la masa m a una altura infinita es

$$W = \int_0^\infty \frac{Km}{(R+h)^2}\,dh = \lim_{H\to\infty} Km\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+H}\right) = \frac{Km}{R}$$

Energía potencial y energía cinética

Las unidades de energía son las mismas que las unidades de trabajo (fuerza × distancia). El trabajo realizado contra una fuerza se puede ver como una forma de almacenar energía para un uso futuro o para su conversión en otras formas de energía. Esta energía almacenada se denomina **energía potencial** (E.P.). Por ejemplo, al extender o comprimir un muelle elástico, estamos realizando un trabajo contra la tensión del muelle y, por tanto, estamos almacenando energía en el muelle. Cuando se realiza trabajo contra una fuerza (variable) $F(x)$ para mover un objeto desde $x = a$ hasta $x = b$, la energía almacenada es

$$\text{E.P.} = -\int_a^b F(x)\,dx$$

Como el trabajo se realiza contra la fuerza F, los signos de $F(x)$ y $b - a$ son contrarios, de forma que la integral es negativa. Se incluye explícitamente el signo negativo de forma que la energía potencial calculada sea positiva.

Una de las formas de energía en las que se puede transformar la energía potencial es la **energía cinética** (E.C.), la energía del movimiento. Si un objeto de masa m se mueve con velocidad v, su energía cinética es

$$\text{E.C.} = \frac{1}{2}mv^2$$

Por ejemplo, si un objeto se eleva y después se deja caer, acelerará hacia abajo por efecto de la gravedad a medida que más y más cantidad de la energía potencial que tenía almacenada cuando se elevó se convierte en energía cinética.

Consideremos el cambio en la energía potencial almacenada en una masa m a medida que se mueve por el eje x desde a hasta b bajo la influencia de la fuerza $F(x)$, que depende sólo de x:

$$\text{E.P.}(b) - \text{E.P.}(a) = -\int_a^b F(x)\,dx$$

El cambio en la energía potencial es negativo si m se mueve en la dirección de F. De acuerdo con la segunda ley del movimiento de Newton, la fuerza $F(x)$ hace que la masa m se acelere con una aceleración dv/dt que es

$$F(x) = m\frac{dv}{dt} \qquad \text{(fuerza = masa × aceleración)}$$

Por la Regla de la Cadena se puede escribir dv/dt en la forma

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

por lo que $F(x) = mv\dfrac{dv}{dx}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \text{E.P.}(b) - \text{E.P.}(a) &= -\int_a^b mv\frac{dv}{dx}\,dx \\ &= -m\int_{x=a}^{x=b} v\,dv \\ &= -\frac{1}{2}mv^2\Big|_{x=a}^{x=b} \\ &= \text{E.C.}(a) - \text{E.C.}(b) \end{aligned}$$

Se deduce entonces que

$$\text{E.P.}(b) + \text{E.C.}(b) = \text{E.P.}(a) + \text{E.C.}(a)$$

Esto demuestra que la energía total (potencial + cinética) permanece constante cuando la masa m se mueve bajo la influencia de una fuerza F, *dependiendo sólo de la posición*. Una fuerza de ese tipo se denomina **conservativa** y el resultado anterior se denomina **ley de conservación de la energía**. En la Sección 15.2 consideraremos de nuevo las fuerzas conservativas.

Ejemplo 6 **(Velocidad de escape)** Utilizamos el resultado del Ejemplo 5, junto con los siguientes valores conocidos:

(a) El radio R de la tierra vale aproximadamente 6400 km, o $6{,}4 \times 10^6$ m.
(b) La aceleración de la gravedad g en la superficie de la tierra vale aproximadamente 9,8 m/s^2.

Determine la constante K en la fórmula de la fuerza gravitatoria del Ejemplo 5, y utilice esta información para determinar la velocidad de escape de un proyectil disparado verticalmente desde la superficie de la tierra. La **velocidad de escape** es la velocidad (mínima) que debe tener un proyectil en el momento de su disparo para asegurar que se alejará siempre de la superficie de la tierra y nunca volverá a caer.

Solución De acuerdo con la fórmula del Ejemplo 5, la fuerza de la gravedad sobre una masa de m kg en la superficie de la tierra ($h = 0$) es

$$F = \frac{Km}{(R+0)^2} = \frac{Km}{R^2}$$

De acuerdo con la segunda ley del movimiento de Newton, esta fuerza está relacionada con la aceleración de la gravedad (g) en la superficie de la tierra mediante la ecuación $F = mg$. Así,

$$\frac{Km}{R^2} = mg \quad \text{y} \quad K = gR^2$$

Aplicando la ley de conservación de la energía, el proyectil debe tener en el momento de su disparo suficiente energía cinética para realizar el trabajo necesario para elevar la masa m a una altura infinita. Utilizando el resultado del Ejemplo 5, la energía necesaria es Km/R. Si la velocidad inicial del proyectil es v, debe cumplirse entonces que

$$\frac{1}{2}mv^2 \geqslant \frac{Km}{R}$$

Por tanto, v debe satisfacer

$$v \geqslant \sqrt{\frac{2K}{R}} = \sqrt{2gR} \approx \sqrt{2 \times 9.8 \times 6.4 \times 10^6} \approx 1.12 \times 10^4 \text{ m/s}$$

Es decir, la velocidad de escape es aproximadamente 11.2 km/s, y es independiente de la masa m. En este cálculo hemos despreciado la resistencia del aire cerca de la superficie de la tierra. Esa resistencia depende de la velocidad más bien que de la posición, por lo que no es una fuerza conservativa. El efecto de esta resistencia es utilizar (convertir en calor) una parte de la energía cinética inicial y, por tanto, aumentar la velocidad de escape. ■

Ejercicios 7.6

1. Un tanque tiene una base cuadrada de 2 m de lado y lados verticales de 6 m de altura. Si el tanque se llena de agua, calcule la fuerza total realizada por el agua (a) en el fondo del tanque y (b) sobre una de sus cuatro paredes verticales.

2. Una piscina de 20 m de largo y 8 m de ancho tiene un fondo en pendiente, de forma que la profundidad de la piscina es de 1 m en un extremo y de 3 m en el otro. Calcule la fuerza total realizada sobre el fondo si la piscina está llena de agua.

3. Una presa de 200 m de longitud y 24 m de altura presenta una superficie inclinada de 26 m de altura al agua que contiene (*véase* la Figura 7.48). Si la superficie del agua está al mismo nivel que la parte superior de la presa, ¿cuál es la fuerza total del agua sobre la presa?

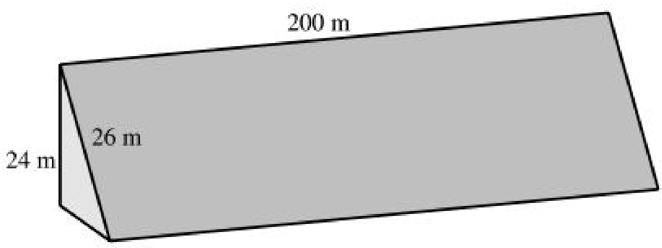

Figura 7.48

4. Una pirámide con base cuadrada de 4 m de lado y cuyas caras forman cuatro triángulos equiláteros se sitúa en el fondo de un lago en un lugar donde éste tiene 10 m de profundidad. Calcule la fuerza total del agua sobre cada una de las caras triangulares.

5. El cierre de un canal tiene una compuerta en forma de rectángulo vertical de 5 m de anchura y 20 m de altura. Si el agua en uno de los lados de la compuerta llega hasta la parte superior de dicha compuerta y en el otro lado sólo hasta 6 m de altura, calcule la fuerza total que debe realizarse para mantener la compuerta en su lugar.

6. Si se deben realizar 100 N·cm de trabajo para comprimir un muelle elástico 3 cm desde su longitud natural, ¿cuánto trabajo se debe realizar para comprimirlo 1 cm más?

7. Calcule el trabajo total que se debe realizar para extraer toda el agua del tanque del Ejercicio 1 por la parte superior de aquél.

8. Calcule el trabajo total que se debe realizar para extraer toda el agua de la piscina del Ejercicio 2 por el borde de aquélla.

9. Calcule el trabajo que se debe realizar para extraer toda el agua de un cuenco hemisférico lleno, de radio a m. La extracción se realiza a una altura de h m por encima de la parte superior del cuenco.

***10.** Utilizando un cabrestante, se eleva verticalmente un cubo desde el nivel del suelo con una velocidad constante de 2 m/min. Si el cubo pesa 1 kg y contiene 15 kg de agua cuando comienza a elevarse, pero pierde agua por una fuga con una velocidad de 1 kg/min a partir ese momento, ¿cuánto trabajo debe realizar el cabrestante para elevar el cubo a una altura de 10 m?

7.7 Aplicaciones en negocios, finanzas y ecología

Si la velocidad de cambio $f'(x)$ de una función $f(x)$ es conocida, el cambio en el valor de dicha función en un intervalo que va desde $x = a$ hasta $x = b$, se expresa como la integral de f' en $[a, b]$:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx$$

Por ejemplo, si la velocidad de movimiento de un coche en el instante t es de $v(t)$ km/h, entonces la distancia recorrida por dicho coche durante el intervalo temporal $[0, T]$ (horas) es $\int_0^T v(t)\,dt$ km.

De forma natural, surgen situaciones similares en el campo de los negocios y la economía, donde las velocidades de cambio se denominan frecuentemente marginales.

Ejemplo 1 **(Cálculo del beneficio total a partir del beneficio marginal)** Un fabricante de calculadoras obtiene un beneficio marginal de $15 - 5e^{-x/50}$ € por calculadora cuando vende x calculadoras. ¿Cuál será su beneficio total por la venta de 100 calculadoras?

Solución El beneficio marginal es la velocidad de cambio del beneficio con respecto al número de calculadoras vendidas. Por tanto, el beneficio por la venta de dx calculadoras tras haber vendido ya x es

$$dR = (15 - 5e^{-x/50})\,dx$$

euros. El beneficio total por la venta de las 100 primeras calculadoras es R €, siendo

$$\begin{aligned} R &= \int_{x=0}^{x=100} dR = \int_0^{100} (15 - 5e^{-x/50})\,dx \\ &= (15x + 250e^{-x/50})\Big|_0^{100} \\ &= 1500 + 250e^{-2} - 250 \approx 1\,283{,}83 \end{aligned}$$

es decir, aproximadamente 1284 €.

Valor actual de una serie de pagos futuros

Suponga que tiene un negocio que genera constantemente ingresos con una velocidad variable de $P(t)$ € al año en el instante t, y se espera que estos ingresos continúen durante los próximos T años. ¿Cuánto vale el negocio hoy?

La respuesta depende seguramente de los tipos de interés. Un euro que se va a recibir t años después vale menos que un euro que se recibe hoy, que se podría invertir con interés para obtener más de un euro dentro de t años. Cuanto mayor sea el tipo de interés, menor será el valor actual de un pago que no se realiza hasta un instante determinado en el futuro.

Para analizar esta situación, supongamos que el tipo de interés nominal es r % anual, pero se computa de forma continua. Sea $\delta = r/100$. Como se demuestra en la Sección 3.4, una inversión de 1 € en este momento crecerá hasta valer

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\delta}{n}\right)^{nt} = e^{\delta t}$$

euros después de t años. Por tanto, un pago de 1 € después de t años sólo valdrá hoy $e^{-\delta t}$ €. Esto se denomina *valor actual* de un pago futuro. Cuando se ve de esta forma, la tasa de interés δ se denomina frecuentemente *tasa de descuento*; representa la cantidad en la que se descuentan los pagos futuros.

Volviendo al problema de los ingresos del negocio, en el pequeño intervalo de tiempo que va desde t hasta $t + dt$, el negocio produce unos ingresos de $P(t)\,dt$ €, y su valor actual es

$e^{-\delta t}P(t)\,dt$ €. Por tanto, el valor actual V€ de la serie de ingresos durante el intervalo de tiempo $[0,\ T]$ es la «suma» de estas contribuciones:

$$\boxed{V = \int_0^T e^{-\delta t} P(t)\,dt}$$

Ejemplo 2 ¿Cuál es el valor actual de una serie de pagos continua y constante con una velocidad de 10 000 € al año, y que continúa para siempre empezando en este momento? Suponga que el tipo de interés es del 6% anual, y se computa de forma continua.

Solución El valor actual pedido es

$$V = \int_0^{\infty} e^{-0{,}06t} 10\,000\,dt = 10\,000 \lim_{R\to\infty} \left.\frac{e^{-0{,}06t}}{-0{,}06}\right|_0^R \approx 166\,667 \text{ €}$$

Economía de recursos de explotación renovables

Como se indicó en la Sección 3.4, la velocidad de incremento de una población biológica se puede expresar algunas veces mediante el modelo logístico[1]

$$\frac{dx}{dt} = kx\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

En este caso, $x = x(t)$ es el tamaño (o biomasa) de la población en el instante t, k es la velocidad natural a la que la población crecería si su suministro de recursos fuera ilimitado y L es el tamaño límite natural de la población, es decir, la capacidad que tiene el entorno para albergar a la población. Se ha pensado en aplicar estos modelos, por ejemplo, a las ballenas azules del Antártico y a varias especies de peces y de árboles. Si el recurso se cosecha o se recoge (es decir, por ejemplo, los peces se pescan) con una velocidad de $h(t)$ unidades al año en el instante t, entonces la población crece con una velocidad menor:

$$\frac{dx}{dt} = kx\left(1 - \frac{x}{L}\right) - h(t) \qquad (*)$$

En particular, si la población se recoge o se cosecha con su velocidad actual de crecimiento,

$$h(t) = kx\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

entonces $dx/dt = 0$, y la población mantendrá un tamaño constante. Supongamos que cada unidad que se recoge produce un ingreso de p € a la empresa pesquera. Los ingresos totales anuales provenientes de la recogida del recurso con su velocidad actual de crecimiento serán

$$T = ph(t) = pkx\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

Considerado como una función de x, este ingreso total anual es una función cuadrática, y alcanza un valor máximo cuando $x = L/2$, el valor que asegura $dT/dx = 0$. La industria puede mantener un máximo anual de ingresos estable asegurando que el nivel de población se estabiliza en la mitad del tamaño máximo de la población que habría si no se recogiera.

