GHEORGHE PROCOPIUC

ANALIZĂ MATEMATICĂ
şi
ECUAŢII DIFERENŢIALE

IAŞI, 2007

Cuprins

Capitolul 1

ELEMENTE DE TEORIA SPAŢIILOR METRICE

1.1 Introducere

1.1.1 Elemente de teoria teoria mulţimilor

Noţiunea de mulţime este o noţiune primară. O mulţime X este precizată fie prin indicarea elementelor sale, $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, fie prin indicarea unei proprietăţi P ce caracterizează elementele mulţimii, $X = \{x \mid x \text{ are proprietatea } P\}$.

Dacă x este element al mulţimii X scriem $x \in X$, dacă x nu este element al mulţimii X scriem $x \notin X$.

Mulţimile X şi Y sunt *egale* dacă sunt formate din aceleaşi elemente. Deci

$$X = Y \quad \text{pentru} \quad x \in X \Longleftrightarrow x \in Y.$$

A este *submulţime* sau *parte* a mulţimii X şi se notează $A \subset X$ sau $X \supset A$, dacă $x \in A \Longrightarrow x \in X$.

Evident că $X = Y$ d.d. $X \subset Y$ şi $Y \subset X$.

Mulţimea care nu conţine nici un element se numeşte *mulţimea vidă*, se notează cu $\emptyset$ şi este submulţime a oricărei mulţimi X.

Mulţimea părţilor unei mulţimi X se notează $\mathcal{P}(X)$.

Fie A şi B două mulţimi oarecare. Mulţimea $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$ se numeşte *reuniunea* mulţimilor A şi B, iar mulţimea $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \in B\}$ se numeşte *intersecţia* mulţimilor A şi B.

Mulţimile A şi B se numesc *disjuncte* dacă $A \cap B = \emptyset$. Mulţimea $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \notin B\}$ se numeşte *diferenţa* mulţimilor A şi B, în această ordine. Dacă $B \subset A$, diferenţa $A \setminus B$ se notează $\mathcal{C}_A B$ şi se numeşte *complementara* mulţimii B relativă la mulţimea A.

Prin *produs cartezian* al mulţinilor $A_1, A_2, \ldots, A_n$, în această ordine, înţelegem mulţimea sistemelor ordonate de n elemente (n-uple) $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ cu $a_i \in A_i$, $i = \overline{1, n}$,

adică
$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n),\ a_i \in A_i,\ i = \overline{1,n}\}.$$

Elementele $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ şi $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ sunt *egale* dacă $a_i = b_i$, $i = \overline{1,n}$.
Dacă $A_i = A$, $i = \overline{1,n}$, se foloseşte notaţia $A \times A \times \cdots \times A = A^n$.

1.1.2 Noţiunea de aplicaţie

Fie X şi Y două mulţimi nevide. Se numeşte *aplicaţie f a mulţimii X în mulţimea Y* o corespondenţă prin care fiecărui element $x \in X$ i se asociază în mod unic un element $y \in Y$.

Orice aplicaţie $f : X \to Y$ trebuie concepută ca ansamblul format din trei elemente: mulţimea X numită *mulţimea de definiţie*, mulţimea Y numită mulţimea în care f ia valori şi legea de corespondenţă f.

Dacă $y \in Y$ corespunde elementului $x \in X$, atunci notăm $y = f(x)$ sau $x \mapsto f(x)$. În acest caz y se numeşte *imaginea lui x prin f* sau *valoarea aplicaţiei f în x*, iar x se numeşte *contraimaginea* sau *imaginea inversă* a lui y prin f.

Pentru noţiunea de aplicaţie se mai utilizează denumirile de *funcţie*, *transformare*, *operator*, sau *funcţională*.

Mulţimea aplicaţiilor definite pe X cu valori în Y se notează cu $\mathcal{F}(X, Y)$.

Aplicaţiile $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(X, Y)$ se numesc *egale*, $f_1 = f_2$, dacă $f_1(x) = f_2(x)$, $\forall x \in X$.

Fie aplicaţia $f : X \to Y$ şi $A \subset X$, $B \subset Y$. Mulţimea
$$f(A) = \{y = f(x) \mid x \in A\} = \{y \in Y \mid \exists\, x \in A,\ y = f(x)\} \subset Y$$
se numeşte *imaginea mulţimii A prin f*, iar mulţimea
$$f^{-1}(B) = \{x \in X \ \mid\ f(x) \in B\} \subset X$$
se numeşte *contraimaginea mulţimii B prin f*. Dacă $B = \{y\}$ se foloseşte notaţia $f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\})$, adică $f^{-1}(y) = \{x \in X \ \mid\ f(x) = y\} \subset X$.

Mulţimea $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$ se numeşte *graficul aplicaţiei $f : X \to Y$*.

Aplicaţia $f : X \to Y$ se numeşte *injectivă* dacă
$$\forall\, x_1, x_2 \in X,\ x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2),$$
care este echivalentă cu implicaţia $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$.

Aplicaţia $f : X \to Y$ este injectivă dacă pentru orice $y \in Y$, mulţimea $f^{-1}(y)$ conţine cel mult un element.

Aplicaţia $f : X \to Y$ se numeşte *surjectivă* sau aplicaţie a lui X *pe* Y dacă $f(X) = Y$, adică dacă oricare ar fi $y \in Y$, există $x \in X$ a.î. $f(x) = y$.

Aplicaţia $f : X \to Y$ se numeşte *bijectivă* dacă este injectivă şi surjectivă.

Fie aplicaţiile $f : X \to Y$ şi $g : Y \to Z$. Aplicaţia $g \circ f : X \to Z$ definită prin $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, pentru orice $x \in X$, se numeşte *compunerea* sau *produsul* aplicaţiilor f şi g, în această ordine.

Dacă $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ şi $h : Z \to U$, atunci $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, deci compunerea aplicaţiilor este *asociativă*.

Aplicaţia $1_X : X \to X$ (sau $i : X \to X$) definită prin $1_X(x) = x$, pentru orice $x \in X$, se numeşte *aplicaţia identică* a mulţimii X.

Aplicaţia $f : X \to Y$ se numeşte *inversabilă* dacă există aplicaţia $f^{-1} : Y \to X$, numită *inversa lui* f, a.î.

$$f^{-1} \circ f = 1_X, \ \ f \circ f^{-1} = 1_Y. \tag{1.1}$$

Teorema 1.1 *O aplicaţie inversabilă are inversă unică.*

◁ Să presupunem că ar exista două aplicaţii $f_1^{-1}, f_2^{-1} : Y \to X$ care satisfac condiţiile (1.1). Atunci

$$f_2^{-1} = 1_X \circ f_2^{-1} = (f_1^{-1} \circ f) \circ f_2^{-1} = f_1^{-1} \circ (f \circ f_2^{-1}) = f_1^{-1} \circ 1_Y = f_1^{-1}. \ \triangleright$$

Teorema 1.2 *Aplicaţia $f : X \to Y$ este inversabilă d.d. este bijectivă.*

◁ **Necesitatea.** Dacă f este inversabilă şi f^{-1} este inversa sa, are loc (1.1). Cu $(1.1)_1$ avem că

$$\forall\, x_1, x_2 \in X : \ \ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (f^{-1} \circ f)(x_1) = (f^{-1} \circ f)(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Deci f este injectivă.

Aplicaţia f este şi surjectivă deoarece, din $(1.1)_2$ avem

$$y = 1_Y(y) = (f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)), \ \ \forall\, y \in Y,$$

de unde rezultă că orice $y \in Y$ este imaginea unui element $x \in X$. Acest element este $x = f^{-1}(y)$.

Suficienţa. Fie $f : X \to Y$ o aplicaţie bijectivă. Definim aplicaţia $f^{-1} : Y \to X$ prin condiţia

$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x), \ \ x \in X, \ y \in Y. \tag{1.2}$$

Aplicaţia f^{-1} este bine definită deoarece f este injectivă şi surjectivă. În plus, avem

$$f^{-1}(f(x)) = x, \ \forall\, x \in X, \ \forall\, y \in Y,$$

adică aplicaţia definită prin (1.2) satisface (1.1), şi ţinând seama de Teorema 1.1, rezultă că aceasta este inversa aplicaţei f. ▷

O aplicaţie $f : \mathbf{N} \to X$ se numeşte *şir* de elemente din X. Se notează $x_n = f(n)$ şi se numeşte *termen general* al şirului. Un şir este bine determinat de termenul său general. Vom nota un şir prin $(x_n)_{n \in N}$ sau simplu (x_n).

1.2 Definiţia spaţiului metric

Fie X o mulţime nevidă.

Definiţia 1.1 *Aplicaţia* $d : X \times X \to \mathbf{R}$ *se numeşte* metrică *sau* distanţă *pe* X *dacă satisface următoarele proprietăţi, numite* axiomele metricii*:*

1^o. $d(x, y) \geq 0$, $\forall\, x, y \in X$ *şi* $d(x, y) = 0$ *d.d.* $x = y$,
2^o. $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall\, x, y \in X$,
3^o. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, $\forall\, x, y, z \in X$.

O mulţime X pe care s-a definit o metrică se numeşte *spaţiu metric*, (X, d).

Elementele unui spaţiu metric se numesc *puncte*.

Exemplul 1.1 *Aplicaţia* $d : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *definită prin*

$$d(x, y) = |x - y|, \quad \forall\, x, y \in \mathbf{R}$$

este o metrică pe $\mathbf{R}$*. Deci* $(\mathbf{R}, d)$ *este un spaţiu metric.*

Exemplul 1.2 *Mulţimea* $\mathbf{Q}$ *a numerelor raţionale împreună cu aplicaţia* $d(x, y) = |x-y|$ *este un spaţiu metric.*

Exemplul 1.3 *Pe mulţimea* $\mathbf{C}$ *a numerelor complexe, aplicaţia*

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \quad \forall\, z_k = x_k + iy_k \in \mathbf{C}$$

este o distanţă. Deci $(\mathbf{C}, d)$ *este un spaţiu metric.*

Exemplul 1.4 *Mulţimea punctelor spaţiului fizic înzestrată cu aplicaţia care asociază fiecărei perechi* P *şi* Q *de puncte distanţa* $d(P, Q)$ *dintre cele două puncte este o metrică.*

Dacă pe X se definesc metricele d_1 şi d_2, atunci (X, d_1) şi (X, d_2) sunt spaţii metrice distincte.

Metricele d_1 şi d_2 se numesc *echivalente* dacă există $a, b \in \mathbf{R}$, $0 < a \leq b$ a.î.

$$ad_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq bd_1(x, y), \quad \forall\, x, y \in X.$$

1.3 Mulţimi de puncte dintr-un spaţiu metric

Fie (X, d) un spaţiu metric, $x_0 \in X$ şi $\varepsilon > 0$. Se numeşte *sferă deschisă* cu centrul în x_0 şi de rază ε, mulţimea

$$S(x_0, \varepsilon) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < \varepsilon\}.$$

Se numeşte *sferă închisă* cu centrul în x_0 şi de rază ε, mulţimea

$$\overline{S}(x_0, \varepsilon) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq \varepsilon\}.$$

Exemplul 1.5 *În* $(\mathbf{R}, d)$*, sfera deschisă*

$$S(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbf{R} \mid d(x, x_0) = |x - x_0| < \varepsilon\}$$

este intervalul deschis $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$*.*

Exemplul 1.6 *În spaţiul metric al punctelor din plan unde $d(P,Q)$ este distanţa dintre punctele P şi Q ale planului, sfera deschisă $S(P_0,\varepsilon)$ este mulţimea punctelor din interiorul cercului cu centrul în P_0 şi de rază ε, iar sfera închisă $\overline{S}(x_0,\varepsilon)$ este formată din mulţimea punctelor din $S(x_0,\varepsilon)$ la care se adaugă punctele de pe cercul cu centrul în P_0 şi de rază ε.*

Exemplul 1.7 *În spaţiul fizic, $S(P_0,\varepsilon)$ este formată din mulţimea punctelor situate în interiorul sferei cu centrul în P_0 şi rază ε.*

Denumirea generală de *sferă* pentru mulţimea $S(x_0,\varepsilon)$ dintr-un spaţiu metric îşi are originea în acest exemplu.

Se numeşte *vecinătate* a punctului $x_0 \in X$ orice mulţime $V \subset X$ care conţine o sferă deschisă cu centrul în x_0. Prin urmare, V este vecinătate a lui x_0 dacă există $\varepsilon > 0$ a.î. $S(x_0,\varepsilon) \subset V$.

Orice sferă deschisă $S(x_0,\varepsilon)$ este vecinătate a lui x_0.

O mulţime $A \subset X$ este *mărginită* dacă există o sferă închisă care conţine pe A, adică

$$\exists\, x_0 \in X,\ \exists\, M > 0 \text{ pentru care } A \subset \overline{S}(x_0, M),$$

ceea ce este echivalent cu

$$\exists\, x_0 \in X,\ \exists\, M > 0 \text{ pentru care } d(x,x_0) \leq M,\quad \forall\, x \in A.$$

Punctul $x \in A$ se numeşte *punct interior* al mulţimii A dacă există o vecinătate V a lui x inclusă în A, $V \subset A$.

Ţinând seama de definiţia vecinătăţii unui punct, rezultă că x este punct interior al mulţimii A dacă există $\varepsilon > 0$ a.î. $S(x,\varepsilon) \subset A$.

Mulţimea punctelor interioare ale mulţimii A se numeşte *interiorul* lui A şi se notează cu $\operatorname{Int} A$.

O mulţime formată numai din puncte interioare se numeşte *mulţime deschisă*. Deci A este deschisă dacă $A = \operatorname{Int} A$.

Sferele deschise sunt mulţimi deschise. O mulţime deschisă este vecinătate pentru orice punct al ei. Întreg spaţiul X este o mulţime deschisă.

Un punct interior complementarei mulţimii A se numeşte *punct exterior* lui A iar $\operatorname{Int} \mathcal{C}A$ se numeşte *exteriorul* lui A.

Punctul $x \in X$ se numeşte *punct aderent* al mulţimii A dacă orice vecinătate V a sa conţine cel puţin un punct din A, adică $V \cap A \neq \emptyset$.

Orice punct $x \in A$ este punct aderent al mulţimii A. Un punct x aderent al lui A poate sau nu să aparţină mulţimii A.

Mulţimea punctelor aderente ale lui A se numeşte *aderenţa* sau *închiderea* lui A şi se notează cu $\overline{A}$.

O mulţime care îşi conţine toate punctele aderente se numeşte *mulţime închisă*. Deci A este o mulţime închisă dacă $A = \overline{A}$.

Sferele închise sunt mulţimi închise. Întreg spaţiul este o mulţime închisă.

Punctul $x \in X$ se numeşte *punct de acumulare* al mulţimii A dacă orice vecinătate V a sa conţine cel puţin un punct din A, diferit de x, adică $V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.

O mulţime formată din puncte de acumulare se numeşte *mulţime perfectă.*

Punctul $x \in A$ se numeşte *punct izolat* al mulţimii A dacă nu este punct de acumulare al mulţimii A, adică dacă există o vecinătate V a sa a.î. $V \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$.

O mulţime formată numai din puncte izolate se numeşte *mulţime discretă.*

Orice punct de acumulare este punct aderent. Orice punct aderent al unei mulţimi A care nu aparţine lui A este punct de acumulare al lui A.

Orice vecinătate a unui punct de acumulare al mulţimii A conţine o infinitate de puncte din A. De aici rezultă că o mulţime care are un punct de acumulare este o mulţime infinită şi deci mulţimile finite nu au puncte de acumulare. Nu toate mulţimile infinite au însă puncte de acumulare. De exemplu, mulţimea $\mathbf{N}$ a numerelor naturale nu are puncte de acumulare.

Teorema 1.3 *Mulţimea A este închisă d.d. îşi conţine toate punctele de acumulare.*

$\triangleleft$ Dacă A este închisă îşi conţine punctele aderente. Cum orice punct de acumulare este punct aderent, rezultă că A îşi conţine toate punctele de acumulare.

Reciproc, dacă A îşi conţine toate punctele de acumulare, atunci orice punct aderent este în A. Dacă ar exista un punct aderent al lui A care nu ar fi din A, el ar fi punct de acumulare pentru A şi deci A nu şi-ar conţine toate punctele de acumulare. Contradicţie. Deci A este închisă. $\triangleright$

Punctul $x \in A$ se numeşte *punct frontieră* al mulţimii A dacă orice vecinătate V a sa conţine atât puncte din A cât şi puncte din complementara lui A.

Un punct frontieră este punct aderent atât pentru mulţimea A cât şi pentru $\mathcal{C}A$.

Mulţimea punctelor frontieră ale mulţimii A se numeşte *frontiera* lui A şi se notează cu $\mathrm{Fr}\, A$ sau ∂A.

1.3.1 Spaţii liniare normate

Fie V un *spaţiu liniar* peste corpul K ($\mathbf{R}$ sau $\mathbf{C}$).

Definiţia 1.2 *Aplicaţia* $||\cdot|| : V \to \mathbf{R}$ *se numeşte* normă *pe* V *dacă satisface următoarele axiome:*

1^o. $||\mathbf{x}|| \geq \mathbf{0}, \forall \mathbf{x} \in V$ *şi* $||\mathbf{x}|| = 0$ *d.d.* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$,

2^o. $||\alpha \mathbf{x}|| = |\alpha|\, ||\mathbf{x}||, \forall \alpha \in K, \forall \mathbf{x} \in V$,

3^o. $||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

Numărul real nenegativ $||\mathbf{x}||$ se numeşte *norma* vectorului $\mathbf{x}$.

Un spaţiu liniar pe care s-a definit o nomă se numeşte *spaţiu liniar normat.*

Dacă $(V, ||\cdot||)$ este un spaţiu normat, aplicaţia $d : V \times V \to \mathbf{R}$,

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V,$$

defineşte o metrică pe V, numită *metrica indusă de normă.*

Fie V un spaţiu liniar *real.* O aplicaţie a lui $V \times V$ în $\mathbf{R}$ se numeşte *produs scalar* pe V dacă satisface următoarele axiome:

1. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$, $\forall \mathbf{x} \in V$ şi $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ d.d. $\mathbf{x} = \mathbf{0}$,

2. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$, $\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$,
3. $(\alpha\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$, $\forall\, \alpha \in \mathbf{R}$, $\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$,
4. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$, $\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$.

Numărul real $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ se numeşte *produsul scalar* al vectorilor $\mathbf{x}$ şi $\mathbf{y}$. Se notează cu $\mathbf{x}^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$.

Un spaţiu liniar real pe care s-a definit un produs scalar se numeşte *spaţiu euclidian* sau *spaţiu prehilbertian*. Se notează cu E.

Teorema 1.4 ***(Inegalitatea lui Schwarz-Cauchy)*** *Pentru orice* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ *avem*

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \sqrt{\mathbf{x}^2} \cdot \sqrt{\mathbf{y}^2}. \tag{1.3}$$

◁ Dacă $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sau $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, cum $\mathbf{x} \cdot \mathbf{0} = 0$, $\mathbf{0} \cdot \mathbf{y} = 0$, (1.3) este adevărată. Pentru $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, oricare ar fi $\lambda \in \mathbf{R}$ avem

$$(\lambda\mathbf{x} + \mathbf{y})^2 = \mathbf{x}^2\lambda^2 + 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\lambda + \mathbf{y}^2 \geq 0, \tag{1.4}$$

care are loc d.d. $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 - \mathbf{x}^2\mathbf{y}^2 \leq 0$, echivalentă cu (1.3). ▷

Teorema 1.5 ***(Inegalitatea lui Minkowski)*** *Pentru orice* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ *avem*

$$\sqrt{(\mathbf{x} + \mathbf{y})^2} \leq \sqrt{\mathbf{x}^2} + \sqrt{\mathbf{y}^2}. \tag{1.5}$$

◁ Folosind inegalitatea (1.3) putem scrie

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y})^2 = \mathbf{x}^2 + 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) + \mathbf{y}^2 \leq \mathbf{x}^2 + 2\sqrt{\mathbf{x}^2}\sqrt{\mathbf{y}^2} + \mathbf{y}^2 = (\sqrt{\mathbf{x}^2} + \sqrt{\mathbf{y}^2})^2,$$

de unde obţinem (1.5). ▷

Aplicaţia $||\cdot|| : E \to \mathbf{R}$, definită prin

$$||\mathbf{x}|| = \sqrt{\mathbf{x}^2}, \quad \forall\, \mathbf{x} \in E \tag{1.6}$$

este o normă pe E. Ea se numeşte *norma indusă de produsul scalar* sau *norma euclidiană.*

Un spaţiu euclidian este deci un spaţiu liniar normat, cu norma indusă de produsul scalar.

Norma euclidiană pe E induce metrica $d : E \times E \to \mathbf{R}$,

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| = \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}, \tag{1.7}$$

care se numeşte *metrica euclidiană.* Deci un spaţiu euclidian este un spaţiu metric, cu metrica euclidiană.

Cu notaţia (1.6), inegalităţile lui Cauchy şi Minkowski se scriu

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq ||\mathbf{x}||\,||\mathbf{y}||, \quad \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E,$$

$$||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||, \quad \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E.$$

1.4 Mulţimea numerelor reale

În raport cu operaţiile de adunare şi înmulţire **R** formează un corp comutativ. În raport cu aceleaşi două operaţii **R** formează un *spaţiu liniar real*. Mulţimea **R** poate fi organizată ca spaţiu metric.

Fie x un număr real. Se numeşte *valoare absolută* sau *modul* al numărului real x numărul $|x|$ definit prin

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Funcţia modul are următoarele proprietăţi:
1^o. $|x| \geq 0,\ \forall x \in \mathbf{R}$ şi $|x| = 0$ d.d. $x = 0$,
2^o. $|x + y| \leq |x| + |y|,\ \forall x, y \in \mathbf{R}$,
3^o. $|xy| = |x|\,|y|,\ \forall x, y \in \mathbf{R}$,
4^o. $|x| < \varepsilon$ d.d. $-\varepsilon < x < \varepsilon$.

Din 1^o, 2^o şi 3^o rezultă că funcţia modul este o normă pe spaţiul liniar real **R**. Deci **R** este un *spaţiu liniar normat*. Aplicaţia $d : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$d(x, y) = |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbf{R},$$

determină pe **R** o metrică. În raport cu această metrică **R** formează un *spaţiu metric*.

1.4.1 Mulţimi mărginite de numere reale

Fie A o mulţime nevidă de numere reale. Spunem că A este *mărginită superior* sau *majorată* dacă există un număr real b a.î. $x \leq b$, pentru orice $x \in A$. Numărul b se numeşte *majorant* al mulţimii A.

Noţiunea de mulţime majorată se poate defini şi pentru mulţimi de numere raţionale. Ceea ce deosebeşte mulţimea **R** de mulţimea **Q** a numerelor raţionale este axioma lui Cantor a marginii superioare, care stă la baza obţinerii tuturor rezultatelor profunde ale analizei matematice şi pe care o enunţăm mai jos.

Axioma lui Cantor. *Orice mulţime nevidă majorată $A \subset \mathbf{R}$ admite un cel mai mic majorant.*

Cel mai mic majorant al mulţimii majorate A se numeşte *marginea superioară* a lui A sau *supremum de* A şi se notează $\sup A$.

Exemplul 1.8 *Să considerăm mulţimea $A = \{x \in \mathbf{Q} \mid x^2 \leq 3\}$. Mulţimea A, ca submulţime a lui **R**, este majorată, de exemplu de 2, dar şi de aproximaţiile succesive prin adaos ale lui $\sqrt{3}$: $1,8$, $1,74$, $1,733$ etc. precum şi de $\sqrt{3}$. Conform axiomei lui Cantor A admite un cel mai mic majorant. Se poate arăta că $\sup A = \sqrt{3}$. Ca submulţime a lui **Q**, are numerele de mai sus ca majoranţi, cu excepţia lui $\sqrt{3}$ care nu aparţine lui **Q**. Deci ea nu admite un cel mai mic majorant număr raţional.*

Numărul real M este marginea superioară a mulţimii A, $M = \sup A$, dacă M este majorant al mulţimii A şi este cel mai mic majorant. De unde teorema care urmează.

Teorema 1.6 *(de caracterizare a marginii superioare) Numărul* $M = \sup A$ *d.d.*

1^o. $x \leq M$, $\forall\, x \in A$ *(M este majorant al mulţimii A),*

2^o. $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, x_\varepsilon \in A$ *a.î.* $x_\varepsilon > M - \varepsilon$ *(orice număr mai mic decât M nu este majorant al lui A).*

Spunem că mulţimea A de numere reale este *mărginită inferior* sau *minorată* dacă există un număr real a a.î. $a \leq x$, pentru orice $x \in A$. Numărul a se numeşte *minorant* al mulţimii A.

Folosind axioma lui Cantor se poate stabili următoarea

Teorema 1.7 *Orice mulţime nevidă minorată* $A \subset \mathbf{R}$ *admite un cel mai mare minorant.*

Cel mai mare minorant al mulţimii minorate A se numeşte *marginea inferioară* a lui A sau *infimum de A* şi se notează $\inf A$.

Numărul real m este marginea inferioară a mulţimii A, $m = \inf A$, dacă m este minorant al mulţimii A şi este cel mai mare minorant. De unde teorema:

Teorema 1.8 *(de caracterizare a marginii inferioare) Numărul* $m = \inf A$ *d.d.*

1^o. $m \leq x$, $\forall\, x \in A$ *(m este minorant al mulţimii A),*

2^o. $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, x_\varepsilon \in A$ *a.î.* $x_\varepsilon < m + \varepsilon$ *(orice număr mai mare decât m nu este minorant al lui A).*

O mulţime $A \subset \mathbf{R}$ se numeşte *mărginită* dacă este majorată şi minorată, adică dacă există numerele reale a şi b a.î. $a \leq x \leq b$, pentru orice $x \in A$.

Dacă A este mărginită atunci există $\sup A$ şi $\inf A$ şi $\inf A \leq x \leq \sup A$, pentru orice $x \in A$. Mulţimea A constă dintr-un singur element d.d. $\inf A = \sup A$.

Un majorant al mulţimii A care aparţine lui A se numeşte *cel mai mare element* al mulţimii A. Un minorant al mulţimii A care aparţine lui A se numeşte *cel mai mic element* al mulţimii A. Aceste elemente, dacă există, sunt unice.

Dacă $\sup A \in A$ atunci este cel mai mare element al mulţimii A. Dacă $\inf A \in A$ atunci este cel mai mic element al mulţimii A. Se poate întâmpla ca o mulţime A să nu aibă cel mai mare sau/şi cel mai mic element. Spre exemplu mulţimea $A = \{1/n,\, n \in N\}$ nu are cel mai mic element deoarece $\inf A = 0 \notin A$.

O mulţime $A \subset \mathbf{R}$ nemajorată sau/şi neminorată se numeşte *mulţime nemărginită.*

Teorema 1.9 *Dacă* $A \subset \mathbf{R}$ *atunci:*

1^o. *A este mărginită d.d. există* $M > 0$ *a.î.* $|x| \leq M$, $\forall\, x \in A$.

2^o. *A este nemărginită d.d.* $\forall\, M > 0$ *există un* $x_M \in A$ *a.î.* $|x_M| > M$.

Prezentarea unitară a unor rezultate fundamentale ale analizei matematice impune introducerea simbolurilor $-\infty$ şi $+\infty$, numite *minus infinit* şi respectiv, *plus infinit.*

Mulţimea $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ se numeşte *dreapta reală încheiată.*

Operaţiile algebrice definite pe $\mathbf{R}$ se extind numai parţial la $\overline{\mathbf{R}}$. Următoarele operaţii nu sunt definite pe $\overline{\mathbf{R}}$:

$$\infty - \infty,\ 0 \cdot \infty,\ \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty.$$

Acestea se numesc *operaţii fără sens* sau *cazuri de nedeterminare.*

1.4.2 Intervale şi vecinătăţi

Fie $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Numim *intervale mărginite* mulţimile:

1) $(a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$ - interval deschis;
2) $[a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\}$ - interval închis la stânga, deschis la dreapta;
3) $(a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\}$ - interval deschis la stânga, închis la dreapta;
4) $[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$ - interval închis sau segment.

Numim *intervale nemărginite* mulţimile:

1) $(a, \infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x > a\}$ - semidreaptă deschisă nemărginită la dreapta;
2) $[a, \infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq a\}$ - semidreaptă închisă, nemărginită la dreapta;
3) $(-\infty, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < b\}$ - semidreaptă deschisă nemărginită la stânga;
4) $(-\infty, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq b\}$ - semidreaptă închisă, nemărginită la stânga.

Dreapta reală este de asemenea interval nemărginit.

Fie $x_0 \in \mathbf{R}$. Se numeşte *vecinătate a lui* x_0 orice mulţime $V \subset \mathbf{R}$ care conţine un interval deschis la care aparţine punctul x_0, $x_0 \in (a, b) \subset V$. În particular, orice interval deschis (a, b) care conţine pe x_0 este vecinătate a lui x_0.

O vecinătate a lui x_0 de forma $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, cu $\varepsilon > 0$, se numeşte *vecinătate simetrică* a lui x_0. Orice vecinătate a lui x_0 conţine o vecinătate simetrică.

Se numeşte *vecinătate a lui* $+\infty$ orice mulţime V de numere reale care conţine o semidreaptă $(a, +\infty)$. Se numeşte *vecinătate a lui* $-\infty$ orice mulţime V de numere reale care conţine o semidreaptă $(-\infty, b)$.

1.5 Spaţiul $\mathbf{R}^n$

Se notează cu $\mathbf{R}^n$ produsul cartezian al mulţimii $\mathbf{R}$ cu ea însăşi de n ori, adică

$$\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ x_i \in \mathbf{R},\ i = \overline{1, n}\}.$$

Mulţimea $\mathbf{R}^n$ poate fi organizată ca spaţiu liniar real.

Două elemente $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ din $\mathbf{R}^n$ sunt *egale*, $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, d.d. $x_i = y_i$, $i = \overline{1, n}$.

Definim operaţia de *adunare* în $\mathbf{R}^n$ prin

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n, \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \in \mathbf{R}^n$$

şi operaţia de *înmulţire cu scalari* prin

$$\forall \alpha \in \mathbf{R}, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, \quad \alpha \mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n) \in \mathbf{R}^n.$$

Elementul *nul* din $\mathbf{R}^n$ este $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$, iar *opusul* lui $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este elementul $-\mathbf{x} = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$. Se verifică uşor restul axiomelor. Deci $\mathbf{R}^n$ este un spaţiu liniar real numit *spaţiul liniar real n-dimensional*, elementele sale $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ le vom numi *vectori*. Numerele x_1, x_2, $\ldots$, x_n se numesc *componentele* sau *coordonatele* vectorului $\mathbf{x}$.

Aplicaţia

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \sum_{k=1}^{n} x_ky_k$$

este un *produs scalar* pe $\mathbf{R}^n$ şi deci $\mathbf{R}^n$ este un spaţiu euclidian numit *spaţiul euclidian n-dimensional.*

După (1.6), *norma indusă de produsul scalar* va fi dată de

$$||\mathbf{x}|| = \sqrt{\mathbf{x}^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}. \tag{1.8}$$

Deci $\mathbf{R}^n$ este un *spaţiu liniar normat.*

Inegalităţile lui Cauchy şi Minkowski se transcriu

$$|\sum_{k=1}^{n} x_ky_k| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2},$$

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}.$$

Se verifică uşor că aplicaţiile

$$||\mathbf{x}||_1 = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}, \quad ||\mathbf{x}||_2 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|,$$

sunt de asemenea *norme* pe $\mathbf{R}^n$, echivalente cu norma (1.8).

După (1.7), *metrica euclidiană* pe $\mathbf{R}^n$ va fi dată de

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = ||\mathbf{x}-\mathbf{y}|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}.$$

În concluzie, $\mathbf{R}^n$ este un *spaţiu metric.*

Sfera deschisă cu centrul în $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ şi rază ε este mulţimea

$$S(\mathbf{x}_0,\varepsilon) = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n, \ \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_k^0)^2} < \varepsilon\}.$$

Aplicaţiile $\delta, \Delta : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, definite prin:

$$\delta(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|, \quad \Delta(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \max_{k=\overline{1,n}} |x_k - y_k|$$

sunt metrici pe $\mathbf{R}^n$ echivalente cu metrica euclidiană.

1.6 Funcţii cu valori în $\mathbf{R}^m$

Fie E o mulţime nevidă oarecare. O aplicaţie a mulţimii E în $\mathbf{R}$, $f : E \to \mathbf{R}$, se numeşte *funcţie reală*, iar o aplicaţie a mulţimii E în $\mathbf{R}^m$, $m \geq 2$, $\mathbf{f} : E \to \mathbf{R}^m$, se numeşte *funcţie vectorială*.

Prin funcţia vectorială $\mathbf{f}$, oricărui element $x \in E$ i se ataşează în mod unic elementul $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in \mathbf{R}^m$, $\mathbf{y} = \mathbf{f}(x)$.

Fie $\mathbf{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$, pentru orice $x \in E$. Rezultă că funcţia vectorială $\mathbf{f}$ defineşte în mod unic m funcţii reale $f_k : E \to \mathbf{R}$, $k = \overline{1,m}$, numite *funcţii componente* ale funcţiei $\mathbf{f}$.