Sin embargo, el análisis anterior no tiene en cuenta el valor de descuento de la recogidas futuras. Si la tasa de descuento es δ y se computa de forma continua, entonces el valor actual del

[1] Este ejemplo ha sido sugerido por el profesor C. W. Clark, de la Universidad de British Columbia.

ingreso $ph(t)\,dt$ € entre t y $t+dt$ años a partir de ahora es de $e^{-\delta t}ph(t)\,dt$. El valor actual total de todos los ingresos de la industria pesquera en años futuros es

$$T = \int_0^\infty e^{-\delta t} ph(t)\,dt$$

¿Qué estrategia de pesca maximizará T? Si se sustituye $h(t)$ en la ecuación (*) que gobierna la velocidad de crecimiento de la población, se obtiene

$$\begin{aligned} T &= \int_0^\infty pe^{-\delta t}\left[kx\left(1-\frac{x}{L}\right)-\frac{dx}{dt}\right]dt \\ &= \int_0^\infty kpe^{-\delta t}x\left(1-\frac{x}{L}\right)dt - \int_0^\infty pe^{-\delta t}\frac{dx}{dt}dt \end{aligned}$$

Si se integra por partes la integral anterior, tomando $U = pe^{-\delta t}$ y $dV = \dfrac{dx}{dt}dt$,

$$\begin{aligned} T &= \int_0^\infty kpe^{-\delta t}x\left(1-\frac{x}{L}\right)dt - \left[pe^{-\delta t}x\Big|_0^\infty + \int_0^\infty p\delta e^{-\delta t}x\,dt\right] \\ &= px(0) + \int_0^\infty pe^{-\delta t}\left[kx\left(1-\frac{x}{L}\right)-\delta x\right]dt \end{aligned}$$

Para hacer esta expresión tan grande como sea posible, hay que escoger el tamaño de la población x que maximice la expresión cuadrática

$$Q(x) = kx\left(1-\frac{x}{L}\right) - \delta x$$

en un t tan temprano como sea posible, y mantener el tamaño de la población constante en ese nivel de ahí en adelante. El máximo se produce cuando $Q'(x) = k - (2kx/L) - \delta = 0$, es decir, cuando

$$x = \frac{L}{2} - \frac{\delta L}{2k} = (k-\delta)\,\frac{L}{2k}$$

El máximo valor presente de la industria pesquera se alcanza si el nivel de la población x se mantiene en ese valor. Nótese que este nivel de la población es menor que el nivel óptimo, $L/2$, que se obtuvo ignorando la tasa de descuento. Cuanto mayor sea la tasa de descuento δ, menor será el nivel de la población que maximiza los ingresos. Más desafortunadamente, si $\delta \geqslant k$, el modelo predice unos ingresos máximos al pescar las especies hasta su *extinción* inmediata (*véase* la Figura 7.49).

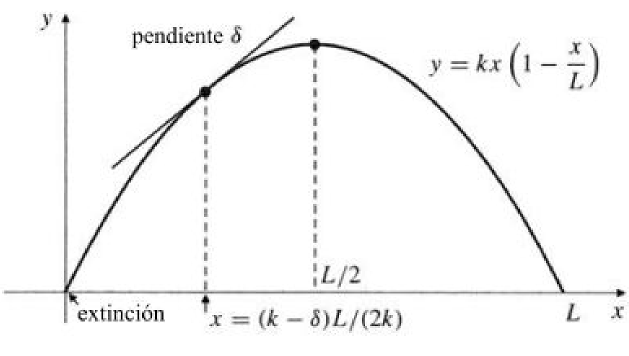

Figura 7.49 Cuanto mayor sea la tasa de descuento δ, menor será el tamaño de la población x que maximiza el valor actual de los ingresos futuros de la pesca. Si $\delta \geqslant k$, el modelo predice la pesca de las especies hasta su extinción.

Por supuesto, este modelo no tiene en cuenta otros factores que pueden afectar a la estrategia de pesca, como el incremento en el coste de faenar cuando el nivel de la población es pequeño y el efecto de la competencia entre las diversas empresas pesqueras. Sin embargo, sí explica el hecho lamentable de que, en algunas circunstancias, una industria basada en un recurso renovable puede encontrar que su mejor interés es destruir el recurso. Esto es especialmente probable que suceda cuando la velocidad de crecimiento natural k del recurso es baja, como en el caso de las ballenas y la mayor parte de los árboles. Hay buenas razones para no permitir que sea sólo la economía la que dicte la gestión del recurso.

Ejercicios 7.7

1. (Coste de producción) El coste marginal de producción en una mina de carbón es de $6 - 2 \times 10^{-3}x + 6 \times 10^{-6}x^2$ € por tonelada, tras haber producido x toneladas cada día. Además, hay un coste fijo de 4000 € al día por abrir la mina. Calcule el coste total de producción por día cuando se producen 1000 toneladas.

2. (Ventas totales) Las ventas de un nuevo chip de computador se modelan mediante la ecuación $s(t) = te^{-t/10}$, siendo $s(t)$ el número (en miles) de chips vendidos a la semana, t semanas después de que el chip se introdujera en el mercado. ¿Cuántos chips se vendieron en el primer año?

3. (Velocidades de conexión a Internet) Un proveedor de servicios de Internet cobra a sus clientes con una tasa marginal continuamente decreciente de $4/(1+\sqrt{t})$ € por hora, cuando el cliente ya ha empleado t horas en un mes. ¿Cuánto se facturará a un cliente que emplea x horas al mes? (No es necesario que x sea entero).

4. (Ingresos totales de ventas en disminución) El precio por kilo de jarabe de arce en una tienda sube con una velocidad constante desde 10 € a principios de año hasta 15 € a finales de año. Mientras el precio sube, la cantidad que se vende disminuye; la velocidad de ventas es $400/(1 + 0.1t)$ kg/año cuando han transcurrido t años, $(0 \leqslant t \leqslant 1)$. ¿Qué ingresos totales obtiene la tienda de las ventas del jarabe durante el año?

(Problemas de series de pagos) Calcule el valor actual de una serie de pagos continua de 1000 € al año para los periodos y tasas de descuento dados en los Ejercicios 5-10. En todos los casos la tasa de descuento se computa de forma continua.

5. Diez años con una tasa de descuento del 2%.

6. Diez años con una tasa de descuento del 5%.

7. Diez años empezando dos años después del actual con una tasa de descuento del 8%.

8. Veinticinco años empezando 10 años después del actual con una tasa de descuento del 5%.

9. Para todos los instantes futuros con una tasa de descuento del 2%.

10. Empezando dentro de 10 años y continuando para siempre con una tasa de descuento del 5%.

11. Calcule el valor actual de una serie de pagos continua sobre un periodo de 10 años, con una velocidad de 1000 € al año en este momento, y que crece de forma continua a razón de 100 € al año. La tasa de descuento es del 5%.

12. Calcule el valor actual de una serie de pagos continua sobre un periodo de 10 años, comenzando con una velocidad de 1000 € al año en este instante, y aumentando de forma constante a razón del 10% anual. La tasa de descuento es del 5%.

13. El dinero fluye constantemente a una cuenta con una velocidad de 5000 € al año. Si la cuenta tiene un tipo de interés del 5%, computado de forma continua, ¿cuánto habrá en la cuenta al cabo de 10 años?

14. El dinero fluye de forma continua en una cuenta, comenzando con una velocidad de 5.000 € al año e incrementándose a razón de un 10% anual. El interés hace que la cuenta crezca con una tasa real del 6% (de forma que 1 € crecerá hasta valer 1.06^t € en t años). ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que el balance de la cuenta alcance 1 000 000 €?

15. Si la tasa de descuento δ varía con el tiempo, es decir, $\delta = \delta(t)$, demuestre que el valor actual de un pago de P € pagadero a t años desde ahora es $Pe^{-\lambda(t)}$ €, siendo

$$\lambda(t) = \int_0^t \delta(\tau)\, d\tau$$

¿Cuál es el valor de una serie de pagos recibidos a una velocidad de $P(t)$ € en el instante t, desde $t = 0$ hasta $t = T$?

16. (Tasas de descuento y modelos de población) Suponga que la velocidad de crecimiento de una población es función de su tamaño: $dx/dt = F(x)$ (para el modelo logístico, $F(x) = kx(1 - (x/L))$). Si la población se recoge con una velocidad de $h(t)$ en el instante t, entonces $x(t)$ satisface

$$\frac{dx}{dt} = F(x) - h(t)$$

Demuestre que el valor de x que maximiza el valor actual de todas las recogidas futuras cumple $F'(x) = \delta$, siendo δ la tasa de descuento (computada de forma continua). *Sugerencia*: Imite el argumento utilizado anteriormente para el caso logístico.

17. **(Gestión de una piscifactoría)** La capacidad de mantener peces de un cierto lago es de $L = 80\,000$ para ciertas especies de peces. La velocidad de crecimiento natural de estas especies es del 12% anual ($k = 0.12$). Cada pez vale 6 €. La tasa de descuento es del 5%. ¿Qué población de peces debe mantenerse en el lago para maximizar el valor actual de todos los ingresos futuros de la pesca en el lago? ¿Cuáles son los ingresos anuales resultantes de mantener este nivel de población?

18. **(Ballenas azules)** Se ha calculado que la velocidad de crecimiento natural de la ballena azul del Antártico es aproximadamente del 2% anual ($k = 0.02$) y que la capacidad de su hábitat para mantener ballenas es de aproximadamente $L = 150\,000$. El valor de una ballena azul es, en promedio, de 10 000 €. Suponiendo que la población de ballenas azules sigue un modelo logístico, y utilizando los datos anteriores, calcule lo siguiente:
    (a) La máxima pesca anual sostenible de ballenas azules.
    (b) Los ingresos anuales resultantes de seguir la máxima pesca anual sostenible.
    (c) El interés anual generado si la población de ballenas (que se supone está en el nivel $L/2$ de su máximo nivel sostenible) se exterminara y se continuara invirtiendo al 2%.
    (d) Al 5%.
    (e) El valor actual total de todos los ingresos futuros si la población se mantiene en el nivel $L/2$ y la tasa de descuento es del 5%.

*19. El modelo desarrollado anteriormente no tiene en cuenta los costes de recogida. Intente encontrar una forma de modificar el modelo para tener esto en cuenta. En general, el coste de pescar un pez crece a medida que el número de peces disminuye.

7.8 Probabilidad

La teoría de la probabilidad es un campo de aplicación muy importante del cálculo. Naturalmente, no se puede desarrollar aquí de forma extensa (una presentación adecuada requeriría uno o más cursos completos), pero sí se puede dar una breve introducción, para sugerir algunas de las formas en las que las sumas y las integrales se utilizan en teoría de la probabilidad.

En el contexto de teoría de la probabilidad el término **experimento** se utiliza para indicar un proceso que puede producir diferentes **resultados**. El conjunto de todos los resultados posibles se denomina **espacio muestral** del experimento. Por ejemplo, el proceso podría ser arrojar una moneda, y tendríamos tres posibles resultados: H (la moneda cae de cara), T (la moneda cae de cruz) y E (la moneda cae de canto). Desde luego, el resultado E es muy poco probable a menos que la moneda sea bastante espesa, pero puede suceder. Por tanto, nuestro espacio muestral es $S = \{H, T, E\}$. Supongamos que arrojamos la moneda un gran número de veces y observamos que los resultados H y T aparecen cada uno el 49% de las veces y el resultado E ocurre sólo el 2% de las veces. Podemos decir que al arrojar una moneda los resultados H y T tienen una probabilidad de 0.49 y el resultado E tiene una probabilidad de 0.02.

Un **suceso** es cualquier subconjunto del espacio muestral. La **probabilidad** de que ocurra un suceso es un número real entre 0 y 1 y mide la proporción de veces que se puede esperar que el resultado del experimento pertenezca a ese suceso si el experimento se repite muchas veces. Si el suceso es el espacio muestral completo, ocurre de forma cierta y su probabilidad es 1; si el suceso es el conjunto vacío, $\varnothing = \{\,\}$, no puede ocurrir nunca y su probabilidad es 0. En el experimento de arrojar la moneda hay ocho posibles sucesos. Sus probabilidades son como sigue:

$$\Pr(\varnothing) = 0 \qquad \Pr(\{T\}) = 0.49 \qquad \Pr(\{H, T\}) = 0.98 \qquad \Pr(\{T, E\}) = 0.51$$

$$\Pr(\{H\}) = 0.49 \qquad \Pr(\{E\}) = 0.02 \qquad \Pr(\{H, E\}) = 0.51 \qquad \Pr(S) = 1$$

Dados dos sucesos A y B cualesquiera (subconjuntos del espacio muestral S), su **intersección** $A \cap B$ está formada por todos los resultados que pertenecen tanto a A como a B. La intersección se denomina a veces suceso «A y B». Dos sucesos son disjuntos si $A \cap B = \varnothing$; ningún resultado puede pertenecer simultáneamente a dos sucesos disjuntos. Por ejemplo, un suceso A y su suceso **complementario** A^c, formado por todos los resultados de S que no pertenecen a A, son disjuntos. La **unión** de dos sucesos A y B (denominada a veces suceso «A o B») está formada por todos los resultados que pertenecen al menos a uno de los dos sucesos A o B. Nótese que $A \cup A^c = S$.

Resumiremos estas reglas básicas que gobiernan las probabilidades como sigue: si S es un espacio muestral, $\varnothing$ es el subconjunto vacío de S, y A y B son dos sucesos entonces,

(a) $0 \leqslant \Pr(A) \leqslant 1$

(b) $\Pr(\varnothing) = 0$ y $\Pr(S) = 1$

(c) $\Pr(A^c) = 1 - \Pr(A)$

(d) $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$.

Nótese que al sumar simplemente $\Pr(A) + \Pr(B)$ se contarían dos veces los resultados de $A \cap B$. Como ejemplo, en nuestro experimento de tirar una moneda si $A = \{H, T\}$ y $B = \{H, E\}$, entonces $A^c = \{E\}$, $A \cup B = \{H, T, E\} = S$ y $A \cap B = \{H\}$. Tenemos que

$$\Pr(A^c) = \Pr(\{E\}) = 0.02 = 1 - 0.98 = 1 - \Pr(\{H, T\}) = 1 - \Pr(A)$$

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(S) = 1 = 0.51 + 0.51 - 0.02 = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

Variables aleatorias discretas

Una **variable aleatoria** es una función definida sobre el espacio muestral. Denotaremos las variables aleatorias utilizando letras mayúsculas como X e Y. Si el espacio muestral contiene sólo resultados discretos (como el espacio muestral del experimento de tirar una moneda), una variable aleatoria definida sobre él tomará sólo valores discretos y se denominará **variable aleatoria discreta**. Si, por otra parte, el espacio muestral contiene todas las posibles medidas de, por ejemplo, alturas de árboles, entonces una variable aleatoria que sea igual a la propia medida tomará valores en un continuo de valores reales y se denominará **variable aleatoria continua**. En esta sección estudiaremos ambos tipos de variables aleatorias.

La mayor parte de las variables aleatorias discretas presentan un número finito de valores, pero algunas pueden tomar infinitos valores si, por ejemplo, el espacio muestral está formado por todos los enteros positivos $\{1, 2, 3, \ldots\}$. Una variable aleatoria discreta X tiene una función de probabilidad f definida sobre el rango de X como $f(x) = \Pr(X = x)$ para cada posible valor x de X. Generalmente, f se representa mediante un diagrama de barras; la suma de las alturas de todas las barras debe ser 1,

$$\sum_x f(x) = \sum_x \Pr(X = x) = 1$$

ya que el experimento debe producir siempre un resultado, y por tanto un valor de X.

Ejemplo 1 Se tira un dado no trucado, de forma que cuando se detenga en su parte superior mostrará uno de los números 1 a 6. Si X indica el número que muestra en su parte superior tras ser arrojado, entonces X es una variable aleatoria discreta con 6 posibles valores. Como el dado no está trucado, ningún valor de X es más probable que otro, por lo que la probabilidad de que el número que salga sea n debe ser 1/6 para todos los posibles valores de n. Si f es la función de probabilidad de X, entonces

$$f(n) = \Pr(X = n) = \frac{1}{6} \qquad \text{para todo } n \text{ en } \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Por tanto, se dice que la variable aleatoria discreta X se distribuye **uniformemente**. Todas las barras de la gráfica de su función de probabilidad f tienen la misma altura (*véase* la Figura 7.50). Nótese que

$$\sum_{n=1}^{6} \Pr(X = n) = 1$$

que refleja el hecho de que al tirar el dado se debe producir uno de los seis posibles resultados. La probabilidad de que al tirar el dado salga un valor entre 1 y 4 es

$$\Pr(1 \leqslant X \leqslant 4) = \sum_{n=1}^{4} \Pr(X = n) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

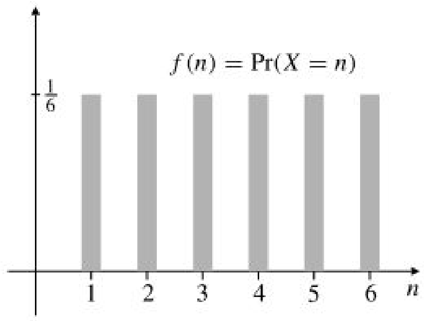

Figura 7.50 Función de probabilidad correspondiente a tirar un único dado.

Ejemplo 2 ¿Cuál es el espacio muestral de los números que salen cuando se arrojan dos dados no trucados? ¿Cuál es la probabilidad de que salgan un 4 y un 2? Calcule la función de probabilidad de la variable aleatoria X correspondiente a la suma de los valores que muestran los dados. ¿Cuál es la probabilidad de que esa suma sea menor que 10?

Solución El espacio muestral está formado por todas las parejas de enteros (m, n) que cumplen $1 \leqslant m \leqslant 6$ y $1 \leqslant n \leqslant 6$. Existen 36 parejas, por lo que la probabilidad de cualquiera de ellas es 1/36. Dos de las parejas, (4, 2) y (2, 4), corresponden a mostrar un 4 y un 2, por lo que la probabilidad del suceso es $(1/36) + (1/36) = 1/18$. La variable aleatoria X definida como $X(m, n) = m + n$ tiene 11 posibles valores, los enteros desde el 2 hasta el 12, ambos inclusive. La siguiente tabla muestra las parejas que producen cada valor k de X y la probabilidad $f(k)$ de que se produzca ese valor, es decir, el valor de la función de probabilidad en k.

Tabla 2. Función de probabilidad de la suma de dos dados

$k = m + n$	Realizaciones en las que $X = k$	$f(k) = \Pr(X = k)$
2	(1, 1)	1/36
3	(1, 2), (2, 1)	2/36 = 1/18
4	(1, 3), (2, 2), (3, 1)	3/36 = 1/12
5	(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)	4/36 = 1/9
6	(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)	5/36
7	(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)	6/36 = 1/6
8	(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)	5/36
9	(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)	4/36 = 1/9
10	(4, 6), (5, 5), (6, 4)	3/36 = 1/12
11	(5, 6), (6, 5)	2/36 = 1/18
12	(6, 6)	1/36

El diagrama de barras de la función de probabilidad f se muestra en la Figura 7.51. Tenemos que

$$\Pr(X < 10) = 1 - \Pr(X \geqslant 10) = 1 - \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36}\right) = \frac{5}{6}$$

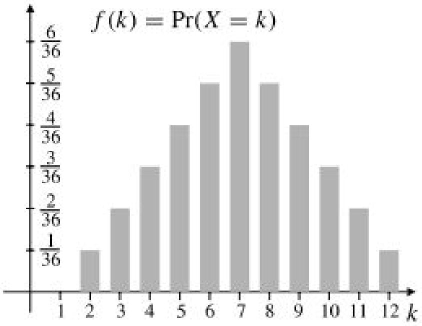

Figura 7.51 Función de probabilidad de la suma de dos dados.

Esperanza, media, varianza y desviación típica

Consideremos un juego simple en el que el jugador paga a la banca C euros por tener el privilegio de lanzar un dado, con el que gana X euros, siendo X el número que sale al lanzar el dado. En cada juego, las posibles ganancias son 1, 2, 3, 4, 5 o 6 euros, cada una de ellas con probabilidad 1/6. Al realizar n juegos esperará ganar aproximadamente $n/6 + 2n/6 + 3n/6 + 4n/6 + 5n/6 + + 6n/6 = 21n/6 = 7n/2$ euros, por lo que sus *ganancias medias esperadas por juego* son de 7/2 euros, es decir, 3.50 €. Si $C > 3.5$, el jugador debe esperar, en promedio, perder dinero. La cantidad 3.5 se denomina **esperanza** o **media** de la variable aleatoria discreta X. La media se representa en general por medio de μ, la letra griega «mu».

DEFINICIÓN 2 Media o esperanza

Si X es una variable aleatoria discreta con rango de valores R y función de probabilidad f, entonces la **media** (representada por μ), o **esperanza** de X (representada por $E(X)$), es

$$\mu = E(X) = \sum_{x \in R} x\ f(x)$$

Además, la **esperanza** de cualquier función $g(X)$ de la variable aleatoria X es

$$E(g(X)) = \sum_{x \in R} g(x)\ f(x)$$

Nótese que en este uso $E(X)$ no define una función de X, sino una constante (parámetro) asociada con la variable aleatoria X. Nótese también que si $f(x)$ fuera una densidad de masa como las que se estudiaron en la Sección 7.4, entonces μ sería el momento de la masa respecto a 0, y como la masa total sería $\Sigma_{x\in R}\ f(x) = 1$, μ sería de hecho el centro de masas.

Otro parámetro utilizado para describir la forma en que se distribuye la probabilidad de una variable aleatoria es la desviación típica.

DEFINICIÓN 3 Varianza y desviación típica

La **varianza** de una variable aleatoria X con rango R y función de probabilidad f es la esperanza del cuadrado de la distancia de X a su media μ. La varianza se indica como σ^2 o Var (X).

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}\,(X) = E((X-\mu)^2) = \sum_{x \in R} (x-\mu)^2 f(x)$$

La **desviación típica** de X es la raíz cuadrada de la varianza y, por tanto, se indica como σ.

El símbolo σ es la letra griega minúscula «sigma» (el símbolo Σ que se usa en los sumatorios es la letra griega sigma mayúscula). La desviación típica es una medida de la dispersión que tiene la distribución de probabilidad de X. Cuanto menor sea la desviación típica, más concentrada estará la probabilidad en valores de X cercanos a su media. Las Figuras 7.52 y 7.53 muestran las funciones de probabilidad de dos variables aleatorias cuyo espacio muestral es $\{1, 2, ..., 9\}$. Una de ellas tiene un valor de σ pequeño y la otra un valor de σ grande. Nótese cómo una fracción significativa de la probabilidad total está entre $\mu - \sigma$ y $\mu + \sigma$ en cada caso. Nótese también que la distribución de probabilidad de la Figura 7.52 es simétrica, por lo que $\mu = 5$, el punto medio del espacio muestral; en cambio, la distribución de la Figura 7.53 está ligeramente desplazada a la derecha, por lo que $\mu > 5$.

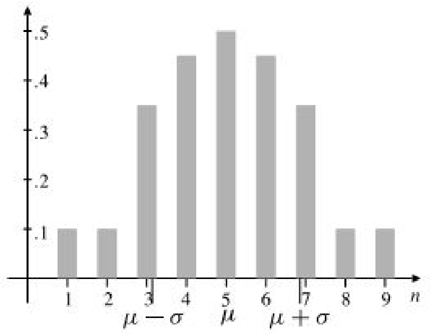

Figura 7.52 Una función de probabilidad de media $\mu = 5$ y desviación típica $\sigma = 1.86$.

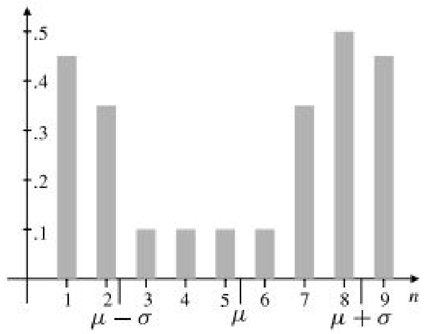

Figura 7.53 Una función de probabilidad de media $\mu = 5.38$ y desviación típica $\sigma = 3.05$.

Como $\Sigma_{x \in R}\ f(x) = 1$, la expresión de la definición de la varianza se puede escribir como sigue:

$$\begin{aligned}
\sigma^2 = \text{Var}\,(X) &= \sum_{x \in R} (x^2 - 2\mu x + \mu^2)\, f(x) \\
&= \sum_{x \in R} x^2 f(x) - 2\mu \sum_{x \in R} x f(x) + \mu^2 \sum_{x \in R} f(x) \\
&= \sum_{x \in R} x^2 f(x) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2
\end{aligned}$$

es decir,

$$\sigma^2 = \text{Var}\,(X) = E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

Por tanto, la desviación típica de X se puede expresar como

$$\boxed{\sigma = \sqrt{E(X^2) - \mu^2}}$$

Ejemplo 3 Calcule la media de la variable aleatoria X del Ejemplo 2. Calcule también la esperanza de X^2 y la desviación típica de X.

Solución Tenemos que

$$\begin{aligned}
\mu = E(X) = 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + 4 \times \frac{3}{36} + 5 \times \frac{4}{36} + 6 \times \frac{5}{36} + 7 \times \frac{6}{36} \\
+ 8 \times \frac{5}{36} + 9 \times \frac{4}{36} + 10 \times \frac{3}{36} + 11 \times \frac{2}{36} + 12 \times \frac{1}{36} = 7
\end{aligned}$$

un hecho que es bastante obvio a partir de la simetría de la gráfica de la función de probabilidad que se muestra en la Figura 7.51. Además,

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 2^2 \times \frac{1}{36} + 3^2 \times \frac{2}{36} + 4^2 \times \frac{3}{36} + 5^2 \times \frac{4}{36} + 6^2 \times \frac{5}{36} \\ &+ 7^2 \times \frac{6}{36} + 8^2 \times \frac{5}{36} + 9^2 \times \frac{4}{36} + 10^2 \times \frac{3}{36} \\ &+ 11^2 \times \frac{2}{36} + 12^2 \times \frac{1}{36} = \frac{1974}{36} \approx 54.8333 \end{aligned}$$

La varianza de X es $\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 \approx 54.8333 - 49 = 5.8333$, por lo que su desviación típica es $\sigma \approx 2.4152$.

Variables aleatorias continuas

Consideraremos ahora un ejemplo con un rango continuo de resultados posibles.

Ejemplo 4 Suponga que se lanza una aguja de forma aleatoria sobre una tabla plana donde se ha dibujado una línea recta. Sea X el número de grados del ángulo (agudo) que forma la aguja con la recta cada vez que se lanza (*véase* la Figura 7.54(a)). Evidentemente, X puede tomar cualquier valor real en el intervalo [0, 90]; por tanto, X se denomina **variable aleatoria continua**. La probabilidad de que X tome cualquier valor real en particular es 0 (hay infinitos números reales en el intervalo [0, 90] y ninguno es más probable que otro). Sin embargo, la probabilidad de que X esté en algún intervalo, por ejemplo [10, 20], es la misma que la de que esté en cualquier otro intervalo de la misma longitud. Como la longitud del intervalo es 10 y la del intervalo de todos los posibles valores de X es 90, dicha probabilidad es

$$\Pr(10 \leqslant X \leqslant 20) = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}$$

De forma más general, si $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant 90$, entonces

$$\Pr(x_1 \leqslant X \leqslant x_2) = \frac{1}{90}(x_2 - x_1)$$

Esta situación se puede representar convenientemente como sigue: sea $f(x)$ una función definida en el intervalo [0, 90], que toma en cada punto el valor constante 1/90:

$$f(x) = \frac{1}{90}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 90$$

El área encerrada por la gráfica de f es 1, y $\Pr(x_1 \leqslant X \leqslant x_2)$ es igual al área que hay bajo la parte de la gráfica que está en el intervalo $[x_1, x_2]$ (*véase* la Figura 7.54(b)). La función $f(x)$ se denomina **función de densidad de probabilidad** de la variable aleatoria X. Como $f(x)$ es constante en su dominio, se dice que X tiene **distribución uniforme**.