Funcţia $f : E \to \mathbf{R}$, în care $E \subset \mathbf{R}$, se numeşte *funcţie reală de o variabilă reală*. Numărul real $x \in E$ are ca imagine prin f numărul real $y = f(x)$.

Funcţia $f : E \to \mathbf{R}$, în care $E \subset \mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, se numeşte *funcţie reală de o variabilă vectorială* sau *funcţie reală de n variabile reale*. Vectorul $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E \subset \mathbf{R}^n$ are ca imagine prin f numărul real $y = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Funcţia $\mathbf{f} : E \to \mathbf{R}^m$, în care $E \subset \mathbf{R}$, se numeşte *funcţie vectorială de o variabilă reală*. Numărul real $x \in E$ are ca imagine prin $\mathbf{f}$ vectorul $\mathbf{y} = \mathbf{f}(x) \in \mathbf{R}^m$. Funcţiile componente sunt m funcţii reale de o variabilă reală $y_k = f_k(x)$, $k = \overline{1,m}$.

Funcţia $\mathbf{f} : E \to \mathbf{R}^m$, în care $E \subset \mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, se numeşte *funcţie vectorială de o variabilă vectorială* sau *funcţie vectorială de n variabile reale*. Vectorul $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E \subset \mathbf{R}^n$ are ca imagine vectorul $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^m$. Funcţiile componente sunt m funcţii reale de o variabilă vectorială sau de n variabile reale $y_i = f_i(\mathbf{x}) = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = \overline{1,m}$.

Numim *grafic* al funcţiei $\mathbf{f}$ mulţimea

$$G_f = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \mid \mathbf{x} \in E \subset \mathbf{R}^n, \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^m\}.$$

Numim curbă în $\mathbf{R}^n$ mulţimea $\Gamma = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{x} = \mathbf{f}(t), t \in I \subset \mathbf{R}\}$, în care I este un interval al axei reale, iar funcţia $\mathbf{f}$ satisface anumite condiţii. Ecuaţia $\mathbf{x} = \mathbf{f}(t)$ se numeşte *ecuaţia vectorială* a curbei. Ea implică egalităţile $x_i = f_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, numite *ecuaţiile parametrice* ale curbei. Variabila t se numeşte *parametru* pe curba Γ.

Fie $E \subset \mathbf{R}^n$, funcţia $\mathbf{f} : E \to \mathbf{R}^m$, $F = \mathbf{f}(E) \subset \mathbf{R}^m$ şi funcţia $\mathbf{g} : F \to \mathbf{R}^p$. Funcţia $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} : E \to \mathbf{R}^p$ definită prin $\mathbf{z} = (\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$, pentru orice $\mathbf{x} \in E$, este *compunerea* sau *produsul* funcţiilor $\mathbf{f}$ şi $\mathbf{g}$, şi are componentele

$$z_j = g_j(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)), \quad j = \overline{1,p}.$$

Fie $E, F \subset \mathbf{R}^n$. O aplicaţie bijectivă $\mathbf{f} : E \to F$ se numeşte *transformare punctuală* a mulţimii E pe mulţimea F. Pentru fiecare $\mathbf{x} \in E$, $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in F$. Dacă $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ şi $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, egalitatea vectorială $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ este echivalentă cu egalităţile

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = \overline{1,n},$$

numite *ecuaţiile transformării*.

Deoarece $\mathbf{f}$ este bijectivă rezultă că $\mathbf{f}(E) = F$. Aplicaţia $\mathbf{f}^{-1} : F \to E$ se numeşte *transformarea punctuală inversă* transformării $\mathbf{f}$, dacă $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{x}$ d.d. $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$.

Se notează cu $\mathcal{F}(E, \mathbf{R}^m)$ mulţimea funcţiilor definite pe E cu valori în $\mathbf{R}^m$. În raport cu operaţiile de adunare şi înmulţire a funcţiilor, $\mathcal{F}(E, \mathbf{R}^m)$ formează un *spaţiu liniar real*.

Aplicaţia definită pe $\mathcal{F}(E, \mathbf{R}^m)$ cu valori în $\mathbf{R}$ prin $||\mathbf{f}|| = \sup_{\mathbf{x}\in E} ||\mathbf{f}(\mathbf{x})||$, pentru orice $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(E, \mathbf{R}^m)$, este o *normă* pe $\mathcal{F}(E, \mathbf{R}^m)$, numită *norma convergenţei uniforme*. Deci $\mathcal{F}(E, \mathbf{R}^m)$ este un *spaţiu liniar normat*. Notăm cu ρ *metrica indusă de normă*:

$$\rho = ||\mathbf{f} - \mathbf{g}|| = \sup_{\mathbf{x}\in E} ||\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})||, \ \ \forall\, \mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{F}(E, \mathbf{R}^m),$$

numită *metrica convergenţei uniforme*. Deci $\mathcal{F}(E, \mathbf{R}^m)$ este un *spaţiu metric*.

Capitolul 2

ŞIRURI ŞI SERII

2.1 Şiruri de numere reale

Un şir de numere reale este o funcţie $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$. Se notează cu $x_n = f(n)$ şi se numeşte termenul de rang n al şirului. Vom nota un şir prin $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sau (x_n).

Definiţia 2.1 *Spunem că şirul* (x_n) *are* limita $x \in \bar{\mathbf{R}}$ *şi scriem* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *sau* $x_n \to x$, *dacă oricare ar fi* V *o vecinătate a lui* x, *există numărul natural* $N = N(V)$ *a.î.* $x_n \in V$ *pentru orice* $n > N$.

Această definiţie poate fi formulată şi astfel:

Definiţia 2.2 *Şirul* (x_n) *are* limita $x \in \bar{\mathbf{R}}$ *dacă în afara oricărei vecinătăţi* V *a lui* x *se află cel mult un număr finit de termeni ai şirului, număr ce depinde de vecinătatea* V.

Deoarece şirurile de numere reale au fost studiate în liceu, în cele ce urmează vom formula principalele rezultate fără a relua demonstraţiile.

Teorema 2.1 *Fie* (x_n) *un şir de numere reale.*

1^o. *Dacă* (x_n) *are limită atunci limita sa este unică.*

2^o. *Dacă* (x_n) *are limita* x *atunci orice subşir al său are limita* x.

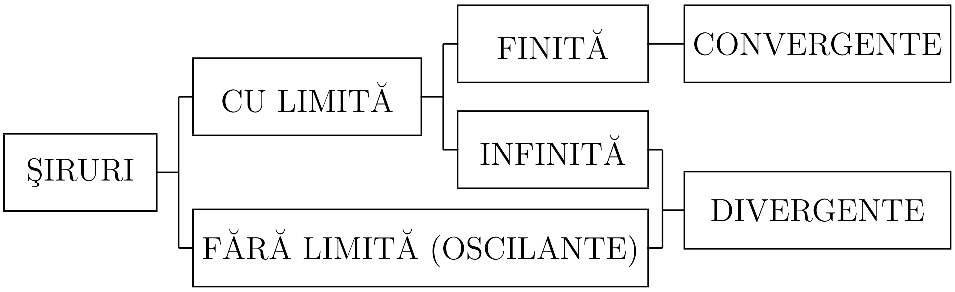
3^o. *Dacă într-un şir cu limită schimbăm ordinea termenilor, adăugăm sau suprimăm un număr finit de termeni, obţinem un şir având aceeaşi limită.*

În consecinţă, dacă (x_n) are un subşir fără limită sau dacă (x_n) are două subşiruri cu limite diferite, atunci (x_n) nu are limită.

Şirurile fără limită se numesc *oscilante*. Şirurile cu limită finită se numesc *convergente*. Şirurile care nu sunt convergente se numesc *divergente*. Deci, un şir este divergent dacă nu are limită sau are limită dar aceasta este $-\infty$ sau $+\infty$.

Teorema 2.2 ***(de caracerizare a limitei)*** *Fie* (x_n) *un şir de numere reale.*

1^0. *Şirul* (x_n) *este convergent şi are limita* $x \in \mathbf{R}$ *d.d. oricare ar fi* $\varepsilon > 0$, *există un* $N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ *a.î.* $d(x, x_n) = |x_n - x| < \varepsilon$, *pentru orice* $n > N$.



2^0. *Şirul* (x_n) *are limita* $+\infty$ *d.d. oricare ar fi* $\varepsilon > 0$, *există un* $N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ *a.î.* $x_n > \varepsilon$, *pentru orice* $n > N$.

3^0. *Şirul* (x_n) *are limita* $-\infty$ *d.d. oricare ar fi* $\varepsilon > 0$, *există un* $N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ *a.î.* $x_n < -\varepsilon$, *pentru orice* $n > N$.

Teorema 2.3 ***(Operaţii cu şiruri care au limită)***

1^0. *Dacă şirurile* (x_n) *şi* (y_n) *au limită şi suma limitelor are sens, atunci şirul sumă* $(x_n + y_n)$ *are limită şi*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n.$$

2^0. *Dacă şirurile* (x_n) *şi* (y_n) *au limită şi produsul limitelor are sens, atunci şirul produs* $(x_n y_n)$ *are limită şi*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n)(\lim_{n\to\infty} y_n).$$

În particular, dacă (y_n) *este şirul constant,* $y_n = \lambda \neq 0$, *pentru orice* $n \in \mathbf{N}$, *atunci*

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda x_n) = \lambda(\lim_{n\to\infty} x_n).$$

3^0. *Dacă şirurile* (x_n) *şi* (y_n) *au limită,* $y_n \neq 0$, *şi câtul limitelor are sens, atunci şirul cât* (x_n/y_n) *are limită şi*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

4^0. *Dacă şirurile* (a_n) *şi* (x_n) *au limită,* $a_n > 0$, $a_n \to a$, $x_n \to x$ *şi* a^x *are sens, atunci şirul* $(a_n^{x_n})$ *are limită şi*

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{x_n} = a^x.$$

Teorema 2.4 ***(Criterii de existenţă a limitei)*** *Fie* (x_n) *un şir de numere reale.*

1^0. *(Criteriul majorării) Dacă pentru un* $x \in \mathbf{R}$ *există un şir* (α_n) *de numere nenegative,* $\alpha_n \to 0$, *a.î.* $d(x, x_n) = |x_n - x| \leq \alpha_n$, *pentru orice* $n \in \mathbf{N}$, *atunci* $x_n \to x$.

2^0. *Dacă există şirul* (y_n), $y_n \to +\infty$, *a.î.* $x_n \geq y_n$, *pentru orice* $n \in \mathbf{N}$, *atunci* $x_n \to +\infty$.

3^0. *Dacă există şirul* (y_n), $y_n \to -\infty$, *a.î.* $x_n \leq y_n$, *pentru orice* $n \in \mathbf{N}$, *atunci* $x_n \to -\infty$.

Şirul de numere reale (x_n) se numeşte *mărginit* dacă mulţimea $\{x_n \,|\, n \in \mathbf{N}\}$ a valorilor sale este mărginită. Deci (x_n) este mărginit dacă există $M > 0$ a.î. $|x_n| \leq M$, pentru orice $n \in \mathbf{N}$.

Şirul (x_n) se numeşte *nemărginit* dacă mulţimea $\{x_n \,|\, n \in \mathbf{N}\}$ este nemărginită, adică dacă oricare ar fi $M > 0$ există un $n_M \in \mathbf{N}$, a.î. $|x_{n_M}| > M$.

Teorema 2.5 ***(Proprietăţi ale şirurilor convergente)***
1^0. *Şirul $x_n \to x$ d.d. şirul $d(x, x_n) = |x_n - x| \to 0$.*
2^0. *Dacă şirul $x_n \to x$, atunci şirul $|x_n| \to |x|$. Reciproca nu este adevărată decât în cazul $x = 0$.*
3^0. *Orice şir convergent este mărginit. Reciproca nu este adevărată. Există şiruri mărginite care nu sunt convergente. Un şir nemărginit este divergent.*
4^0. *Dacă $x_n \to 0$ şi (y_n) este mărginit, atunci $x_n y_n \to 0$.*
5^0. *Orice subşir al unui şir convergent este convergent şi are aceeaşi limită.*
6^0. *Dacă (x_n) şi (y_n) sunt şiruri convergente, $x_n \to x$ şi $y_n \to y$, iar $x_n \leq y_n$, pentru orice $n \in \mathbf{N}$, atunci $x \leq y$.*
7^0. *Dacă şirurile (x_n), (y_n), (z_n) satisfac pentru orice $n \in \mathbf{N}$ condiţia $x_n \leq y_n \leq z_n$, iar (x_n) şi (z_n) sunt convergente şi au aceeaşi limită x, atunci (y_n) este convergent şi are limita x.*

Şirul de numere reale (x_n) se numeşte *crescător* dacă $x_n \leq x_{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbf{N}$. Şirul (x_n) se numeşte *descrescător* dacă $x_n \geq x_{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbf{N}$. Un şir crescător sau descrescător se numeşte *monoton*.

Teorema 2.6 ***(Existenţa limitei unui şir monoton)***
1^0. *Un şir monoton şi mărginit este convergent.*
2^0. *Un şir crescător şi nemărginit superior are limita $+\infty$.*
3^0. *Un şir descrescător şi nemărginit inferior are limita $-\infty$.*

Un şir monoton este şir cu limită. Dacă (x_n) este crescător, $\lim x_n = \sup\{x_n \,|\, n \in \mathbf{N}\}$, iar dacă (x_n) este descrescător atunci $\lim x_n = \inf\{x_n \,|\, n \in \mathbf{N}\}$.

Teorema 2.7 ***(Lema intervalelor închise, Cantor)*** *Dacă (I_n), $I_n = [a_n, b_n]$, este un şir de intervale închise de numere reale care satisfac condiţia $I_{n+1} \subset I_n$, pentru orice $n \in \mathbf{N}$, atunci intersecţia lor este nevidă. Dacă, în plus, $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$, atunci intersecţia constă dintr-un singur punct.*

Teorema 2.8 ***(Lema lui Cesaro)*** *Un şir mărginit de numere reale conţine un subşir convergent.*

Şirul de numere reale (x_n) se numeşte *şir fundamental* sau *şir Cauchy* dacă

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbf{N} \ \text{ pentru care } d(x_n, x_m) = |x_m - x_n| < \varepsilon,\ \forall\, n, m > N. \tag{2.1}$$

Această definiţie este echivalentă cu următoarea:
Şirul de numere reale (x_n) se numeşte *şir fundamental* sau *şir Cauchy* dacă

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbf{N} \text{ pentru care } d(x_n, x_{n+p}) = |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon,\ \forall\, n > N,\ \forall\, p \in \mathbf{N}. \tag{2.2}$$

Teorema 2.9 *Orice şir fundamental este mărginit.*

◁ Dacă (x_n) este şir fundamental, din (2.2), pentru $\varepsilon = 1$, rezultă că

$$|x_m - x_n| < 1 \ \ \forall\, m, n > N = N(1),$$

de unde, pentru $m = N + 1$, obţinem

$$|x_n| = |(x_n - x_{N+1}) + x_{N+1}| \leq |x_n - x_{N+1}| + |x_{N+1}| < 1 + |x_{N+1}|, \ \ \forall\, n > N.$$

Fie $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|, 1 + |x_{N+1}|\} > 0$. Atunci $|x_n| \leq M$, pentru orice $n \in \mathbf{N}$ şi deci (x_n) este mărginit. ▷

Teorema 2.10 ***(Criteriul lui Cauchy)*** *Un şir de numere reale este convergent d.d. este şir Cauchy.*

◁ **Necesitatea**. Dacă (x_n) este convergent la x, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un $N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ a.î. $|x_n - x| < \varepsilon/2$, pentru orice $n > N$. De aici rezultă că pentru orice $m, n > N$ putem scrie

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - x| + |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

şi deci (x_n) este un şir Cauchy.

Suficienţa. Dacă (x_n) este un şir Cauchy, din teorema precedentă rezultă că este mărginit, iar din Lema lui Cesaro rezultă că (x_n) conţine un subşir convergent. Fie acesta $(x_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ şi fie x limita sa. Deoarece $x_{n_k} \to x$

$$\forall\, \varepsilon > 0, \ \ \exists\, K(\varepsilon) \in \mathbf{N} \text{ pentru care } |x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \ \forall\, n_k > K.$$

Pe de altă parte, deoarece (x_n) este şir Cauchy

$$\forall\, \varepsilon > 0, \ \ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbf{N} \text{ pentru care } |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \ \forall\, n, m > N.$$

Fie $N' = \max\{N, K\}$. Pentru $n, n_k > N'$ putem scrie

$$|x_n - x_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \ |x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2},$$

de unde rezultă

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \ \ \forall\, n > N',$$

deci şirul (x_n) converge la x. ▷

2.2 Şiruri în spaţii metrice

Fie (X, d) un spaţiu metric şi (x_n) un şir de puncte din X.

Definiţia 2.3 *Spunem că şirul* (x_n) converge *la* $x \in X$ *dacă oricare ar fi o vecinătate* V *a lui* x*, există un* $N(V) \in \mathbf{N}$ *a.î. pentru orice* $n > N$*,* $x_n \in V$*.*

Prin urmare, $x_n \to x$ dacă

$$\forall V(x), \ \ \exists N(V) \in \mathbf{N} \text{ pentru care } n > N \Rightarrow x_n \in V(x). \tag{2.3}$$

Punctul x se numeşte *limita* şirului (x_n) şi se notează

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \ \ \text{sau}\ x_n \to x.$$

Această definiţie este echivalentă cu următoarea:

Definiţia 2.4 *Şirul* (x_n) *este* convergent *la* x *dacă în afara oricărei vecinătăţi a punctului* x *se află un număr finit de termeni ai şirului* (x_n)*.*

Şirul (x_n) se numeşte *divergent* dacă nu este convergent.

Teorema 2.11 *Condiţia necesară şi suficientă ca* $x_n \to x$ *este ca*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbf{N} \ \ \textit{pentru care} \ \ n > N \Longrightarrow d(x, x_n) < \varepsilon. \tag{2.4}$$

◁ Dacă $x_n \to x$, fie, pentru un $\varepsilon > 0$ arbitrar, $V(x) = S(x, \varepsilon)$. Din (2.3) rezultă atunci (2.4), deoarece $x_n \in S(x, \varepsilon)$ este echivalentă cu $d(x, x_n) < \varepsilon$.

Reciproc, oricărei vecinătăţi $V(x)$ îi corespunde un $\varepsilon > 0$ a.î. $S(x, \varepsilon) \subset V(x)$. Din (2.4) rezultă atunci că pentru $n > N$, $x_n \in S(x, \varepsilon)$ şi deci $x_n \in V(x)$, adică $x_n \to x$. ▷

Şirul (x_n) se numeşte *mărginit* dacă mulţimea valorilor sale este mărginită.

Teorema 2.12 ***(Proprietăţi ale şirurilor convergente)***

1^0. *Limita unui şir convergent este unică.*

2^0. $x_n \to x$ *d.d.* $d(x, x_n) \to 0$.

3^0. *(Criteriul majorării) Dacă există un* $x \in X$ *şi un şir de numere reale* (α_n)*,* $\alpha_n \to 0$*, a.î.* $d(x, x_n) \leq \alpha_n$*, pentru orice* $n > N$*, atunci* $x_n \to x$*.*

4^0. *Orice subşir al unui şir convergent este convergent.*

5^0. *Un şir convergent este mărginit. Reciproca nu este adevărată.*

Şirul (x_n), $x_n \in (X, d)$, se numeşte *şir fundamental* sau *şir Cauchy* dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbf{N} \text{ pentru care } d(x_n, x_m) < \varepsilon, \ \forall n, m > N. \tag{2.5}$$

sau echivalent:

Şirul (x_n) se numeşte *şir fundamental* sau *şir Cauchy* dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbf{N} \text{ pentru care } d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon, \ \forall n > N, \ \forall p \in \mathbf{N}. \tag{2.6}$$

Teorema 2.13 *Orice şir fundamental este mărginit.*

$\triangleleft$ Dacă (x_n) este şir fundamental, din (2.6) pentru $\varepsilon = 1$ rezultă că

$$d(x_n, x_{n+p}) < 1,\ \forall\, n \geq N,\ N = N(1),\ p = 1, 2, \ldots.$$

În particular, pentru $n = N$, obţinem

$$d(x_N, x_{N+p}) < 1,\ p = 1, 2, \ldots$$

Fie $M = \max\{d(x_N, x_1), d(x_N, x_2), \ldots, d(x_N, x_{N-1}), 1\}$. Rezultă atunci că

$$d(x_N, x_n) \leq M,\ \forall\, n \in \mathbf{N}$$

şi deci şirul este mărginit. $\triangleright$

Reciproca teoremei nu este adevărată.

Teorema 2.14 *Orice şir convergent este şir fundamental.*

$\triangleleft$ Dacă $x_n \to x$, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ a.î. $n > N \Longrightarrow d(x, x_n) < \varepsilon/2$. De aici rezultă că

$$d(x_n, x_m) \leq d(x, x_n) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\ \forall\, n, m > N,$$

adică (x_n) este şir Cauchy. $\triangleright$

Reciproca acestei teoreme nu este adevărată. Există spaţii metrice în care *nu orice şir Cauchy este şir convergent.*

Exemplul 2.1 *Fie* $(\mathbf{Q}, d)$ *spaţiul metric al numerelor raţionale, în care* $d(x, y) = |x - y|$, *pentru orice* $x, y \in \mathbf{Q}$. *Şirul* (x_n), $x_n = (1 + 1/n)^n \in \mathbf{Q}$, $n \in \mathbf{N}$, *este un şir Cauchy deoarece* (x_n) *considerat ca şir de numere reale este convergent,* $x_n \to e$. *Dar* $e \notin \mathbf{Q}$. *Deci, deşi* (x_n) *este un şir fundamental de numere din* $\mathbf{Q}$, *el nu are limită în* $\mathbf{Q}$.

Un spaţiu metric în care orice şir Cauchy este convergent se numeşte *spaţiu metric complet.*

Exemplul 2.2 *Din Teorema 2.10 (Criteriul lui Cauchy) rezultă că mulţimea* $\mathbf{R}$ *a numerelor reale este un spaţiu metric complet.*

Exemplul 2.3 *Mulţimea* $\mathbf{Q}$ *a numerelor raţionale nu este spaţiu metric complet.*

O mulţime A de puncte dintr-un spaţiu metric se numeşte *compactă* dacă orice şir de puncte din A conţine un subşir convergent la un punct din A.

Exemplul 2.4 *Un interval mărginit şi închis* $[a, b]$ *de numere reale este o mulţime compactă, conform Lemei lui Cesaro.*

Teorema 2.15 *O mulţime* $A \subset X$ *compactă este mărginită şi închisă.*

Reciproca acestei teoreme nu este adevărată. Există spaţii metrice în care nu orice mulţime mărgintă şi închisă este compactă.

Teorema 2.16 *Orice spaţiu metric compact este complet.*

$\triangleleft$ Avem de arătat că într-un spaţiu metric compact este adevărată reciproca Teoremei 2.14, adică orice şir fundamental de puncte dintr-un spaţiu metric compact este convergent.

Dacă (x_n) este un şir Cauchy de puncte din spaţiul metric compact X, (x_n) conţine un subşir convergent. Fie acesta $(x_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ şi fie $x \in X$ limita sa. Deoarece $x_{n_k} \to x$

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, K(\varepsilon) \in \mathbf{N} \ \text{ pentru care } d(x, x_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall n_k > K.$$

Pe de altă parte, deoarece (x_n) este şir Cauchy

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbf{N} \ \text{ pentru care } d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall n, m > N.$$

Fie $N' = \max\{N, K\}$. Pentru n, $n_k > N'$ putem scrie

$$d(x_n, x_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2},\ d(x, x_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2},$$

de unde rezultă

$$d(x, x_n) \le d(x, x_{n_k}) + d(x_n, x_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\ \forall\, n > N',$$

deci şirul (x_n) converge la x. $\triangleright$

Un spaţiu liniar normat $(V, ||\cdot||)$ se numeşte *spaţiu Banach* dacă este spaţiu metric complet în raport cu metrica indusă de normă.

Un spaţiu euclidian complet în metrica euclidiană se numeşte *spaţiu Hilbert*.

2.3 Principiul contracţiei

Definiţia 2.5 *Aplicaţia $\varphi : X \to X$, a spaţiului metric X pe el însuşi, se numeşte* contracţie *a lui X dacă există $q \in (0, 1)$ a.î.*

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) \le q\, d(x, y), \quad \forall x, y \in X. \tag{2.7}$$

Numărul q se numeşte coeficient de contracţie.

Definiţia 2.6 *Punctul $\xi \in X$ se numeşte* punct fix *al aplicaţiei $\varphi : X \to X$ dacă $\varphi(\xi) = \xi$.*

Deci un punct fix al aplicaţiei φ este o soluţie a ecuaţiei $\varphi(x) = x$.

Teorema 2.17 ***(Principiul contracţiei)*** *O contracţie a unui spaţiu metric complet (X, d) are un punct fix şi numai unul.*

◁ **Unicitatea**. Dacă ξ_1 şi ξ_2 sunt puncte fixe ale contracţiei φ, adică $\varphi(\xi_1) = \xi_1$ şi $\varphi(\xi_2) = \xi_2$, atunci

$$0 \leq d(\xi_1, \xi_2) = d(\varphi(\xi_1), \varphi(\xi_2)) \leq q\, d(\xi_1, \xi_2).$$

De aici obţinem că $(1-q)\, d(\xi_1, \xi_2) \leq 0$, ceea ce implică $d(\xi_1, \xi_2) = 0$, echivalent cu $\xi_1 = \xi_2$.

Existenţa. Pornind de la un $x_0 \in X$ arbitrar, construim şirul

$$x_0,\ x_1 = \varphi\,(x_0)\,,\ \ldots,\ x_n = \varphi(x_{n-1}),\ \ldots.$$

Acest şir se numeşte *şirul aproximaţiilor succesive*, x_0 se numeşte *aproximaţia de ordinul zero* sau punctul de start, iar x_n se numeşte *aproximaţia de ordinul n.*

Fie $\delta = d(x_0, x_1)$. Dacă $\delta = 0$, atunci $x_0 = x_1 = \varphi(x_0)$, adică x_0 este punctul fix al aplicaţiei φ şi demonstraţia este încheiată. Să presupunem că $\delta > 0$. Atunci, pentru orice $n \in \mathbf{N}$ are loc inegalitatea

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq q^n\, \delta.$$

Într-adevăr, pentru $n = 0$ este adevărată. Procedând prin inducţie, găsim că

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) = d(\varphi(x_n), \varphi(x_{n+1})) \leq q\, d(x_n, x_{n+1}) \leq q^{n+1}\, \delta.$$

Şirul (x_n) este convergent. În adevăr, folosind inegalitatea triunghiulară şi inegalitatea precedentă, pentru $p \in \mathbf{N}$ arbitrar putem scrie succesiv

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+p}) \leq \cdots \\ &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leq \\ &\leq \delta q^n (1 + q + q^2 + \cdots + q^{p-1}) = \delta \frac{1-q^n}{1-q} < \frac{\delta}{1-q}\, q^n. \end{aligned}$$

Aşadar

$$d(x_n, x_{n+p}) < \frac{\delta}{1-q}\, q^n, \quad \forall n \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N}. \tag{2.8}$$

Deoarece $q^n \to 0$, şirul (x_n) este şir Cauchy. X fiind spaţiu metric complet, rezultă că (x_n) este convergent. Fie ξ limita sa, adică

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi \ \text{ sau } \ \lim_{n\to\infty} d(\xi, x_n) = 0.$$

Punctul ξ este punct fix al contracţiei φ. În adevăr, din (2.7) rezultă că φ este o aplicaţie continuă, deoarece din $y \to x$ urmează $\varphi(y) \to \varphi(x)$. Avem atunci

$$\varphi(\xi) = \varphi(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \xi, \text{ deci } \varphi(\xi) = \xi.\ \triangleright$$

Teorema precedentă se mai numeşte şi *teorema de punct fix a lui Banach.* Metoda de demonstraţie folosită se numeşte *metoda aproximaţiilor succesive.* Ea ne permite să aproximăm soluţia exactă cu x_n. Pentru *estimarea erorii metodei*, să facem în (2.8), pentru n fixat, $p \to \infty$, obţinem

$$d(\xi, x_n) < \frac{\delta}{1-q}\, q^n, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

2.4 Şiruri în $\mathbf{R}^p$

Un şir de vectori $(\mathbf{x}_n)_{\in \mathbf{N}}$ din $\mathbf{R}^p$, $\mathbf{x}_n = (x_1^n, x_2^n, \dots, x_p^n)$, pentru orice $n \in \mathbf{N}$, determină în mod unic şirurile de numere reale $(x_k^n)_{n\in\mathbf{N}}$, $k = \overline{1,p}$. Acestea se numesc *şirurile componente* ale şirului de vectori $(\mathbf{x}_n)$.

Legătura dintre şirul de vectori $(\mathbf{x}_n)$ şi şirurile componente $(x_k^n)_{n\in\mathbf{N}}$, $k = \overline{1,p}$, este dată de teorema următoare.

Teorema 2.18 *Fie $(\mathbf{x}_n)$ un şir de vectori din $\mathbf{R}^p$.*

1^0. *Şirul de vectori $(\mathbf{x}_n)$ este mărginit d.d. şirurile componente $(x_k^n)_{n\in\mathbf{N}}$, $k = \overline{1,p}$ sunt mărginite.*

2^0. *Şirul de vectori $(\mathbf{x}_n)$ converge la $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_p^0) \in \mathbf{R}^p$ d.d. $x_k^n \to x_k^0$, $k = \overline{1,p}$, când $n \to \infty$.*

3^0. *Şirul de vectori $(\mathbf{x}_n)$ este şir Cauchy d.d. şirurile $(x_k^n)_{n\in\mathbf{N}}$, $k = \overline{1,p}$ sunt şiruri Cauchy.*

Studiul şirurilor de vectori din $\mathbf{R}^p$ se reduce la studiul şirurilor componente.

Proprietăţile 2^0 şi 3^0 din teorema precedentă arată că spaţiul $\mathbf{R}^p$ este un *spaţiu metric complet* în metrica euclidiană, adică un *spaţiu Hilbert*.

Teorema 2.19 ***(Lema lui Cesaro)*** *Un şir mărginit din $\mathbf{R}^p$ conţine un subşir convergent.*

Teorema 2.20 *Mulţimea $A \subset \mathbf{R}^p$ este compactă d.d. este mărginită şi închisă.*

$\triangleleft$ Mulţimea A fiind compactă, după Teorema 2.15 este mărginită şi închisă.

Reciproc, fie $(\mathbf{x}_n)$ un şir de vectori din A. Mulţimea A fiind mărginită, şirul $(\mathbf{x}_n)$ este mărginit. Deci, după Lema lui Cesaro, conţine un subşir convergent. Limita acestui subşir este în A deoarece A este închisă. Prin urmare, orice şir de vectori din A conţine un subşir convergent la un vector din A, adică A este compactă.

2.5 Serii de numere reale

2.5.1 Serii convergente. Proprietăţi generale

Fie (a_n) un şir de numere reale şi (s_n) şirul

$$s_1 = a_1,\ s_2 = a_1 + a_2,\ \dots,\ s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,\ \dots \tag{2.9}$$

Perechea de şiruri $((a_n), (s_n))$ se numeşte *serie de numere reale* şi se notează

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \text{ sau } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ sau } \sum a_n. \tag{2.10}$$

Şirul (a_n) se numeşte *şirul termenilor* seriei, iar şirul (s_n) se numeşte *şirul sumelor parţiale*.

Din definiţia precedentă rezultă că seria (2.10) determină în mod unic şirul (s_n) al sumelor parţiale. Reciproc, dat şirul (s_n), există o serie care are ca şir al sumelor parţiale şirul (s_n). Termenul general al şirului termenilor acestei serii este $a_n = s_n - s_{n-1}$ şi deci această serie este

$$s_1 + (s_2 - s_1) + \cdots + (s_n - s_{n-1}) + \cdots \tag{2.11}$$

şi se numeşte *seria telescopică* a şirului (s_n).

Această legătură dintre şiruri şi serii justifică o mare parte a definiţiilor care urmează.

Seria $\sum a_n$ este *convergentă* şi are *suma* s, dacă şirul (s_n) este convergent şi are limita s. În acest caz scriem

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k. \tag{2.12}$$

Seria $\sum a_n$ este *divergentă* dacă şirul (s_n) este divergent. Dacă $s_n \to \pm\infty$ spunem că suma seriei este $\pm\infty$. Dacă (s_n) nu are limită se spune că seria este *oscilantă*.

Din definiţia precedentă şi Teorema 2.2 rezultă

Teorema 2.21 *Seria $\sum a_n$ este convergentă la s d.d.*

$$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,N(\varepsilon) \in \mathbf{N}\ \ \textit{pentru care}\ \ |s_n - s| < \varepsilon,\ \forall\,n > N. \tag{2.13}$$

Ţinând seama de observaţia precedentă, rezultă că un şir (s_n) este convergent şi are limita s d.d. seria telescopică (2.11) este convergentă şi are limita s.

Teorema 2.22 ***(Criteriul general al lui Cauchy)*** *Seria $\sum a_n$ este convergentă d.d.*

$$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,N(\varepsilon) \in \mathbf{N}\ \ \textit{pentru care}\ \ |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon,\ \forall\,n > N,\ \forall\,p \in \mathbf{N}. \tag{2.14}$$

$\lhd$ Dacă (s_n) este şirul sumelor parţiale ale seriei, atunci pentru orice $n, p \in \mathbf{N}$ putem scrie

$$s_{n+p} - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}.$$

Seria $\sum a_n$ este convergentă d.d. şirul (s_n) este convergent. Dar (s_n) este convergent d.d. este şir fundamenal, adică

$$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,N(\varepsilon) \in \mathbf{N} \text{ pentru care } |s_{n+p} - s_n| < \varepsilon,\ \forall\,n > N,\ \forall\,p \in \mathbf{N}.$$

Înlocuind aici diferenţa $s_{n+p} - s_n$ cu expresia precedentă obţinem (2.14). $\rhd$

Consecinţa 2.1 *Dacă pentru seria $\sum a_n$ se poate indica un şir de numere pozitive (α_n), $\alpha_n \to 0$ şi un număr natural N a.î.*

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| \leq \alpha_n,\ \forall\,n > N,\ \forall\,p \in \mathbf{N},$$

atunci seria $\sum a_n$ este convergentă.

Prin *natura* unei serii înţelegem caracterul ei de a fi convergentă sau divergentă. Natura unei serii coincide cu natura şirului sumelor ei parţiale.

Exemplul 2.5 *Seria*

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

este convergentă şi $s=1$. *În adevăr,*

$$s_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}\to 1.$$

Exemplul 2.6 *Seria*

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

se numeşte seria armonică, *deoarece pentru* $n\geq 2$, a_n *este media armonică a termenilor vecini* a_{n-1} *şi* a_{n+1}. *Această serie este divergentă şi are suma* $+\infty$. *În adevăr, şirul* (s_n) *al sumelor parţiale este strict crescător şi divergent, deoarece*

$$|s_{2n}-s_n|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\geq\frac{1}{2},$$

ceea ce arată că (s_n) *nu este şir fundamental. Deci* $\lim s_n=+\infty$.

Exemplul 2.7 *Seria*

$$1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$$

este divergentă. Ea este o serie oscilantă deoarece şirul (s_n) *al sumelor parţiale este şirul oscilant:* $1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots$.

Exemplul 2.8 *Seria*

$$1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}q^{n-1},\quad q\in\mathbf{R}$$

se numeşte seria geometrică *deoarece şirul* (a_n), $a_n=q^{n-1}$, *este o progresie geometrică cu raţia* q. *Natura acestei serii depinde de valorile lui* q. *Şirul sumelor parţiale are termenul general*

$$s_n=1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}=\begin{cases}\frac{1-q^n}{1-q}, & q\neq 1,\\ n, & q=1.\end{cases}$$

Obţinem

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\begin{cases}\frac{1}{1-q}, & |q|<1,\\ +\infty, & q\geq 1.\end{cases}$$

Pentru $q\leq -1$ *şirul* (s_n) *nu are limită. Astfel, seria geometrică cu raţia* q *este convergentă pentru* $|q|<1$ *şi are suma* $1/(1-q)$ *şi divergentă pentru* $|q|\geq 1$.

Fie seriile (A) $\sum a_n$ şi (B) $\sum b_n$ şi λ un număr real.

Numim *sumă* a seriilor (A) şi (B) seria $\sum(a_n + b_n)$. Numim *produs* al seriei (A) cu scalarul λ seria $\sum(\lambda a_n)$. Deci:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n), \quad \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n).$$

Teorema 2.23 *Dacă seriile (A) şi (B) sunt convergente, având sumele s şi respectiv σ, atunci*

1^0. *Seria $\sum(\lambda a_n + \mu b_n)$ este convergentă şi are suma $\lambda s + \mu\sigma$, oricare ar fi λ, $\mu \in \mathbf{R}$.*

2^0. *Dacă $a_n \le b_n$, pentru orice $n \in \mathbf{N}$, atunci $s \le \sigma$.*

$\triangleleft$ 1^0. Fie (s_n) şi respectiv (σ_n) şirurile sumelor parţiale ale celor două serii şi $S_n = \lambda s_n + \mu\sigma_n$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(\lambda s_n + \mu\sigma_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} s_n + \mu \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lambda s + \mu\sigma.$$

2^0. Din $a_n \le b_n$ urmează $s_n \le \sigma_n$, pentru orice $n \in \mathbf{N}$, de unde prin trecere la limită rezultă $s \le \sigma$. $\triangleright$

Teorema 2.24 1^0. *Dacă într-o serie se schimbă ordinea unui număr finit de termeni, se obţine o serie care are aceeaşi natură cu seria dată. Dacă seria dată are sumă, seria obţinută are aceeaşi sumă.*

2^0. *Dacă la o serie se adaugă sau se înlătură un număr finit de termeni, seria obţinută are aceeaşi natură cu seria dată. Dacă seria dată este convergentă, sumele celor două serii, în general, nu coincid. Dacă seria dată este divergentă cu suma $\pm\infty$, seria obţinută are suma $\pm\infty$.*

3^0. *Dacă termenii unei serii, cu suma finită sau infinită, se asociază în grupe aşa fel încât fiecare grupă să conţină un număr finit de termeni consecutivi şi fiecare termen să aparţină la o singură grupă, atunci seria ce are ca termen general suma termenilor dintr-o grupă are aceeaşi natură şi aceeaşi sumă cu seria dată.*

$\triangleleft$ 1^0. Prin schimbarea ordinii unui număr finit de termeni ai seriei, se modifică un număr finit de termeni ai şirului sumelor sale parţiale, ceea ce nu modifică natura sa.

2^0. Prin adăugarea sau înlăturarea unui număr finit de termeni, şirul sumelor parţiale se modifică cu o cantitate constantă (suma termenilor adăugaţi sau înlăturaţi), deci natura sa nu se modifică. Dacă acest şir este convergent, limita sa se modifică cu această cantitate constantă.

3^0. Şirul sumelor parţiale ale seriei obţinute este un subşir al şirului sumelor parţiale ale seriei date şi deci are aceeaşi natură şi limită cu aceasta. $\triangleright$

Fie $\sum a_n$ o serie convergentă şi s suma sa. Numărul

$$r_n = s - s_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k, \quad n \in \mathbf{N},$$

se numeşte *restul de ordinul n* al seriei convergente $\sum a_n$, iar (r_n) se numeşte *şirul resturilor* seriei. Şirul resturilor seriei este convergent la zero.

Teorema 2.25 1^0. *Şirul sumelor parţiale ale unei serii convergente este mărginit.*
2^0. *Şirul termenilor unei serii convergente este convergent la zero.*
3^0. *Dacă şirul termenilor unei serii nu converge la zero, atunci seria este divergentă.*

$\triangleleft$ 1^0. O serie este convergentă dacă şirul sumelor sale parţiale este convergent, deci mărginit.
2^0. Afirmaţia rezultă din egalitatea $a_n = s_n - s_{n-1}$, pentru orice $n > 1$.
3^0. Rezultă prin reducere la absurd, ţinând seama de 2^0. $\triangleright$
Reciprocile afirmaţiilor 2^0şi 3^0 nu sunt adevărate.

Studiul seriilor comportă două probleme: stabilirea naturii unei serii şi, în caz de convergenţă, calculul sumei. În cele ce urmează vom stabili câteva *criterii* (condiţii suficiente) de convergenţă.

2.5.2 Serii cu termeni pozitivi

Definiţia 2.7 *O serie se numeşte* serie cu termeni pozitivi *dacă, începând cu un anumit rang, toţi termenii săi sunt pozitivi.*

Ţinând seama de Teorema 2.24, se poate considera că seria $\sum a_n$ este cu termeni pozitivi dacă $a_n > 0$, pentru orice $n \in \mathbf{N}$.
Şirul sumelor parţiale ale unei serii cu termeni pozitivi este monoton crescător.

Teorema 2.26 ***(Criteriul monotoniei)*** *Dacă şirul sumelor parţiale ale seriei cu termeni pozitivi $\sum a_n$ este mărginit, seria este convergentă, iar dacă este nemărginit, seria este divergentă.*

$\triangleleft$ Şirul (s_n) fiind monoton şi mărginit este convergent. $\triangleright$

Teorema 2.27 ***(Criteriul comparaţiei)*** *Fie (A) $\sum a_n$ şi (B) $\sum b_n$ două serii cu termeni pozitivi. Dacă există un număr natural N a.î. $a_n \leq b_n$, pentru orice $n > N$, atunci:*
- dacă seria (B) este convergentă şi seria (A) este convergentă;
- dacă seria (A) este divergentă şi seria (B) este divergentă.

$\triangleleft$ Fie (s_n) şi respectiv (σ_n) şirurile sumelor parţiale ale celor două serii. Din $a_n \leq b_n$ urmează $s_n \leq \sigma_n$, pentru orice $n > N$.
Dacă seria (B) este convergentă , (σ_n) este mărginit, deci, după criteriul monotoniei, seria (A) este convergentă.
Dacă seria (A) este divergentă, (s_n) este nemărginit. Din inegalitatea precedentă rezultă că şi (σ_n) este nemărginit, deci seria (B) este divergentă. $\triangleright$

Teorema 2.28 ***(Criteriul de condensare, Cauchy)*** *Fie (A) $\sum a_n$ o serie cu termeni pozitivi. Dacă şirul (a_n) este descrescător, seria (A) are aceeaşi natură cu seria (D) $\sum 2^n a_{2^n}$.*

◁ Ţinând seama e punctul 3^0 al Teoremei 2.24, seria (A) are aceeaşi natură cu seriile

$$(B) \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots$$

cu $b_1 = a_1 + a_2$, $b_n = a_{2^{n-1}+1} + \cdots + a_{2^n}$ pentru orice $n \geq 2$ şi

$$(C) \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots$$

cu $c_n = a_{2^n} + a_{2^n+1} + \cdots + a_{2^{n+1}-1}$, pentru orice $n \geq 0$.

Deoarece şirul (a_n) este descrescător, avem inegalităţile

$$(b) \;\; b_n \geq \frac{1}{2}(2^n a_{2^n}), \quad (c) \;\; c_n \leq 2^n a_{2^n}, \quad \forall\, n \geq 1.$$

Aplicăm criteriul comparaţiei. Dacă seria (A), deci şi (B) este convergentă, din (b) rezultă că seria (D) este convergentă. Dacă seria (A), deci şi seria (C) este divergentă, din (c) rezultă că seria (D) este divergntă.

Reciproc, dacă seria (D) este convergentă, din (c) rezultă că seria (C), deci şi seria (A) este convergentă. Dacă seria (D) este divergentă, din (b) rezultă că seria (B), deci şi (A) este divergentă. ▷

Exemplul 2.9 *Seria* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbf{R}$, *numită* seria lui Riemann *sau* seria armonică generalizată *este:*

- convergentă pentru $\alpha > 1$;

- divergentă pentru $\alpha \leq 1$.

Într-adevăr, dacă $\alpha \leq 0$, seria este divergentă deoarece şirul termenilor ei nu converge la zero.

Dacă $\alpha > 0$, şirul cu termenul general $a_n = 1/n^\alpha$ este descrescător şi deci seria lui Riemann are aceeaşi natură cu seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n,$$

care este o serie geometrică cu raţia $q = 2^{1-\alpha} > 0$, convergentă dacă $q = 2^{1-\alpha} < 1$, adică $\alpha > 1$, şi divergentă dacă $q = 2^{1-\alpha} \geq 1$, adică $\alpha \leq 1$.

Teorema 2.29 ***(Criteriul rădăcinii, Cauchy)*** *Fie $\sum a_n$ o serie cu termeni pozitivi. Dacă există un număr natural N a.î.*

- pentru orice $n > N$, $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$, seria este convergentă;

- pentru orice $n > N$, $\sqrt[n]{a_n} \geq q \geq 1$, seria este divergentă.

◁ Aplicăm criteriul comparaţiei. În primul caz, din enunţ avem că $a_n \leq q^n$, iar seria $\sum q^n$, cu $0 < q < 1$ este convergentă. Deci seria $\sum a_n$ este convergentă. În cazul al doilea, $a_n \geq q^n$, iar seria $\sum q^n$, cu $q \geq 1$ este divergentă. Deci seria $\sum a_n$ este divergentă. ▷

Teorema 2.30 ***(Criteriul rădăcinii cu limită)*** *Fie seria cu termeni pozitivi* $\sum a_n$ *pentru care există* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$:
- *dacă* $\lambda < 1$, *seria este convergentă;*
- *dacă* $\lambda > 1$, *seria este divergentă;*
- *dacă* $\lambda = 1$, *caz de dubiu.*

$\triangleleft$ Din definiţia limitei rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$, există un $N \in \mathbf{N}$ a.î.

$$\lambda - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < \lambda + \varepsilon.$$

Dacă $\lambda < 1$ putem găsi un $\varepsilon > 0$ a.î. $q = \lambda + \varepsilon < 1$, adică $a_n < q^n$, cu $q < 1$ şi deci seria este convergentă. Dacă $\lambda > 1$ putem găsi un $\varepsilon > 0$ a.î. $q = \lambda - \varepsilon > 1$, adică $a_n > q^n$, cu $q > 1$ şi deci seria este divergentă. $\triangleright$

Exemplul 2.10 *Seria cu termenul general* $a_n = \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$ *este convergentă, căci*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n-1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Teorema 2.31 ***(Criteriul raportului, d'Alembert)*** *Fie* $\sum a_n$ *o serie cu termeni pozitivi. Dacă există un număr natural* N *a.î.*
- *pentru orice* $n > N$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1$, *seria este convergentă;*
- *pentru orice* $n > N$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge q \ge 1$, *seria este divergentă.*

$\triangleleft$ Fără a restrânge generalitatea putem presupune că inegalităţile din enunţ sunt adevărate pentru $n \ge 1$ şi să observăm că

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \cdots \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1.$$

În primul caz, din enunţ şi egalitatea precedentă avem că $a_n \le a_1 q^{n-1}$, iar seria $\sum q^{n-1}$, cu $0 < q < 1$ este convergentă. Deci seria $\sum a_n$ este convergentă. În cazul al doilea, $a_n \ge a_1 q^{n-1}$, iar seria $\sum q^{n-1}$, cu $q \ge 1$ este divergentă. Deci seria $\sum a_n$ este divergentă. $\triangleright$

Teorema 2.32 ***(Criteriul raportului cu limită)*** *Fie seria cu termeni pozitivi* $\sum a_n$ *pentru care există* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$:
- *dacă* $\lambda < 1$, *seria este convergentă;*
- *dacă* $\lambda > 1$, *seria este divergentă;*
- *dacă* $\lambda = 1$, *caz de dubiu.*

$\triangleleft$ Se demonstrează la fel ca la criteriul rădăcinii. $\triangleright$

Exemplul 2.11 *Seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ *este convergentă, căci*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{2} < 1, \quad n \ge 1.$$

Suma acestei serii este $e = 2,7182818\ldots$

Teorema 2.33 ***(Criteriul lui Kummer)*** *Fie $\sum a_n$ o serie cu termeni pozitivi. Dacă există un şir de numere pozitive (k_n) şi un număr natural N a.î.*

- pentru orice $n > N$: $k_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - k_{n+1} \geq \lambda > 0$, atunci seria $\sum a_n$ este convergentă;

- pentru orice $n > N$: $k_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - k_{n+1} \leq \lambda \leq 0$, iar seria $\sum \frac{1}{k_n}$ este divergentă, atunci seria $\sum a_n$ este divergentă.

$\lhd$ Fără a restrânge generalitatea putem presupune că inegelităţile din enunţ sunt adevărate pentru $n \geq 1$. În primul caz, inegalitatea din enunţ se mai scrie

$$k_n a_n - k_{n+1} a_{n+1} \geq \lambda a_{n+1} > 0,$$

de unde rezultă că şirul $(k_n a_n)$ este monoton descrescător şi mărginit inferior de 0, deci convergent. Fie ℓ limita sa. Prin urmare, seria cu termenul general

$$b_n = k_n a_n - k_{n+1} a_{n+1}$$

este convergentă şi are suma $k_1 a_1 - \ell$. Cum $\lambda > 0$, inegalitatea precedentă se mai scrie $a_{n+1} \leq \frac{1}{\lambda} b_n$. Aplicând criteriul comparaţiei, deducem că seria $\sum a_n$ este convergentă. În cazul al doilea, din inegalitatea din enunţ obţinem $k_n a_n \leq k_{n+1} a_{n+1}$, adică şirul $k_n a_n$ este monoton crescător, deci $k_n a_n \geq k_1 a_1$ sau $a_n \geq k_1 a_1 \cdot \frac{1}{k_n}$, pentru orice $n \geq 1$. Cum seria $\sum \frac{1}{k_n}$ este divergentă, deducem că seria $\sum a_n$ este divergentă. $\rhd$

În cazul particular $k_n = n$ şi $\lambda = r - 1$ se obţine:

Teorema 2.34 ***(Criteriul lui Raabe şi Duhamel)*** *Fie $\sum a_n$ o serie cu termeni pozitivi. Dacă există un număr natural N a.î.*

- pentru orice $n > N$: $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq r > 1$, atunci seria $\sum a_n$ este convergentă;

- pentru orice $n > N$: $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq r \leq 1$, atunci seria $\sum a_n$ este divergentă.

Teorema 2.35 ***(Criteriul lui Raabe şi Duhamel cu limită)*** *Fie $\sum a_n$ o serie cu termeni pozitivi pentru care există $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lambda$:*

- dacă $\lambda > 1$, seria este convergentă;

- dacă $\lambda < 1$, seria este divergentă;

- dacă $\lambda = 1$, caz de dubiu.

$\lhd$ Se demonstrează la fel ca la criteriul rădăcinii. $\rhd$

Criteriul lui Raabe şi Duham el se aplică, în general, în cazul în care criteriul lui d'Alembert dă dubiu.

2.5.3 Serii cu termeni oarecare

O serie cu termeni oarecare are o infinitate de termeni pozitivi şi o infinitate de termeni negativi.

O serie care are toţi termenii negativi, cu excepţia unui număr finit, prin înmulţire cu -1 devine o serie cu termeni pozitivi.

Definiţia 2.8 *Seria cu termeni oarecare* $\sum a_n$ *se numeşte* absolut convergentă *dacă seria* $\sum |a_n|$ *este convergentă.*

Teorema 2.36 *Dacă seria* $\sum a_n$ *este absolut convergentă, atunci ea este convergentă şi*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \tag{2.15}$$

◁ Seria modulelor fiind convergentă, conform criteriului lui Cauchy,

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbf{N} \text{ pentru care } \sum_{k=1}^{p} |a_{n+k}| < \varepsilon,\ \ \forall\, n > N,\ \ \forall\, p \in \mathbf{N}.$$

Dar $\left|\sum\limits_{k=1}^{p} a_{n+k}\right| \leq \sum\limits_{k=1}^{p} |a_{n+k}|$, pentru orice $n, k \in \mathbf{N}$. De unde deducem că seria $\sum a_n$ satisface criteriul lui Cauchy. Trecând la limită în inegalitatea

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

se obţine (2.15). ▷

Reciproca teoremei precedente nu este adevărată. Există serii convergente fără ca seria modulelor să fie convergentă. Spre exemplu, după cum vom vedea mai târziu, seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n},$$

numită *seria armonică alternantă*, este o serie convergentă, deşi seria modulelor, adică seria armonică, este divergentă.

Definiţia 2.9 *O serie convergentă care nu este absolut convergentă se numeşte* semi-convergentă *sau* simplu convergentă.

Seria modulelor unei serii date este o serie cu termeni pozitivi. Criteriile de convergenţă pentru serii cu termeni pozitivi se pot folosi şi pentru stabilirea *absolutei convergenţe* a unei serii oarecare. Dacă o serie nu este absolut convergentă ea poate fi convergentă sau divergentă. Dăm în continuare un *criteriu de convergenţă pentru serii cu termeni oarecare.*

Teorema 2.37 ***(Criteriul lui Abel-Dirichlet)*** *Seria* $\sum \alpha_n a_n$ *este convergentă dacă* (α_n) *este un şir de numere reale pozitive monoton descrescător şi* $\alpha_n \to 0$*, iar*

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

este mărginit, adică $|s_n| \leq M$*, pentru orice* $n \in \mathbf{N}$.

$\triangleleft$ Arătăm că seria $\sum \alpha_n a_n$ satisface criteriul general al lui Cauchy. deoarece $a_{n+k} = s_{n+k} - s_{n+k-1}$, putem scrie

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha_{n+k} a_{n+k} = \sum_{k=1}^{p} \alpha_{n+k}(s_{n+k} - s_{n+k-1}) =$$

$$= -\alpha_{n+1} s_n + \sum_{k=1}^{p-1} (\alpha_{n+k} - \alpha_{n+k+1}) s_{n+k} + \alpha_{n+p} s_{n+p}.$$

Dar $|s_n| \leq M$ şi (α_n) este monoton descrescător, $\alpha_{n+k} - \alpha_{n+k+1} > 0$. Prin urmare,

$$\left| \sum_{k=1}^{p} \alpha_{n+k} a_{n+k} \right| \leq M\alpha_{n+1} + M(\alpha_{n+1} - \alpha_{n+p}) + M\alpha_{n+p} = 2M\, \alpha_{n+1} < \varepsilon,$$

deoarece $\alpha_n \to 0$. $\triangleright$

Exemplul 2.12 *Seria $\sum \frac{\sin nx}{n^\alpha}$ este convergentă pentru $\alpha > 0$. În adevăr, pentru $\alpha > 0$, şirul $\alpha_n = \frac{1}{n^\alpha}$ este monoton descrescător la zero, iar*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2},$$

pentru $x \neq 2m\pi$, cu m număr întreg. De unde,

$$|s_n| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|},$$

adică (s_n) este mărginit.

Definiţia 2.10 *Se numeşte* serie alternantă *o serie de forma*

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + \cdots + (-1)^{n+1} \alpha_n + \cdots,$$

în care toţi α_n sunt numere reale pozitive.

Teorema 2.38 ***(Criteriul lui Leibniz)*** *O serie alternantă este convergentă dacă şirul (α_n) este monoton descrescător şi $\alpha_n \to 0$.*

$\triangleleft$ Aplicăm criteriul lui Abel-Dirichlet. Şirul (α_n) satisface condiţiile cerute de acest criteriu, iar $a_n = (-1)^{n+1}$, încât (s_n) este şirul: 1, 0, 1, 0, ..., evident mărginit.

Exemplul 2.13 *Seria armonică generalizată (sau seria lui Riemann) alternată*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^\alpha}$$

în care $0 < \alpha \leq 1$ este simplu convergentă.

În adevăr, şirul $\frac{1}{n^\alpha}$ cu $\alpha > 0$ este monoton descrescător la zero. După criteriul lui Leibniz seria este convergentă. Pentru $\alpha > 1$ seria este absolut convergentă. În concluzie, pentru $0 < \alpha \leq 1$ seria lui Riemann alternată este simplu convergentă.

2.6 Serii în $\mathbf{R}^p$

În $\mathbf{R}^p$ sunt definite sumele finite de vectori, datorită structurii de spaţiu liniar, cât şi limitele şirurilor de vectori, datorită structurii de spaţiu normat.

Definiţia convergenţei unei serii de vectori din $\mathbf{R}^p$ este complet analoagă definiţiei convergenţei unei serii de numere reale.

Fie $(\mathbf{a}_n)$ un şir de vectori din $\mathbf{R}^p$ şi $(\mathbf{s}_n)$ şirul

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{a}_1,\ \mathbf{s}_2 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{s}_n = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{a}_n,\ \ldots \tag{2.16}$$

Perechea de şiruri $((\mathbf{a}_n), (\mathbf{s}_n))$ se numeşte *serie de vectori din* $\mathbf{R}^p$ şi se notează

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{a}_n + \cdots \text{ sau } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ sau } \sum a_n. \tag{2.17}$$

Şirul $(\mathbf{a}_n)$ se numeşte *şirul termenilor* seriei, iar şirul $(\mathbf{s}_n)$ se numeşte *şirul sumelor parţiale.*

Seria $\sum \mathbf{a}_n$ este *convergentă* şi are ca *sumă* vectorul $\mathbf{s} \in \mathbf{R}^p$**,** dacă şirul $(\mathbf{s}_n)$ este convergent şi are limita $\mathbf{s}$. În acest caz scriem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{s} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{a}_k. \tag{2.18}$$

Seria $\sum \mathbf{a}_n$ este *divergentă* dacă şirul $(\mathbf{s}_n)$ este divergent.

Deoarece convergenţa unui şir de vectori din $\mathbf{R}^p$ se reduce la convergenţa celor p şiruri componente, urmează că seria de vectori $\sum \mathbf{a}_n$, în care $\mathbf{a}_n = (a_1^n, a_2^n, \ldots, a_p^n)$, este convergentă d.d. seriile de numere reale $\sum a_k^n$, $k = \overline{1,p}$, sunt convergente.

Multe din rezultatele obţinute pentru serii de numere reale se menţin şi pentru serii de vectori.

Teorema 2.39 ***(Criteriul general al lui Cauchy)*** *Seria* $\sum \mathbf{a}_n$ *este convergentă d.d.*

$$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,N(\varepsilon) \in \mathbf{N} \ \textit{ pentru care } \ ||\mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{a}_{n+2} + \cdots + \mathbf{a}_{n+p}|| < \varepsilon,\ \forall\,n > N,\ \forall\,p \in \mathbf{N}. \tag{2.19}$$

◁ Dacă $(\mathbf{s}_n)$ este şirul sumelor parţiale ale seriei, atunci pentru orice $n, p \in \mathbf{N}$ putem scrie

$$\mathbf{s}_{n+p} - \mathbf{s}_n = \mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{a}_{n+2} + \cdots + \mathbf{a}_{n+p}.$$

Seria $\sum \mathbf{a}_n$ este convergentă d.d. şirul $(\mathbf{s}_n)$ este convergent. Dar $(\mathbf{s}_n)$ este convergent d.d. este şir fundamenal, adică

$$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,N(\varepsilon) \in \mathbf{N} \text{ pentru care } ||s_{n+p} - s_n|| < \varepsilon,\ \forall\,n > N,\ \forall\,p \in \mathbf{N}.$$

Înlocuind aici diferenţa $\mathbf{s}_{n+p} - \mathbf{s}_n$ cu expresia precedentă, obţinem (2.19). ▷

Definiţia 2.11 *Seria de vectori* $\sum \mathbf{a}_n$ *se numeşte* convergentă în normă *dacă seria* $\sum ||\mathbf{a}_n||$ *(seria normelor) este convergentă.*

Teorema 2.40 *Dacă seria* $\sum \mathbf{a}_n$ *este convergentă în normă, atunci ea este convergentă şi*

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a}_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\mathbf{a}_n\| . \tag{2.20}$$

$\triangleleft$ Seria normelor fiind convergentă, conform criteriului lui Cauchy,

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbf{N} \text{ pentru care } \sum_{k=1}^{p} ||a_{n+k}|| < \varepsilon,\ \ \forall\, n > N,\ \ \forall\, p \in \mathbf{N}.$$

Dar

$$\left\| \sum_{k=1}^{p} \mathbf{a}_{n+k} \right\| \leq \sum_{k=1}^{p} ||\mathbf{a}_{n+k}||,$$

pentru orice $n, k \in \mathbf{N}$. De unde deducem că seria $\sum \mathbf{a}_n$ satisface criteriul lui Cauchy. Trecând la limită în inegalitatea

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \mathbf{a}_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{n} ||\mathbf{a}_k||$$

se obţine (2.20). $\triangleright$

Teorema 2.41 ***(Criteriul majorării)*** *Dacă pentru seria de vectori* $\sum \mathbf{a}_n$ *există o serie de numere reale pozitive* $\sum \alpha_n$*, convergentă şi a.î.* $||\mathbf{a}_n|| \leq \alpha_n$*, pentru orice* $n \in \mathbf{N}$*, atunci seria* $\sum \mathbf{a}_n$ *este convergentă.*

$\triangleleft$ Pentru demonstraţie se foloseşte teorema precedentă şi criteriul comparaţiei de la serii cu termeni pozitivi. $\triangleright$

Capitolul 3

LIMITE DE FUNCŢII

3.1 Limita unei funcţii reale de o variabilă reală

3.1.1 Limita într-un punct

Fie $f : E \to \mathbf{R}$ şi x_0 un *punct de acumulare* al mulţimii $E \subset \mathbf{R}$.

Definiţia 3.1 *Spunem că numărul real l este* limita funcţiei f în punctul x_0 *dacă pentru orice vecinătate U a lui l există o vecinătate V a lui x_0 a.î. oricare ar fi $x \neq x_0$, $x \in V \cap E$, să avem $f(x) \in U$ şi scriem*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

Punctul x_0 poate să nu aparţină mulţimii E, dar trebuie să fie punct de acumulare pentru E. Atât x_0 cât şi l pot fi finite sau infinite, vecinătăţile V şi U fiind definite corespunzător.

Dacă x_0 şi l sunt *finite*, definţia precedentă este echivalentă cu definiţia care urmează:

Definiţia 3.2 *Spunem că numărul real l este* limita funcţiei f în punctul x_0 *dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $\forall\, x \in E$ pentru care $0 < |x - x_0| < \delta$, să avem $|f(x) - l| < \varepsilon$.*

Definiţia limitei unei funcţii într-un punct poate fi formulată şi cu ajutorul şirurilor.

Definiţia 3.3 *Spunem că numărul real l este* limita funcţiei f în punctul x_0 *dacă pentru orice şir (x_n), $x_n \in E$, $x_n \neq x_0$, convergent la x_0, şirul corespunzător al valorilor funcţiei $(f(x_n))$ este convergent la l.*

3.1.2 Proprietăţi ale limitei unei funcţii

Deoarece limita unei funcţii într-un punct se poate defini cu ajutorul limitei unui şir, o parte dintre proprietăţile limitelor şirurilor sunt valabile şi pentru limite de funcţii.

Fie $f_1, f_2 : E \to \mathbf{R}$, două funcţii definite pe $E \subset \mathbf{R}$ şi x_0 un *punct de acumulare* al mulţimii E.

Teorema 3.1 *Dacă funcţiile f_1 şi f_2 au limite în punctul x_0, finite sau infinite şi:*

1. dacă suma limitelor are sens, atunci funcţia sumă $f_1 + f_2$ are limită în punctul x_0 şi

$$\lim_{x\to x_0}(f_1(x) + f_2(x)) = \lim_{x\to x_0} f_1(x) + \lim_{x\to x_0} f_2(x);$$

2. dacă produsul limitelor are sens, atunci funcţia produs $f_1 \cdot f_2$ are limită în punctul x_0 şi

$$\lim_{x\to x_0}(f_1(x) \cdot f_2(x)) = \lim_{x\to x_0} f_1(x) \cdot \lim_{x\to x_0} f_2(x);$$

3. dacă câtul limitelor are sens, atunci funcţia cât f_1/f_2 are limită în punctul x_0 şi

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)};$$

4. dacă limita lui f_1 la puterea limita lui f_2 are sens, atunci funcţia $f_1^{f_2}$ are limită în punctul x_0 şi

$$\lim_{x\to x_0}(f_1(x))^{f_2(x)} = \left(\lim_{x\to x_0} f_1(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)}.$$

Teorema 3.2 *Fie $u : E \to F$ şi $f : F \to \mathbf{R}$ două funcţii şi x_0 un punct de acumulare al mulţimii E, pentru care există $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = u_0$, u_0 punct de acumulare al mulţimii F. Dacă există $\lim\limits_{u\to u_0} f(u) = l$, atunci funcţia compusă $f \circ u : E \to \mathbf{R}$ are limită în punctul x_0 şi*

$$\lim_{x\to x_0}(f \circ u)(x) = l.$$

$\triangleleft$ Funcţia u având limita u_0 în punctul x_0, urmează că pentru orice şir (x_n) convergent la x_0, şirul (u_n), cu $u_n = u(x_n)$, este convergent la u_0 Funcţia f având limita l în punctul u_0, urmează că şirul cu termenul general

$$f(u_n) = f(u(x_n)) = (f \circ u)(x_n)$$

este convergent la l. $\triangleright$

Pentru şiruri, criteriul lui Cauchy ne permite să studiem convergenţa unui şir fără a fi implicată limita acestuia. Definiţia limitei unei funcţii cu ajutorul şirurilor ne permite să transpunem acest criteriu şi la funcţii.