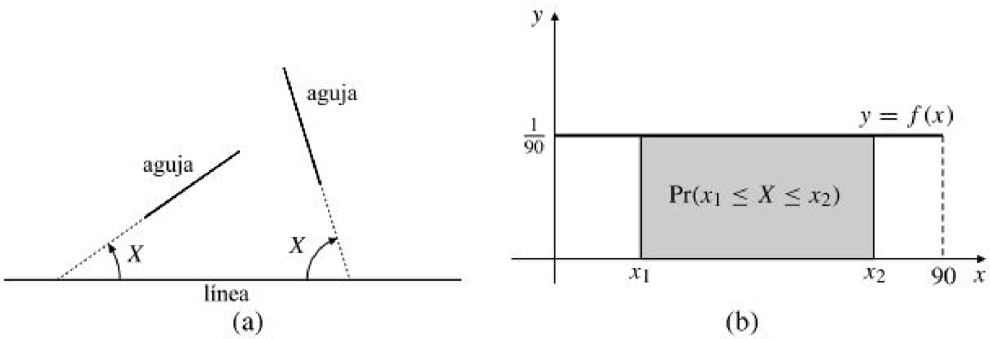

Figura 7.54
(a) X es el número de grados del ángulo agudo que forma la aguja con la línea.
(b) Función de densidad de probabilidad f de la variable aleatoria X.

DEFINICIÓN 4 Funciones de densidad de probabilidad

Una función definida en un intervalo $[a, b]$ es una función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua X distribuida en el intervalo $[a, b]$ si, siempre que x_1 y x_2 cumplan que $a \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant b$, se satisface

$$\Pr(x_1 \leqslant X \leqslant x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx$$

Para ser una función de densidad de probabilidad, f debe cumplir dos condiciones:

(a) $f(x) \geqslant 0$ en $[a, b]$ (la probabilidad no puede ser negativa) y

(b) $\int_a^b f(x)\, dx = 1$ $(\Pr(a \leqslant X \leqslant b) = 1)$

Estas ideas se pueden ampliar a variables aleatorias distribuidas en intervalos semiinfinitos o infinitos, pero en esos casos las integrales que aparecen serán impropias. En cualquier caso, el papel que tenían las sumas en el análisis de variables aleatorias discretas es asumido ahora por las integrales en el caso de variables aleatorias continuas.

En el ejemplo en que se lanzaba la aguja, la función de densidad de probabilidad tenía una gráfica en forma de recta horizontal, y denominamos a esa probabilidad distribución uniforme. La función de densidad de probabilidad uniforme en el intervalo $[a, b]$ es

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si} \quad a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Muchas otras funciones aparecen normalmente como funciones de densidad de probabilidad de variables aleatorias continuas.

Ejemplo 5 **(Distribución exponencial)** El intervalo de tiempo T que sobrevive un átomo cualquiera de una muestra radiactiva antes de desintegrarse es una variable aleatoria que toma valores en el intervalo $[0, \infty)$. Se ha observado que la proporción de átomos que sobreviven hasta el instante t decrece exponencialmente cuando t crece. Así,

$$\Pr(T \geqslant t) = Ce^{-kt}$$

Sea f la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria T. Entonces,

$$\int_t^{\infty} f(x)\, dx = \Pr(T \geqslant t) = Ce^{-kt}$$

Diferenciando esta ecuación con respecto a t (utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo), se obtiene $-f(t) = -Cke^{-kt}$, por lo que $f(t) = Cke^{-kt}$. C se determina por la condición de que $\int_0^{\infty} f(t)\, dt = 1$. Tenemos que

$$1 = Ck \int_0^{\infty} e^{-kt} dt = \lim_{R\to\infty} Ck \int_0^{R} e^{-kt} dt = -C \lim_{R\to\infty} (e^{-kR} - 1) = C$$

Entonces $C = 1$ y $f(t) = ke^{-kt}$. Nótese que $\Pr(T \geqslant (\ln 2)/k) = e^{-k(\ln 2)/k} = 1/2$, lo que refleja el hecho de que la semivida de una muestra radiactiva es $(\ln 2)/k$.

Ejemplo 6 ¿Para qué valor de C es $f(x) = C(1 - x^2)$ una función de densidad de probabilidad en el intervalo $[-1, 1]$? Si X es una variable aleatoria con esta densidad, ¿cuál es la probabilidad de que $X \leqslant 1/2$?

Solución Obsérvese que $f(x) \geqslant 0$ en $[-1, 1]$ si $C \geqslant 0$. Como

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = C\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx = 2C\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{4C}{3}$$

$f(x)$ será una función de densidad de probabilidad si $C = 3/4$. En este caso,

$$\Pr\left(X \leqslant \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\int_{-1}^{1/2}(1-x^2)\,dx = \frac{3}{4}\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1/2}$$
$$= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{24}-(-1)+\frac{-1}{3}\right) = \frac{27}{32}$$

Por analogía con el caso discreto, formularemos definiciones de la media (o esperanza), varianza y desviación típica de una variable aleatoria continua como sigue:

DEFINICIÓN 5

Si X es una variable aleatoria continua en el intervalo $[a, b]$ con función de densidad de probabilidad $f(x)$, su **media** μ (o **esperanza** $E(X)$) es

$$\mu = E(X) = \int_a^b x\,f(x)\,dx$$

La esperanza de una función g de X es

$$E(g(X)) = \int_a^b g(x)\,f(x)\,dx$$

De forma similar, la **varianza** σ^2 de X es la media de las desviaciones al cuadrado de X con respecto a su media:

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}\,(X) = E((X-\mu)^2) = \int_a^b (x-\mu)^2 f(x)\,dx$$

y la **desviación típica** es la raíz cuadrada de la varianza.

Como en el caso de variables aleatorias discretas, se puede demostrar fácilmente que

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2, \qquad \sigma = \sqrt{E(X^2)-\mu^2}$$

De nuevo, la desviación típica proporciona una medida de la dispersión que tiene la distribución de probabilidad de X. Cuanto menor sea la desviación típica, más concentrada estará el área bajo la curva de densidad alrededor de la media, y por tanto, menor será la probabilidad de que un valor de X esté lejos de dicha media (*véase* la Figura 7.55).

Ejemplo 7 Calcule la media μ y la desviación típica σ de una variable aleatoria X distribuida uniformemente en el intervalo $[a, b]$. Calcule $\Pr(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma)$.

Solución La función de densidad de probabilidad es $f(x) = 1/(b-a)$ en $[a, b]$, por lo que la media es

$$\mu = E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\,\frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{1}{2}\,\frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{b+a}{2}$$

Por tanto, la media es, como podríamos haber anticipado, el punto medio del intervalo $[a, b]$. La esperanza de X^2 se expresa como

$$E(X^2) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\,\frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{1}{3}\,\frac{b^3-a^3}{b-a} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

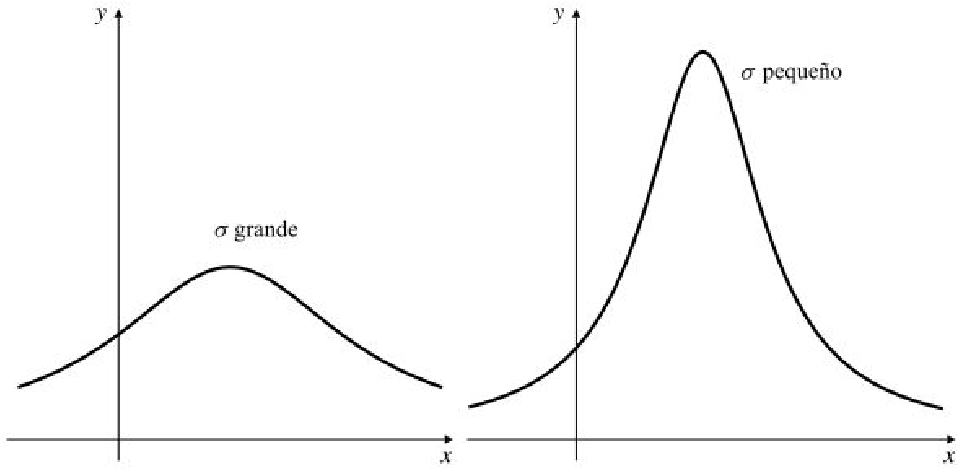

Figura 7.55 Densidades con desviaciones típicas grande y pequeña.

Entonces, la varianza es

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{b^2 + 2ab + a^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

y la desviación típica es

$$\sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} \approx 0.29(b-a)$$

Finalmente,

$$\Pr(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) = \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} \frac{dx}{b-a} = \frac{1}{b-a}\,\frac{2(b-a)}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577$$

Ejemplo 8 Calcule la media μ y la desviación típica σ de una variable aleatoria X distribuida exponencialmente con función de densidad $f(x) = ke^{-kx}$ en el intervalo $[0, \infty)$. Calcule $\Pr(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma)$.

Solución Utilizaremos integración por partes para calcular la media:

$$\mu = E(x) = k\int_0^\infty xe^{-kx}\,dx$$

$$= \lim_{R\to\infty} k\int_0^R xe^{-kx}\,dx \qquad \begin{array}{lll} \text{Sea} & U = x, & dV = e^{-kx}\,dx \\ \text{Entonces} & dU = dx, & V = -e^{-kx}/k \end{array}$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left(-xe^{-kx}\Big|_0^R + \int_0^R e^{-kx}\,dx\right)$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left(-Re^{-kR} - \frac{1}{k}(e^{-kR} - 1)\right) = \frac{1}{k}, \qquad \text{ya que } k > 0$$

Por tanto, la media de la distribución exponencial es $1/k$. Este hecho puede ser muy útil para determinar el valor de k cuando una variable aleatoria tiene distribución exponencial. Integrando de nuevo por partes, como antes, se puede calcular

$$E(X^2) = k\int_0^\infty x^2e^{-kx}\,dx = 2\int_0^\infty xe^{-kx}\,dx = \frac{2}{k^2}$$

por lo que la varianza de la distribución exponencial es

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = \frac{1}{k^2}$$

y la desviación típica es igual a la media

$$\sigma = \mu = \frac{1}{k}$$

Tenemos ahora que

$$\begin{aligned}\Pr(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) &= \Pr(0 \leqslant X \leqslant 2/k) \\ &= k \int_0^{2/k} e^{-kx}\, dx \\ &= -e^{-kx}\Big|_0^{2/k} \\ &= 1 - e^{-2} \approx 0.86\end{aligned}$$

que es independiente del valor de k. La Figura 7.56 muestra dos densidades exponenciales para valores de k grande y pequeño.

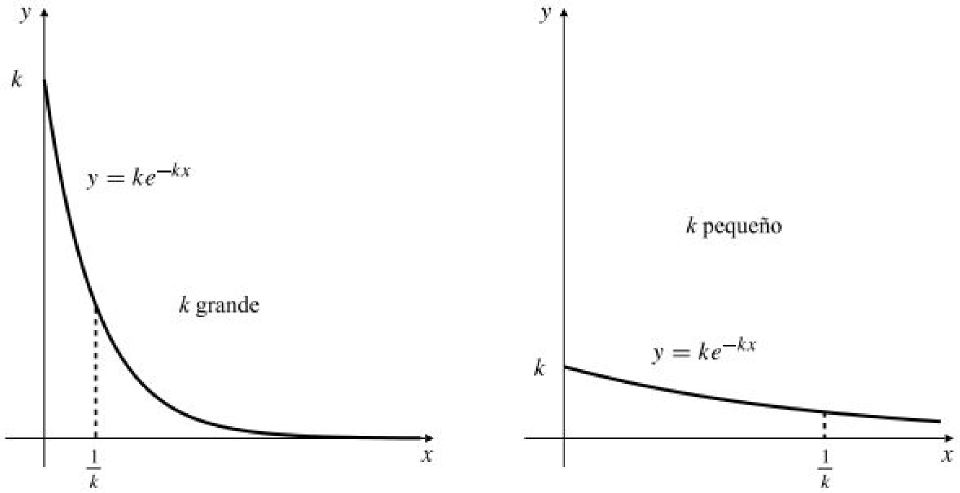

Figura 7.56 Funciones de densidad exponencial.

La distribución normal

Las distribuciones de probabilidad más importantes son las que se denominan distribuciones **normales** o **gaussianas**. Estas distribuciones gobiernan el comportamiento de muchas variables aleatorias interesantes, en particular, las asociadas con los errores aleatorios de las medidas. Existe una familia de distribuciones normales, todas ellas relacionadas con una distribución normal concreta denominada **distribución normal estándar**, que tiene la siguiente función de densidad de probabilidad:

DEFINICIÓN 6 Densidad de probabilidad normal estándar

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-z^2/2}, \qquad -\infty < z < \infty$$

Es habitual utilizar z para indicar la variable aleatoria en la distribución normal estándar; las otras distribuciones se pueden obtener a partir de ésta mediante un cambio de variable. La Figura 7.57 muestra la densidad normal estándar, que tiene una bonita forma de campana.

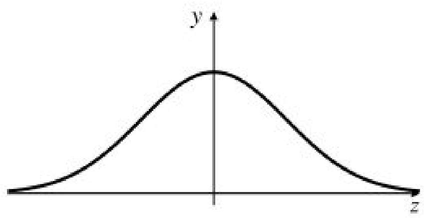

Figura 7.57 La función de densidad normal estándar $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-z^2/2}$.