Teorema 3.3 ***(Criteriul lui Cauchy-Bolzano)*** *Funcţia f are limită în punctul x_0 d.d. oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există o vecinătate V a lui x_0 a.î. pentru orice $x, x' \neq x_0$, $x, x' \in V \cap E$, să avem $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.*

$\triangleleft$ **Necesitatea**. Să presupunem că $f(x) \to l$ când $x \to x_0$, Deci, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un $\delta(\varepsilon) > 0$ a.î. pentru orice $x, x' \in V = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ să avem

$$|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2},\ \ |f(x') - l| < \frac{\varepsilon}{2},$$

de unde,

$$|f(x) - f(x')| < |f(x) - l| + |f(x') - l| < \varepsilon.$$

Suficienţa. Fie (x_n) un şir, $x_n \in E$, $x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$. Conform ipotezei, pentru orice $\varepsilon > 0$ există o vecinătate V a lui x_0 a.î. pentru $x, x' \neq x_0$, $x, x' \in V \cap E$, să avem $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Şirul (x_n) fiind convergent la x_0, există un $N(\varepsilon)$ a.î. pentru $n, m > N$, $x_n, x_m \in V$ şi deci $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$. Prin urmare, şirul $(f(x_n))$ este un şir Cauchy de numere reale şi deci are limită. Cum şirul (x_n) este arbitrar, deducem că funcţia f are limită în punctul x_0. $\triangleright$

3.2 Limita unei funcţii vectoriale de o variabilă reală

Fie $\mathbf{f} : E \to \mathbf{R}^m$, $E \subset \mathbf{R}$ şi x_0 un *punct de acumulare* al mulţimii E.

Definiţia 3.4 *Spunem că vectorul* $\mathbf{l} = (l_1, l_2, \ldots, l_m) \in \mathbf{R}^m$ *este* limita funcţiei $\mathbf{f}$ în punctul x_0 *dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există un număr* $\delta(\varepsilon) > 0$ *a.î. oricare ar fi* $x \in E$ *pentru care* $0 < |x - x_0| < \delta$*, să avem*

$$||\mathbf{f}(x) - \mathbf{l}|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (f_k(x) - l_k)^2} < \varepsilon$$

şi scriem $\lim\limits_{x \to x_0} \mathbf{f}(x) = \mathbf{l}$.

Teorema 3.4 *O funcţie vectorială are limită într-un punct d.d. funcţiile sale componente au limite în acel punct, adică*

$$\lim_{x \to x_0} \mathbf{f}(x) = \mathbf{l} \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f_k(x) = l_k, \ k = \overline{1, m}.$$

$\triangleleft$ Teorema rezultă din dubla inegalitate

$$|f_k(x) - l_k| \leq ||\mathbf{f}(x) - \mathbf{l}|| \leq \sum_{i=1}^{m} |f_i(x) - l_i|, \quad k = \overline{1, m}$$

şi definiţia precedentă. $\triangleright$

Această teoremă reduce studiul limitei unei funcţii vectoriale la studiul limitelor a m funcţii reale.

Teorema 3.5 *Dacă funcţiile* $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 : E \to \mathbf{R}^m$ *au limite în punctul* x_0*, atunci:*

$$\lim_{x \to x_0} (\lambda_1 \mathbf{f}_1(x) + \lambda_2 \mathbf{f}_2(x)) = \lambda_1 \lim_{x \to x_0} \mathbf{f}_1(x) + \lambda_2 \lim_{x \to x_0} \mathbf{f}_2(x), \quad \forall \, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R},$$

$$\lim_{x \to x_0} (\mathbf{f}_1(x) \cdot \mathbf{f}_2(x)) = \lim_{x \to x_0} \mathbf{f}_1(x) \cdot \lim_{x \to x_0} \mathbf{f}_2(x).$$

3.3 Limita unei funcţii de o variabilă vectorială

Fie $f : E \to \mathbf{R}$, $E \subset \mathbf{R}^n$, o *funcţie reală* şi $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ un *punct de acumulare* al mulţimii E.

Definiţia 3.5 *Spunem că numărul real l este* limita funcţiei f *în punctul* $\mathbf{x}_0$ *dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$ a.î. oricare ar fi $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E$ pentru care*

$$0 < ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)^2} < \delta,$$

să avem $|f(\mathbf{x}) - l| < \varepsilon$ şi scriem

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = l.$$

Fie $\mathbf{f} : E \to \mathbf{R}^m$, $E \subset \mathbf{R}^n$, o *funcţie vectorială* şi $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ un *punct de acumulare* al mulţimii E.

Definiţia 3.6 *Spunem că vectorul $\mathbf{l} = (l_1, l_2, \ldots, l_m) \in \mathbf{R}^m$ este* limita funcţiei $\mathbf{f}$ *în punctul $\mathbf{x}_0$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$ a.î. oricare ar fi $\mathbf{x} \in E$ pentru care $0 < ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|| < \delta$, să avem $||\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{l}|| < \varepsilon$ şi scriem $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{l}$.*

Teorema 3.4 rămâne valabilă şi în cazul funcţiilor vectoriale de o variabilă vectorială.

Teorema 3.6 *O funcţie vectorială are limită într-un punct d.d. funcţiile sale componente au limite în acel punct, adică*

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{l} \Leftrightarrow \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f_k(\mathbf{x}) = l_k, \;\; k = \overline{1, m}.$$

Capitolul 4

FUNCŢII CONTINUE

4.1 Continuitatea funcţiilor reale de o variabilă reală

4.1.1 Continuitatea într-un punct

Fie $f : E \to \mathbf{R}$, $E \subset \mathbf{R}$, o funcţie reală şi $x_0 \in E$.

Definiţia 4.1 *Spunem că funcţia f este* continuă în punctul x_0 *dacă oricare ar fi U o vecinătate a lui $f(x_0)$, există o vecinătate V a lui x_0, a.î. pentru orice $x \in V \cap E$, să avem $f(x) \in U$.*

Vecinătatea V depinde de vecinătatea U. În problema continuităţii se cercetează comportarea funcţiei în vecinătatea punctului x_0 faţă de valoarea funcţiei în punctul x_0, deci x_0 trebuie să aparţină mulţimii de definiţie a funcţiei.

Funcţia este continuă în punctul x_0 dacă la valori ale variabilei x vecine lui x_0 funcţia ia valori oricât de apropiate de valoarea funcţiei în punctul x_0. Nu se pune problema continuităţii în punctele $+\infty$ şi $-\infty$ şi nici în punctele în care valoarea funcţiei devine infinită. Într-un punct izolat $x_0 \in E$ funcţia f este continuă, deoarece în definiţia continuităţii nu se cere (ca la definiţia limitei într-un punct) ca x_0 să fie punct de acumulare al lui E.

Un punct x_0 în care funcţia este continuă se numeşte *punct de continuitate* pentru funcţia f.

Definiţia precedentă este echivalentă cu următoarea definiţie:

Definiţia 4.2 *Spunem că funcţia f este* continuă în punctul x_0 *dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$ a.î. oricare ar fi $x \in E$ pentru care $|x - x_0| < \delta$, să avem $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.*

În cazul în care $x_0 \in E$ este punct de acumulare pentru E, continuitatea în punctul x_0 se poate defini cu ajutorul limitei.

Definiţia 4.3 *Spunem că funcţia f este* continuă în punctul x_0, *punct de acumulare pentru E, dacă f are limită în x_0 şi aceasta este egală cu $f(x_0)$, adică*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Deoarece f este continuă în orice punct izolat din E, problema continuităţii se pune numai în punctele de acumulare ale lui E. Dacă f nu este continuă în x_0, spunem că funcţia f este *discontinuă* în punctul x_0, iar x_0 se numeşte *punct de discontinuitate.*

Funcţia f este continuă pe o mulţime $A \subset E$ dacă este continuă în fiecare punct al mulţimii A, adică

Definiţia 4.4 *Spunem că funcţia f este* continuă pe $A \subset E$ *dacă pentru orice $x \in A$ şi pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta(\varepsilon, x) > 0$ a.î. oricare ar fi $x' \in E$ pentru care $|x' - x| < \delta$, să avem $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$.*

4.1.2 Proprietăţi ale funcţiilor continue

Operaţii cu funcţii continue

Din definiţia continuităţii cu ajutorul şirurilor şi proprietăţile operaţiilor cu şiruri rezultă:

Teorema 4.1 *Dacă funcţiile $f, g : E \to \mathbf{R}$ sunt continue în punctul x_0, atunci:*

1. *funcţia $f + g$ este continuă în x_0;*
2. *funcţia $f \cdot g$ este continuă în x_0;*
3. *dacă $g(x_0) \neq 0$, funcţia f/g este continuă în x_0.*

Continuitatea funcţiei compuse

Teorema 4.2 *Fie $u : E \to F$ şi $f : F \to \mathbf{R}$. Dacă funcţia u este continuă în punctul $x_0 \in E$ şi f este continuă în punctul $u_0 = u(x_0) \in F$, atunci funcţia compusă $f \circ u : E \to \mathbf{R}$ este continuă în punctul x_0.*

$\triangleleft$ Deoarece funcţia u este continuă în x_0, pentru orice şir (x_n), $x_n \in E$, convergent la x_0, şirul (u_n), $u_n = u(x_n)$, din F este convergent la u_0. Funcţia f fiind continuă în u_0, şirul $(f(u_n))$ este convergent la $f(u_0)$. Deci $f(u(x_n)) \to f(u(x_0))$. $\triangleright$

Proprietăţi locale ale funcţiilor continue

Teorema 4.3 *Dacă f este continuă în x_0 şi $f(x_0) \neq 0$, există o vecinătate V a lui x_0 a.î. pentru orice $x \in V \cap E$ să avem $f(x) \cdot f(x_0) > 0$.*

$\triangleleft$ Să presupunem că $f(x_0) > 0$ şi fie $\varepsilon = \frac{1}{2} f(x_0)$. Din definiţia continuităţii, rezultă că există o vecinătate V a lui x_0 a.î. pentru orice $x \in V \cap E$ avem $|f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{2} f(x_0)$, de unde $f(x) > \frac{1}{2} f(x_0) > 0$. Dacă $f(x_0) < 0$, luăm $\varepsilon = -\frac{1}{2} f(x_0)$. $\triangleright$

Din demonstraţia teoremei precedente rezultă

Teorema 4.4 *Dacă f este continuă în x_0 există o vecinătate V a lui x_0 în care f este mărginită.*

Proprietăţi ale funcţiilor continue pe un interval închis şi mărginit

Teorema 4.5 ***(Prima teoremă a lui Weierstrass)*** *O funcţie continuă pe un interval închis şi mărginit* $[a, b]$ *este mărginită pe* $[a, b]$.

$\triangleleft$ Demonstraţie prin reducere la absurd. Să presupunem că funcţia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, continuă pe $[a, b]$, nu ar fi mărginită pe $[a, b]$. Deci, pentru orice număr $M > 0$ există un punct $\xi_M \in [a, b]$ a.î. $|f(\xi_M)| > M$. Să luăm $M = n$. Urmează că pentru orice $n \in \mathbf{N}$ există un $\xi_n \in [a, b]$ a.î. $|f(\xi_n)| > n$.

Intervalul $[a, b]$ fiind mărginit şi închis, şirul (ξ_n) este mărginit şi, conform lemei lui Cesaro, se poate extrage un subşir (ξ_{n_k}) convergent la un punct $\xi \in [a, b]$. Funcţia fiind continuă pe $[a, b]$ este continuă şi în ξ, deci $f(\xi_n) \to f(\xi)$. Însă din $|f(\xi_{n_k})| > n_k$ deducem că pentru $k \to \infty$, $|f(\xi_{n_k})| \to \infty$. Contradicţie. $\triangleright$

Teorema 4.6 ***(A doua teoremă a lui Weierstrass)*** *O funcţie continuă pe un interval închis şi mărginit* $[a, b]$ *îşi atinge marginile pe* $[a, b]$.

$\triangleleft$ Funcţia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, fiind continuă pe $[a, b]$, după teorema precedentă este mărginită pe $[a, b]$, deci există numerele m şi M a.î. $m \le f(x) \le M$, unde m este marginea inferioară şi M marginea superioară a valorilor funcţiei f pe $[a, b]$. Să arătăm că există un punct $\xi \in [a, b]$ în care $f(\xi) = m$.

Demonstraţie prin reducere la absurd. Să presupunem că în nici un punct din $[a, b]$ funcţia f nu ia valoarea m. Atunci, după definiţia marginii inferioare, urmează că $f(x) - m > 0$ pe $[a, b]$ şi deci funcţia $f_1(x) = \frac{1}{f(x)-m}$ este continuă şi pozitivă pe $[a, b]$. Prin urmare, conform teoremei precedente, f_1 este mărginită pe $[a, b]$, deci există un $M_1 > 0$ a.î. $f_1(x) \le M_1$, de unde rezultă că $m + \frac{1}{M_1} \le f(x)$, adică m nu ar mai fi marginea inferioară a valorilor funcţiei f pe $[a, b]$. Contradicţie.

În mod asemănător se demonstrează existenţa unui punct în care f ia valoarea M. $\triangleright$

Teorema 4.7 *Dacă o funcţie continuă pe un interval închis şi mărginit* $[a, b]$ *ia valori de semne contrare la capetele intervalului, adică* $f(a) \cdot f(b) < 0$, *atunci există cel puţin un punct* $x_0 \in (a, b)$ *a.î.* $f(x_0) = 0$.

$\triangleleft$ Să presupunem că $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ şi fie $x_1 = \frac{a+b}{2}$ mijlocul lui $[a, b]$. Dacă $f(x_1) = 0$, x_1 este punctul căutat. În caz contrar, notăm cu $[a_1, b_1]$ acela dintre intervalele $[a, x_1]$ sau $[x_1, b]$ pentru care $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$ şi fie $x_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$ mijlocul lui $[a_1, b_1]$. Dacă $f(x_2) = 0$, x_2 este punctul căutat. În caz contrar, notăm cu $[a_2, b_2]$ acela dintre intervalele $[a_1, x_2]$ sau $[x_2, b_1]$ pentru care $f(a_2) < 0$, $f(b_2) > 0$. Continuând în acest mod, obţinem un şir de intervale mărginite şi închise $I_n = [a_n, b_n]$ cu $I_{n+1} \subset I_n$ şi $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$. Din Lema lui Cantor rezultă că $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n = \{x_0\}$, punctul x_0 fiind limita comună a celor două şiruri (a_n) şi (b_n) şi $x_0 \in (a, b)$. Deoarece $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$ şi f este continuă, trecând la limită pentru $n \to \infty$, urmează că $f(x_0) \le 0$ şi $f(x_0) \ge 0$, ceea ce conduce la $f(x_0) = 0$. $\triangleright$

Teorema 4.8 *O funcţie continuă pe un interval închis şi mărginit $[a, b]$ ia cel puţin o dată toate valorile cuprinse între marginea inferioară m şi marginea superioară M a valorilor sale pe $[a, b]$.*

$\triangleleft$ Fie $\alpha \in (m, M)$. Funcţia $g(x) = f(x) - \alpha$ este continuă pe $[a, b]$. Dacă ξ_m şi ξ_M sunt punctele pentru care $f(\xi_m) = m$ şi $f(\xi_M) = M$, avem $g(\xi_m) < 0$, $g(\xi_M) > 0$. Deci există un punct x_0 cuprins între ξ_m şi ξ_M a.î. $g(x_0) = 0$, adică $f(x_0) = \alpha$. $\triangleright$

Proprietatea pusă în evidenţă în această teoremă se numeşte *proprietatea lui Darboux*.

4.1.3 Continuitatea uniformă

Definiţia 4.5 *Spunem că funcţia $f : E \to \mathbf{R}$ este* uniform continuă pe E *dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$ a.î. pentru orice $x, x' \in E$ pentru care $|x - x'| < \delta$, să avem $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.*

Exemplul 4.1 *Funcţia $f(x) = x^3$, $x \in [1, 3]$ este uniform continuă pe $[1, 3]$. Într-adevăr,*

$$|f(x) - f(x')| = |x - x'| \cdot (x^2 + xx' + x'^2) \leq 27\,|x - x'| < \varepsilon,$$

pentru orice $x, x' \in [1, 3]$ pentru care $|x - x'| < \delta(\varepsilon)$, cu $\delta(\varepsilon) = 27/\varepsilon$.

Dacă în definiţia precedentă păstrăm pe $x' \in E$ fix, obţinem definiţia continuităţii funcţiei f pe E. Deci o funcţie uniform continuă pe mulţimea E este continuă pe E. Reciproca *nu* este adevărată.

Teorema 4.9 *O funcţie continuă pe un interval închis şi mărginit (compact) este uniform continuă pe acel interval.*

$\triangleleft$ Demonstraţie prin reducere la absurd. Să presupunem că funcţia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, continuă pe $[a, b]$, nu ar fi uniform continuă pe $[a, b]$. Rezultă atunci că există un $\varepsilon_0 > 0$ a.î. pentru orice $\delta > 0$ există punctele $x_\delta, x'_\delta \in [a, b]$ cu $|x_\delta - x'_\delta| < \delta$ pentru care $|f(x_\delta) - f(x'_\delta)| \geq \varepsilon_0$.

Să luăm $\delta = \frac{1}{n}$. Obţinem astfel două şiruri de puncte (x_n), (x'_n) din $[a, b]$ cu proprietatea că pentru orice $n \in \mathbf{N}$ avem $|x_n - x'_n| < \frac{1}{n}$ şi $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon_0$.

Intervalul $[a, b]$ fiind mărginit, şirul (x_n) este mărginit şi, conform Lemei lui Cesaro, admite un subşir (x_{n_k}) convergent. Fie x_0 limita sa. Deoarece $|x_{n_k} - x'_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \to 0$, urmează că subşirul (x'_{n_k}) al lui (x'_n) este de asemenea convergent la x_0. Intervalul $[a, b]$ fiind închis, $x_0 \in [a, b]$. Funcţia f fiind continuă pe $[a, b]$, deci şi în x_0, avem

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0), \quad \lim_{k\to\infty} f(x'_{n_k}) = f(x_0),$$

de unde $0 \geq \varepsilon_0$. Contradicţie. Rezultă că f este uniform continuă pe $[a, b]$. $\triangleright$

O condiţie suficientă de uniformă continuitate este dată de următoarea teoremă.

Teorema 4.10 *Dacă pentru orice $x, x' \in E$ există un număr $L > 0$ a.î.*

$$|f(x) - f(x')| < L\,|x - x'|, \tag{4.1}$$

atunci funcţia f este uniform continuă pe E.

$\triangleleft$ Într-adevăr, pentru $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{L}$, inegalitatea $|x - x'| < \delta$ implică inegalitatea $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. $\triangleright$

Condiţia (4.1) se numeşte *condiţia lui Lipschitz.*

4.2 Continuitatea funcţiilor vectoriale

4.2.1 Continuitatea într-un punct

Fie $\mathbf{f} : E \to \mathbf{R}^m$, $E \subset \mathbf{R}^n$, o funcţie vectorială şi $\mathbf{x}_0 \in E$.

Definiţia 4.6 *Spunem că funcţia* $\mathbf{f}$ *este* continuă în punctul $\mathbf{x}_0$ *dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există un număr* $\delta(\varepsilon) > 0$ *a.î. oricare ar fi* $\mathbf{x} \in E$ *pentru care* $||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|| < \delta$, *să avem* $||\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)|| < \varepsilon$.

În cazul în care $\mathbf{x}_0 \in E$ este punct de acumulare pentru E, continuitatea în punctul $\mathbf{x}_0$ se poate defini cu ajutorul limitei.

Definiţia 4.7 *Spunem că funcţia* $\mathbf{f}$ *este* continuă în punctul $\mathbf{x}_0$, *punct de acumulare pentru* E, *dacă* $\mathbf{f}$ *are limită în* $\mathbf{x}_0$ *şi aceasta este egală cu* $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$, *adică*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0), \ \ sau \ \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} ||f(x) - f(x_0)|| = 0.$$

Teorema 4.11 *Funcţia* $\mathbf{f} : E \to \mathbf{R}^m$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$, *este continuă în punctul* $\mathbf{x}_0$ *d.d. funcţiile componente* $f_k : E \to \mathbf{R}$, $k = \overline{1,m}$, *sunt continue în* $\mathbf{x}_0$.

$\triangleleft$ Din inegalităţile

$$|f_k(\mathbf{x}) - f_k(\mathbf{x}_0)| \leq ||\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)|| \leq \sum_{i=1}^{m} |f_i(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{x}_0)|, \ \ k = \overline{1,m},$$

avem implicaţiile

$$||\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)|| < \varepsilon \Rightarrow |f_k(x) - f_k(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon, \ \ k = \overline{1,m},$$

$$|f_i(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{x}_0)| < \frac{\varepsilon}{m}, \ i = \overline{1,m} \Rightarrow ||\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)|| < \varepsilon. \triangleright$$

Următoarele proprietăţi, stabilite pentru funcţii reale de o variabilă reală, se menţin şi pentru funcţii vectoriale de o variabilă vectorială:

1. Dacă $\mathbf{f}$ este continuă în punctul $\mathbf{x}_0$ există o vecinătate a punctului $\mathbf{x}_0$ în care funcţia este mărginită.

2. Dacă $\mathbf{f}$ este continuă în punctul $\mathbf{x}_0$, atunci funcţia $||\mathbf{f}||$ este continuă în punctul $\mathbf{x}_0$. Reciproca *nu* este adevărată.

3. Dacă $\mathbf{f}$ şi $\mathbf{g}$ sunt continue în punctul $\mathbf{x}_0$, atunci $\mathbf{f} + \mathbf{g}$, $\lambda\mathbf{f}$, $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$ sunt continue în punctul $\mathbf{x}_0$.

4. Fie $\mathbf{f} : E \to \mathbf{R}^m$, $E \subset \mathbf{R}^n$, $F = \mathbf{f}(E) \subset \mathbf{R}^m$ şi $\mathbf{g} : F \to \mathbf{R}^p$. Dacă funcţia $\mathbf{f}$ este continuă în punctul $\mathbf{x}_0 \in E$ şi $\mathbf{g}$ este continuă în punctul $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \in F$, atunci funcţia compusă $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} : E \to \mathbf{R}^p$ este continuă în punctul $\mathbf{x}_0$.

5. Dacă $\mathbf{f}$ este continuă în punctul $\mathbf{x}_0$ şi $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$, atunci există o vecinătate V a punctului $\mathbf{x}_0$ a.î. pentru orice $\mathbf{x} \in V \cap E$ să avem $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$.

4.2.2 Continuitatea uniformă

Definiţia 4.8 *Spunem că funcţia* $\mathbf{f} : E \to \mathbf{R}^m$ *este* uniform continuă pe E *dacă oricare ar fi* $\varepsilon > 0$ *există un număr* $\delta(\varepsilon) > 0$ *a.î. pentru orice* $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in E$ *pentru care* $||\mathbf{x} - \mathbf{x}'|| < \delta$, *să avem* $||\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}')|| < \varepsilon$.

Teorema 4.12 *Funcţia* $\mathbf{f} : E \to \mathbf{R}^m$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$, *este uniform continuă pe* E *d.d. funcţiile componente* $f_k : E \to \mathbf{R}$, $k = \overline{1, m}$, *sunt uniform continuă pe* E.

$\triangleleft$ Din inegalităţile

$$|f_k(\mathbf{x}) - f_k(\mathbf{x}')| \leq ||\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}')|| \leq \sum_{i=1}^{m} |f_i(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{x}')|, \quad k = \overline{1, m},$$

avem implicaţiile

$$||\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}')|| < \varepsilon \Rightarrow |f_k(x) - f_k(\mathbf{x}')| < \varepsilon, \quad k = \overline{1, m},$$

$$|f_i(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{x}')| < \frac{\varepsilon}{m}, \ i = \overline{1, m} \Rightarrow ||\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}')|| < \varepsilon. \triangleright$$

Teorema 4.13 *O funcţie vectorială continuă pe o mulţime* E *compactă (mărginită şi închisă) din* $\mathbf{R}^n$ *este uniform continuă pe* E.

Capitolul 5

DERIVATE ŞI DIFERENŢIALE

5.1 Derivata şi diferenţiala funcţiilor de o variabilă

5.1.1 Derivata şi diferenţiala unei funcţii reale de o variabilă reală

Fie $f : E \to \mathbf{R}$, $E \subset \mathbf{R}$, o funcţie reală şi $x_0 \in E$ un punct de acumulare al mulţimii E.

Definiţia 5.1 *Spunem că funcţia f este* derivabilă *în punctul x_0 dacă există şi este finită limita în x_0 a funcţiei*

$$R_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x \in E \setminus \{x_0\}.$$

Dacă f este derivabilă în x_0, limita finită a funcţiei R_{x_0} se numeşte derivata *funcţiei f în x_0 şi se notează cu $f'(x_0)$:*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Dacă limita funcţiei R_{x_0} este infinită, atunci funcţia f *nu* este derivabilă în x_0. Dacă limita funcţiei R_{x_0} este $\pm\infty$ se spune că f are derivata $\pm\infty$ în x_0.

Definiţia 5.2 *Spunem că funcţia $f : E \to \mathbf{R}$ este* diferenţiabilă *în punctul $x_0 \in E$, punct de acumulare pentru E, dacă există numărul $A \in \mathbf{R}$ şi funcţia $\alpha : E \to \mathbf{R}$ satisfăcând condiţia $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = \alpha(x_0) = 0$ a.î.*

$$f(x) - f(x_0) = A\,(x - x_0) + \alpha(x)\,(x - x_0), \quad \forall\, x \in E,$$

sau, cu $x - x_0 = h$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = A\,h + \alpha(x_0 + h)\,h, \quad \forall\, x_0 + h \in E.$$

Dacă f este diferenţiabilă în x_0, aplicaţia

$$h \longmapsto A\,h, \quad \forall\, h \in \mathbf{R},$$

se numeşte diferenţiala *funcţiei f în x_0 şi se notează*

$$df(x_0) = df(x_0; h) = A\, h.$$

Pentru funcţia identică $i : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin $i(x) = x$, oricare ar fi $x_0 \in \mathbf{R}$ are loc identitatea

$$i(x) - i(x_0) = 1 \cdot h + 0 \cdot h, \ \ \forall\, h \in \mathbf{R},$$

care arată că funcţia identică este diferenţiabilă în orice punct $x_0 \in \mathbf{R}$ şi $di(x_0) = di(x_0; h) = h$, $\forall\, h \in \mathbf{R}$. Deoarece diferenţiala funcţiei identice este aceeaşi în orice punct din $\mathbf{R}$, ea se notează

$$di(x) = dx = h \tag{5.1}$$

şi se numeşte *diferenţiala variabilei independente.*

5.1.2 Derivata şi diferenţiala unei funcţii vectoriale de o variabilă reală

Fie $\mathbf{f} : E \to \mathbf{R}^m$, $E \subset \mathbf{R}$, o funcţie vectorială şi $x_0 \in E$ un punct de acumulare al mulţimea E.

Definiţia 5.3 *Spunem că funcţia* $\mathbf{f}$ *este* derivabilă *în punctul x_0 dacă funcţia*

$$\mathbf{R}_{x_0}(x) = \frac{\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(x_0)}{x - x_0}, \ \ x \in E \setminus \{x_0\},$$

are limită în x_0 şi aceasta aparţine lui $\mathbf{R}^m$.

Dacă $\mathbf{f}$ *este derivabilă în x_0, limita funcţiei $\mathbf{R}_{x_0}$ se numeşte* derivata *funcţiei* $\mathbf{f}$ *în x_0 şi se notează cu $\mathbf{f}'(x_0)$:*

$$\mathbf{f}'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(x_0)}{x - x_0}. \tag{5.2}$$

Teorema 5.1 *Funcţia vectorială $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ este derivabilă în x_0 d.d. funcţiile componente f_k, $k = \overline{1, m}$, sunt derivabile în x_0. În acest caz*

$$\mathbf{f}'(x_0) = (f_1'(x_0), f_2'(x_0), \ldots, f_m'(x_0)).$$

$\triangleleft$ Teorema rezultă din

$$\frac{\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(x_0)}{x - x_0} = \left(\frac{f_1(x) - f_1(x_0)}{x - x_0}, \frac{f_2(x) - f_2(x_0)}{x - x_0}, \ldots, \frac{f_m(x) - f_m(x_0)}{x - x_0} \right)$$

şi faptul că o funcţie vectorială are limită într-un punct d.d. funcţiile componente au limită în acel punct. $\triangleright$

Definiţia 5.4 *Spunem că funcţia* $\mathbf{f}$ *este* diferenţiabilă *în punctul $x_0 \in E$, punct de acumulare pentru E, dacă există vectorul $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_m) \in \mathbf{R}^m$ şi funcţia vectorială $\alpha : E \to \mathbf{R}^m$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, satisfăcând condiţia $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = \alpha(x_0) = \mathbf{0}$ a.î.*

$$\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(x_0) = \mathbf{A}\,(x - x_0) + \alpha(x)\,(x - x_0), \quad \forall\, x \in E, \tag{5.3}$$

sau, cu $x - x_0 = h$

$$\mathbf{f}(x_0 + h) - \mathbf{f}(x_0) = \mathbf{A}\, h + \alpha(x_0 + h)\, h, \ \ \forall\, x_0 + h \in E. \tag{5.4}$$

Dacă $\mathbf{f}$ *este diferenţiabilă în* x_0*, aplicaţia liniară* $d\mathbf{f}(x_0) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$*,*

$$h \longmapsto \mathbf{A}\, h, \ \ \forall\, h \in \mathbf{R},$$

se numeşte diferenţiala *funcţiei* $\mathbf{f}$ *în* x_0*:*

$$d\mathbf{f}(x_0) = d\mathbf{f}(x_0; h) = \mathbf{A}\, h. \tag{5.5}$$

În baza lui (5.5) putem scrie (5.3), respectiv (5.4), astfel

$$\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(x_0) = d\mathbf{f}(x_0; x - x_0) + \alpha(x)\,(x - x_0), \quad \forall\, x \in E, \tag{5.6}$$

$$\mathbf{f}(x_0 + h) - \mathbf{f}(x_0) = d\mathbf{f}(x_0; h) + \alpha(x_0 + h)\, h, \ \ \forall x_0 + h \in E. \tag{5.7}$$

Diferenţiabilitatea funcţiei $\mathbf{f}$ în x_0 atrage *continuitatea* ei în x_0, deoarece din (5.3) urmează

$$\lim_{x \to x_0} \mathbf{f}(x) = \mathbf{f}(x_0).$$

Deoarece (5.3) este echivalentă cu

$$f_k(x) - f_k(x_0) = A_k\,(x - x_0) + \alpha_k(x)\,(x - x_0), \quad \forall\, x \in E, \ \ k = \overline{1, m},$$

rezultă că funcţia vectorială $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ este diferenţiabilă în x_0 d.d. funcţiile componente f_k, $k = \overline{1, m}$, sunt diferenţiabile în x_0. În acest caz

$$d\mathbf{f}(x_0) = (df_1(x_0), df_2(x_0), \ldots, df_m(x_0)).$$

Teorema 5.2 *Funcţia* $\mathbf{f}$ *este diferenţiabilă în* x_0 *d.d. este derivabilă în* x_0*. Dacă* $\mathbf{f}$ *este diferenţiabilă în* x_0*, atunci pentru orice* $h \in \mathbf{R}$ *avem*

$$d\mathbf{f}(x_0; h) = \mathbf{f}'(x_0)\, h. \tag{5.8}$$

$\triangleleft$ Dacă $\mathbf{f}$ este diferenţiabilă în x_0 are loc (5.3), de unde deducem

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(x_0)}{x - x_0} = \mathbf{A} \in \mathbf{R}^m,$$

adică $\mathbf{f}$ este derivabilă în x_0 şi $\mathbf{f}'(x_0) = \mathbf{A}$. Luând $\mathbf{A} = \mathbf{f}'(x_0)$ în (5.5) obţinem (5.8).

Reciproc, dacă $\mathbf{f}$ este derivabilă în x_0 are loc (5.2). Construim funcţia $\alpha : E \to \mathbf{R}^m$, prin

$$\alpha\,(x) = \begin{cases} \frac{\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(x_0)}{x - x_0} - \mathbf{f}'(x_0), & x \in E \setminus \{x_0\} \\ \mathbf{0}, & x = x_0. \end{cases} \tag{5.9}$$

Atunci, (5.2) este echivalentă cu $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = \alpha(x_0) = \mathbf{0}$. Pe de altă parte, din (5.9) avem

$$\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(x_0) = \ \mathbf{f}'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)\,(x - x_0), \quad \forall\, x \in E \setminus \{x_0\}.$$

Deoarece $\alpha(x_0) = \mathbf{0}$, rezultă că egalitatea precedentă are loc şi pentru $x = x_0$. Aşadar $\mathbf{f}$ satisface (5.3) cu $\mathbf{A} = \mathbf{f}'(x_0)$, deci este diferenţiabilă în x_0. $\triangleright$

Cu (5.1), relaţia (5.8) se mai scrie

$$d\mathbf{f}(x_0) = \mathbf{f}'(x_0)\, dx, \quad \text{de unde } \mathbf{f}'(x_0) = \frac{d\mathbf{f}(x_0)}{dx}.$$

Teorema precedentă se menţine şi pentru cazul funcţiilor reale şi

$$df(x_0) = f'(x_0)\, dx, \quad \text{de unde } f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}.$$

Diferenţa $\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(x_0)$ se numeşte *creşterea funcţiei* $\mathbf{f}$ în x_0 corespunzătoare creşterii $h = x - x_0$ a variabilei independente în x_0.