Como ya indicamos anteriormente, la función e^{-z^2} no tiene una primitiva elemental, por lo que la integral impropia

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2}\, dz$$

no se puede calcular utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo, aunque es una integral impropia convergente. Dicha integral se puede calcular utilizando técnicas de cálculo multivariable, que emplean integrales dobles de funciones de dos variables (lo haremos en el Ejercicio 4 de la Sección 14.4). Su valor es $I = \sqrt{2\pi}$, lo que asegura que la densidad normal estándar definida anteriormente $f(z)$ es realmente una función de densidad de probabilidad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2}\, dz = 1$$

Como $ze^{-z^2/2}$ es una función impar de z y su integral en $(-\infty, \infty)$ converge, la media de la distribución normal estándar es 0:

$$\mu = E(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ze^{-z^2/2}\, dz = 0$$

Calcularemos la varianza de la distribución normal estándar utilizando de nuevo integración por partes, como sigue:

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= E(Z^2) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2/2}\, dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} z^2 e^{-z^2/2}\, dz \qquad \text{Sea} \quad U = z, \quad dV = ze^{-z^2/2}\, dz \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{Siendo} \quad dU = dz, \quad V = -e^{-z^2/2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R\to\infty} \left(-ze^{-z^2/2} \Big|_{-R}^{R} + \int_{-R}^{R} e^{-z^2/2}\, dz \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R\to\infty} (-2Re^{-R^2/2}) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2}\, dz \\
&= 0 + 1 = 1
\end{aligned}$$

Por tanto, la desviación típica de la distribución normal estándar es 1.

A partir de la distribución normal estándar se pueden obtener otras distribuciones normales mediante un cambio de variable.

DEFINICIÓN 7 Distribución normal general

Se dice que una variable aleatoria X en el intervalo $(-\infty, \infty)$ tiene *distribución normal de media* μ y *desviación típica* σ (siendo μ cualquier número real y $\sigma > 0$) si su función de densidad de probabilidad $f_{\mu,\sigma}$ se expresa en función de la densidad normal estándar f como

$$f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma}\, f\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

Véase la Figura 7.58. Utilizando el cambio de variable $z = (x - \mu)/\sigma$, $dz = dz/\sigma$, se puede verificar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\mu,\sigma}(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, dz = 1$$

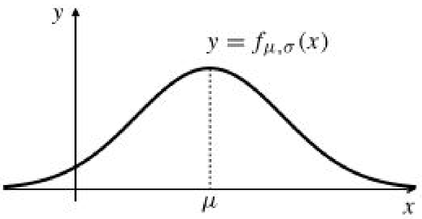

Figura 7.58 Una densidad normal general de media μ.

de forma que $f_{\mu,\sigma}(x)$ es realmente una función de densidad de probabilidad. Utilizando el mismo cambio de variable se puede demostrar que

$$E(X) = \mu \qquad \text{y} \qquad E((X-\mu)^2) = \sigma^2$$

Entonces, la densidad $f_{\mu,\sigma}$ tiene realmente media μ y desviación típica σ.

Como $e^{-z^2/2}$ no tiene una primitiva sencilla, no se pueden determinar probabilidades (es decir, áreas) en una distribución normal utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo. Se puede utilizar integración numérica, o bien consultar un libro de tablas estadísticas que contenga las áreas calculadas bajo la curva normal estándar. Concretamente, estas tablas proporcionan en general los valores de lo que se denomina **función de distribución acumulada** de una variable aleatoria con distribución normal estándar. Se trata de la función

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2}\, dx = \Pr(Z \leqslant z)$$

que representa el área bajo la función de densidad normal estándar desde $-\infty$ hasta z, como se muestra en la Figura 7.59.

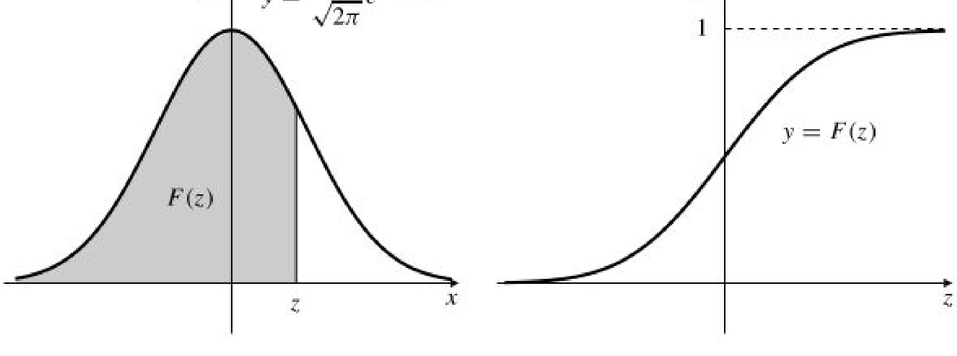

Figura 7.59 La función de distribución acumulada $F(z)$ de la distribución normal estándar es el área que hay bajo la función de densidad normal estándar desde $-\infty$ hasta z.

Incluimos a continuación una versión abreviada de esa tabla para utilizarla en los ejemplos y ejercicios posteriores.

Tabla 3. Valores de la función de distribución normal estándar $F(z)$ (redondeados a tres cifras decimales)

z	**0.0**	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.6**	**0.7**	**0.8**	**0.9**
−3.0	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
−2.0	0.023	0.018	0.014	0.011	0.008	0.006	0.005	0.003	0.003	0.002
−1.0	0.159	0.136	0.115	0.097	0.081	0.067	0.055	0.045	0.036	0.029
−0.0	0.500	0.460	0.421	0.382	0.345	0.309	0.274	0.242	0.212	0.184
0.0	0.500	0.540	0.579	0.618	0.655	0.691	0.726	0.758	0.788	0.816
1.0	0.841	0.864	0.885	0.903	0.919	0.933	0.945	0.955	0.964	0.971
2.0	0.977	0.982	0.986	0.989	0.992	0.994	0.995	0.997	0.997	0.998
3.0	0.999	0.999	0.999	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Ejemplo 9 Si Z es una variable aleatoria normal estándar, calcule

(a) $\Pr(-1.2 \leqslant Z \leqslant 2.0)$ y (b) $\Pr(Z \geqslant 1.5)$.

Solución Utilizando los valores de la tabla se obtiene

$$\begin{aligned}\Pr(-1.2 \leqslant Z \leqslant 2.0) &= \Pr(Z \leqslant 2.0) - \Pr(Z < -1.2)\\ &= F(2.0) - F(-1.2) \approx 0.977 - 0.115\\ &= 0.862\\ \Pr(Z \geqslant 1.5) &= 1 - \Pr(Z < 1.5)\\ &= 1 - F(1.5) \approx 1 - 0.933 = 0.067\end{aligned}$$

Ejemplo 10 Una variable aleatoria X se distribuye normalmente con media 2 y desviación típica 0.4. Calcule

(a) $\Pr(1.8 \leqslant X \leqslant 2.4)$ y (b) $\Pr(X > 2.4)$.

Solución Como X se distribuye normalmente con media 2 y desviación típica 0.4, $Z = (X - 2)/0.4$ se distribuye de acuerdo con una distribución normal estándar (con media 0 y desviación típica 1). Por tanto,

$$\begin{aligned}\Pr(1.8 \leqslant X \leqslant 2.4) &= \Pr(-0.5 \leqslant Z \leqslant 1)\\ &= F(1) - F(-0.5) \approx 0.841 - 0.309 = 0.532\\ \Pr(X > 2.4) &= \Pr(Z > 1) = 1 - \Pr(Z \leqslant 1)\\ &= 1 - F(1) \approx 1 - 0.841 = 0.159\end{aligned}$$

Ejercicios 7.8

1. ¿Cuánto desearía pagar para jugar a un juego en el que se tira la moneda presentada al principio de esta sección y se gana 1 € si sale cara, 2 € si sale cruz y 50 € si cae de canto? Suponga que el juego se va jugar muchas veces y que su objetivo en el peor caso es quedarse como está.

2. Un dado está cargado de forma que si X representa el número que sale cuando se tira, entonces $\Pr(X = n) = Kn$ para $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(a) Calcule el valor de la constante K.

(b) Calcule la probabilidad de que $X \leqslant 3$ en cualquier tirada del dado.

3. Calcule la desviación típica de sus ganancias en el juego del Ejercicio 1.

4. Calcule la media y desviación típica de la variable aleatoria X del Ejercicio 2.

5. Un dado está cargado de forma que la probabilidad de que salgan los números 2, 3, 4 y 5 sigue siendo todavía 1/6, pero la probabilidad de que salga 1 es 9/60 y la probabilidad de que salga 6 es 11/60. ¿Cuánto valen la media y la desviación típica del número X que sale al tirar este dado? ¿Cuál es la probabilidad de que $X \leqslant 3$?

6. Se tiran dos dados, ambos cargados de la forma que se indica en el Ejercicio 5. Sea X la variable aleatoria correspondiente a la suma de los números que salen al tirarlos.

(a) Calcule la función de probabilidad de X.
(b) Determine la media y la desviación típica de X. Compárelas con las calculadas para el dado no trucado del Ejemplo 3.

7. Una moneda fina pero cargada tiene una probabilidad de 0.55 de salir cara y 0.45 de salir cruz (esta moneda no puede caer de canto). Se tira la moneda tres veces (determine las respuestas numéricas de las cuestiones siguientes con una precisión de seis cifras decimales).

(a) ¿Cuál es el espacio muestral de los posibles resultados de tirar la moneda tres veces?
(b) ¿Cuál es la probabilidad de cada uno de esos posibles resultados?
(c) Calcule la función de probabilidad del número de veces X que sale cara en las tres tiradas.
(d) ¿Cuál es la probabilidad de que el número de caras sea al menos 1?
(e) ¿Cuál es la esperanza de X?

8. Un saco contiene 20 bolas del mismo tamaño; algunas son rojas y las restantes azules. Si se saca una bola de forma aleatoria, la probabilidad de que sea roja es 0.6.

(a) Si se sacan dos bolas y se dejan fuera del saco, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean azules?
(b) Suponga ahora que saca tres bolas y los deja fuera del saco. Describa el espacio muestral de los posibles resultados de este experimento. ¿Cuál es la esperanza del número de bolas rojas que hay en las tres que se han extraído del saco?

Para cada una de las funciones $f(x)$ en los Ejercicios 9-15, calcule lo siguiente:

(a) El valor de C para el que f es una función de densidad de probabilidad en el intervalo dado.
(b) La media μ, la varianza σ^2 y la desviación típica σ de la densidad de probabilidad f, y
(c) $\Pr(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma)$, es decir, la probabilidad de que la variable aleatoria X tenga un valor alejado de su media menos de una desviación típica.

9. $f(x) = Cx$ en $[0, 3]$ **10.** $f(x) = Cx$ en $[1, 2]$

11. $f(x) = Cx^2$ en $[0, 1]$ **12.** $f(x) = C\operatorname{sen} x$ en $[0, \pi]$

13. $f(x) = C(x - x^2)$ en $[0, 1]$

14. $f(x) = Cxe^{-kx}$ en $[0, \infty)$, $(k > 0)$

15. $f(x) = Ce^{-x^2}$ en $[0, \infty)$. *Sugerencia*: Utilice las propiedades de la densidad normal estándar para demostrar que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2$.

16. ¿Es posible que una variable aleatoria esté uniformemente distribuida en toda la recta real? Explique por qué.

17. Realice los cálculos para demostrar que la densidad normal $f_{\mu,\sigma}(x)$ definida en el texto es una función de densidad de probabilidad y tiene media μ y desviación típica σ.

***18.** Demuestre que $f(x) = \dfrac{2}{\pi(1 + x^2)}$ es una densidad de probabilidad en el intervalo $[0, \infty)$. Calcule la esperanza de X para esta densidad. Si una máquina genera valores de una variable aleatoria X con distribución $f(x)$, ¿cuánto le gustaría pagar, por juego, para jugar de forma que usted maneja la máquina para producir un valor de X y gana X euros? Justifique su respuesta.

19. Calcule $\Pr(|X - \mu| \geqslant 2\sigma)$ para:

(a) La distribución uniforme en el intervalo $[a, b]$.
(b) La distribución exponencial con densidad $f(x) = ke^{-kx}$ en el intervalo $[0, \infty)$.
(c) La distribución normal con densidad $f_{\mu,\sigma}(x)$.

20. El intervalo de tiempo T (medido en horas) entre averías de un computador es una variable aleatoria distribuida exponencialmente. Si la amplitud media del intervalo de tiempo entre averías sucesivas es de 20 horas, calcule la probabilidad de que el computador, que acaba de ser reparado, funcione sin problemas al menos 12 horas.

21. El número X de metros de cable producidos al día por una empresa es una variable aleatoria distribuida normalmente de media 5000 y desviación estándar 200. ¿En qué fracción de los días que opera la compañía el número de metros de cable producido superará los 5500?

22. Un instrumento de medida dispone de una escala de 0 a 1. Con el paso del tiempo sufre desgaste y tiende a quedarse fijo en el número 1/4. Suponga que eso ocurre la cuarta parte del tiempo y que el resto proporciona un valor uniformemente distribuido en el intervalo $[0, 1]$. ¿Cuál es la media y la desviación típica de los valores de la medida? (Nota: la variable aleatoria correspondiente al valor de la medida tiene una distribución que es parcialmente discreta y parcialmente continua).

7.9 Ecuaciones diferenciales de primer orden

Esta sección final de aplicaciones de integración se concentra en la aplicación de las integrales indefinidas en vez de las integrales definidas. Podemos utilizar las técnicas de integración desarrolladas en los Capítulos 5 y 6 para resolver ciertas clases de ecuaciones diferenciales de primer orden que aparecen al modelar diversas situaciones. En la Sección 3.4 ya hemos visto algunos ejemplos de aplicaciones de las ecuaciones diferenciales para modelar los fenómenos de crecimiento y decaimiento.

Ecuaciones separables

Consideremos la ecuación logística presentada en la Sección 3.4 que modela el crecimiento de una población animal con suministro de alimentos limitado:

$$\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{L}\right)$$

siendo $y(t)$ el tamaño de la población en el instante t, k una constante positiva relacionada con la fertilidad de la población y L el tamaño de la población en estado estacionario que se puede mantener con el suministro de alimentos disponible. Esta ecuación es un ejemplo de una clase de ecuaciones diferenciales de primer orden denominadas **ecuaciones separables** porque cuando se expresan en términos de diferenciales, se pueden separar de forma que la variable dependiente está en un miembro de la ecuación y la variable independiente en el otro. La ecuación logística se puede expresar de la forma

$$\frac{L\,dy}{y(L-y)} = k\,dt$$

que se puede resolver integrando ambos miembros. Descomponiendo el miembro izquierdo en fracciones simples e integrando, se obtiene

$$\int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{L-y}\right) dy = kt + C$$

Suponiendo que $0 < y < L$, se obtiene entonces

$$\ln y - \ln (L-y) = kt + C$$

$$\ln\left(\frac{y}{L-y}\right) = kt + C$$

Ahora se puede despejar y de la ecuación tomando exponenciales en ambos miembros:

$$\frac{y}{L-y} = e^{kt+C} = C_1 e^{kt}$$

$$y = (L-y)C_1 e^{kt}$$

$$y = \frac{C_1 L e^{kt}}{1 + C_1 e^{kt}}$$

siendo $C_1 = e^C$.

En general, las ecuaciones separables son de la forma

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)}$$

Y se resuelven expresándolas de la forma

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx$$

e integrando ambos miembros.

Ejemplo 1 Resuelva la ecuación $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$.

Solución Expresamos la ecuación de la forma $y\,dy = x\,dx$ e integramos ambos miembros, con lo que se obtiene

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C_1$$

o $y^2 - x^2 = C$, siendo $C = 2C_1$ una constante arbitraria. Las curvas de la solución son hipérbolas rectangulares (*véase* la Figura 7.60). Sus asíntotas $y = x$ e $y = -x$ son también soluciones correspondientes a $C = 0$.

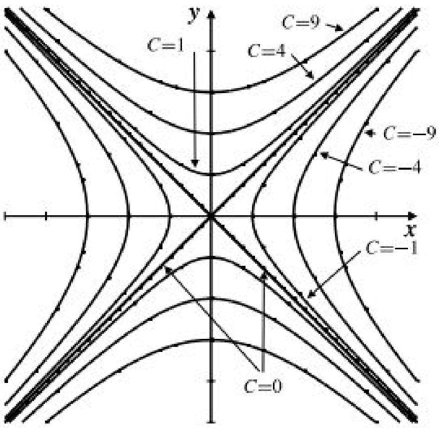

Figura 7.60 Algunas curvas de la familia $y^2 - x^2 = C$.

Ejemplo 2 Resuelva el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x^2y^3 \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

Solución Al separar la ecuación diferencial se obtiene $\dfrac{dy}{y^3} = x^2\,dx$. Entonces,

$$\int \frac{dy}{y^3} = \int x^2\,dx, \quad \text{de forma que} \quad \frac{-1}{2y^2} = \frac{x^3}{3} + C$$

Como $y = 3$ cuando $x = 1$, tenemos que $-\frac{1}{18} = \frac{1}{3} + C$ y $C = -\frac{7}{18}$. Sustituyendo este valor en la solución anterior y despejando y se obtiene

$$y(x) = \frac{3}{\sqrt{7 - 6x^3}}$$

Esta solución es válida para $x < \left(\frac{7}{6}\right)^{1/3}$ (*véase* la Figura 7.61).

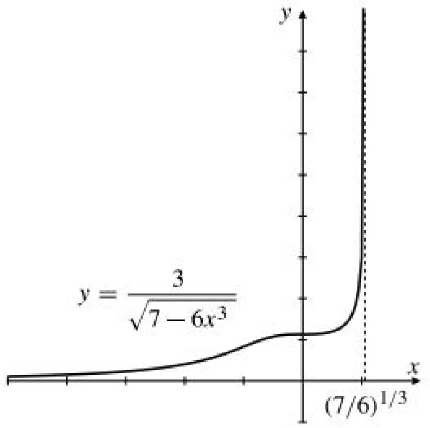

Figura 7.61 La solución de $\dfrac{dy}{dx} = x^2y^3$ que cumple $y(1) = 3$.

Ejemplo 3 Resuelva la **ecuación integral** $y(x) = 3 + 2\displaystyle\int_1^x ty(t)\,dt$.

Solución Diferenciando la ecuación integral con respecto a x se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = 2xy(x) \quad \text{o} \quad \frac{dy}{y} = 2x\,dx$$

por tanto, $\ln|y(x)| = x^2 + C$ y, despejando y, $y(x) = C_1e^{x^2}$. Sustituyendo $x = 1$ en la ecuación integral se obtiene un valor inicial: $y(1) = 3 + 0 = 3$, por lo que $C_1 = 3/e$ y

$$y(x) = 3e^{x^2-1}$$

Ejemplo 4 **(Una solución al problema de la concentración)** Un tanque contiene inicialmente 1000 l de salmuera con 50 kg de sal disuelta. Al tanque fluye salmuera que contiene 10 g de sal por litro con una velocidad constante de 10 l/min. Si el contenido del tanque se mantiene perfectamente mezclado todo el tiempo, y la solución sale del tanque con una velocidad de 10 l/min, ¿cuánta sal quedará en el tanque transcurridos 40 minutos?

Solución Sea $x(t)$ el número de kilogramos de sal en solución en el tanque después de s minutos. Por tanto $x(0) = 50$. Se incorpora sal al tanque con una velocidad de 10 g/l × 10 l/min = 100 g/min = = 1/10 kg/min. El tanque contiene 1000 l de líquido en todo momento, por lo que la concentración de sal en el tanque en el instante t es $x/1000$ kg/l. Como el contenido del tanque se vacía con una velocidad de 10 l/min, la sal se elimina con una velocidad de $10x/1000 = x/100$ kg/min. Por tanto,

$$\frac{dx}{dt} = \text{velocidad de entrada} - \text{velocidad de salida} = \frac{1}{10} - \frac{x}{100} = \frac{10-x}{100}$$

o bien

$$\frac{dx}{10-x} = \frac{dt}{100}$$

Integrando los dos miembros de esta ecuación se obtiene

$$-\ln|10-x| = \frac{t}{100} + C$$

Obsérvese que $x(t) \neq 10$ para todo instante t finito (ya que $\ln 0$ no está definido). Como $x(0) = 50 > 10$, se deduce que $x(t) > 10$ para todo $t > 0$ ($x(t)$ es necesariamente continua, por lo que no puede tomar valores menores que 10 sin haber tomado el valor 10 por el Teorema del Valor Medio). Por lo tanto, podemos quitar el valor absoluto de la solución anterior y obtener

$$\ln(x-10) = -\frac{t}{100} - C$$

Como $x(0) = 50$, tenemos que $-C = \ln 40$ y

$$x = x(t) = 10 + 40e^{-t/100}$$

Tras 40 minutos habrá $10 + 40e^{-0.4} \approx 36.8$ kg de sal en el tanque.

Ejemplo 5 **(Un problema de velocidad de reacción)** En una reacción química que se produce en una solución, una molécula de cada uno de los dos reactivos A y B se combina para formar una molécula del producto C. De acuerdo con la ley de acción de masas, la reacción procede con una velocidad proporcional al producto de las concentraciones de A y B en la solución. Por tanto, si inicialmente hay a moléculas/cm^3 del reactivo A y b moléculas/cm^3 del reactivo B, entonces el número $x(t)$ de moléculas/cm^3 de C presentes del instante t en adelante está determinado por la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)$$

Resolveremos esta ecuación mediante la técnica de descomposición en fracciones simples partiendo del supuesto de que $b \neq a$:

$$\int \frac{dx}{(a-x)(b-x)} = k\int dt = kt + C$$

Como

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)} = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a-x} - \frac{1}{b-x}\right)$$

y como necesariamente $x \leqslant a$ y $x \leqslant b$, tenemos que

$$\frac{1}{b-a}(-\ln(a-x) + \ln(b-x)) = kt + C$$

o bien

$$\ln\left(\frac{b-x}{a-x}\right) = (b-a)kt + C_1, \quad \text{siendo } C_1 = (b-a)C$$

Por hipótesis, $x(0) = 0$, por lo que $C_1 = \ln(b/a)$ y

$$\ln\frac{a(b-x)}{b(a-x)} = (b-a)kt$$

De la ecuación anterior se puede despejar x resultando $x = x(t) = \dfrac{ab(e^{(b-a)kt} - 1)}{be^{(b-a)kt} - a}$.

Ejemplo 6 Obtenga una familia de curvas de forma que cada una de ellas corte a cualquier parábola con ecuación $y = Cx^2$ formando ángulos rectos.

Solución La familia de parábolas $y = Cx^2$ cumple la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x^2}\right) = \frac{d}{dx}C = 0$$

es decir,

$$x^2\frac{dy}{dx} - 2xy = 0 \quad \text{o} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$$

Cualquier curva que corte a las parábolas $y = Cx^2$ formando ángulos rectos debe tener en cualquier punto (x, y) una pendiente igual al inverso cambio de signo de la pendiente de la parábola particular que pasa por ese punto. Por tanto, esas curvas deberán cumplir

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y}$$

Separando las variables se llega a $2y\,dy = -x\,dx$, e integrando ambos miembros resulta $y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C_1$ o $x^2 + 2y^2 = C$, siendo $C = 2C_1$. Esta ecuación representa a una familia de elipses centradas en el origen. Las elipses y las parábolas se cortan formando ángulos rectos, como se muestra en la Figura 7.62. Cuando las curvas de una familia cortan a las curvas de una segunda familia formando ángulos rectos, se dice que una de ellas es la familia de **trayectorias ortogonales** de la otra familia.

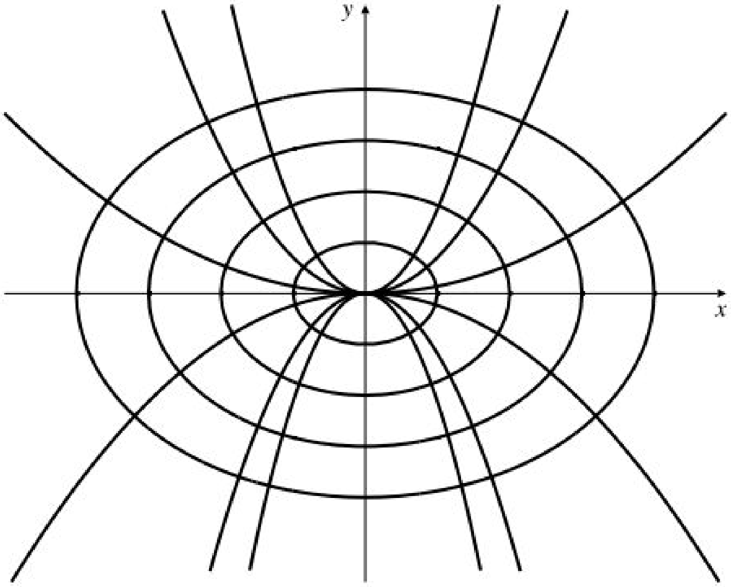

Figura 7.62 Las parábolas $y = C_1x^2$ y las elipses $x^2 + 2y^2 = C_2$ se cortan formando ángulos rectos.

Ecuaciones lineales de primer orden

Una ecuación diferencial **lineal** de primer orden es de la forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

siendo $p(x)$ y $q(x)$ funciones dadas, que se suponen continuas. Estas ecuaciones se pueden resolver (es decir, obtener y en función de x) mediante el procedimiento siguiente.

Sea $\mu(x)$ una primitiva de $p(x)$:

$$\mu(x) = \int p(x)\,dx \quad \text{y} \quad \frac{d\mu}{dx} = p(x)$$

Si $y = y(x)$ cumple la ecuación dada, entonces se puede calcular, utilizando la Regla del Producto,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(e^{\mu(x)}y(x)) &= e^{\mu(x)}\frac{dy}{dx} + e^{\mu(x)}\frac{d\mu}{dx}y(x)\\ &= e^{\mu(x)}\left(\frac{dy}{dx} + p(x)y\right) = e^{\mu(x)}q(x)\end{aligned}$$

Por tanto, $e^{\mu(x)}y(x) = \int e^{\mu(x)}q(x)\,dx$, o

$$\boxed{y(x) = e^{-\mu(x)} \int e^{\mu(x)}q(x)\,dx}$$

En los ejemplos que siguen volveremos a utilizar este método, en vez de la fórmula final. $e^{\mu(x)}$ se denomina **factor de integración** de la ecuación diferencial dada porque, si se multiplica la ecuación por $e^{\mu(x)}$, el miembro izquierdo se convierte en la derivada de $e^{\mu(x)}y(x)$.

Ejemplo 7 Resuelva $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = 1$ para $x > 0$.

Solución En este caso, $p(x) = 1/x$, por lo que $\mu(x) = \int p(x)\,dx = \ln x$ para $x > 0$ y $e^{\mu(x)} = x$. Calculamos

$$\frac{d}{dx}(xy) = x\frac{dy}{dx} + y = x\left(\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x}\right) = x$$

y

$$xy = \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

Finalmente,

$$y = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right) = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}$$

que es una solución de la ecuación dada para cualquier valor de la constante C.

Ejemplo 8 Resuelva $\dfrac{dy}{dx} + xy = x^3$.

Solución En este caso, $p(x) = x$, por lo que $\mu(x) = x^2/2$ y $e^{\mu(x)} = e^{x^2/2}$. Calculamos

$$\frac{d}{dx}(e^{x^2/2}y) = e^{x^2/2}\frac{dy}{dx} + e^{x^2/2}xy = e^{x^2/2}\left(\frac{dy}{dx} + xy\right) = x^3e^{x^2/2}$$

por tanto,

$$\begin{aligned} e^{x^2/2}y &= \int x^3e^{x^2/2}\,dx \qquad \begin{array}{lll} \text{Sea} & U = x^2, & dV = xe^{x^2/2}\,dx \\ \text{Siendo} & dU = 2x\,dx, & V = e^{x^2/2} \end{array} \\ &= x^2e^{x^2/2} - 2\int xe^{x^2/2}\,dx \\ &= x^2e^{x^2/2} - 2e^{x^2/2} + C \end{aligned}$$

y, finalmente, $y = x^2 - 2 + Ce^{-x^2/2}$.