Presupunem cunoscute derivatele funcţiilor elementare, precum şi regulile de derivare a funcţiilor reale de o variabilă reală. Utilizând aceste reguli şi teoremele 5.1 şi 5.2 rezultă teorema următoare.

Teorema 5.3 *Dacă funcţia scalară* $\varphi : E \to \mathbf{R}$ *şi funcţiile vectoriale* $\mathbf{f}, \mathbf{g} : E \to \mathbf{R}^m$, $E \subset \mathbf{R}$, *sunt diferenţiabile în* $x_0 \in E$, *atunci:*

1^0. *Funcţia* $\varphi\mathbf{f}$ *este diferenţiabilă în* x_0 *şi* $d(\varphi\mathbf{f}) = \varphi\, d\mathbf{f} + \mathbf{f}\, d\varphi$.

2^0. *Funcţia* $\lambda\mathbf{f}+\mu\mathbf{g}$ *este diferenţiabilă în* x_0, *oricare ar fi* $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ *şi* $d(\lambda\mathbf{f}+\mu\mathbf{g}) = \lambda d\mathbf{f} + \mu d\mathbf{g}$.

3^0. *Produsul scalar al funcţiilor* $\mathbf{f}$ *şi* $\mathbf{g}$, *adică funcţia* $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}$, *este o funcţie diferenţiabilă şi*

$$d(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}) = d\mathbf{f}\cdot\mathbf{g} + \mathbf{f}\cdot d\mathbf{g}.$$

Definiţia 5.5 *Funcţia* $\mathbf{f} : E \to \mathbf{R}^m$ *este derivabilă pe mulţimea* $A \subset E$ *dacă este derivabilă în orice punct* $x \in A$. *Funcţia* $\mathbf{f}' : A \to \mathbf{R}^m$ *se numeşte* funcţia derivată *a funcţiei* $\mathbf{f}$ *sau, mai simplu,* derivata *lui* $\mathbf{f}$ *pe* A.

5.1.3 Derivate şi diferenţiale de ordin superior

Fie $f : E \to \mathbf{R}$, $E \subset \mathbf{R}$, o funcţie reală, $f' : A \to \mathbf{R}$, $A \subset E$, derivata funcţiei f şi $x_0 \in A$ un punct de acumulare pentru A.

Definiţia 5.6 *Spunem că funcţia* f *este de două ori derivabilă în* x_0 *dacă funcţia* f' *este derivabilă în* x_0. *În acest caz,* $(f')'(x_0)$ *se numeşte* derivata a doua a funcţiei f *în* x_0 *şi se notează* $f''(x_0)$. *Deci*

$$f''(x_0) = (f')'(x_0) \ \ \text{sau} \ \ \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)(x_0).$$

Procedând prin recurenţă, spunem că f este de k ori derivabilă în x_0 dacă $f^{(k-1)}$ este derivabilă în x_0. Deci

$$f^{(k)}(x_0) = (f^{(k-1)})'(x_0) \ \ \text{sau} \ \ \frac{d^k f}{dx^k}(x_0) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{k-1} f}{dx^{k-1}}\right)(x_0).$$

Când afirmăm că f este de k ori derivabilă în x_0 subînţelegem că f are toate derivatele până la ordinul $k-1$ inclusiv, pe o vecinătate a lui x_0 şi că derivata de ordinul $k-1$ este derivabilă în x_0.

Funcţia f se numeşte *infinit derivabilă* în x_0 dacă admite derivată de orice ordin în acest punct. Funcţiile elementare sunt infinit derivabile în orice punct interior mulţimii lor de definiţie.

Definiţia 5.7 *Spunem că funcţia f este de două ori diferenţiabilă în punctul x_0 dacă funcţia $df(x;h) = f'(x)\,h$ este diferenţiabilă în x_0 oricare ar fi $h \in \mathbf{R}$. Dacă f este de două ori diferenţiabilă în x_0 atunci aplicaţia*

$$d^2 f(x_0;h) = d(df)(x_0;h) = d(f'\,h)(x_0;h) = (f'\,h)'(x_0)\,h = f''(x_0)\,h^2$$

se numeşte diferenţiala a doua a funcţiei *f în x_0.*

Funcţia f este de k ori diferenţiabilă în x_0 dacă diferenţiala de ordinul $k-1$ a funcţiei f, adică $d^{k-1}f(x;h) = f^{(k-1)}(x)\,h^{k-1}$ este diferenţiabilă în x_0 pentru orice $h \in \mathbf{R}$. În acest caz, aplicaţia

$$d^k f(x_0;h) = d(d^{k-1}f)(x_0;h) = d(f^{(k-1)}\,h^{k-1})(x_0;h) = (f^{(k-1)}\,h^{k-1})'(x_0)\,h = f^{(k)}(x_0)\,h^k$$

se numeşte *diferenţiala de ordinul k a funcţiei f* în x_0.

Funcţia f este de k ori diferenţiabilă în x_0 d.d. f este de k ori derivabilă în x_0.

Deoarece $h = dx$, putem scrie $d^k f(x_0) = f^{(k)}(x_0)\,dx^k$.

Definiţia 5.8 *Funcţia $f : I \to \mathbf{R}$ se numeşte* de clasă C^k *pe intervalul I dacă f are toate derivatele până la ordinul k pe I şi derivata de ordinul k este continuă pe I.*

Mulţimea funcţiilor de clasă C^k pe I se notează $C^k(I)$. Prin $C^0(I) = C(I)$ se înţelege mulţimea funcţiilor continue pe I. Prin $C^\infty(I)$ se notează mulţimea funcţiilor infinit derivabile pe I.

În mod asemănător se definesc derivatele şi diferenţialele de ordin superior ale unei funcţii vectoriale $\mathbf{f}$.

Funcţia vectorială $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ este de k ori derivabilă (diferenţiabilă) în x_0 d.d. funcţiile componente f_k, $k = \overline{1,m}$, sunt de k ori derivabile (diferenţiabile) în x_0 şi avem

$$\mathbf{f}^{(k)}(x_0) = (f_1^{(k)}(x_0), f_2^{(k)}(x_0), \ldots, f_m^{(k)}(x_0)),$$

$$d^k\mathbf{f}(x_0) = (d^k f_1(x_0), d^k f_2(x_0), \ldots, d^k f_m(x_0)).$$

Evident că

$$d^k\mathbf{f}(x_0) = \mathbf{f}^{(k)}(x_0)\,dx^k. \tag{5.10}$$

Spunem că funcţia vectorială $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ este de clasă C^k pe I şi scriem $\mathbf{f} \in C^k(I)$ dacă $f_i \in C^k(I)$, $i = \overline{1,m}$.

Teorema 5.4 ***(Formula lui Leibniz)*** *Dacă* $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in C^n(I)$, $n \in \mathbf{N}$, *atunci* $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} \in C^n(I)$ *şi are loc formula*

$$(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, \mathbf{f}^{(n-k)}(x) \cdot \mathbf{g}^{(k)}(x), \quad \forall\, x \in I. \tag{5.11}$$

◁ Demonstraţie prin inducţie după n. ▷

Înmulţind (5.11) cu dx^n şi având în vedere (5.10), obţinem

$$d^n(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, d^{n-k}\mathbf{f}(x) \cdot d^k\mathbf{g}(x), \quad \forall\, x \in I.$$

5.1.4 Proprietăţi ale funcţiilor derivabile

Multe dintre proprietăţile funcţiilor derivabile de o variabilă reală sunt cunoscute din liceu. Pentru a uşura expunerea rezultatelor noi, trecem totuşi în revistă unele dintre aceste proprietăţi.

Puncte de extrem. Teorema lui Fermat

Fie $f : E \to \mathbf{R}$, $E \subset \mathbf{R}$.

Definiţia 5.9 *Punctul* $x_0 \in E$ *se numeşte* punct de extrem local *sau relativ al funcţiei* f *dacă există o vecinătate* V *a lui* x_0 *a.î. diferenţa* $f(x) - f(x_0)$ *să păstreze semn constant pentru orice* $x \in V \cap E$. *Dacă:*

$f(x) - f(x_0) \leq 0$, $\forall\, x \in V \cap E$, x_0 *este punct de* maxim *local,*

$f(x) - f(x_0) \geq 0$, $\forall\, x \in V \cap E$, x_0 *este punct de* minim *local.*

Dacă diferenţa $f(x) - f(x_0)$ păstrează semn constant pentru orice $x \in E$, atunci x_0 se numeşte *punct de extrem absolut.* Orice punct de extrem absolut este punct de extrem relativ. Reciproca *nu* este adevărată.

Teorema 5.5 ***(Teorema lui Fermat)*** *Fie* $f : I \to \mathbf{R}$, *definită pe intervalul* $I \subset \mathbf{R}$ *şi* x_0 *un punct de extrem interior lui* I. *Dacă funcţia* f *este derivabilă în* x_0, *atunci* $f'(x_0) = 0$.

Teorema lui Fermat este o condiţie *necesară* de extrem.

Definiţia 5.10 *Un punct* $x_0 \in I$ *se numeşte* punct staţionar *sau* punct critic *al funcţiei* f *dacă* f *este derivabilă în* x_0 *şi* $f'(x_0) = 0$.

Teorema lui Fermat afirmă că punctele de extrem ale unei funcţii derivabile sunt puncte staţionare.

Teoremele lui Rolle, Lagrange şi Cauchy

Teorema 5.6 ***(Teorema lui Rolle)*** *Fie* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$. *Dacă:*
1. f *este continuă pe* $[a, b]$,
2. f *este derivabilă pe* (a, b),
3. $f(a) = f(b)$,

atunci există un punct $c \in (a, b)$ *a.î.* $f'(c) = 0$.

Teorema 5.7 ***(Teorema lui Lagrange)*** *Fie* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$. *Dacă:*
1. f *este continuă pe* $[a, b]$,
2. f *este derivabilă pe* (a, b),

atunci există un punct $c \in (a, b)$ *a.î.* $f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a) = df(c; b - a)$.

Teoremele lui Rolle şi Lagrange afirmă numai existenţa punctului $c \in (a, b)$, fără nici o precizare asupra unicităţii acestuia.

Din teorema lui Lagrange rezultă că dacă $f : I \to \mathbf{R}$ este derivabilă pe I, atunci oricare ar fi $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$, există ξ de forma $\xi = x_1 + \theta(x_2 - x_1)$, cu $\theta \in (0, 1)$, a.î.

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2) \cdot f'(\xi).$$

În particular, dacă $a, a + h \in I$, avem

$$f(a + h) - f(a) = h \cdot f'(\xi), \quad \xi = a + \theta h,\ \theta \in (0, 1).$$

Teorema 5.7 se numeşte *prima teoremă de medie* a calculului diferenţial sau *teorema creşterilor finite.*

Consecinţa 5.1 *Dacă* $f : I \to \mathbf{R}$ *este derivavilă pe* $I \subset \mathbf{R}$ *şi* $f'(x) = 0$ *pe* I, *atunci* f *este constantă pe* I.

De aici rezultă că dacă $f, g : I \to \mathbf{R}$ sunt derivabile pe $I \subset \mathbf{R}$ şi $f'(x) = g'(x)$ pe I, atunci f şi g diferă printr-o constantă pe I.

Următoarea teoremă generalizează teorema lui Lagrange la cazul funcţiilor vectoriale de o variabilă reală.

Teorema 5.8 *Dacă funcţia* $\mathbf{f} : [a, b] \to \mathbf{R}^m$ *este continuă pe* $[a, b]$ *şi derivabilă pe* (a, b), *atunci există un punct* $c \in (a, b)$ *a.î.*

$$||\mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a)|| \leq ||\mathbf{f}'(c)||\,(b - a). \tag{5.12}$$

$\lhd$ Dacă $\mathbf{f}(b) = \mathbf{f}(a)$, inegalitatea (5.12) are loc pentru orice punct $c \in (a, b)$. Să presupunem că $\mathbf{f}(b) \neq \mathbf{f}(a)$. Definim funcţia reală

$$\varphi(x) = (\mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a)) \cdot \mathbf{f}(x), \ \ x \in [a, b].$$

Funcţia φ satisface ipotezele teoremei lui Lagrange şi deci există un punct $c \in (a, b)$ a.i. $\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(c)\,(b - a)$. Deoarece

$$\varphi(b) - \varphi(a) = (\mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a))^2 = ||\mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a)||^2, \ \ \varphi'(c) = (\mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a)) \cdot \mathbf{f}'(c),$$

obţinem

$$||\mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a)||^2 = (\mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a)) \cdot \mathbf{f}'(c)\,(b-a).$$

Dar, folosind inegalitatea lui Schwarz-Cauchy, găsim

$$(\mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a)) \cdot \mathbf{f}'(c) \leq ||\mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a)||\,||\mathbf{f}'(c)||,$$

cu care, după simplificare prin $||\mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a)||$ obţinem (5.12). ▷

Teorema 5.9 ***(Teorema lui Cauchy)*** *Fie funcţiile $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$. Dacă:*
1. *f şi g sunt continue pe $[a, b]$,*
2. *f şi g sunt derivabile pe (a, b),*
3. *$g'(x) \neq 0$, $x \in (a, b)$,*

atunci $g(a) \neq g(b)$ şi există un punct $c \in (a, b)$ a.î.

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Această teoremă se numeşte *a doua teoremă de medie a calculului diferenţial.*

Teorema 5.10 ***(Teorema lui Darboux)*** *Dacă funcţia f este derivabilă pe I, atunci f' are proprietatea lui Darboux pe I (adică nu poate trece de la o valoare la alta fără a trece prin toate valorile intermediare).*

Teorema 5.11 ***(Regula lui l'Hospital)*** *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ şi $x_0 \in [a, b]$. Dacă:*
1. *f şi g sunt derivabile pe $(a, b) \setminus \{x_0\}$ şi continue în x_0,*
2. *$f(x_0) = 0$, $g(x_0) = 0$,*
3. *$g'(x) \neq 0$ într-o vecinătate a lui x_0 ($\forall x \in V \setminus \{x_0\}$),*
4. *există $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbf{R}}$,*

atunci există şi $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

Formula lui Taylor pentru funcţii de o variabilă

Definiţia 5.11 *Fie $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie de n ori derivabilă în punctul $x_0 \in I$. Polinomul*

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} d^k f(x_0; x - x_0)$$

se numeşte polinomul lui Taylor de gradul n *al funcţiei f în punctul x_0.*

Funcţia $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$, $x \in I$, se numeşte *restul lui Taylor* de ordinul n al funcţiei f în punctul x_0. Din egalitatea precedentă avem

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \quad \forall\, x \in I,$$

care se numeşte *formula lui Taylor* de ordinul n a funcţiei f în punctul x_0.

Deoarece $\lim\limits_{x \to x_0} R_n(x) = 0$, pentru valori ale lui x suficient de apropiate de x_0, polinomul $T_n(x)$ aproximează pe $f(x)$, adică $f(x) \approx T_n(x)$.

Teorema 5.12 ***(Formula lui Taylor)*** *Fie $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie de $n+1$ ori derivabilă pe I şi $p \in \mathbf{N}$. Oricare ar fi $x, x_0 \in I$, $x \neq x_0$, există un punct ξ cuprins între x_0 şi x, adică de forma $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $\theta \in (0,1)$, a.î. să avem*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + \frac{(x - x_0)^p (x - \xi)^{n-p+1}}{n!\, p} f^{(n+1)}(\xi). \tag{5.13}$$

$\triangleleft$ Pentru orice $p \in \mathbf{N}$, $x, x_0 \in I$, $x \neq x_0$, numere fixate, numărul $A \in \mathbf{R}$ satisfăcând condiţia

$$(a) \quad f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + (x - x_0)^p \cdot A$$

este unic determinat.

Pentru a dovedi (5.13) rămâne să arătăm că

$$(b) \quad A = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!\, p} (x - \xi)^{n-p+1}.$$

În acest scop să considerăm funcţia $\varphi : I \to \mathbf{R}$, definită prin

$$\varphi(t) = f(t) + \frac{1}{1!} f'(t)(x - t) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(t)(x - t)^n + (x - t)^p \cdot A,$$

în care A safisface (a).

Funcţia φ este derivabilă pe I deoarece f este de $n+1$ ori derivabilă pe I. Pe de altă parte, având în vedere (a), găsim că $\varphi(x_0) = \varphi(x) = f(x)$. Aşadar, funcţia φ satisface condiţiilor teoremei lui Rolle pe $[x_0, x]$ şi deci există un punct $\xi \in (x_0, x)$ a.î. $\varphi'(\xi) = 0$. Dar

$$\varphi'(t) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x - t)^n - p(x - t)^{p-1} \cdot A$$

şi deci A are expresia (b), c.c.t.d. $\triangleright$

Restul din formula (5.13) se numeşte *restul lui Schlömlich-Roche*

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^p (x - \xi)^{n-p+1}}{n!\, p} f^{(n+1)}(\xi), \quad p \in \mathbf{N}.$$

Cazuri particulare

1. Dacă luăm $p = 1$, obţinem

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n!} (1 - \theta)^n f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi = x_0 + \theta(x - x_0),\ \theta \in (0,1),$$

care se numeşte *restul lui Cauchy*.

2. Dacă luăm $p = n + 1$, obţinem

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n!} f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi = x_0 + \theta(x - x_0),\ \theta \in (0,1),$$

care se numeşte *restul lui Lagrange.*

Formula lui Taylor cu restul lui Lagrange se scrie

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}d^k f(x_0; x-x_0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(\xi; x-x_0), \quad \xi = x_0 + \theta(x-x_0),\ \theta \in (0,1).$$

Luând $x - x_0 = h$, putem scrie încă formula lui Taylor sub forma

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)\, h + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\, h^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\, h^{n+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}d^k f(x_0; h) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(\xi; h), \quad \xi = x_0 + \theta\, h,\ \theta \in (0,1).$$

Dacă $0 \in I$ şi luăm $x_0 = 0$, obţinem

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0)\, x + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)\, x^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)\, x^{n+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}d^k f(0; x) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(\theta x; x), \quad \theta \in (0,1),$$

care se numeşte *formula lui Mac-Laurin.*

Exemplul 5.1 *Funcţia $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbf{R}$, are dezvoltarea Mac-Laurin*

$$\sin x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \sin(\theta x), \quad \theta \in (0,1).$$

Exemplul 5.2 *Funcţia $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbf{R}$, are dezvoltarea Mac-Laurin*

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos(\theta x + \frac{\pi}{2}), \quad \theta \in (0,1).$$

Exemplul 5.3 *Funcţia $f(x) = \ln(1+x)$, $x \in (-1, \infty)$, are dezvoltarea Mac-Laurin*

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}, \quad \theta \in (0,1).$$

Exemplul 5.4 *Funcţia $f(x) = (1+x)^\alpha$, $x \in (-1, \infty)$, $\alpha \in \mathbf{R}$, are dezvoltarea Mac-Laurin*

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!} x^{n+1} (1+\theta x)^{\alpha-n-1},$$

cu $\theta \in (0,1)$.

Formula lui Taylor pentru funcţii vectoriale de o variabilă

Dacă funcţia vetorială $\mathbf{f} : I \to \mathbf{R}^m$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$, este de $n+1$ ori derivabilă pe I atunci pentru fiecare componentă f_i, $i = \overline{1,m}$, putem scrie

$$f_i(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f_i^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + R_i^n(x), \quad i = \overline{1,m},$$

care sunt echivalente cu

$$\mathbf{f}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \mathbf{f}^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + \mathbf{R}_n(x),$$

cu $\mathbf{R}_n(x) = (R_1^n(x), R_2^n(x), \ldots, R_m^n(x))$, unde

$$R_i^n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f_i^{(n+1)}(\xi_i)(x - x_0)^{n+1}, \ \xi_i = x_0 + \theta_i(x - x_0), \ \theta_i \in (0,1), \ i = \overline{1,m},$$

care reprezintă *formula lui Taylor pentru funcţia vectorială* $\mathbf{f}$ *cu restul lui Lagrange.*

Condiţii suficiente de extrem pentru funcţii de o variabilă

Teorema 5.13 *Fie $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie de n ori derivabilă într-o vecinătate a punctului x_0, interior lui I, în care*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \ \ f^{(n)}(x_0) \neq 0, \quad n \geq 2,$$

atunci:

1. Dacă $n = 2m$, $m \in \mathbf{N}^*$, punctul x_0 este punct de extrem al funcţiei f *şi anume:*
- punct de maxim *dacă* $f^{(n)}(x_0) < 0$,
- punct de minim *dacă* $f^{(n)}(x_0) > 0$;

2. Dacă $n = 2m+1$, $m \in \mathbf{N}^*$, punctul x_0 nu *este punct de extrem.*

◁ În ipotezele teoremei, formula lui Taylor cu restul lui Lagrange se scrie

$$f(x) - f(x_0) = \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(\xi), \ \ \xi = x_0 + \theta(x - x_0), \ \theta \in (0,1).$$

Cum $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, există o vecinătate V a lui x_0 în care $f^{(n)}(x_0) \cdot f^{(n)}(x) > 0$.

1. Dacă $n = 2m$, $m \in \mathbf{N}^*$, atunci diferenţa $f(x) - f(x_0)$ are semnul lui $f^{(n)}(x_0)$, deoarece $(x - x_0)^n \geq 0$. Deci x_0 este punct de extrem: de maxim dacă $f^{(n)}(x_0) < 0$ şi de minim dacă $f^{(n)}(x_0) > 0$.

2. Dacă $n = 2m+1$, $m \in \mathbf{N}^*$, atunci $(x - x_0)^n$ este negativ pentru $x < x_0$ şi pozitiv pentru $x > x_0$. Punctul x_0 nu este punct de extrem deoarece nu există nici o vecinătate a lui x_0 pe care diferenţa $f(x) - f(x_0)$ să păstreze semn constant. ▷

5.2 Derivatele şi diferenţiala funcţiilor de n variabile

5.2.1 Derivatele parţiale şi diferenţiala funcţiilor reale de n variabile

Fie $f : E \to \mathbf{R}$, $E \subset \mathbf{R}^2$, $f = f(x, y)$ o funcţie reală de *două* variabile şi $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ un punct interior lui E.

Definiţia 5.12 *Spunem că funcţia f este* derivabilă parţial *în punctul (x_0, y_0) în raport cu variabila x dacă există şi este finită*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

Limita însăşi se numeşte derivata parţială *a funcţiei f în punctul (x_0, y_0) în raport cu x şi se notează prin*

$$f'_x(x_0, y_0) \quad sau \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Spunem că funcţia f este derivabilă parţial *în punctul (x_0, y_0) în raport cu variabila y dacă există şi este finită*

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

Limita însăşi se numeşte derivata parţială *a funcţiei f în punctul (x_0, y_0) în raport cu y şi se notează prin*

$$f'_y(x_0, y_0) \quad sau \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Din definiţie rezultă că atunci când derivăm în raport cu x, variabila y este considerată constantă şi derivăm ca şi cum am avea o funcţie de singura variabilă x. O observaţie asemămătoare, cu schimbarea rolului variabilelor, are loc şi în privinţa derivatei în raport cu y.

Exemplul 5.5 *Funcţia $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ are derivatele parţiale*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2}.$$

Fie acum $f : E \to \mathbf{R}$, $E \subset \mathbf{R}^n$, $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o funcţie reală de n variabile şi $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ un punct interior al lui E.

Definiţia 5.13 *Spunem că funcţia f este* derivabilă parţial *în punctul $\mathbf{x}_0$ în raport cu variabila x_k dacă există şi este finită*

$$\lim_{x_k \to x_k^0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)}{x_k - x_k^0}.$$

Limita însăşi se numeşte derivata parţială *a funcţiei f în punctul $\mathbf{x}_0$ în raport cu variabila x_k şi se notează prin*

$$f'_{x_k}(\mathbf{x}_0) \quad sau \quad \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0).$$

Derivata parţială în raport cu x_k a funcţiei $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se obţine derivând funcţia f privită ca funcţie numai de variabila x_k, celelalte variabile fiind considerate constante. De aici rezultă că *regulile de calcul* ale derivatelor parţiale sunt aceleaşi cu cele ale derivatelor funcţiilor de o variabilă.

O funcţie $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ poate avea, într-un punct $\mathbf{x}_0$, cel mult n derivate parţiale.

Fie din nou $f : E \to \mathbf{R}$, $E \subset \mathbf{R}^2$, $f = f(x, y)$ o funcţie reală de *două* variabile şi $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ un punct interior lui E.

Definiţia 5.14 *Spunem că funcţia f este* diferenţiabilă *în punctul* $\mathbf{x}_0$*, punct de acumulare pentru E, dacă există vectorul $\mathbf{A} = (A, B) \in \mathbf{R}^2$ şi funcţia $\alpha : E \to \mathbf{R}$ satisfăcând condiţia $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \alpha(x, y) = \alpha(x_0, y_0) = 0$ a.î.*

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) + \alpha(x, y)\,||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||, \quad \forall\,\mathbf{x} \in E,$$

sau, cu $x - x_0 = h$, $y - y_0 = k$, adică $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \mathbf{h}$,

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = A\,h + B\,k + \alpha(x_0 + h, y_0 + k)\,||\mathbf{h}||, \ \forall\,\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} \in E. \quad (5.14)$$

Dacă f este diferenţiabilă în $\mathbf{x}_0$, aplicaţia liniară

$$\mathbf{h} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{h} = A\,h + B\,k, \quad \forall\,\mathbf{h} = (h, k) \in \mathbf{R}^2,$$

se numeşte diferenţiala *funcţiei f în punctul $\mathbf{x}_0$ şi se notează*

$$df(x_0, y_0) = df(x_0, y_0; h, k) = A\,h + B\,k. \quad (5.15)$$

Pentru funcţiile $p : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ şi $q : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, definite prin $p(x, y) = x$, $q(x, y) = y$, oricare ar fi $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$, au loc egalităţile

$$p(x, y) - p(x_0, y_0) = h + 0\,||\mathbf{h}||, \quad q(x, y) - q(x_0, y_0) = k + 0\,||\mathbf{h}||, \quad \forall\,\mathbf{h} \in \mathbf{R}^2,$$

care arată că funcţiile p şi q sunt diferenţiabile în orice punct $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^2$ şi $dp(x_0, y_0) = dp(x_0, y_0; h, k) = h$, $dq(x_0, y_0) = dq(x_0, y_0; h, k) = k$. Deoarece diferenţialele funcţiilor p şi q sunt aceleaşi în orice punct din $\mathbf{R}^2$, ele se notează

$$dp(x, y) = dx = h, \quad dq(x, y) = dy = k \quad (5.16)$$

şi se numesc *diferenţialele variabilelor independente.*

Fie acum $f : E \to \mathbf{R}$, $E \subset \mathbf{R}^n$, $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o funcţie reală de n variabile şi $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ un punct interior lui E.

Definiţia 5.15 *Spunem că funcţia f este* diferenţiabilă *în punctul* $\mathbf{x}_0$*, punct de acumulare pentru E, dacă există vectorul $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n) \in \mathbf{R}^n$ şi funcţia $\alpha : E \to \mathbf{R}$ satisfăcând condiţia $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \alpha(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x}_0) = 0$ a.î.*

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \alpha(\mathbf{x})\,||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||, \quad \forall\,\mathbf{x} \in E,$$

sau, cu $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \mathbf{h}$,

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{h} + \alpha(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h})\,||\mathbf{h}||, \ \ \forall\, \mathbf{x}_0 + \mathbf{h} \in E.$$

Dacă f *este diferenţiabilă în* $\mathbf{x}_0$, *aplicaţia liniară*

$$\mathbf{h} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{h} = \sum_{i=1}^{n} A_i\, h_i, \ \ \forall\, \mathbf{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \mathbf{R}^n,$$

se numeşte diferenţiala *funcţiei* f *în punctul* $\mathbf{x}_0$ *şi se notează*

$$df(\mathbf{x}_0) = df(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{h} = \sum_{i=1}^{n} A_i\, h_i.$$

Dacă în definiţia precedentă facem pe $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$, rezultă că o funcţie diferenţiabilă într-un punct este continuă în acel punct.

Pentru funcţiile $p_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, definite prin $p_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i$, $i = \overline{1, n}$, oricare ar fi $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbf{R}^n$, au loc egalităţile

$$p_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) - p_i(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = h_i + 0\,||\mathbf{h}||, \ \ \forall\, \mathbf{h} \in \mathbf{R}^n,$$

care arată că funcţiile p_i sunt diferenţiabile în orice punct $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ şi $dp_i(\mathbf{x}_0) = dp(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}) = h_i$. Deoarece diferenţialele funcţiilor p_i sunt aceleaşi în orice punct din $\mathbf{R}^n$, ele se notează

$$dp(x_1, x_2, \ldots, x_n) = dx_i = h_i, \tag{5.17}$$

şi se numesc *diferenţialele variabilelor independente.*

Teorema 5.14 *Dacă funcţia* f *este diferenţiabilă în punctul* $\mathbf{x}_0$ *atunci există toate derivatele parţiale în* $\mathbf{x}_0$ *şi*

$$df(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)\, dx_i. \tag{5.18}$$

$\triangleleft$ Să presupunem că f este o funcţie de *două* variabile. Dacă funcţia f este diferenţiabilă în punctul $\mathbf{x}_0$ atunci are loc (5.14). Luând aici $k = 0$, împărţind prin h şi trecând la limită pentru $h \to 0$, apoi luând $h = 0$, împărţind prin k şi trecând la limită pentru $k \to 0$, obţinem

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = A, \ \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} = B,$$

de unde deducem că există derivatele parţiale ale funcţiei f în $\mathbf{x}_0$ şi

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0), \ \ B = \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0).$$

Înlocuind A şi B în (5.15) şi ţinând seama de (5.16), obţinem pentru *diferenţiala* funcţiei f în $\mathbf{x}_0$ expresia

$$df(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0)\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0)\, dy. \ \triangleright$$

Existenţa derivatelor parţiale într-un punct nu implică diferenţiabilitatea funcţiei în acel punct şi nici continuitatea funcţiei în acel punct.

Teorema care urmează precizează *condiţii suficiente* de diferenţiabilitate a funcţiei f.

Teorema 5.15 *Dacă funcţia f are toate derivatele parţiale pe sfera $S(\mathbf{x}_0;\delta) \subset E$ şi acestea sunt continue în $\mathbf{x}_0$, atunci f este diferenţiabilă în $\mathbf{x}_0$.*

$\triangleleft$ Să presupunem că f este o funcţie de *două* variabile. Pentru orice $\mathbf{x} = (x, y) \in S(\mathbf{x}_0;\delta)$ avem

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = [f(x,y) - f(x_0,y)] + [f(x_0,y) - f(x_0,y_0)]$$

şi aplicând teorema lui Lagrange în fiecare paranteză, găsim

$$f(x,y) - f(x_0,y) = f'_x(\xi,y)\,(x - x_0),\ \ \xi \in (x_0,x),$$

$$f(x_0,y) - f(x_0,y_0) = f'_y(x_0,\eta)\,(y - y_0),\ \ \eta \in (y_0,y),$$

deci

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)\,(x - x_0) + f'_y(x_0,y_0)\,(y - y_0) +$$
$$+[f'_x(\xi,y) - f'_x(x_0,y_0)](x - x_0) + [f'_y(x_0,\eta) - f'_y(x_0,y_0)](y - y_0),$$

adică

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)\,(x - x_0) + f'_y(x_0,y_0)\,(y - y_0) + \alpha(x,y)\,||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||,$$

cu

$$\alpha(\mathbf{x}) = \frac{1}{||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||}\left\{[f'_x(\xi,y) - f'_x(x_0,y_0)](x - x_0) + [f'_y(x_0,\eta) - f'_y(x_0,y_0)](y - y_0)\right\},$$

pentru $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ şi $\alpha(\mathbf{x}_0) = 0$.

Să arătăm că $\alpha(\mathbf{x}) \to 0$ când $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$, Din $|x - x_0|$, $|y - y_0| \leq ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||$ şi datorită continuităţii derivatelor parţiale în $S(\mathbf{x}_0;\delta)$, avem

$$|\alpha(\mathbf{x})| \leq |f'_x(\xi,y) - f'_x(x_0,y_0)| + |f'_y(x_0,\eta) - f'_y(x_0,y_0)| \to 0,$$

deoarece (ξ,y) şi $(x_0,\eta) \to (x_0,y_0)$ când $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$. $\triangleright$

Aplicaţia

$$d = \frac{\partial}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\,dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\,dx_n,$$

prin care se asociază fiecărei funcţii diferenţiabile f diferenţiala sa în $\mathbf{x}_0$, se numeşte *operatorul de diferenţiere*.

Se verifică imediat următoarele *reguli de diferenţiere*:

$$d(\lambda f + \mu g) = \lambda\,df + \mu\,dg,\ \ \forall\,\lambda,\mu \in \mathbf{R},$$

$$d(fg) = g\,df + f\,dg,$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\,df - f\,dg}{g^2},\ \ g(\mathbf{x}) \neq 0.$$

5.2.2 Derivate parţiale şi diferenţiala funcţiilor vectoriale de n variabile

Fie $\mathbf{f} : E \to \mathbf{R}^m$, $E \subset \mathbf{R}^n$, $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o funcţie vectorială de n variabile şi $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ un punct interior al lui E.