Ejemplo 9 **(Un circuito resistencia-inductancia)** Un circuito eléctrico (Figura 7.63) contiene una fuente de tensión continua de V voltios, un interruptor, una resistencia de valor R ohmios y una bobina de valor L henrios. El circuito no tiene capacitancia. El conmutador está inicialmente abierto, de forma que no circula corriente, y se cierra en el instante $t = 0$ de forma que la corriente empieza a circular en ese instante. Si la inductancia L fuera cero, la corriente saltaría bruscamente desde 0 amperios cuando $t < 0$ hasta $I = V/R$ amperios cuando $t > 0$. Sin embargo, si $L > 0$, la corriente no puede cambiar instantáneamente;

dependerá del tiempo t. Sea $I(t)$ (amperios) la corriente t segundos después de cerrar el interruptor. Se sabe que $I(t)$ satisface el problema de valor inicial

$$\begin{cases} L\dfrac{dI}{dt} + RI = V \\ I(0) = 0 \end{cases}$$

Calcule $I(t)$. ¿Cuánto vale $\lim_{t\to\infty} I(t)$? ¿Cuánto tiempo debe transcurrir después de que se cierra el interruptor para que la corriente alcance el 90% de su valor límite?

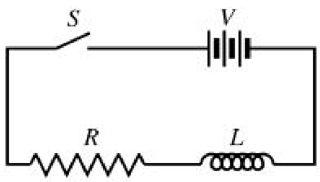

Figura 7.63 Un circuito resistencia-inductancia.

Solución La ecuación diferencial se puede escribir en la forma $\dfrac{dI}{dt} + \dfrac{R}{L}I = \dfrac{V}{L}$. Es lineal y su factor de integración es $e^{\mu(t)}$, siendo

$$\mu(t) = \int \frac{R}{L}\,dt = \frac{Rt}{L}$$

Por tanto,

$$\frac{d}{dt}(e^{Rt/L}I) = e^{Rt/L}\left(\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I\right) = e^{Rt/L}\frac{V}{L}$$

$$e^{Rt/L}I = \frac{V}{L}\int e^{Rt/L}\,dt = \frac{V}{R}e^{Rt/L} + C$$

$$I(t) = \frac{V}{R} + Ce^{-Rt/L}$$

Como $I(0) = 0$, tenemos que $0 = (V/R) + C$, por lo que $C = -V/R$. Por tanto, la intensidad de corriente en cualquier instante $t > 0$ es

$$I(t) = \frac{V}{R}(1 - e^{-Rt/L})$$

Observando esta solución resulta claro que $\lim_{t\to\infty} I(t) = V/R$; la corriente en *estado estacionario* es la corriente que circularía si la inductancia fuera cero.

$I(t)$ alcanzará el 90% de su valor límite cuando

$$\frac{V}{R}(1 - e^{-Rt/L}) = \frac{90}{100}\frac{V}{R}$$

Esta ecuación implica que $e^{-Rt/L} = 1/10$, o $t = (L\ln 10)/R$. La intensidad de corriente alcanzará el 90% de su valor límite en $(L\ln 10)/R$ segundos.

Nuestro ejemplo final revisa un problema típico de *serie de pagos* considerado en la Sección 7.7. Esta vez trataremos el problema como un problema de valor inicial utilizando la ecuación diferencial.

Ejemplo 10 Se abre una cuenta de ahorro con un depósito de A euros. En cualquier instante t posterior, el dinero se deposita en la cuenta de forma continua con una velocidad de $(C + Dt)$ € al año. Si la cuenta tiene un interés nominal de $100R\%$ al año, computado de forma continua, calcule el estado de la cuenta $B(t)$ euros transcurridos t años. Ilustre la solución con los datos $A = 5000$, $C = 1000$, $D = 200$, $R = 0{,}13$ y $t = 5$.

Solución Como se indicó en la Sección 3.4, el cómputo continuo de interés con una tasa nominal de $100R\%$ hace que 1 € crezca hasta valer e^{Rt} € en t años. Si no hubiera depósitos posteriores, el estado de la cuenta crecería de acuerdo con la ecuación diferencial del crecimiento exponencial:

$$\frac{dB}{dt} = RB$$

Al permitir un crecimiento adicional debido a la aportación de depósitos, podemos observar que B debe cumplir la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dB}{dt} = RB + (C + Dt)$$

o, en otros términos, $dB/dt - RB = C + Dt$. Se trata de una ecuación lineal en B con $p(t) = -R$. Por tanto, podemos tomar $\mu(t) = -Rt$ y $e^{\mu(t)} = e^{-Rt}$. Ahora calculamos

$$\frac{d}{dt}(e^{-Rt}B(t)) = e^{-Rt}\frac{dB}{dt} - Re^{-Rt}B(t) = (C + Dt)e^{-Rt}$$

y

$$\begin{aligned} e^{-Rt}B(t) &= \int (C + Dt)e^{-Rt}\,dt \qquad \begin{array}{lll} \text{Sea} & U = C + Dt, & dV = e^{-Rt}\,dt \\ \text{Siendo} & dU = D\,dt, & V = -e^{-Rt}/R \end{array} \\ &= -\frac{C + Dt}{R}e^{-Rt} + \frac{D}{R}\int e^{-Rt}\,dt \\ &= -\frac{C + Dt}{R}e^{-Rt} - \frac{D}{R^2}e^{-Rt} + K, \qquad (K = \text{constante}) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$B(t) = -\frac{C + Dt}{R} - \frac{D}{R^2} + Ke^{Rt}$$

Como $A = B(0) = -\dfrac{C}{R} - \dfrac{D}{R^2} + K$, tenemos que $K = A + \dfrac{C}{R} + \dfrac{D}{R^2}$ y

$$B(t) = \left(A + \frac{C}{R} + \frac{D}{R^2}\right)e^{Rt} - \frac{C + Dt}{R} - \frac{D}{R^2}$$

Para la ilustración $A = 5000$, $C = 1000$, $D = 200$, $R = 0.13$ y $t = 5$ obtenemos, utilizando la calculadora, $B(5) = 19\,762.82$. La cuenta contendrá 19 762.82 € después de cinco años, en estas circunstancias. ■

Ejercicios 7.9

Resuelva las ecuaciones separables de los Ejercicios 1-10.

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{2x}$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3y - 1}{x}$

3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{y^2}$

4. $\dfrac{dy}{dx} = x^2y^2$

5. $\dfrac{dY}{dt} = tY$

6. $\dfrac{dx}{dt} = e^x \operatorname{sen} t$

7. $\dfrac{dy}{dx} = 1 - y^2$

8. $\dfrac{dy}{dx} = 1 + y^2$

9. $\dfrac{dy}{dt} = 2 + e^y$

10. $\dfrac{dy}{dx} = y^2(1 - y)$

Resuelva las ecuaciones lineales de los Ejercicios 11-16.

11. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2y}{x} = x^2$

12. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{1}{x^2}$

13. $\dfrac{dy}{dx} + 2y = 3$

14. $\dfrac{dy}{dx} + y = e^x$

15. $\dfrac{dy}{dx} + y = x$

16. $\dfrac{dy}{dx} + 2e^xy = e^x$

Resuelva los problemas de valor inicial de los Ejercicios 17-20.

17. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + 10y = 1 \\ y(1/10) = 2/10 \end{cases}$ **18.** $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + 3x^2y = x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x^2y' + y = x^2e^{1/x} \\ y(1) = 3e \end{cases}$ **20.** $\begin{cases} y' + (\cos x)y = 2xe^{-\operatorname{sen} x} \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$

Resuelva las ecuaciones integrales de los Ejercicios 21-24.

21. $y(x) = 2 + \displaystyle\int_0^x \frac{t}{y(t)}\,dt$ **22.** $y(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x \frac{(y(t))^2}{1+t^2}\,dt$

23. $y(x) = 1 + \displaystyle\int_1^x \frac{y(t)\,dt}{t(t+1)}$ **24.** $y(x) = 3 + \displaystyle\int_0^x e^{-y(t)}\,dt$

25. Si $a > b > 0$ en el Ejemplo 5, calcule $\lim_{t\to\infty} x(t)$.

26. Si $b > a > 0$ en el Ejemplo 5, calcule $\lim_{t\to\infty} x(t)$.

27. ¿Por qué no es válida la solución dada en el Ejemplo 5 para $a = b$? Calcule la solución para el caso $a = b$.

28. Un objeto de masa m que cae cerca de la superficie de la tierra es retrasado por la resistencia del aire proporcional a su velocidad de forma que, de acuerdo con la Segunda Ley del Movimiento de Newton,

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

siendo $v = v(t)$ la velocidad del objeto en el instante t, y g la aceleración de la gravedad cerca de la superficie de la tierra. Suponiendo que el objeto parte del reposo en el instante $t = 0$, es decir, $v(0) = 0$, calcule la velocidad $v(t)$ para cualquier instante $t > 0$ (hasta que el objeto llega al suelo). Demuestre que $v(t)$ tiende a un determinado límite cuando $t \to \infty$. ¿Es necesaria la fórmula explícita de $v(t)$ para determinar esta velocidad límite?

29. Repita el Ejercicio 28, con la única diferencia de asumir que la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad, de forma que la ecuación del movimiento es

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2$$

30. Calcule el ahorro acumulado tras un año si el estado inicial de la cuenta era de 1000 €, el interés se paga de forma continua en la cuenta con una tasa nominal del 10% anual, computado de forma continua, y la cuenta disminuye de forma continua (por ejemplo, debido a los impuestos) con una velocidad de $y^2/1\,000\,000$ de euros al año, siendo $y = y(t)$ el estado de la cuenta transcurridos t años. ¿Cuánto puede crecer la cuenta? ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que la cuenta alcance la mitad del valor máximo?

31. Calcule la familia de curvas que cortan a las hipérbolas $xy = C$ formando ángulos rectos.

32. Repita la solución al problema de concentración del Ejemplo 4, cambiando la velocidad de entrada de salmuera en el tanque a 12 l/min y dejando todos los otros datos con el mismo valor del ejemplo. Nótese que el volumen de líquido en el tanque ya no es constante con el tiempo.

Repaso del capítulo

Ideas clave

- **¿Qué significan las siguientes frases?**
  - ◇ Sólido de revolución.
  - ◇ Elemento de volumen.
  - ◇ Longitud de arco de una curva.
  - ◇ Momento de un punto de masa m respecto a $x = 0$.
  - ◇ Centro de masas de una distribución de masas.
  - ◇ Centroide de una región plana.
  - ◇ Ecuación diferencial separable de primer orden.
  - ◇ Ecuación diferencial lineal de primer orden.
- **Sea D la región plana $0 \leqslant y \leqslant f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Utilice integrales para representar lo siguiente:**
  - ◇ El volumen generado al rotar D alrededor del eje x.
  - ◇ El volumen generado al rotar D alrededor del eje y.
  - ◇ El momento de D respecto al eje y.
  - ◇ El momento de D respecto al eje x.
  - ◇ El centroide de D.
- **Sea C la curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Utilice integrales para representar lo siguiente:**
  - ◇ La longitud de C.
  - ◇ El área de la superficie generada al rotar C alrededor del eje x.
  - ◇ El área de la superficie generada al rotar C alrededor del eje y.

Ejercicios de repaso

1. La Figura 7.64 muestra la sección cruzada a lo largo de los ejes de dos carretes circulares. El carrete de la izquierda puede almacenar 1000 m de hilo si se enrolla completo perfectamente. ¿Cuántos metros de hilo del mismo tamaño puede almacenar el carrete de la derecha?

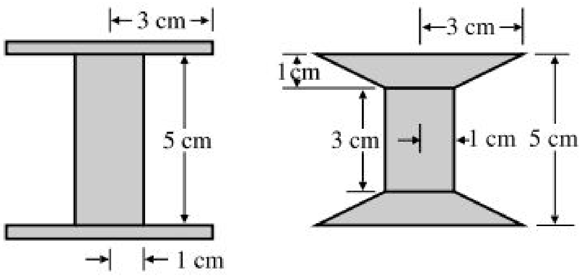

Figura 7.64

2. El agua de un cuenco se evapora con una velocidad proporcional al área de su superficie. Demuestre que la profundidad de agua en el cuenco disminuye con una velocidad constante, independientemente de la forma del cuenco.

3. Un barril mide 4 pies de altura y tiene un volumen de 16 pies cúbicos. Su base y su tapa son discos circulares de radio 1 pie, y su pared lateral se obtiene rotando la parte de la parábola $x = a - by^2$ que está entre $y = -2$ y $y = 2$ alrededor del eje y. Calcule, aproximadamente, los valores de las constantes positivas a y b.

4. El sólido de la Figura 7.65 se corta de un cilindro vertical de radio 10 cm mediante dos planos que forman ángulos de 60° con la horizontal. Calcule su volumen.

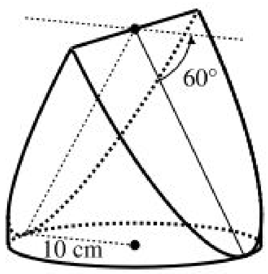

Figura 7.65

5. Calcule con cuatro cifras decimales de precisión el valor de la constante positiva a para la que la curva $y = (1/a)\cosh ax$ tenga una longitud de arco de dos unidades entre $x = 0$ y $x = 1$.

6. Calcule el área de la superficie que se obtiene rotando la curva $y = \sqrt{x}$, $(0 \leqslant x \leqslant 6)$ alrededor del eje x.

7. Calcule el centroide de la región plana $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x^2 + 4y^2 \leqslant 4$.

8. Una placa plana con forma de disco circular tiene un radio de 3 pies y su densidad de área es constante. Se corta un agujero circular de radio 1 pie, centrado a una distancia de 1 pie desde el centro del disco. Calcule el centro de masas de la parte restante del disco.

9. De acuerdo con la Ley de Boyle, si un gas se expande o se comprime isotérmicamente el producto de su presión por su volumen permanece constante. El cilindro de la Figura 7.66 se llena con un gas que realiza una fuerza de 1000 N sobre el pistón cuando éste está a 20 cm por encima de la base del cilindro. ¿Cuánto trabajo realiza el pistón si comprime el gas isotérmicamente, descendiendo hasta una altura de 5 cm por encima de la base?

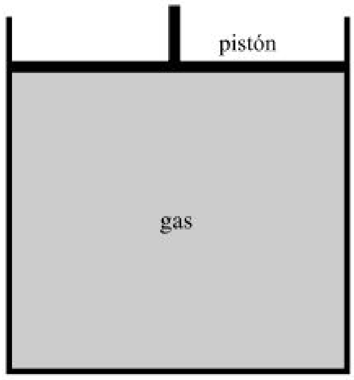

Figura 7.66

10. Suponga dos funciones f y g que tienen la siguiente propiedad: para todo $a > 0$, el sólido producido al rotar la región del plano xy limitada por $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = 0$ y $x = a$ alrededor del eje x tiene el mismo volumen que el sólido que se produce al rotar la misma región alrededor del eje y. ¿Qué se puede decir sobre f y g?

11. Calcule la ecuación de la curva que pasa por el punto (2, 4) y tiene pendiente $3y/(x - 1)$ en cualquier punto (x, y) de la misma.

12. Obtenga una familia de curvas que corte a las elipses de la forma $3x^2 + 4y^2 = C$ formando ángulos rectos.

13. Los ingresos y los gastos de un negocio estacional producen depósitos y retiradas de una cuenta de un banco, que se pueden modelar en forma de una velocidad de flujo en la cuenta de $P(t)$ € al año en el instante t (años), siendo $P(t) = 10\,000 \operatorname{sen}(2\pi t)$. Si el interés de la cuenta tiene una tasa instantánea del 4% anual y hay 8000 € en el instante $t = 0$, ¿cuánto habrá en la cuenta dos años más tarde?

Problemas avanzados

1. La curva $y = e^{-kt} \operatorname{sen} x$ $(x \geqslant 0)$ se rota alrededor del eje x para generar una ristra de «gotas» cuyos volúmenes disminuyen hacia la derecha si $k > 0$.

(a) Demuestre que la relación entre el volumen de la gota $(n+1)$ y la gota n depende de k, pero no de n.
(b) ¿Para qué valor de k es igual a 1/2 la relación del apartado (a)?
(c) Calcule el volumen total de todas las gotas en función de $k > 0$.

2. (Conservación de tierra) Una paisajista desea crear a nivel del suelo un estanque con forma de anillo, con un radio exterior de 10 m y una profundidad máxima de 1 m rodeando una colina que se construirá utilizando la tierra excavada para formar el estanque (*véase* la Figura 7.67). Decide utilizar un polinomio de cuarto grado para determinar la forma de la sección cruzada de la colina y del fondo del estanque: a una distancia de r metros del centro de la composición, la altura por encima o por debajo del nivel normal del suelo será

$$h(r) = a(r^2 - 100)(r^2 - k^2) \text{ metros}$$

para algún valor $a > 0$, siendo k el radio interior del estanque. Calcule k y a de forma que se cumplan los requisitos dados anteriormente.

¿Cuánta tierra se debe mover del estanque para construir la colina?

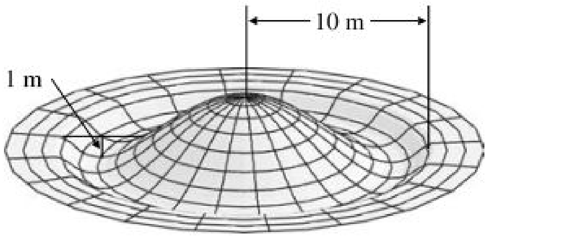

Figura 7.67

3. (Diseño de un cohete) El morro de un cohete es un sólido de revolución con radio en la base r y altura h. El morro se debe unir suavemente con el cuerpo cilíndrico del cohete (*véase* la Figura 7.68). Tomando como origen la punta del morro del cohete y como eje x el eje central del cohete, se pueden obtener varias formas de morro rotando la curva cúbica:

$$y = f(x) = ax + bx^2 + cx^3$$

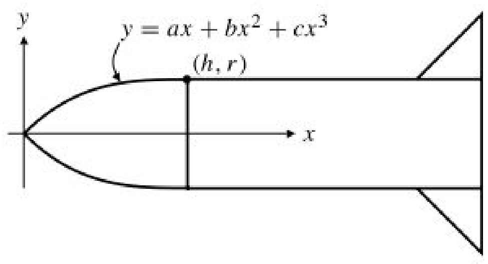

Figura 7.68

alrededor del eje x. La curva cúbica debe tener pendiente 0 en $x = h$, y su pendiente debe ser positiva para $0 < x < h$. Calcule la curva cúbica concreta que maximiza el volumen del morro. Demuestre también que esta elección de la curva cúbica hace la pendiente dy/dx en el origen lo más grande posible y, por tanto, corresponde al morro más puntiagudo.

4. (Splines cuadráticos) Sean $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ y $C = (x_3, y_3)$ tres puntos que cumplen $x_1 < x_2 < x_3$. Una función $f(x)$ cuya gráfica pasa por los tres puntos se denomina *spline cuadrático* si $f(x)$ es una función cuadrática en el intervalo $[x_1, x_2]$ y, posiblemente, una función cuadrática diferente en el intervalo $[x_2, x_3]$, y las dos funciones cuadráticas tienen la misma pendiente en x_2. En este problema, tome $A = (0, 1)$, $B = (1, 2)$ y $C = (3, 0)$.

(a) Obtenga una familia $f(x, m)$ de splines cuadráticos de un parámetro que pasen por A, B y C, y que tengan pendiente m en B.
(b) Calcule el valor de m para que la longitud de la gráfica $y = f(x, m)$ entre $x = 0$ y $x = 3$ sea mínima. ¿Cuánto vale dicha longitud mínima? Compárela con la longitud de la línea poligonal ABC.

5. Se debe construir un muro de cemento con forma de anillo circular, con una altura máxima de 2 m, un radio interior de 15 m, y una anchura de 1 m a nivel de tierra, de forma que su radio exterior sea de 16 m (*véase* la Figura 7.69). La sección cruzada transversal de la pared a una distancia de $15 + x$ m del centro del anillo tiene la forma de la función cúbica

$$f(x) = x(1 - x)(ax + b) \text{ m}$$

que no se debe anular en ningún punto del intervalo abierto $(0, 1)$. Calcule los valores de a y b que minimizan el volumen total de cemento necesario para construir el muro.

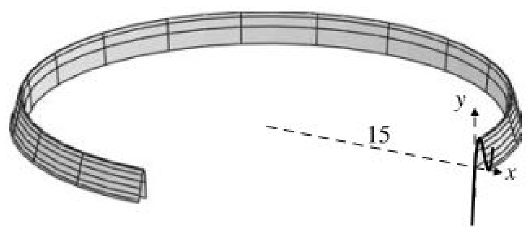

Figura 7.69

6. (Volumen de una bola n-dimensional) El espacio euclídeo n-dimensional está formado por los *puntos* $(x_1, x_2, ..., x_n)$ con n coordenadas reales. Por analogía con el caso tridimensional, denominaremos al conjunto de puntos que cumplen la desigualdad $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant r^2$, *bola* n-dimensional centrada en el origen. Por ejemplo, la bola unidimensional es el intervalo $-r \leqslant x_1 \leqslant r$, cuyo *volumen* (es decir, *longitud*) es $V_1(r) = 2r$. La bola bidimensional es el disco $x_1^2 + x_2^2 \leqslant r^2$, cuyo *volumen* (es decir, *área*) es

$$V_2(r) = \pi r^2 = \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

$$= \int_{-r}^{r} V_1(\sqrt{r^2 - x^2})\, dx$$

El volumen de la bola tridimensional $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant r^2$ es

$$V_3(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 = \int_{-r}^{r} \pi(\sqrt{r^2 - x^2})^2\, dx$$

$$= \int_{-r}^{r} V_2(\sqrt{r^2 - x^2})\, dx$$

Por analogía con estas fórmulas, el volumen $V_n(r)$ de una bola n-dimensional de radio r es la integral del volumen de la bola $(n-1)$-dimensional de radio $\sqrt{r^2 - x^2}$ desde $x = -r$ hasta $x = r$:

$$V_n(r) = \int_{-r}^{r} V_{n-1}(\sqrt{r^2 - x^2})\, dx$$

Utilizando un programa de matemáticas por computador, calcule $V_4(r)$, $V_5(r)$, ..., $V_{10}(r)$ y plantee fórmulas para $V_{2n}(r)$ (las bolas de dimensión par) y $V_{2n+1}(r)$ (las bolas de dimensión impar). Si su programa de matemáticas por ordenador es lo suficientemente potente, podrá verificar sus planteamientos por inducción. Si no es así, utilícelos para predecir $V_{11}(r)$ y $V_{12}(r)$; después compruebe su previsión empezando con $V_{10}(r)$.

*7. **(El problema de la aguja de Buffon)** Una superficie plana horizontal está marcada con líneas paralelas separadas 10 cm, como se muestra en la Figura 7.70. Se lanza una aguja de 5 cm de longitud de forma aleatoria en la superficie. Calcule la probabilidad de que la aguja corte a una de las líneas. *Sugerencia*: Consideremos como punto de referencia el extremo «inferior» de la aguja (es decir, el que apunta hacia abajo de la página en la figura). Si los dos extremos están a la misma altura, se utilizará el extremo izquierdo. Sea y la distancia desde el punto de referencia a la línea más cercana por encima de él, y sea θ el ángulo que forman la aguja y la recta que se extiende hacia la derecha desde el punto de referencia en la figura. ¿Cuáles son los posibles valores de y y de θ? Dibuje en un plano con coordenadas cartesianas θ e y, la región formada por todos los puntos (θ, y) correspondientes a las posibles posiciones de la aguja. Dibuje también la región correspondiente a aquellas posiciones en las que la aguja cruza una de las líneas paralelas. La probabilidad pedida es el área de la segunda región dividida por el área de la primera.

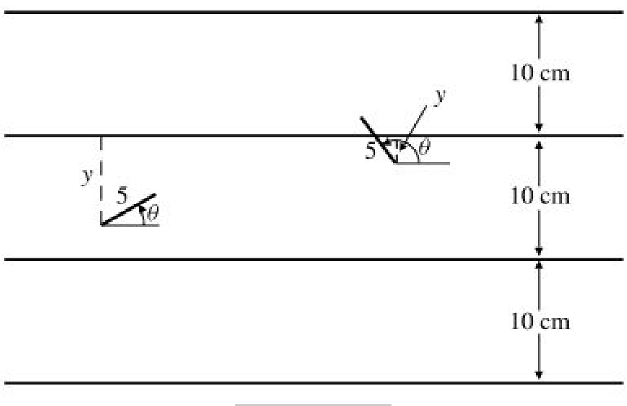

Figura 7.70

*8. **(El camino de un remolque)** Obtenga la ecuación $y = f(x)$ de una curva en el primer cuadrante del plano xy, empezando en el punto $(L, 0)$ y con la propiedad de que si la tangente a la curva en P cruza al eje y en Q, entonces la longitud de PQ es la constante L (*véase* la Figura 7.71). Esta curva se denomina **tractriz**, del participio latino *tractus*, que significa arrastrado. Corresponde al camino del extremo trasero P de un remolque de longitud L, originalmente dispuesto a lo largo del eje x, cuando es remolcado (arrastrado) por un tractor Q que se mueve por el eje y, alejándose del origen.

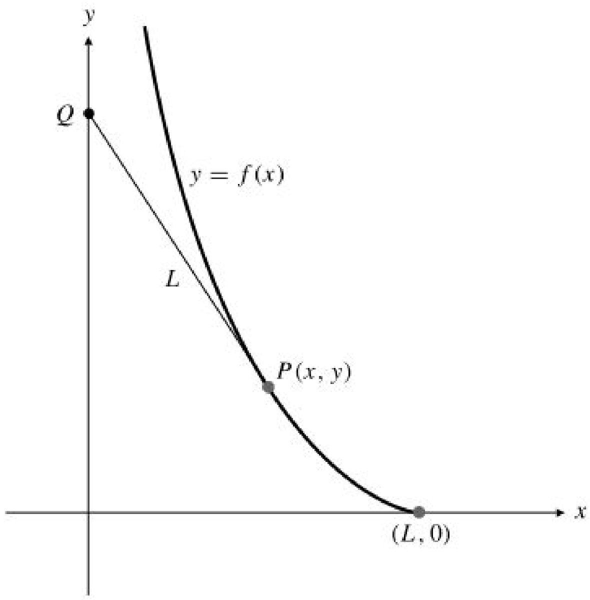

Figura 7.71

*9. **(Aproximación al área de superficie de un elipsoide)** Un geógrafo físico que estudia el flujo de las corrientes que rodean piedras ovales necesita calcular las áreas de superficie de muchas piedras que se modelan como elipsoides:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Desea obtener una fórmula simple de dicha área de superficie, de forma que la pueda incluir en una hoja de cálculo que contenga las medidas a, b y c de las piedras. Desafortunadamente, no hay una fórmula exacta para calcular el área de un elipsoide general por medio de funciones elementales. Sin embargo, sí existen fórmulas para elipsoides de revolución, donde dos de los tres semiejes son iguales. Este tipo de elipsoides se denominan esferoides; un *esferoide oblado* (como la tierra) tiene sus dos semiejes más largos iguales; un *esferoide prolado* (como un balón de rugby) tiene sus dos semiejes más cortos iguales. Una aproximación razonable para calcular el área de un elipsoide general se puede obtener mediante interpolación lineal de esos dos casos.

Para concretar, supongamos que los semiejes se disponen en orden decreciente $a \geqslant b \geqslant c$, y sea el área de la superficie $S(a, b, c)$.

(a) Calcule $S(a, a, c)$, el área de un esferoide oblado.

(b) Calcule $S(a, c, c)$, el área de un esferoide prolado.

(c) Construya una aproximación a $S(a, b, c)$ que divida el intervalo desde $S(a, a, c)$ hasta $S(a, c, c)$ en la misma proporción que b divide el intervalo desde a hasta c.

(d) Aproxime el área del elipsoide

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$$

utilizando el método anterior.