Definiţia 5.16 *Spunem că funcţia* $\mathbf{f}$ *este* derivabilă parţial *în punctul* $\mathbf{x}_0$ *în raport cu variabila* x_k *dacă există şi este finită*

$$\lim_{x_k \to x_k^0} \frac{\mathbf{f}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0) - \mathbf{f}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)}{x_k - x_k^0}.$$

Limita însăşi se numeşte derivata parţială *a funcţiei* $\mathbf{f}$ *în punctul* $\mathbf{x}_0$ *în raport cu variabila* x_k *şi se notează prin*

$$\mathbf{f}'_{x_k}(\mathbf{x}_0) \quad \textit{sau} \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0).$$

Teorema 5.16 *Funcţia vectorială* $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ *este* derivabilă parţial *în punctul* $\mathbf{x}_0$ *în raport cu variabila* x_k *d.d. funcţiile componente* f_i*,* $i = \overline{1,m}$*, sunt derivabile parţial* $\mathbf{x}_0$ *în raport cu variabila* x_k*.*

$\triangleleft$ Afirmaţia rezultă din faptul că raportul incrementar al funcţiei vectoriale $\mathbf{f}$ în $\mathbf{x}_0$ în raport cu x_k are drept componente rapoartele incrementare ale funcţiilor componente f_i în $\mathbf{x}_0$ în raport cu x_k. $\triangleright$

Definiţia 5.17 *Spunem că funcţia* $\mathbf{f}$ *este* diferenţiabilă *în punctul* $\mathbf{x}_0$*, punct de acumulare pentru* E*, dacă există matricea* $\mathbf{A} = (A_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbf{R})$ *şi funcţia vectorială* $\alpha : E \to \mathbf{R}^m$*,* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$*, satisfăcând condiţia* $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \alpha(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ *a.î.*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \alpha(\mathbf{x})\, ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||, \quad \forall\, \mathbf{x} \in E,$$

sau, cu $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \mathbf{h}$*,*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{h} + \alpha(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h})\, ||\mathbf{h}||, \ \forall\, \mathbf{x}_0 + \mathbf{h} \in E. \tag{5.19}$$

Fie $\mathbf{A}_j = {}^t(A_{1j}, A_{2j}, \ldots, A_{mj})$*,* $j = \overline{1,n}$*, vectorii din* $\mathbf{R}^m$ *ce au drept componente coloanele matricei* $\mathbf{A}$*. Dacă* $\mathbf{f}$ *este diferenţiabilă în* $\mathbf{x}_0$*, aplicaţia liniară* $d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$*,*

$$\mathbf{h} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{h} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}_j\, h_j, \quad \forall\, \mathbf{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \mathbf{R}^n,$$

se numeşte diferenţiala *funcţiei* $\mathbf{f}$ *în punctul* $\mathbf{x}_0$*:*

$$d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{h} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}_j\, h_j. \tag{5.20}$$

Teorema 5.17 *Funcţia vectorială* $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ *este* diferenţiabilă *în punctul* $\mathbf{x}_0$ *d.d. funcţiile componente* f_i, $i = \overline{1, m}$, *sunt diferenţiabile în* x_0.

◁ Afirmaţia rezultă din faptul că egalitatea vectorială (5.19) este echivalentă cu egalităţile

$$f_i(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f_i(\mathbf{x}_0) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} h_j + \alpha_i(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h})\, ||\mathbf{h}||, \ \ \forall\, \mathbf{x}_0 + \mathbf{h} \in E, \ i = \overline{1, m}. \ \triangleright$$

Egalitatea vectorială (5.20) se scrie pe componente

$$df_i(\mathbf{x}_0) = df_i(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} h_j, \ i = \overline{1, m}.$$

Din Teorema 5.14 rezultă atunci că dacă $\mathbf{f}$ este diferenţiabilă în $\mathbf{x}_0$, funcţiile f_i au toate derivatele parţiale în $\mathbf{x}_0$ şi

$$df_i(\mathbf{x}_0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)\, dx_j, \quad i = \overline{1, m}.$$

5.2.3 Derivate parţiale şi diferenţiale de ordin superior

Fie $f : E \to \mathbf{R}$, $E \subset \mathbf{R}^2$, $f = f(x, y)$ o funcţie reală de *două* variabile derivabilă parţial în raport fiecare variabilă x şi y, în punctele interioare ale lui E.

Definiţia 5.18 *Dacă funcţiile* f'_x *şi* f'_y *sunt derivabile parţial în raport cu* x *şi* y, *derivatele lor parţiale se numesc* derivate parţiale de ordinul doi *ale funcţiei* f *şi se notează:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Deci o funcţie de două variabile poate avea patru derivate parţiale de odinul doi.

În general, o funcţie de n variabile $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ are n^2 derivate parţiale de ordinul doi:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right), \ \ i, j = \overline{1, n}.$$

Derivatele parţiale $\partial^2 f / \partial x \partial y$ şi $\partial^2 f / \partial y \partial x$ (numite şi derivate parţiale mixte), în general, nu sunt egale. Teorema care urmează stabileşte condiţii suficiente ca derivatele parţiale mixte ale unei funcţii să fie egale.

Teorema 5.18 ***(Teorema lui Schwarz)*** *Dacă funcţia* f *are derivate parţiale mixte de ordinul doi într-o vecinătate* V *a unui punct* (x, y) *din interiorul lui* E *şi acestea sunt continue în* (x, y), *atunci*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y). \tag{5.21}$$

◁ Fie $\mathbf{h} = (h, k) \in \mathbf{R}^2$ a.î. $\mathbf{x} + \mathbf{h} \in V$. Pentru $t \in [0, 1]$ pentru care $\mathbf{x}+t\mathbf{h} \in V$, definim funcţiile

$$\varphi(t) = f(x + ht, y + k) - f(x + ht, y), \quad \psi(t) = f(x + h, y + kt) - f(x, y + kt).$$

Se constată imediat că $\varphi(1) - \varphi(0) = \psi(1) - \psi(0)$. Aplicând teorema lui Lagrange funcţiilor φ şi ψ pe intervalul $[0, 1]$, găsim

$$(a) \qquad \varphi'(\theta_1) = \psi'(\theta_2), \quad \theta_1, \theta_2 \in (0, 1),$$

de unde

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x + h\theta_1, y + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x + h\theta_1, y)\right] \cdot h = \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x + h, y + k\theta_2) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y + k\theta_2)\right] \cdot k.$$

Printr-o nouă aplicare a teoremei lui Lagrange funcţiilor

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x + h\theta_1, y + kt), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x + ht, y + k\theta_2), \quad t \in [0, 1],$$

obţinem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x + h\theta_1, y + k\theta_3) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x + h\theta_4, y + k\theta_2), \quad \theta_3, \theta_4 \in (0, 1).$$

Trecând la limită pentru $(h, k) \to (0, 0)$ şi ţinând seama că derivatele parţiale mixte sunt continue în (x, y) rezultă (5.21). ▷

Rezultatul se menţine şi pentru derivatele de ordin superior

$$\frac{\partial^{n+m} f}{\partial x^n \partial y^m}(x, y) = \frac{\partial^{n+m} f}{\partial y^m \partial x^n}(x, y).$$

Teorema rămâne adevărată şi pentru funcţii reale sau vectoriale de n variabile.

Fie $f : E \to \mathbf{R}$, $E \subset \mathbf{R}^2$, $f = f(x, y)$ o funcţie reală de *două* variabile diferenţiabilă în punctele interioare ale lui E.

Definiţia 5.19 *Spunem că funcţia f este* de două ori diferenţiabilă *în punctul (x, y) dacă funcţia $df(x, y; h, k)$ este diferenţiabilă în (x, y) oricare ar fi $(h, k) \in \mathbf{R}^2$. Dacă f este de două ori diferenţiabilă în (x, y), atunci aplicaţia*

$$d^2 f(x, y; h, k) = d(df)(x, y; h, k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)\, h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)\, hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)\, k^2$$

se numeşte diferenţiala a doua *a funcţiei f în (x, y).*

Deoarece $h = dx$ şi $k = dy$, diferenţiala a doua se mai scrie

$$d^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)\, dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)\, dx\, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)\, dy^2.$$

Operatorul

$$d^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^{(2)} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\,dy^2$$

se numeşte *operatorul de diferenţiere de ordinul doi.*

Dacă funcţia f are toate derivatele parţiale de ordinul p şi acestea sunt continue, funcţia f este de p ori diferenţiabilă în (x, y) şi diferenţiala de ordinul p este dată de

$$d^p f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^{(p)} f = \sum_{k=0}^{p} C_p^k \frac{\partial^p f}{\partial x^{p-k}\partial y^k}\,dx^{p-k}\,dy^k.$$

Pentru funcţii reale sau vectoriale de n variabile, diferenţiala de ordinul p se defineşte în mod asemănător

$$d^p f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\,dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\,dx_n\right)^{(p)} f.$$

Fie D o mulţime deschisă din $\mathbf{R}^n$.

Definiţia 5.20 *Funcţia $f : D \to \mathbf{R}$ se numeşte* de clasă C^k *pe D dacă f are toate derivatele parţiale până la ordinul k pe D şi derivatele de ordinul k sunt continue pe D.*

Mulţimea funcţiilor de clasă C^k pe D se notează $C^k(D)$. Prin $C^0(D) = C(D)$ se înţelege mulţimea funcţiilor continue pe D.

5.2.4 Derivatele parţiale şi diferenţialele funcţiilor compuse

Teorema 5.19 *Dacă funcţia $\mathbf{u} : I \to \mathbf{R}^2$, $I \subset \mathbf{R}$, $\mathbf{u} = (u, v)$ are derivate continue pe I, iar funcţia $f : E \to \mathbf{R}$, $E = \mathbf{u}(I) \subset \mathbf{R}^2$, are derivate parţiale continue pe E, atunci funcţia compusă $F : I \to \mathbf{R}$, $F(x) = f(u(x), v(x))$, pentru orice $x \in I$, are derivată continuă pe I, dată de*

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx}. \tag{5.22}$$

$\triangleleft$ Fie $x_0 \in I$ şi $u_0 = u(x_0)$, $v_0 = v(x_0)$. Aplicând teorema lui Lagrange, putem scrie

$$f(u, v) - f(u_0, v_0) = [f(u, v) - f(u_0, v)] + [f(u_0, v) - f(u_0, v_0)] =$$

$$= f'_u(u_\xi, v)(u - u_0) + f'_v(u_0, v_\xi)(v - v_0),$$

cu $u_\xi \in (u_0, u)$, $v_\xi \in (v_0, v)$ şi

$$u - u_0 = u(x) - u(x_0) = u'(\xi_u)(x - x_0), \quad v - v_0 = v(x) - v(x_0) = v'(\xi_v)(x - x_0),$$

cu $\xi_u, \xi_v \in (x_0, x)$. Rezultă

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(u, v) - f(u_0, v_0)}{x - x_0} = f'_u(u_\xi, v)\,u'(\xi_u) + f'_v(u_0, v_\xi)\,v'(\xi_v).$$

Trecând la limită pentru $x \to x_0$, cum $\xi_u, \xi_v \to x_0$ şi toate funcţiile sunt continue, obţinem

$$F'(x_0) = f'_u(u_0, v_0)\, u'(x_0) + f'_v(u_0, v_0)\, v'(x_0).$$

Cum x_0 este arbitrar ales în I, rezultă (5.22). ▷

Înmulţind (5.22) cu dx şi ţinând seama că $du = u'(x)\, dx$, $dv = v'(x)\, dx$, găsim că

$$dF = \frac{\partial f}{\partial u}\, du + \frac{\partial f}{\partial v}\, dv.$$

În mod asemănător, pentru funcţia $F(x) = f(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x))$ avem următoarea regulă de derivare

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{du_1}{dx} + \frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u_n}\frac{du_n}{dx},$$

iar diferenţiala va fi dată de

$$dF = \frac{\partial f}{\partial u_1}\, du_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2}\, du_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u_n}\, du_n.$$

Rezultatele obţinute se menţin şi pentru funcţiile vectoriale.

Exemplul 5.6 *Fie* $F(x) = f(x + \ln x, 1 + x^3)$, $x > 0$. *Punem* $u = x + \ln x$, $v = 1 + x^3$. *Avem*

$$F'(x) = \frac{\partial f}{\partial u}\, u' + \frac{\partial f}{\partial v}\, v' = \frac{\partial f}{\partial u}\left(1 + \frac{1}{x}\right) + 3x^2\, \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Definiţia 5.21 *Funcţia* $f : E \to \mathbf{R}$, $E \subset \mathbf{R}^n$, *se numeşte* omogenă de gradul m *dacă*

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^m f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

pentru orice $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) \in E$.

Dacă derivăm această relaţie în raport cu t şi facem apoi $t = 1$, obţinem

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + x_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = m\, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

numită *relaţia lui Euler*.

Derivatele şi diferenţialele de ordin superior se calculează în mod asemănător. Astfel, dacă funcţia $f(u, v)$ are derivate parţiale de ordinul doi continue în E şi funcţiile $u(x)$ şi $v(x)$ au derivate de ordinul doi continue pe I, atunci funcţia $F(x) = f(u(x), v(x))$ este de două ori derivabilă pe I şi

$$\frac{d^2F}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{du}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{dv}{dx}\right)\frac{du}{dx} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{dv}{dx}\right)\frac{dv}{dx} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{d^2v}{dx^2},$$

iar diferenţiala a doua

$$d^2F = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\, d^2u + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\, du\, dv + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\, d^2v + \frac{\partial f}{\partial u}\, d^2u + \frac{\partial f}{\partial v}\, d^2v.$$

Teorema 5.20 *Dacă funcţia* $\mathbf{u} : D \to \mathbf{R}^2$, $D \subset \mathbf{R}^2$, $\mathbf{u} = (u, v)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, *are derivate parţiale continue pe* D, *iar funcţia* $f : E \to \mathbf{R}$, $E = \mathbf{u}(D) \subset \mathbf{R}^2$, $f = f(u, v)$, *are derivate parţiale continue pe* E, *atunci funcţia compusă* $F : D \to \mathbf{R}$, $F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$, *pentru orice* $(x, y) \in D$, *are derivate parţiale continue pe* D, *date de*

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{5.23}$$

◁ Afirmaţia rezultă din teorema precedentă, deoarece la derivarea parţială în raport cu o variabilă cealaltă variabilă este menţinută constantă, deci F se consideră funcţie numai de o variabilă. ▷

Deoarece diferenţiala funcţiei $F(x, y)$ este dată de

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy,$$

ţinând seama de (5.23) obţinem

$$dF = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy,$$

de unde rezultă

$$dF = \frac{\partial f}{\partial u}\,du + \frac{\partial f}{\partial v}\,dv, \text{ cu} : du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy, \; dv = \frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy.$$

Exemplul 5.7 *Fie funcţia* $F(x, y) = f(x + y, x^2 + y^2)$. *Punem* $u = x + y$, $v = x^2 + y^2$ *şi obţinem pentru derivatele parţiale*

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + 2x\,\frac{\partial f}{\partial v}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} + 2y\,\frac{\partial f}{\partial v},$$

iar pentru diferenţială

$$dF = \frac{\partial f}{\partial u}\,du + \frac{\partial f}{\partial v}\,dv = \frac{\partial f}{\partial u}(dx + dy) + \frac{\partial f}{\partial v}(2x\,dx + 2y\,dy).$$

Derivatele parţiale şi diferenţialele de ordin superior se calculează în mod asemănător

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Pentru diferenţiala a doua avem

$$d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,dy^2,$$

în care derivatele parţiale sunt date de expresiile precedente, sau

$$d^2F = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\,du^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\,du\,dv + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\,dv^2 + \frac{\partial f}{\partial u}\,d^2u + \frac{\partial f}{\partial v}\,d^2v,$$

în care du şi dv au expresiile scrise mai sus, iar pentru d^2u şi d^2v avem

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,dy^2, \quad d^2v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\,dy^2.$$

Pentru funcţii de mai multe variabile avem o teoremă asemănătoare.

Teorema 5.21 *Dacă funcţiile $u_k : D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}^n$, $u_k = u_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $k = \overline{1,p}$, au derivate parţiale continue pe D, iar funcţia $f : E \to \mathbf{R}$, $E \subset \mathbf{R}^p$,$f = f(u_1, u_2, \ldots, u_p)$, are derivate parţiale continue pe E, atunci funcţia compusă $F : D \to \mathbf{R}$,*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(u_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), u_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, u_p(x_1, x_2, \ldots, x_n)),$$

pentru orice $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$, are derivate parţiale continue pe D, date de

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u_p}\frac{\partial u_p}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{5.24}$$

Diferenţiala funcţiei F este dată de

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}\,dx_2 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n}\,dx_n,$$

în care derivatele parţiale au expresiile precedente, sau

$$dF = \frac{\partial f}{\partial u_1}\,du_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2}\,du_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u_p}\,du_p,$$

cu

$$du_k = \frac{\partial u_k}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial u_k}{\partial x_2}\,dx_2 + \cdots + \frac{\partial u_k}{\partial x_n}\,dx_n, \quad k = \overline{1,p}.$$

5.2.5 Proprietăţi ale funcţiilor diferenţiabile

Teorema lui Lagrange pentru funcţii de n variabile

Fie $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n), \mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbf{R}^n$.

Definiţia 5.22 *Numim* segment închis*, cu extremităţile în punctele* $\mathbf{a}$ *şi* $\mathbf{b}$*, mulţimea punctelor* $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ *de forma:* $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$*,* $t \in [0, 1]$.

Teorema 5.22 *Fie* $f : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \to \mathbf{R}$*,* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \subset \mathbf{R}^n$*. Dacă* f *este continuă pe* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *şi diferenţiabilă pe* $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$*, atunci există un punct* $\mathbf{c} \in (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ *a.î.*

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{c})\,(b_i - a_i).$$

$\triangleleft$ Considerăm funcţia $F : [0, 1] \to \mathbf{R}$, $F(t) = f(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}))$, care satisface condiţiile teoremei lui Lagrange pe intervalul $[0, 1]$. Există deci un punct $\theta \in (0, 1)$ a.î. $F(1) - F(0) = F'(\theta)$. Dar $F(0) = f(\mathbf{a})$, $F(1) = f(\mathbf{b})$ şi

$$F'(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{c})\,(b_i - a_i), \quad \mathbf{c} = \mathbf{a} + \theta(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \in (\mathbf{a}, \mathbf{b}). \triangleright$$

Formula lui Taylor pentru funcţii de mai multe variabile

Fie $f : E \to \mathbf{R}$, $E \subset \mathbf{R}^2$, o funcţie de *două* variabile, derivabilă de $n + 1$ ori pe E şi (x_0, y_0) un punct interior lui E. Pentru $(x, y) \in E$, considerăm funcţia $F : [0, 1] \to \mathbf{R}$, $F(t) = f(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))$. Funcţia F este de $n + 1$ ori derivabilă pe $[0, 1]$. Aplicând formula lui Taylor funcţiei F pe $[0, 1]$, avem

$$F(1) = F(0) + \frac{1}{1!}F'(0) + \frac{1}{2!}F''(0) + \cdots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(0) + R_n(1),$$

cu

$$R_n(1) = \frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\theta), \quad \theta \in (0, 1).$$

Însă $F(1) = f(x, y)$ şi $F(0) = f(x_0, y_0)$. Pentru calculul derivatelor funcţiei $F(t)$ folosim formula de derivare a funcţiilor compuse. Deoarece $F(t) = f(x(t), y(t))$, cu $x(t) = x_0 + (x - x_0)\,t$ şi $y(t) = y_0 + (y - y_0)\,t$, avem

$$d^k F(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^{(k)} f(x(t), y(t)).$$

Deci

$$d^k F(t) = \left((x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(k)} f(x(t), y(t))\,dt^k.$$

De unde

$$\frac{d^k F}{dt^k}(t) = \left((x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(k)} f(x(t), y(t)).$$

Pentru $t = 0$ obţinem

$$F^{(k)}(0) = \left((x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(k)} f(x_0, y_0).$$

Cu acest rezultat, *formula lui Taylor pentru funcţia* $f(x, y)$ în punctul (x_0, y_0) se scrie

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}\left((x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0, y_0) +$$

$$+ \cdots + \frac{1}{n!}\left((x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n)} f(x_0, y_0) + R_n(x, y),$$

cu

$$R_n(x, y) = \frac{1}{(n+1)!}\left((x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n+1)} f(x_0 + \theta(x - x_0), y_0 + \theta(y - y_0)),$$

în care $\theta \in (0, 1)$. Polinomul

$$T_n(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}\left((x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0, y_0) +$$

$$+ \cdots + \frac{1}{n!}\left((x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n)} f(x_0, y_0)$$

se numeşte *polinomul Taylor de gradul* n asociat funcţiei f în punctul (x_0, y_0), care se mai scrie

$$T_n(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)\right) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)(y - y_0)^2\right) +$$

$$+ \cdots + \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k} \partial y^k}(x_0, y_0)(x - x_0)^{n-k}(y - y_0)^k.$$

Fie acum $f : E \to \mathbf{R}$, $E \subset \mathbf{R}^n$, o funcţie de n variabile, derivabilă de $p + 1$ ori pe E şi $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ un punct interior lui E. În mod asemănător ca la funcţii de două variabile se demonstrează că pentru orice $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E$ are loc formula

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^0)\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{(k)} f(\mathbf{x}_0) + R_p(\mathbf{x}),$$

cu

$$R_p(\mathbf{x}) = \frac{1}{(p+1)!}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^0)\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{(p+1)} f(\mathbf{x}_0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)), \quad \theta \in (0, 1),$$

numită *formula lui Taylor pentru funcţii de n variabile.*

Exemplul 5.8 *Polinomul Taylor de gradul 3 asociat funcţiei $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ în punctul $(1,1)$ este*

$$T_3(x,y) = \sqrt{2} + \frac{1}{1!}\frac{1}{\sqrt{2}}[(x-1)+(y-1)] + \frac{1}{2!}\frac{1}{2\sqrt{2}}[(x-1)^2 - 2(x-1)(y-1) + (y-1)^2] -$$

$$-\frac{1}{3!}\frac{1}{4\sqrt{2}}[3(x-1)^3 - (x-1)^2(y-1) - (x-1)(y-1)^2 + 3(y-1)^3].$$

Exemplul 5.9 *Polinomul Taylor de gradul n asociat funcţiei $f(x,y) = e^{x+y}$ în punctul $(1,-1)$ este*

$$T_n(x,y) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}[(x-1)+(y+1)]^k = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!(k-i)!}(x-1)^{k-i}(y+1)^i.$$

Exemplul 5.10 *Să se găsească o valoare aproximativă a numărului $(1,1)^{1,2}$.*

Polinomul Taylor de gradul 3 asociat funcţiei $f(x,y) = x^y$, $x > 0$, $y > 0$, în punctul $(1,1)$ este

$$T_3(x,y) = 1 + \frac{1}{1!}(x-1) + \frac{1}{2!}[2(x-1)(y-1)] + \frac{1}{3!}[3(x-1)^2(y-1)].$$

Putem atunci scrie $f(1,1;1,2) \approx T_3(1,1;1,2) = 0,1021$.

Capitolul 6

FUNCŢII DEFINITE IMPLICIT

6.1 Funcţii definite implicit de o ecuaţie

6.1.1 Funcţii reale de o variabilă reală

Fie dată ecuaţia

$$F(x;y) = 0, \tag{6.1}$$

în care F este o funcţie reală definită pe o mulţime $E \subset \mathbf{R}^2$.

Definiţia 6.1 *O funcţie $y = f(x)$ definită pe o mulţime $A \subset \mathbf{R}$ se numeşte* soluţie *a ecuaţiei (6.1) pe mulţimea A dacă $F(x; f(x)) = 0$, pentru orice $x \in A$, pentru care $(x; f(x)) \in E$.*

Ecuaţia (6.1) poate avea pe mulţimea A mai multe soluţii sau nici una, după cum rezultă din următoarele exemple.

Exemplul 6.1 *Ecuaţia $x^2 + y^2 - 1 = 0$ are în raport cu y o infinitate de soluţii definite pe mulţimea $A = [-1, +1]$.*

Într-adevăr, pentru orice $\alpha, \beta \in [-1, +1]$, cu $\alpha \leq \beta$, funcţiile

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & x \in [\alpha, \beta], \\ -\sqrt{1 - x^2}, & x \in [-1, +1] \setminus [\alpha, \beta], \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{1 - x^2}, & x \in [\alpha, \beta], \\ \sqrt{1 - x^2}, & x \in [-1, +1] \setminus [\alpha, \beta], \end{cases}$$

sunt soluţii ale ecuaţiei $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Aceste soluţii sunt funcţii discontinue în punctele $x = \alpha$ şi $x = \beta$, pentru $\alpha, \beta \in (-1, +1)$. Numai pentru $\alpha = -1$ şi $\beta = +1$ se obţin funcţii continue pe A:

$$f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1, +1].$$

Dacă pe lângă continuitate cerem ca soluţiile să satisfacă şi condiţia $f(0) = 1$, din mulţimea soluţiilor ecuaţiei $x^2 + y^2 - 1 = 0$, rămâne numai funcţia f_1. Adică, ecuaţia are o singură soluţie, funcţie continuă pe $[-1, +1]$ care pentru $x_0 = 0$ ia valoarea $y_0 = 1$.

Exemplul 6.2 *Ecuaţia* $x^2 + y^2 + 1 = 0$ *nu are nici o soluţie reală, oricare ar fi* $x \in \mathbf{R}$.

Definiţia 6.2 *O funcţie* $y = f(x)$*, soluţie a ecuaţiei (6.1), se numeşte* funcţie definită implicit *de ecuaţia (6.1).*

Condiţiile în care ecuaţia (6.1) defineşte implicit funcţia f, precum şi proprietăţile acesteia sunt precizate de teorema care urmează.

Teorema 6.1 *Fie* $F : E \to \mathbf{R}$*, unde* $E \subset \mathbf{R}^2$ *este o mulţime deschisă şi* $(x_0, y_0) \in E$*. Dacă:*

$$F \in C^1(E), \quad F(x_0; y_0) = 0, \quad F'_y(x_0; y_0) \neq 0,$$

atunci există o vecinătate U *a lui* x_0*, o vecinătate* V *a lui* y_0 *şi o funcţie* $f : U \to V$*,* $y = f(x)$*,* $f \in C^1(U)$ *a.î.* $F(x; f(x)) = 0$*, pentru orice* $x \in U$*,* $f(x_0) = y_0$ *şi*

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x; f(x))}{F'_y(x; f(x))}, \quad x \in U. \tag{6.2}$$

◁ Funcţia $F'_y(x; y)$ este diferită de zero în $(x_0; y_0)$ şi continuă în acest punct. Există deci o vecinătate a punctului $(x_0; y_0)$ în care $F'_y(x; y) \neq 0$. Putem presupune că $F'_y(x; y) > 0$, în această vecinătate.

Funcţia $F(x_0; y)$, de variabila y, are derivata pozitivă într-o vecinătate $V = (\alpha, \beta)$ a lui y_0, deci este strict crescătoare pe V. Deoarece se anulează în punctul y_0, urmează că $F(x_0; \alpha) < 0$ şi $F(x_0; \beta) > 0$.

Funcţia $F(x; \alpha)$, de variabila x, este continuă în punctul x_0 şi $F(x_0; \alpha) < 0$. Există deci o vecinătate U_α a lui x_0 a.î. $F(x; \alpha) < 0$, pentru orice $x \in U_\alpha$.

Funcţia $F(x; \beta)$, de variabila x, este continuă în punctul x_0 şi $F(x_0; \beta) > 0$. Există deci o vecinătate U_β a lui x_0 a.î. $F(x; \beta) > 0$, pentru orice $x \in U_\beta$.

Fie $U = U_\alpha \cap U_\beta$. Pentru orice $x \in U$, avem: $F(x; \alpha) < 0$ şi $F(x; \beta) > 0$. Funcţia $F(x; y)$, ca funcţie de y, este strict crescătoare pe $[\alpha, \beta]$, continuă pe $[\alpha, \beta]$ şi are valori de semne contrare în extremităţile intervalului. Există atunci un punct şi numai unul $y = f(x) \in (\alpha, \beta)$ a.î. $F(x; f(x)) = 0$.

Deoarece $F(x_0; y_0) = 0$, punctului $x_0 \in U$ îi corespunde punctul $y_0 \in (\alpha, \beta)$, adică $f(x_0) = y_0$.

Funcţia f este continuă pe U. Într-adevăr, pentru orice $x, x + h \in U$, putem scrie: $F(x; f(x)) = 0$ şi $F(x + h; f(x + h)) = 0$. Funcţia F fiind continuă pe E, deducem prin trecere la limită în a doua egalitate că $F(x; \lim\limits_{h \to 0} f(x + h)) = 0$. De aici găsim că $\lim\limits_{h \to 0} f(x + h) = f(x)$.

Notând apoi cu $k = f(x + h) - f(x) = f(x + h) - y$, putem scrie

$$F(x + h; f(x + h)) - F(x; f(x)) = F(x + h; y + k) - F(x; y) = 0,$$

sau

$$[F(x + h; y + k) - F(x; y + k)] + [F(x; y + k) - F(x; y)] = 0.$$

Aplicând teorema creşterilor finite deducem

$$F'_x(\xi; y + k)\, h + F'_y(x; \eta)\, k = 0, \quad \xi \in (x, x + h),\ \eta \in (y, y + k).$$

Ţinând seama de expresia lui k, împărţind prin h găsim

$$F'_x(\xi; y+k) + F'_y(x;\eta)\,\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0.$$

Trecând la limită pentru $h \to 0$, cum derivatele parţiale ale funcţiei F sunt continue, rezultă că f este derivabilă şi are loc (6.2).

Dacă derivăm identitatea $F(x; f(x)) = 0$ după regula de derivare a unei funcţii compuse, avem

$$F'_x(x; f(x)) + F'_y(x; f(x))\, f'(x) = 0,$$

de unde se deduce (6.2). ▷

Această observaţie ne permite să calculăm derivata de ordinul doi a funcţiei f în ipoteza că $F \in C^2(E)$. Derivând din nou ultima egalitate, avem

$$F''_{xx} + F''_{xy}\, f'(x) + [F''_{yx} + F''_{yy}\, f'(x)]\, f'(x) + F'_y\, f''(x) = 0,$$

de unde, ţinând seama de (6.2), rezultă

$$f''(x) = -\frac{F'^2_y\, F''_{xx} - 2F'_x F'_y\, F''_{xy} + F'^2_x\, F''_{yy}}{F'^3_y}.$$

6.1.2 Funcţii reale de n variabile

Fie dată ecuaţia

$$F(\mathbf{x}; y) = 0, \quad \text{deci} \quad F(x_1, x_2, \ldots, x_n; y) = 0, \tag{6.3}$$

în care $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ şi F este o funcţie reală definită pe o mulţime $E \subset \mathbf{R}^{n+1}$.

Definiţia 6.3 *O funcţie $y = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definită pe o mulţime $A \subset \mathbf{R}^n$ se numeşte* soluţie *a ecuaţiei (6.3) pe mulţimea A dacă $F(\mathbf{x}; f(\mathbf{x})) = 0$, pentru orice $\mathbf{x} \in A$, pentru care $(\mathbf{x}; f(\mathbf{x})) \in E$.*

Teorema 6.2 *Fie $F : E \to \mathbf{R}$, unde $E \subset \mathbf{R}^{n+1}$ este o mulţime deschisă şi $(\mathbf{x}_0; y_0) \in E$. Dacă:*

$$F \in C^1(E), \quad F(\mathbf{x}_0; y_0) = 0, \quad F'_y(\mathbf{x}_0; y_0) \neq 0,$$

atunci există o vecinătate U a lui $\mathbf{x}_0$, o vecinătate V a lui y_0 şi o funcţie $f : U \to V$, $y = f(\mathbf{x})$, $f \in C^1(U)$ a.î. $F(\mathbf{x}; f(\mathbf{x})) = 0$, pentru orice $\mathbf{x} \in U$, $f(\mathbf{x}_0) = y_0$ şi

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}) = -\frac{F'_{x_k}(\mathbf{x}; f(\mathbf{x}))}{F'_y(\mathbf{x}; f(\mathbf{x}))}, \quad \mathbf{x} \in U, \quad k = \overline{1,n}. \tag{6.4}$$

◁ Demonstraţia urmează aceleaşi etape cu cea din teorema precedentă. ▷

6.2 Funcţii definite implicit de un sistem de ecuaţii

Fie dată ecuaţia vectorială

$$\mathbf{F}(\mathbf{x};\mathbf{y}) = \mathbf{0}, \tag{6.5}$$

în care $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$ şi $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_m)$ este o funcţie vectorială definită pe o mulţime $E \subset \mathbf{R}^{n+m}$.

Definiţia 6.4 *O funcţie $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ definită pe o mulţime $A \subset \mathbf{R}^n$ se numeşte* soluţie *a ecuaţiei (6.5) pe mulţimea A dacă $\mathbf{F}(\mathbf{x};\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$, pentru orice $\mathbf{x} \in A$, pentru care $(\mathbf{x};\mathbf{f}(\mathbf{x})) \in E$.*

Ecuaţia vectorială (6.5) este echivalentă cu sistemul

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m) = 0, \quad i = \overline{1,m}, \tag{6.6}$$

iar egalitatea $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ este echivalentă cu $y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = \overline{1,m}$.

Definiţia 6.5 *Numim* determinant funcţional *sau* jacobianul *funcţiilor $F_1, F_2, \dots, F_m$ în raport cu variabilele $y_1, y_2, \dots, y_m$, determinantul ce are drept elemente derivatele parţiale ale funcţiilor F_i în raport cu variabilele y_j, $i, j = \overline{1,m}$, adică*

$$\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}.$$

Teoremele precedente pot fi extinse şi la acest caz. Dăm, fără demonstraţie această teoremă.

Teorema 6.3 *Fie $\mathbf{F} : E \to \mathbf{R}^m$, unde $E \subset \mathbf{R}^{n+m}$ este o mulţime deschisă şi $(\mathbf{x}_0;\mathbf{y}_0) \in E$. Dacă:*

$$\mathbf{F} \in C^1(E), \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}_0;\mathbf{y}_0) = 0, \quad \frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)}(\mathbf{x}_0;\mathbf{y}_0) \neq 0,$$

atunci există o vecinătate U a lui $\mathbf{x}_0$, o vecinătate V a lui $\mathbf{y}_0$ şi o funcţie $\mathbf{f} : U \to V$, $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{f} \in C^1(U)$ a.î. $\mathbf{F}(\mathbf{x};\mathbf{f}(\mathbf{x})) = 0$, pentru orice $\mathbf{x} \in U$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$ şi pentru fiecare $k = \overline{1,n}$, derivatele funcţiilor $f_1, f_2, \dots, f_m$ în raport cu variabila x_k sunt soluţii ale sistemului algebric liniar

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(\mathbf{x};\mathbf{f}(\mathbf{x}))\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\mathbf{x}) + \frac{\partial F_i}{\partial x_k}(\mathbf{x};\mathbf{f}(\mathbf{x})) = 0, \quad i = \overline{1,m}. \tag{6.7}$$

Exemplul 6.3 *Sistemul*

$$\begin{cases} F(x, y; u, v) = u + v - x - y = 0, \\ G(x, y; u, v) = xu + yv - 1 = 0, \end{cases}$$

pentru $x \neq y$, defineşte pe u şi v ca funcţii de x şi y. Pentru a calcula derivatele parţiale ale funcţiilor $u = u(x, y)$ şi $v = v(x, y)$, derivăm cele două ecuaţii în raport cu x şi apoi cu y. Se obţin sistemele liniare

$$\begin{cases} u_x + v_x = 1, \\ xu_x + yv_x = -u, \end{cases} \qquad \begin{cases} u_y + v_y = 1, \\ xu_y + yv_y = -v, \end{cases}$$

al căror determinant este

$$\frac{D(F, G)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{vmatrix} = y - x \neq 0.$$

Aplicând regula lui Cramer se obţine

$$u_x = \frac{y + u}{y - x}, \quad v_x = -\frac{x + u}{y - x}, \quad u_y = \frac{y + v}{y - x}, \quad v_y = -\frac{x + v}{y - x}.$$

6.3 Transformări punctuale. Derivarea funcţiilor inverse

Numim *transformare punctuală* pe $\mathbf{R}^n$ orice funcţie $\mathbf{f} : E \to F$,

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{6.8}$$

în care $E \subset \mathbf{R}^n$, $F = \mathbf{f}(E) \subset \mathbf{R}^n$, sau pe componente

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = \overline{1, n}. \tag{6.9}$$

Definiţia 6.6 *Spunem că transformarea punctuală* $\mathbf{f}$ *este o* transformare regulată *în punctul $\mathbf{x}_0 \in E$ dacă există şi sunt continue toate derivatele parţiale $\partial f_i / \partial x_k$, $i, k = \overline{1, n}$, pe o vecinătate a lui $\mathbf{x}_0$ şi*

$$J(\mathbf{x}_0) = \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}(\mathbf{x}_0) \neq 0.$$

O transformare regulată în punctul $\mathbf{x}_0$ este diferenţiabilă şi deci continuă în $\mathbf{x}_0$. Jacobianul $J(\mathbf{x})$ al unei transformări regulate într-o vecinătate a punctului $\mathbf{x}_0$ păstrează semn constant pe acea vecinătate.

Teorema 6.4 *Dacă transformarea* $\mathbf{f}$ *este regulată în punctul $\mathbf{x}_0 \in E$ şi $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$, atunci există o vecinătate $U \subset E$ a lui $\mathbf{x}_0$ şi o vecinătate $V \subset F$ a lui $\mathbf{y}_0$ a.î. restricţia transformării* $\mathbf{f}$ *la vecinătatea U, adică funcţia $\mathbf{f} : U \to V$, este o bijecţie a lui U pe V, deci inversabilă pe U şi inversa sa, aplicaţia $\mathbf{g} : V \to U$,*

$$\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y}), \quad \textit{deci} \quad x_k = g_k(y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad k = \overline{1, n},$$

satisface condiţia $\mathbf{g}(\mathbf{y}_0) = \mathbf{x}_0$ *şi este o transformare regulată în* $\mathbf{y}_0$*.*

Pentru fiecare $j = \overline{1,n}$*, derivatele parţiale* $\partial g_k/\partial y_j(\mathbf{y}_0)$*,* $k = \overline{1,n}$*, sunt soluţiile sistemelor algebrice liniare*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0)\,\frac{\partial g_k}{\partial y_j}(\mathbf{y}_0) = \delta_{ij}, \tag{6.10}$$

iar jacobianul transformării inverse este

$$\frac{D(g_1, g_2, \ldots, g_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}\,(\mathbf{y}_0) = \frac{1}{J(\mathbf{x}_0)}. \tag{6.11}$$

$\triangleleft$ Aplicăm teorema funcţiilor definite implicit ecuaţiei vectoriale în necunoscuta $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{y} = \mathbf{0}.$$

Aşadar, există vecinătăţile V a lui $\mathbf{y}_0$, U a lui $\mathbf{x}_0$ şi funcţia $\mathbf{g} : V \to U$, $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$, satisfăcând condiţiilor $\mathbf{g}(\mathbf{y}_0) = \mathbf{x}_0$ şi $\mathbf{F}(\mathbf{g}(\mathbf{y}); \mathbf{y}) = \mathbf{0}$, adică $\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{y})) = \mathbf{y}$, pentru orice $\mathbf{y} \in V$, sau pe componente

$$f_i(g_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), g_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, g_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)) = y_i, \;\; i = \overline{1,n}. \tag{6.12}$$

Aceasta înseamnă că restricţia lui $\mathbf{f}$ la U este bijectivă şi $\mathbf{g}$ este inversa acestei restricţii. Conform aceleiaşi teoreme, funcţia $\mathbf{g}$ este diferenţiabilă în $\mathbf{y}_0$. Aplicând teorema de derivare a funcţiilor compuse, derivând parţial membru cu membru identităţile (6.12) în raport cu y_j în punctul $\mathbf{y}_0$, obţinem sistemele liniare (6.10). Toate aceste sisteme au ca determinant $J(\mathbf{x}_0) \neq 0$, deci admit soluţie unică. Matriceal, egalităţile (6.10) exprimă faptul că produsul a două matrice pătratice de ordinul n este egal cu matricea unitate. Luând determinanţii ambilor membri deducem

$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}(\mathbf{x}_0) \cdot \frac{D(g_1, g_2, \ldots, g_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}(\mathbf{y}_0) = 1,$$

de unde (6.11).

Exemplul 6.4 *Fie* (x, y) *coordonatele unui punct din* $\mathbf{R}^2$*. Numim* coordonate polare *ale acestui punct perechea* (r, φ)*, cu* $r \in [0, \infty)$*,* $\varphi \in [0, 2\pi)$*, legată de perechea* (x, y) *prin*

$$x = r\cos\varphi, \;\; y = r\sin\varphi, \tag{6.13}$$

relaţii care definesc o transformare punctuală în $\mathbf{R}^2$*. Determinantul funcţional al transformării este*

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Deci în orice punct cu excepţia originii, transformarea (6.13) este regulată şi inversa ei este

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \mathrm{tg}\varphi = \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}.$$

Exemplul 6.5 *Fie* (x, y, z) *coordonatele unui punct din* $\mathbf{R}^3$. *Numim* coordonate cilindrice *ale acestui punct tripletul* (r, φ, z), *cu* $r \in [0, \infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $z \in (-\infty, \infty)$, *legat de* (x, y, z) *prin*

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z, \tag{6.14}$$

relaţii care definesc o transformare punctuală în $\mathbf{R}^3$. *Determinantul funcţional al transformării este*

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, z)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Deci în orice punct cu excepţia celor de pe axa Oz, *transformarea (6.14) este regulată.*

Exemplul 6.6 *Fie* (x, y, z) *coordonatele unui punct din* $\mathbf{R}^3$. *Numim* coordonate sferice *ale acestui punct tripletul* (r, θ, φ), *cu* $r \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, *legat de* (x, y, z) *prin*

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta, \tag{6.15}$$

relaţii care definesc o transformare punctuală în $\mathbf{R}^3$. *Determinantul funcţional al transformării este*

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta.$$

Deci în orice punct cu excepţia celor de pe axa Oz, *transformarea (6.15) este regulată.*

6.4 Dependenţă şi independenţă funcţională

Fie funcţiile $f, f_1, f_2, \ldots, f_m : D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}^n$.

Spunem că funcţia f *depinde* de funcţiile $f_1, f_2, \ldots, f_m$ pe D, dacă există o funcţie $F : E \to \mathbf{R}$, $E \subset \mathbf{R}^m$, a.î.

$$f(\mathbf{x}) = F(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})), \quad \forall\, \mathbf{x} \in D.$$

Definiţia 6.7 *Sistemul de funcţii* $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ *se numeşte* funcţional dependent *pe* D *dacă cel puţin una din funcţiile sistemului depinde de celelalte.*

Sistemul de funcţii $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ *se numeşte* funcţional independent *pe* D *dacă nici una din funcţiile sistemului nu depinde de celelalte.*

Teorema 6.5 *Dacă sistemul de funcţii* $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ *este funcţional dependent pe* D *şi funcţiile* $f_1, f_2, \ldots, f_m$ *sunt diferenţiabile pe* D, *atunci*

$$\operatorname{rg}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\mathbf{x})\right) < m, \quad \mathbf{x} \in D.$$

◁ Deoarece sistemul de funcţii $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ este funcţional dependent pe D, cel puţin una din funcţiile sistemului, fie aceasta f_m, depinde de celelalte. Prin urmare, avem

$$f_m(\mathbf{x}) = F(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_{m-1}(\mathbf{x})), \quad \forall \mathbf{x} \in D,$$

unde F este o funcţie diferenţiabilă. Derivând în raport cu x_i relaţia precedentă, obţinem

$$\frac{\partial f_m}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial F}{\partial y_k}(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_{m-1}(\mathbf{x})) \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(\mathbf{x}), \quad i = \overline{1, n},$$

care arată că linia m a matricei $(\partial f_i / \partial x_k)$ este o combinaţie liniară de celelalte $m-1$ linii ale ei şi deci

$$\mathrm{rg}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\mathbf{x})\right) \leq m - 1 < m, \quad \mathbf{x} \in D. \triangleright$$

Consecinţa 6.1 *Dacă într-un punct $\mathbf{x}_0 \in D$ avem*

$$\mathrm{rg}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0)\right) = m,$$

atunci sistemul de funcţii $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ este funcţional independent pe D.

Mai general, dacă funcţiile $f_1, f_2, \ldots, f_m$ sunt diferenţiabile pe D şi

$$\mathrm{rg}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0)\right) = r \leq m,$$

atunci există o vecinătate V a punctului $\mathbf{x}_0$ pe care r dintre funcţiile $f_1, f_2, \ldots, f_m$ sunt funcţional independente.

Exemplul 6.7 *Funcţiile $f_1(x, y) = x - y$, $f_2(x, y) = xy$ şi $f_3(x, y) = x^2 + y^2$ sunt funcţional dependente deoarece $f_3 = f_1^2 + 2f_2$.*

6.5 Schimbări de variabile

Rezolvarea multor probleme de analiză matematică în care sunt implicate expresii ce conţin funcţii de una sau mai multe variabile şi derivate ale acestora devine uneori mai simplă dacă se efectuează o schimbare a variabilelor independente sau chiar a funcţiilor. În cele ce urmează vom analiza modul cum se modifică aceste expresii la schimbarea variabilelor.

6.5.1 Schimbarea variabilelor independente

Cazul funcţiilor de o variabilă

Fie dată funcţia $y = y(x)$, $x \in E$, $E \subset \mathbf{R}$, de n ori derivabilă pe E, şi fie expresia

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\right).$$

Fie încă $x = \varphi(t)$, $t \in I \subset \mathbf{R}$, o transformare regulată pe I, deci cu $\varphi'(t) \neq 0$ pe I. Presupunem că φ este de n ori derivabilă pe I. Efectuând schimbarea de variabilă $x = \varphi(t)$, y devine o funcţie de t: $y = y(\varphi(t)) = f(t)$, iar expresia F ia forma

$$G\left(t, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \ldots\right).$$

Este deci necesar să calculăm derivatele funcţiei y în raport cu x în funcţie de derivatele sale în raport cu t. După regula de derivare a funcţiilor compuse, avem

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)\,\frac{dy}{dx}, \quad \text{de unde,} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)}\,\frac{dy}{dt}.$$

Înlocuind aici pe y prin dy/dx obţinem

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{\varphi'(t)}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\varphi'(t)}\,\frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{\varphi'^3(t)}\left[\varphi'(t)\frac{d^2y}{dt^2} - \varphi''(t)\frac{dy}{dt}\right].$$

În mod asemănător se obţin derivatele de ordin superior.

Cazul funcţiilor de două variabile

Fie dată funcţia $z = z(x, y)$, $(x, y) \in E$, $E \subset \mathbf{R}^2$, de n ori derivabilă pe E, şi fie expresia

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \ldots\right).$$

Fie încă $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $(u, v) \in D \subset \mathbf{R}^2$, o transformare regulată pe D, deci cu $\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)} \neq 0$ pe D. Presupunem că φ şi ψ sunt de n ori diferenţiabile pe D. Efectuând schimbarea de variabile $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, z devine o funcţie de u şi v: $z = z(\varphi(u, v), \psi(u, v)) = f(u, v)$, iar expresia F ia forma

$$G\left(u, v, z, \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}, \ldots\right).$$

Este deci necesar să calculăm derivatele parţiale ale funcţiei z în raport cu x si y în funcţie de derivatele sale parţiale în raport cu u şi v. După regula de derivare a funcţiilor compuse, avem

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\,\varphi'_u + \frac{\partial z}{\partial y}\,\psi'_u, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\,\varphi'_v + \frac{\partial z}{\partial y}\,\psi'_v,$$

de unde

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}}\left(\psi'_v\frac{\partial z}{\partial u} - \psi'_u\frac{\partial z}{\partial v}\right), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}}\left(-\varphi'_v\frac{\partial z}{\partial u} + \varphi'_u\frac{\partial z}{\partial v}\right).$$

Înlocuind aici z prin $\partial z/\partial x$ şi $\partial z/\partial y$ obţinem derivatele parţiale de ordinul doi etc.

Exemplul 6.8 *Funcţia $z = z(x, y)$ satisface ecuaţia*

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Prin trecere la coordonatele polare (r, θ): $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, z devine o funcţie de r şi θ şi satisface ecuaţia

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} = 0.$$

6.5.2 Schimbări de variabile independente şi funcţii

Cazul funcţiilor de o variabilă

Fie dată funcţia $y = y(x)$, $x \in E$, $E \subset \mathbf{R}$, de n ori derivabilă pe E, şi fie expresia

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\right).$$

Fie încă $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $(u, v) \in D \subset \mathbf{R}^2$, o transformare regulată pe D. Presupunem că φ şi ψ sunt de n ori diferenţiabile pe D. Efectuând schimbarea de variabile $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $y = y(x)$ devine $\psi(u, v) = y(\varphi(u, v))$, care defineşte o funcţie $v = v(u)$, iar expresia F ia forma

$$G\left(u, v, \frac{dv}{du}, \frac{d^2v}{du^2}, \ldots\right).$$

Este deci necesar să calculăm derivatele funcţiei y în raport cu x în funcţie de derivatele funcţiei v în raport cu u. După regula de derivare a funcţiilor compuse, avem

$$\psi'_u + \psi'_v\,\frac{dv}{du} = \frac{dy}{dx}\left(\varphi'_u + \varphi'_v\,\frac{dv}{du}\right),$$

de unde, pentru $\varphi'_u + \varphi'_v(dv/du) \neq 0$, obţinem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'_u + \psi'_v\,\frac{dv}{du}}{\varphi'_u + \varphi'_v\,\frac{dv}{du}}.$$

Printr-o nouă derivare se obţine derivata de ordinul doi etc.

Cazul funcţiilor de două variabile

Fie dată funcţia $z = z(x, y)$, $(x, y) \in E$, $E \subset \mathbf{R}^2$, de n ori derivabilă pe E, şi fie expresia

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \ldots\right).$$

Fie încă

$$x = \varphi(u, v, w), \quad y = \psi(u, v, w), \quad z = \chi(u, v, w), \quad (u, v, w) \in D \subset \mathbf{R}^3,$$

o transformare regulată pe D. Presupunem că φ, ψ şi χ sunt de n ori diferenţiabile pe D. Efectuând schimbarea de variabile $x = \varphi(u, v, w)$, $y = \psi(u, v, w)$, $z = \chi(u, v, w)$, $z = z(x, y)$ devine $\chi(u, v, w) = z(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w))$, care defineşte o funcţie $w = w(u, v)$, iar expresia F ia forma

$$G\left(u, v, w, \frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}, \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}, \ldots\right).$$

Este deci necesar să calculăm derivatele parţiale ale funcţiei z în raport cu x si y în funcţie de derivatele parţiale ale funcţiei w în raport cu u şi v. După regula de derivare a funcţiilor compuse, avem

$$\chi'_u + \chi'_w \frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\left(\varphi'_u + \varphi'_w \frac{\partial w}{\partial u}\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\psi'_u + \psi'_w \frac{\partial w}{\partial u}\right),$$

$$\chi'_v + \chi'_w \frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\left(\varphi'_v + \varphi'_w \frac{\partial w}{\partial v}\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\psi'_v + \psi'_w \frac{\partial w}{\partial v}\right).$$

Prin rezolvarea acestui sistem se obţin derivatele $\partial z/\partial x$ şi $\partial z/\partial y$. Printr-o nouă derivare a sistemului precedent obţinem derivatele de ordinul doi etc.

Capitolul 7

EXTREME PENTRU FUNCŢII DE MAI MULTE VARIABILE

7.1 Puncte de extrem pentru funcţii de mai multe variabile

Fie $f : E \to \mathbf{R}$, $E \subset \mathbf{R}^n$.

Definiţia 7.1 *Punctul* $\mathbf{x}_0 \in E$ *se numeşte* punct de extrem local *sau relativ al funcţiei* f *dacă există o vecinătate* V *a lui* $\mathbf{x}_0$ *a.î. diferenţa* $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)$ *să păstreze semn constant pentru orice* $\mathbf{x} \in V \cap E$*. Dacă:*

$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) \leq 0$, $\forall \mathbf{x} \in V \cap E$, $\mathbf{x}_0$ *este punct de maxim local,*

$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) \geq 0$, $\forall \mathbf{x} \in V \cap E$, $\mathbf{x}_0$ *este punct de minim local.*

Dacă diferenţa $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)$ păstrează semn constant pentru orice $\mathbf{x} \in E$, atunci $\mathbf{x}_0$ se numeşte punct de extrem absolut. Orice punct de extrem absolut este punct de extrem local. Reciproca nu este adevărată.

Teorema 7.1 ***(Teorema lui Fermat)*** *Dacă* $\mathbf{x}_0$ *este punct de extrem pentru funcţia* f *şi* f *are toate derivatele parţiale în* $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$*, atunci*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{7.1}$$

$\triangleleft$ Fie $F_i(t) = f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i^0 + t, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0)$, $i = \overline{1, n}$. Dacă $\mathbf{x}_0$ este punct de extrem pentru funcţia f, atunci diferenţa $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)$ păstrează semn constant, deci şi $F_i(t) - F_i(0)$ păstrează semn constant, ca atare $t = 0$ este punct de extrem pentru F_i. În consecinţă, conform teoremei lui Fermat, $F_i'(0) = 0$, $i = \overline{1, n}$, ceea ce implică (7.1). $\triangleright$

Teorema lui Fermat precizează condiţii necesare de extrem.

Un punct $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in E$ pentru care are loc (7.1), adică o soluţie a sistemului

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad i = \overline{1, n} \tag{7.2}$$

se numeşte *punct staţionar* sau *punct critic* al funcţiei f.

Teorema lui Fermat afirmă că punctele de extrem ale unei funcţii sunt puncte staţionare. Reciproca afirmaţiei nu este adevărată. De exemplu, originea este punct staţionar pentru funcţia $f(x, y) = x^2 - y^2$, deoarece $f'_x(0, 0) = 0$ şi $f'_y(0, 0) = 0$, dar nu este punct de extrem deoarece $f(x, y) - f(0, 0) = x^2 - y^2$ nu are semn constant în nici o vecinătate a originii.

Un punct staţionar care nu este punct de extrem se numeşte *punct şa.*

Dacă f este diferenţiabilă în $\mathbf{x}_0$, punct de extrem pentru f, atunci $df(\mathbf{x}_0) = 0$.

Teorema care urmează pune în evidenţă condiţii *suficiente* ca un punct staţionar să fie punct de extrem.

Să presupunem că f are derivate parţiale de ordinul doi în punctul $\mathbf{x}_0$. Notăm cu

$$A_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0), \quad i, j = \overline{1, n}, \quad \Delta_p = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{p1} & A_{p2} & \ldots & A_{pp} \end{vmatrix}, \quad p = \overline{1, n}.$$

Teorema 7.2 *Fie $f : E \to \mathbf{R}$, $E \subset \mathbf{R}^n$, $f \in C^2(E)$ şi $\mathbf{x}_0$ un punct staţionar al funcţiei f, interior lui E. Atunci:*

1. dacă $\Delta_p > 0$, $p = \overline{1, n}$, $\mathbf{x}_0$ este punct de minim,

2. dacă $(-1)^p \Delta_p > 0$, $p = \overline{1, n}$, $\mathbf{x}_0$ este punct de maxim,

3. dacă $\operatorname{rg}(A_{ij}) = r < n$ şi $\Delta_p > 0$ (respectiv $(-1)^p \Delta_p > 0$), $p = \overline{1, r}$, nu putem decide asupra naturii punctului $\mathbf{x}_0$ cu ajutorul derivatelor parţiale de ordinul doi,

4. dacă Δ_p nu sunt nici în unul din cazurile precedente, $\mathbf{x}_0$ nu este punct de extrem.

$\triangleleft$ Presupunem că f este o funcţie de *două* variabile $f(x, y)$ şi (x_0, y_0) fiind un punct staţionar al acesteia, notăm

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0), \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0).$$

Avem de demonstrat că:

1. dacă $\Delta_1 = A > 0$ şi $\Delta_2 = AC - B^2 > 0$, (x_0, y_0) este punct de minim,
2. dacă $\Delta_1 = A < 0$ şi $\Delta_2 = AC - B^2 > 0$, (x_0, y_0) este punct de maxim,
3. dacă $\Delta_2 = AC - B^2 = 0$, nu putem decide asupra naturii punctului (x_0, y_0) cu ajutorul derivatelor parţiale de ordinul doi,
4. dacă $\Delta_2 = AC - B^2 < 0$, (x_0, y_0) nu este punct de extrem.

Scriem formula lui Taylor de ordinul întâi. Deoarece (x_0, y_0) este un punct staţionar

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

şi notând $x - x_0 = h$, $y - y_0 = k$, avem

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi,\eta)\, h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi,\eta)\, hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi,\eta)\, k^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2!}\left[A\, h^2 + 2B\, hk + C\, k^2 + \alpha(h,k)\right] \frac{1}{2!}\left[\frac{1}{A}\left(A\, h + B\, k\right)^2 + \frac{AC - B^2}{A}\, k^2 + \alpha(h,k)\right],$$

în care $\alpha(h,k) \to 0$ când $h \to 0$, $k \to 0$, derivatele parţiale de ordinul doi fiind continue. Rezultă că există o vecinătate a punctului (x_0, y_0) în care semnul diferenţei $f(x,y) - f(x_0,y_0)$ este dat de diferenţiala a doua în (x_0,y_0): $d^2 f(x_0,y_0) = A\, h^2 + 2B\, hk + C\, k^2$.

1. Deoarece $A > 0$ şi $AC - B^2 > 0$, trinomul în h/k, $A\,(h/k)^2 + 2B\, h/k + C$, admite un minim

$$m = \frac{AC - B^2}{A} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} > 0,$$

Fie V o vecinătate a lui (x_0, y_0) în care $\frac{|\alpha(h,k)|}{k^2} \leq m$. Pentru orice $(x,y) \in V$, putem scrie

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) \geq \frac{1}{2}[mk^2 + \alpha(h,k)] \geq 0.$$

Deci (x_0, y_0) este un punct de minim. Cazul 2. se tratează în mod asemănător.

3. Dacă $B^2 - AC = 0$ şi $A \neq 0$, atunci

$$d^2 f(x_0,y_0) = \frac{1}{A}(A\, h + B\, k)^2,$$

iar dacă $A = 0$, $d^2 f(x_0,y_0) = C\, k^2$, de unde deducem că $d^2 f(x_0,y_0) = 0$ în punctele dreptei $A\, h + B\, k = 0$, respectiv $k = 0$. Deci nu putem decide asupra naturii punctului (x_0, y_0) cu ajutorul derivatelor parţiale de ordinul doi.

4. Dacă $B^2 - AC > 0$, atunci $d^2 f(x_0,y_0)$ nu păstrează semn constant în nici o vecinătate a punctului (x_0, y_0). $\triangleright$

Exemplul 7.1 *Să determinăm punctele de extrem ale funcţiei* $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$, $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

Punctele staţionare sunt soluţiile sistemului

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3(x^2 + y^2 - 5) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 6(xy - 2) = 0,$$

adică: $(2,1)$, $(-2,-1)$, $(1,2)$, $(-1,-2)$. *Derivatele de ordinul doi sunt*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x.$$

În punctul $(2,1)$, $\Delta_1 = 12 > 0$, $\Delta_2 = 108 > 0$, $(2,1)$ *este un punct de minim,* $f(2,1) = -28$. *În punctul* $(-2,-1)$, $\Delta_1 = -12 < 0$, $\Delta_2 = 108 > 0$, $(-2,-1)$ *este un punct de maxim,* $f(-2,-1) = 28$. *În punctele* $(1,2)$, $(-1,-2)$, $\Delta_2 = -108 < 0$. *Nu sunt puncte de extrem.*

7.2 Extreme pentru funcţii definite implicit

Teorema 7.3 *Fie $f : E \to \mathbf{R}$, $E \subset \mathbf{R}^n$, $y = f(\mathbf{x})$, o funcţie definită implicit de ecuaţia*

$$F(\mathbf{x}; y) = 0. \tag{7.3}$$

Punctul $\mathbf{x}_0 \in E$ este punct staţionar al funcţiei f d.d. punctul $(\mathbf{x}_0, y_0)$, cu $y_0 = f(\mathbf{x}_0)$, este soluţie a sistemului

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}; y) = 0, \quad F(\mathbf{x}; y) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \tag{7.4}$$

◁ Deoarece

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}; y) + \frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}; y)\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = 0, \text{ cu } \ y = f(\mathbf{x}), \tag{7.5}$$

rezultă că $\partial f/\partial x_i(\mathbf{x}_0) = 0$, $i = \overline{1, n}$, d.d. punctul $(\mathbf{x}_0, y_0)$ este soluţie a sistemului (7.4). ▷

Pentru a determina punctele de extrem ale funcţiei f definită implicit de ecuaţia (7.3), se rezolvă sistemul (7.4) de $n+1$ ecuaţii în necunoscutele $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$.

Dacă $(\mathbf{x}_0, y_0)$ este o soluţie a sistemului (7.4), atunci $\mathbf{x}_0$ este un punct staţionar al funcţiei f şi $y_0 = f(\mathbf{x}_0)$.

Pentru a vedea care dintre punctele staţionare ale funcţiei f sunt puncte de extrem, să presupunem că F este de două ori diferenţiabilă pe E.

Derivând (7.5) în raport cu x_j, obţinem

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial y}\,\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial y}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial y}\,\frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,\frac{\partial f}{\partial x_i}\,\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0.$$

Dacă $\mathbf{x}_0$ este un punct staţionar pentru f, atunci $\partial f/\partial x_i(\mathbf{x}_0) = 0$ şi din relaţia precedentă rezultă

$$A_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) = -\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}_0; y_0)}\,\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0; y_0).$$

Aplicând acum Teorema 7.2, putem stabili natura punctului staţionar $\mathbf{x}_0$. ▷

7.3 Extreme condiţionate

În practică apar uneori şi probleme care nu se pot încadra în teoria prezentată până aici. De exemplu: să se determine aria maximă a unui dreptunghi dacă perimetrul său are o valoare constantă, sau să se determine volumul maxim al unui paralelipiped dacă suma muchiilor sale şi aria totală au valori constante. În aceste probleme se cere determinarea valorilor extreme ale unei funcţii de mai multe variabile, dacă acestea satisfac un număr de condiţii date.

Fie $F : E \to \mathbf{R}$, $E \subset \mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, $y = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, o funcţie reală şi

$$G_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad j = \overline{1, m}, \tag{7.6}$$

un sistem de $m < n$ ecuaţii, funcţiile $G_j : E \to \mathbf{R}$ fiind funcţional independente pe E.

Definiţia 7.2 *Punctul* $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in E$ *se numeşte* punct de extrem *al funcţiei* F condiţionat *de sistemul (7.6) dacă este punct de extrem pentru* F *şi soluţie a sistemului (7.6).*

Deoarece, în acest caz, se caută extremele funcţiei F pe mulţimea punctelor $\mathbf{x} \in E$ ale căror coordonate $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt legate între ele prin cele m ecuaţii (7.6) (legături între variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n$), extremele condiţionate se mai numesc *extreme cu legături.*

Extremele funcţiei F definite în paragraful precedent le vom numi *extreme libere* sau *extreme necondiţionate.*

Un punct de extrem condiţionat este un punct de extrem liber, dar nu orice punct de extrem liber este punct de extrem condiţionat.

Problema determinării extremelor funcţiei F, condiţionate de sistemul (7.6) se poate reduce la o problemă de extrem liber prin introducerea *funcţiei lui Lagrange*:

$$L(\mathbf{x}; \lambda) = F(\mathbf{x}) + \lambda_1 G_1(\mathbf{x}) + \lambda_2 G_2(\mathbf{x}) + \cdots + \lambda_m G_m(\mathbf{x}), \quad \forall\, (\mathbf{x}; \lambda) \in E \times \mathbf{R}^m,$$

cu $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$. Scalarii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ se numesc *multiplicatorii lui Lagrange.*

Să observăm că funcţiile F şi L iau aceleaşi valori în toate punctele care satisfac sistemul (7.6).

Teorema 7.4 *Fie* $\mathbf{x}_0$ *un punct de extrem al funcţiei* F *condiţionat de sistemul (7.6). Dacă funcţiile* F *şi* G_i, $i = \overline{1, m}$, *sunt de clasă* C^1 *pe* E *şi*

$$\operatorname{rg} \left(\frac{\partial G_i}{\partial x_j} \right) (\mathbf{x}_0) = m, \tag{7.7}$$

atunci există $\lambda_0 = (\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_m^0) \in \mathbf{R}^m$ *a.î. punctul* $(\mathbf{x}_0; \lambda_0) \in E \times \mathbf{R}^m$ *să fie punct staţionar al funcţiei* $L(\mathbf{x}, \lambda)$, *adică soluţie a sistemului de* $n + m$ *ecuaţii*

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(\mathbf{x}; \lambda) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + \lambda_1 \frac{\partial G_1}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + \cdots + \lambda_m \frac{\partial G_m}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = 0, \;\; i = \overline{1, n}, \tag{7.8}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}(\mathbf{x}; \lambda) = G_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = \overline{1, m}$$

în $n + m$ *necunoscute* $x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$.

$\lhd$ Presupunem $m = 1$. Sistemul (7.6) se reduce atunci la ecuaţia

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}; x_n) = 0, \text{ cu } \frac{\partial G}{\partial x_n}(x_0) \neq 0, \quad G(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0; x_n^0) = 0.$$

Conform teoremei funcţiilor definite implicit, există funcţia $x_n = g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, definită într-o vecinătate a punctului $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0)$ a.î. $g(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0) = x_n^0$ şi

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}; g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})) = 0.$$

Înlocuind în $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pe x_n, obţinem funcţia

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}; g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})),$$

pentru care $\mathbf{x}_0' = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0)$ este un extrem liber, deci

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0') = 0, \quad j = \overline{1, n-1},$$

de unde, ţinând seama de definiţia lui f deducem

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)\,\frac{\partial g}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0') = 0, \quad j = \overline{1, n-1},$$

în care derivatele funcţiei g se obţin din

$$\frac{\partial G}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial G}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)\,\frac{\partial g}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0') = 0, \quad j = \overline{1, n-1}.$$

Prin eliminarea derivatelor funcţiei g, condiţiile de extrem pentru funcţia f se pot scrie sub forma

$$-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)}{\frac{\partial G}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)}{\frac{\partial G}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)} = \lambda_0, \quad j = \overline{1, n-1}.$$

De aici deducem

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0; \lambda_0) = \frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) + \lambda_0 \frac{\partial G}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) = 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Orice soluţie $(\mathbf{x}_0; \lambda_0)$ a sistemului (7.8) se numeşte *punct staţionar al funcţiei lui Lagrange*, iar $\mathbf{x}_0$ *punct staţionar condiţionat* al funcţiei F. Punctele de extrem condiţionat ale funcţiei F se găsesc printre punctele staţionare condiţionate.

Pentru a stabili care dintre punctele staţionare condiţionate ale funcţiei F sunt puncte de extrem condiţionat, vom da în continuare *condiţii suficiente de extrem condiţionat*.

Să presupunem că funcţiile F şi G_j, $i = \overline{1, m}$, sunt de clasă C^2 pe E şi fie $(\mathbf{x}_0; \lambda_0)$ un punct staţionar al funcţiei lui Lagrange. Punctul staţionar condiţionat $\mathbf{x}_0$ este punct de extrem condiţionat pentru funcţia F dacă diferenţa $F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}_0)$ păstrează semn constant pentru orice $\mathbf{x}$, soluţie a sistemului (7.6), dintr-o vecinătate a punctului $\mathbf{x}_0$. Notăm cu $\Phi(\mathbf{x}) = L(\mathbf{x}; \lambda_0)$. Să observăm că pentru orice soluţie a sistemului (7.6) $F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}_0) = \Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{x}_0)$. Deoarece $d\Phi(\mathbf{x}_0) = 0$, semnul diferenţei $\Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{x}_0)$, într-o vecinătate a punctului $\mathbf{x}_0$ este dat de diferenţiala a doua

$$d^2\Phi(\mathbf{x}_0) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0)\, dx_i\, dx_j,$$

în care însă diferenţialele dx_i nu sunt independente. Într-adevăr, diferenţiind sistemul (7.6) în $\mathbf{x}_0$, avem

$$\frac{\partial G_j}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)\, dx_1 + \frac{\partial G_j}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0)\, dx_2 + \cdots + \frac{\partial G_j}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)\, dx_n = 0, \quad j = \overline{1, m},$$

care este un sistem algebric liniar de m ecuaţii cu n necunoscute: $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$. În ipoteza (7.7), putem exprima m dintre diferenţialele dx_i, de exemplu, primele m în funcţie de celelalte $n-m$. Înlocuindu-le în expresia lui $d^2\Phi(\mathbf{x}_0)$, obţinem

$$d^2\Phi(\mathbf{x}_0) = \sum_{i,j=1}^{n-m} A_{ij}\, dx_{m+i}\, dx_{m+j}.$$

Cu A_{ij} astfel determinaţi se aplică Teorema 7.2, care precizează condiţii suficiente de extrem.

Exemplul 7.2 *Să se găsească valorile extreme ale formei pătratice:*

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \tag{7.9}$$

cu condiţia,

$$G(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1 = 0. \tag{7.10}$$

Funcţia lui Lagrange este:

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = F(\mathbf{x}) - \lambda G(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j - \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1 \right).$$

Punctele staţionare ale funcţiei lui Lagrange sunt soluţiile sistemului:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - \lambda x_i = 0,\ i = \overline{1,n},\ \ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1 = 0. \tag{7.11}$$

Primele n ecuaţii se mai pot scrie sub forma:

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - \lambda \delta_{ij})\, x_j = 0,\ i = \overline{1,n}, \tag{7.12}$$

unde δ_{ij} sunt simbolurile lui Kronecker.

Sistemul liniar şi omogen (7.12) nu poate avea soluţia banală deoarece aceasta nu verifică ultima ecuaţie (7.11). Prin urmare λ este soluţie a ecuaţiei

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

adică λ este o valoare proprie a matricei simetrice $A = ||a_{ij}||$. Fie λ_k, $k = \overline{1,n}$, valorile proprii ale matricei A şi $\mathbf{x}_k = \left(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k\right)$, $k = \overline{1,n}$, vectorii proprii corespunzători. Deci $(\mathbf{x}_k, \lambda_k)$, $k = \overline{1,n}$, sunt soluţiile sistemului (7.12) şi $\mathbf{x}_k$ sunt punctele staţionare. Din ultima ecuaţie (7.11) deducem că $||\mathbf{x}_k||^2 = 1$. Să calculăm $F(\mathbf{x}_k)$. Deoarece $\mathbf{x}_k$ verifică primele n ecuaţii (7.11), avem

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^k = \lambda_k x_i^k,\ i, k = \overline{1, n}.$$

Înmulţind cu x_i^k şi sumând după i de la 1 la n, obţinem $F(\mathbf{x}_k) = \lambda_k$. Funcţia F, fiind continuă pe sfera $\sum$ de ecuaţie $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$, îşi atinge marginile pe $\sum$ şi acestea sunt:

$$M = \sup_{\Sigma} F(\mathbf{x}) = \max_k \lambda_k,\ \ m = \inf_{\Sigma} F(\mathbf{x}) = \min_k \lambda_k.$$

Capitolul 8

ŞIRURI ŞI SERII DE FUNCŢII

8.1 Şiruri de funcţii reale

8.1.1 Şiruri de funcţii. Mulţimea de convergenţă

Fie $E \subset \mathbf{R}$ şi $\mathcal{F}(E, \mathbf{R})$ mulţimea funcţiilor definite pe E cu valori în $\mathbf{R}$. Un şir $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$, cu $f_n \in \mathcal{F}(E, \mathbf{R})$ se numeşte *şir de funcţii reale.*

Definiţia 8.1 *Un punct $x_0 \in E$ se numeşte* punct de convergenţă *al şirului de funcţii (f_n) dacă şirul numeric $(f_n(x_0))$ este convergent.*

Mulţimea punctelor de convergnţă ale şirului de funcţii (f_n) se numeşte *mulţimea de convergenţă* a şirului (f_n).

Exemplul 8.1 *Şirul de funcţii (f_n), cu $f_n = \frac{\sin x}{n^2+1}$, $x \in \mathbf{R}$, are mulţimea de convergenţă* $\mathbf{R}$.

8.1.2 Funcţia limită a unui şir de funcţii

Fie (f_n) un şir de funcţii definite pe E şi $A \subset E$ mulţimea de convergenţă a şirului. Funcţia $f : A \to \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in A,$$

se numeşte *funcţia limită* pe mulţimea A a şirului (f_n).

Exemplul 8.2 *Şirul de funcţii $f_n(x) = \frac{n^2x^2+1}{n^2+1}$, $x \in \mathbf{R}$, are mulţimea de convergenţă* $\mathbf{R}$ *şi pentru orice $x \in \mathbf{R}$, funcţia limită a şirului este $f(x) = x^2$.*

8.1.3 Convergenţa simplă

Fie (f_n) un şir de funcţii pe $E \subset \mathbf{R}$.

Definiţia 8.2 *Spunem că şirul de funcţii* (f_n) *este* simplu (punctual) convergent *pe* E *către funcţia* f*, dacă*

$$\forall\, x \in E,\ \ \forall\, \varepsilon > 0,\ \ \exists\, N(\varepsilon, x) \in \mathbf{N}\ \ \textit{pentru care}\ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \ \forall\, n > N. \tag{8.1}$$

Din definiţie rezultă că numărul N depinde atât de ε cât şi de x.

Exemplul 8.3 *Şirul de funcţii* $f_n(x) = \frac{x^2}{n+1}$, $x \in \mathbf{R}$, *este simplu convergent pe* $\mathbf{R}$ *către* $f(x) = 0$.

Într-adevăr, $\frac{x^2}{n+1} < \varepsilon$ *d.d.* $n > \frac{x^2 - \varepsilon}{\varepsilon}$. *Deci*

$$N(\varepsilon, x) = \begin{cases} \left[\frac{x^2-\varepsilon}{\varepsilon}\right], & \varepsilon < x^2, \\ 0, & \varepsilon \geq x^2. \end{cases}$$

8.1.4 Convergenţa uniformă

Definiţia 8.3 *Spunem că şirul de funcţii* (f_n) *este* uniform convergent *pe* E *către funcţia* f *dacă*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbf{N}\ \ \textit{pentru care}\ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \ \forall\, n > N,\ \ \forall\, x \in E. \tag{8.2}$$

În definiţia uniformei convergenţe, numărul N depinde numai de ε şi este acelaşi pentru orice $x \in E$.

Un şir de funcţii uniform convergent este şi simplu convergent. Reciproca nu este, în general, adevărată.

Exemplul 8.4 *Şirul de funcţii* $f_n(x) = \frac{\cos nx}{n^2+1}$, $x \in [0, \pi]$, *este uniform convergent către* $f(x) = 0$.

Într-adevăr, $\left|\frac{\cos nx}{n^2+1}\right| < \varepsilon$ *dacă* $\frac{1}{n^2+1} < \varepsilon$, *adică d.d.* $n^2 > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$. *Deci*

$$N(\varepsilon) = \begin{cases} \sqrt{\left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right]}, & \varepsilon < 1, \\ 0, & \varepsilon \geq 1. \end{cases}$$

Un criteriu de convergenţă uniformă este dat de teorema care urmează.

Teorema 8.1 *Şirul de funcţii* (f_n) *definite pe* E *converge uniform pe* E *la funcţia* f *dacă există un şir* (a_n) *de numere pozitive, convergent către zero, a.î.*

$$\forall\, n \in \mathbf{N},\ \ |f_n(x) - f(x)| \leq a_n,\ \forall\, x \in E.$$

$\triangleleft$ Deoarece şirul (a_n) are limita 0,

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \ \exists\, N(\varepsilon)\ \ \text{pentru care}\ \ a_n < \varepsilon,\ \ \forall\, n > N.$$

Prin urmare, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, $\forall\, n > N$, $\forall\, x \in E$, deci (f_n) este uniform convergent pe $\mathbf{R}$ către $f(x) = 0$. $\triangleright$

Exemplul 8.5 *Şirul de funcţii* $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n^\alpha}$, $x \in \mathbf{R}$ *cu* $\alpha > 0$, *este uniform convergent pe* $\mathbf{R}$ *către* $f(x) = 0$.

Într-adevăr, $\left|\frac{\sin nx}{n^\alpha}\right| \leq \frac{1}{n^\alpha} \to 0$.

8.1.5 Proprietăţi ale şirurilor uniform convergente

În legătură cu şirurile de funcţii uniform convergente vom demonstra trei teoreme privind continuitatea, derivabilitatea şi integrabilitatea funcţiei limită.

Teorema 8.2 *Fie (f_n) un şir de funcţii uniform convergente pe E la funcţia f. Dacă toate funcţiile f_n sunt continue în punctul $x_0 \in E$, atunci funcţia limită f este continuă în punctul x_0.*

$\triangleleft$ Deoarece şirul (f_n) este uniform convergent pe E, are loc (8.2) pentru orice $x \in E$. În particular, avem şi $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Funcţia $f_n(x)$ fiind continuă în punctul x_0, există o vecinătate V a lui x_0 a.î. pentru $x \in V \cap E$ să avem $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$. Dar

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < 3\varepsilon,$$

pentru orice $x \in V \cap E$, ceea ce dovedeşte continuitatea funcţiei f în punctul x_0. $\triangleright$

Consecinţa 8.1 *Limita unui şir (f_n) de funcţii continue pe E, uniform convergent pe E, este o funcţie continuă pe E.*

Exemplul 8.6 *Şirul de funcţii $f_n(x) = \frac{n^3x^4+1}{n^3+1}$, $x \in [0,1]$ este uniform convergent către funcţia $f(x) = x^4$, $x \in [0,1]$.*

Teorema 8.3 *Fie (f_n) un şir de funcţii uniform convergente pe intervalul mărginit $I \subset E$ către funcţia f. Dacă toate funcţiile f_n au derivate continue pe I şi şirul de funcţii (f_n'), al derivatelor funcţiilor f_n, este uniform convergent către o funcţie g pe intervalul I, atunci funcţia limită f este derivabilă pe I şi $f'(x) = g(x)$, pentru orice $x \in I$.*

$\triangleleft$ Fie $x_0 \in I$. Să arătăm că f este derivabilă în x_0 şi $f'(x_0) = g(x_0)$.

Şirul de funcţii (f_n') fiind u.c. pe I la g, urmează că şirul $(f_n'(x_0))$ este convergent, deci

$$(a)\ \ \forall\, \varepsilon > 0,\ \ \exists\, N_1(\varepsilon) \in \mathbf{N}\ \text{ pentru care }\ \forall\, n > N_1,\ \ |f_n'(x_0) - g(x_0)| < \varepsilon,\ \ \forall\, x_0 \in I.$$

Funcţia $f_n(x)$, pentru orice $n \in \mathbf{N}$, având derivată continuă în punctul x_0, există o vecinătate V a lui x_0 a.î. pentru $\varepsilon > 0$, ales mai sus, să avem

$$(b)\ \ \left| \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} - f_n'(x_0) \right| < \varepsilon,\ \ \forall\, x \in V.$$

Pe de altă parte, pentru orice $m, n \in \mathbf{N}$, putem scrie

$$\left| \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} - \frac{f_m(x) - f_m(x_0)}{x - x_0} \right| = \left| \frac{(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))}{x - x_0} \right| =$$

$$= |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)|,$$

cu ξ cuprins între x_0 şi x, după cum rezultă aplicând teorema lui Lagrange funcţiei $f_n(x)-f_m(x)$. Dar şirul $(f_n'(\xi))$ este convergent, deci după criteriul general al lui Cauchy pentru şiruri, există $N_2(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ a.î.

$$|f_n'(\xi) - f_m'(\xi)| < \varepsilon, \ \ \forall\, n, m > N_2.$$

În consecinţă, pentru orice $x \in I$, avem

$$\left|\frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0} - \frac{f_m(x)-f_m(x_0)}{x-x_0}\right| < \varepsilon, \ \ \forall\, n, m > N_2.$$

Făcând aici $m \to \infty$, rezultă

$$(c) \quad \left|\frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0} - \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| < \varepsilon, \ \ \forall\, n > N_2.$$

Fie acum $N = \max\{N_1, N_2\}$. Atunci, pentru orice $n > N$ şi orice $x \in V$, din (a), (b) şi (c), urmează

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - g(x_0)\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0}\right| + \left|\frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0} - f_n'(x_0)\right| + |f_n'(x_0) - g(x_0)| < 3\varepsilon.$$

Prin urmare,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = g(x_0), \ \ \forall\, x_0 \in I.$$

Deci f este derivabilă pe I şi $f'(x) = g(x)$, pentru orice $x \in I$. $\triangleright$

Un şir (f_n) poate fi u.c. către f, cu (f_n) şi f derivabile, fără ca şirul (f_n') să fie u.c.

Exemplul 8.7 *Şirul* $f_n(x) = \frac{\sin^2 nx}{n+1}$, $x \in [0, \pi]$, *este u.c. către funcţia* $f(x) = 0$. *Funcţiile* f_n *şi* f *sunt derivabile pe* $[0, \pi]$, *însă şirul derivatelor* $f_n'(x) = \frac{n}{n+1} \sin 2nx$ *nu este convergent pe* $[0, \pi]$.

Într-adevăr, pentru $x = \pi/4$ *şirul* $f_n'(\pi/4))$ *este divergent.*

Teorema 8.4 *Fie* (f_n) *un şir de funcţii uniform convergente pe intervalul* $[a, b] \subset E$ *către funcţia* f. *Dacă toate funcţiile* f_n *sunt continue pe* $[a, b]$, *atunci*

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b \left[\lim_{n \to \infty} f_n(x)\right]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

$\triangleleft$ Şirul (f_n) fiind u.c. pe $[a, b]$ către funcţia f,

$$\forall\, \varepsilon > 0, \ \ \exists\, N(\varepsilon) \text{ pentru care } \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \ \ \forall\, n > N, \ \ \forall\, x \in [a, b].$$

Pe de altă parte, funcţiile $f_n(x)$ fiind continue, după Teorema 8.2, funcţia $f(x)$ este continuă pe $[a, b]$. Deci putem scrie

$$\left|\int_a^b f_n(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx < \varepsilon(b-a), \ \ \forall\, n > N,$$

deci

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx. \triangleright$$

8.2 Serii de funcţii

8.2.1 Serii de funcţii. Mulţimea de convergenţă

Fie $f_n \in \mathcal{F}(E, \mathbf{R})$ un şir de funcţii reale şi $s_n \in \mathcal{F}(E, \mathbf{R})$ şirul definit prin

$$s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n = \sum_{k=1}^{n} f_k, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Definiţia 8.4 *Perechea de şiruri* $((f_n), (s_n))$ *se numeşte* serie de funcţii *reale şi se notează*

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n. \tag{8.3}$$

Şirul (s_n) *se numeşte* şirul sumelor parţiale *ale seriei.*

Definiţia 8.5 *Un punct* $x_0 \in E$ *se numeşte* punct de convergenţă *al seriei (8.3) dacă seria numerică* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ *este convergentă. Mulţimea punctelor de convergenţă se numeşte* mulţimea de convergenţă *a seriei de funcţii.*

Mulţimea de convergenţă a seriei de funcţii (8.3) coincide cu mulţimea de convergenţă a şirului de funcţii (s_n) a sumelor parţiale ale seriei.

Exemplul 8.8 *Dat şirul de funcţii* $f_n(x) = x^n$, $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, *formăm seria de funcţii*

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots.$$

Deoarece şirul de funcţii $s_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$ *este convergent pentru* $x \in (-1, 1)$, *rezultă că seria este convergentă pe* $(-1, 1)$.

8.2.2 Convergenţa simplă a unei serii de funcţii

Definiţia 8.6 *Spunem că seria de funcţii* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *este* simplu (punctual) convergentă *pe* E *către funcţia* f *dacă şirul sumelor sale parţiale* (s_n) *este simplu convergent către* f *pe* E. *Funcţia* f *se numeşte* suma seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *pe* E.

Folosind definiţia cu ε a convergenţei şirului (s_n) la funcţia f pe E, avem următoarea definiţie echivalentă.

Definiţia 8.7 *Seria de funcţii* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *este* simplu (punctual) convergentă *pe* E *către funcţia* f *dacă*

$$\forall\, x \in E, \quad \forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, N(\varepsilon, x) \in \mathbf{N} \text{ pentru care } \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - f(x) \right| < \varepsilon, \quad \forall\, n > N. \tag{8.4}$$

Exemplul 8.9 *Seria de funcţii* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ *este simplu convergentă pe* $(-1,1)$ *la funcţia* $f(x) = \frac{1}{1-x}$*, deoarece*

$$|s_n(x) - f(x)| = \left|\frac{1-x^n}{1-x} - \frac{1}{1-x}\right| = \frac{|x|^n}{1-x} \to 0$$

pentru $|x| < 1$.

8.2.3 Convergenţa uniformă a unei serii de funcţii

Definiţia 8.8 *Spunem că seria de funcţii* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *este* uniform convergentă *pe* E *către funcţia* f *dacă şirul sumelor sale parţiale* (s_n) *este uniform convergent către* f *pe* E*, adică dacă*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbf{N} \text{ pentru care } \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - f(x)\right| < \varepsilon,\ \ \forall\, n > N,\ \ \forall\, x \in E.$$

Un criteriu de uniformă convergenţă este dat de următoarea teoremă.

Teorema 8.5 ***(Criteriul lui Weierstrass)*** *Seria de funcţii* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *este uniform convergentă pe* E *către funcţia* f *dacă există seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *de numere pozitive, convergentă, a.î.*

$$\forall\, n \in \mathbf{N},\ \ |f_n(x)| \le a_n,\ \ \forall\, x \in E.$$

$\triangleleft$ Pentru orice $p \in \mathbf{N}$ avem

$$|s_{n+p}(x) - s_n(x)| = \left|\sum_{k=1}^{p} f_{n+k}(x)\right| \le \sum_{k=1}^{p} |f_{n+k}(x)| \le \sum_{k=1}^{p} a_{n+k},$$

pentru orice $n \in \mathbf{N}$ şi orice $x \in E$. Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ fiind convergentă,

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbf{N} \ \text{ pentru care } \ \sum_{k=1}^{p} a_{n+k} < \varepsilon,\ \ \forall\, n > N,\ \ \forall\, p \in \mathbf{N},$$

de unde rezultă

$$|s_{n+p}(x) - s_n(x)| < \varepsilon,\ \ \forall\, n > N,\ \ \forall\, p \in \mathbf{N},\ \ \forall\, x \in E,$$

adică şirul (s_n) este uniform convergent pe E, deci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este u.c. pe E. $\triangleright$

8.2.4 Proprietăţi ale seriilor uniform convergente

În legătură cu seriile de funcţii uniform convergente vom demonstra trei teoreme privind continuitatea, derivabilitatea şi integrabilitatea funcţiei sumă.

Teorema 8.6 *Fie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *o serie de funcţii uniform convergentă pe* E *la funcţia* f. *Dacă toate funcţiile* f_n *sunt continue pe* E, *atunci funcţia sumă* f *este continuă pe* E.

$\triangleleft$ Deoarece toate funcţiile f_n sunt continue pe E, sumele parţiale $s_n = f_1+f_2+\cdots+f_n$ sunt funcţii continue pe E. Conform Teoremei 8.2, de la şiruri uniform convergente, limita f este continuă pe E. $\triangleright$

Teorema 8.7 *Fie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *o serie de funcţii uniform convergentă pe intervalul* $I \subset E$ *la funcţia* f. *Dacă toate funcţiile* f_n *au derivate continue pe* I *şi seria de funcţii* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f'_n$ *este uniform convergentă către o funcţie* g *pe intervalul* I, *atunci funcţia sumă* f *este derivabilă pe* I *şi* $f'(x) = g(x)$, *pentru orice* $x \in I$.

$\triangleleft$ Şirul sumelor parţiale ale seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este u.c. pe I la funcţia f. Şirul sumelor parţiale ale seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f'_n$ este u.c. pe I la funcţia g. Conform Teoremei 8.3, de la şiruri de funcţii, funcţia f este derivabilă şi derivata sa este g. $\triangleright$

Teorema 8.8 *Fie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *o serie de funcţii uniform convergentă pe intervalul* $[a,b]$ *la funcţia* f. *Dacă toate funcţiile* f_n *sunt continue pe* $[a,b]$, *atunci*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx + \cdots + \int_a^b f_n(x)\,dx + \cdots. \tag{8.5}$$

$\triangleleft$ Deoarece funcţiile f_n sunt continue pe $[a,b]$, funcţiile $s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ sunt funcţii continue pe $[a,b]$, deci integrabile pe $[a,b]$. Fie

$$\sigma_n = \int_a^b s_n(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx + \cdots + \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Seria de funcţii $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ fiind uniform convergentă pe $[a,b]$ la f, după Teorema 8.4, de la şiruri de funcţii, f este integrabilă pe $[a,b]$ şi

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx,$$

sau

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \int_a^b f(x)\,dx,$$

deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$ al cărei şir al sumelor parţiale este σ_n este o serie numerică convergentă şi are loc (8.5). $\triangleright$

8.3 Serii de puteri

Definiţia 8.9 *Se numeşte* serie de puteri *o serie de funcţii* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$*, unde funcţiile* $f_n(x) = a_n(x-a)^n$*, cu* $a, a_n \in \mathbf{R}$*.*

Aşadar, forma generală a unei serii de puteri este:

$$a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n. \tag{8.6}$$

O serie de puteri este unic determinată de numărul a şi şirul a_n. Prin trecerea lui $x-a$ în x, studiul seriei (8.6) se reduce la studiul seriei de puteri ale lui x,

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{8.7}$$

Lema 8.1 ***(Lema lui Abel)*** *1. Dacă seria de puteri (8.7) este convergentă în punctul* $x_0 \neq 0$*, atunci ea este absolut convergentă pentru orice* $x \in \mathbf{R}$ *cu* $|x| < |x_0|$*.*

2. Dacă seria de puteri (8.7) este divergentă în punctul $x_0 \neq 0$*, atunci ea este divergentă pentru orice* $x \in \mathbf{R}$ *cu* $|x| > |x_0|$*.*

◁ Pentru $x = 0$ seria se reduce la a_0 şi este, evident, convergentă.

1. Dacă seria este convergentă în punctul $x_0 \neq 0$, atunci $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$ şi deci există $M > 0$ a.î. $|a_n x_0^n| \leq M$, pentru orice $n \in \mathbf{N}$. Dar, pentru orice $x \in \mathbf{R}$ cu $|x| < |x_0|$, avem

$$|a_n x^n| \leq |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n.$$

Deoarece $|x/x_0| < 1$, rezultă că seria geometrică $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ este o serie majorantă convergentă pentru seria (8.7), deci aceasta este convergentă.

2. Demonstraţie prin reducere la absurd. Presupunem că ar exista un punct $x_1 \in \mathbf{R}$, cu $|x_1| > |x_0|$ a.î. seria (8.7) să fie convergentă. Atunci, după prima parte a teoremei, seria ar fi convergentă pentru orice $x \in \mathbf{R}$ cu $|x| < |x_1|$, deci şi pentru x_0. Contradicţie. ▷

Teorema 8.9 ***(Existenţa razei de convergenţă)*** *Oricare ar fi seria de puteri (8.7), există şi este unic determinat numărul real* $r \geq 0$ *(*r *poate fi şi* $+\infty$*) a.î.*

1. seria este absolut convergentă pe intervalul $(-r, r)$*,*

2. seria este divergentă pe$(-\infty, -r) \cup (r, +\infty)$*.*

◁ Fie $A \subset \mathbf{R}$ mulţimea de convergenţă a seriei (8.7) şi fie $r = \sup\{|x|, x \in A\}$. Dacă $r = 0$, atunci $A = \{0\}$ şi singurul punct de convergenţă al seriei este $x = 0$. Dacă $r > 0$, atunci pentru orice $x \in (-r, r)$, adică pentru care $|x| < r$, există un $x_0 \in A$ a.î. $|x| < |x_0| < r$ şi din teorema precedentă rezultă că seria este convergentă în punctul x. Deci r satisface condiţia 1.

Numărul r satisface şi condiţia 2 căci dacă ar exista un $x_0 \in A$ a.î. $|x_0| > r$, aceasta ar contrazice definiţia lui r.

Unicitatea numărului r rezultă din unicitatea marginii superioare a unei mulţimi. ▷

Teorema 8.10 ***(Calculul razei de convergenţă)*** *Dacă* $\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, *atunci*

$$r = \begin{cases} +\infty, & \rho = 0, \\ \frac{1}{\rho}, & 0 < \rho < \infty, \\ 0, & \rho = \infty. \end{cases}$$

este raza de convergenţă a seriei (8.7).

$\triangleleft$ Pentru fiecare x fixat aplicăm seriei (8.7) criteriul rădăcinii de la serii numerice. Avem

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n| \cdot |x|^n} = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x| \cdot \rho = \lambda.$$

Dacă $\rho = 0$, atunci $\lambda = 0 < 1$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$ şi seria este absolut convergentă pe $\mathbf{R}$.

Dacă $0 < \rho < \infty$, seria este absolut convergentă pentru $\lambda = |x| \cdot \rho < 1$, adică pentru toate valorile lui x pentru care $|x| < \frac{1}{\rho}$ şi este divergentă pentru $\lambda = |x| \cdot \rho > 1$, adică pentru $|x| > \frac{1}{\rho}$.

Dacă $\rho = \infty$, atunci $\lambda = \infty$, pentru orice $x \neq 0$ şi deci seria este divergentă pentru orice $x \neq 0$, adică $r = 0$. $\triangleright$

Să observăm că dacă $0 < \rho < \infty$, seria este absolut convergentă pe $(-r, r)$ şi divergentă pe $(-\infty, -r) \cup (r, +\infty)$, dar nu cunoaştem natura sa în extremităţile intervalului de convergenţă.

Teorema 8.11 ***(Teorema lui Abel)*** *Dacă seria de puteri* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *este convergentă în punctul* $x = r > 0$ *atunci, pentru orice* $\alpha \in (0, r)$, *ea este uniform convergentă pe* $[-\alpha, 0]$.

$\triangleleft$ Dacă seria este convergentă în punctul $x = r > 0$ atunci ea este uniform convergentă pe $[0, r]$. Aceasta deoarece

$$a_n x^n = a_n r^n \cdot \left(\frac{x}{r}\right)^n$$

şi seria $\sum a_n r^n$ este convergentă iar şirul $\left(\frac{x}{r}\right)^n$, cu $x \in (0, r)$ este monoton descrescător la zero (criteriul lui Abel).

Pentru $\alpha \in (0, r)$ seria $\sum |a_n| \alpha^n$ este o serie majorantă convergentă a seriei (8.7) pe intervalul $[-\alpha, 0)$. Deci seria (8.7) este absolut şi uniform convergentă pe acest interval. $\triangleright$

Teorema 8.12 *1. Produsul unei serii cu un număr real nenul are aceeaşi rază de convergenţă cu seria iniţială.*

2. Dacă două serii au razele de convergenţă r_1 *şi* r_2, *atunci seria sumă are raza de convergenţă* $r \geq \min\{r_1, r_2\}$.

8.4 Serii Taylor

Fie $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie indefinit derivabilă în punctul $x_0 \in I$. Formula lui Taylor pentru funcţia f în punctul x_0 se scrie

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_n(x), \quad x \in I.$$

Dacă şirul $R_n(x)$ este convergent către zero, adică $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, pentru $x \in A \subset I$, atunci seria

$$f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \cdots, \quad x \in A, \tag{8.8}$$

numită *seria Taylor* a funcţiei f în punctul x_0, este convergentă către $f(x)$, deci

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \cdots, \quad x \in A. \tag{8.9}$$

Formula (8.9) se numeşte *formula de dezvoltare a funcţiei f în serie Taylor* în jurul punctului x_0.

Se observă că seria (8.8) este convergentă pentru $x = x_0$. O condiţie suficientă de existenţă a unei mulţimi de convergenţă este dată de teorema care urmează.

Teorema 8.13 *Seria Taylor a funcţiei f este convergentă într-o vecinătate V a punctului x_0 dacă derivatele de orice ordin $f^{(n)}$ sunt egal mărginite pe V, adică $|f^{(n)}(x)| \leq M$, $M > 0$, pentru orice $x \in V$ şi orice număr natural n.*

$\triangleleft$ Restul $R_n(x)$, sub forma lui Lagrange, se scrie

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in (x_0, x),$$

deci

$$|R_n(x)| \leq \left| \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \cdot M,$$

însă $|R_n(x)| \to 0$ când $n \to \infty$, deoarece seria cu termenul general $a_{n+1} = \left|\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\right|$ este convergentă pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Într-adevăr,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x - x_0}{n+1} \right| = 0.$$

Dacă în (8.8) luăm $x_0 = 0$, seria care se obţine se numeşte *seria lui Mac-Laurin*:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \cdots, \quad x \in A.$$

Exemplul 8.10 *Funcţia* $f(x) = e^x$ *este indefinit derivabilă pe orice interval* $(-\alpha, \alpha)$, *cu* $\alpha > 0$ *adică pe toată axa reală şi* $\left|f^{(n)}(x)\right| = e^x < e^\alpha$, *pentru* $\forall\, n \in \mathbf{N}$. *Deci funcţia exponenţială admite o dezvoltare în serie Taylor pe toată axa reală. Deoarece* $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$, *pentru* $\forall\, n \in \mathbf{N}$, *avem*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Exemplul 8.11 *Funcţiile* $\sin x$ *şi* $\cos x$ *sunt indefinit derivabile pe* $\mathbf{R}$ *şi*

$$\left|(\sin x)^{(n)}\right| = \left|\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right| \leq 1, \quad \left|(\cos x)^{(n)}\right| = \left|\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right| \leq 1.$$

Deci admit dezvoltări în serii Taylor pe $\mathbf{R}$*:*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Din exemplele 1 şi 2 rezultă *formula lui Euler*: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

Exemplul 8.12 *Funcţia* $f(x) = (1+x)^\alpha$, *unde* $x > -1$ *şi* α *număr real oarecare este indefinit derivabilă pe* $(-1, \infty)$. *Avem că*

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Dacă α *nu este număr natural, raza de convergenţă este dată de*

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{|\alpha - n|} = 1.$$

Deci seria Taylor este convergentă pentru $x \in (-1, +1)$ *şi*

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

În particular, pentru $\alpha = -1$, *avem*

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots .$$

Prin integrare de la 0 *la* x, *găsim că*

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots .$$

Capitolul 9

ELEMENTE DE GEOMETRIE DIFERENŢIALĂ

Geometria analitică studiază proprietăţile anumitor curbe şi suprafeţe cu ajutorul calculului algebric. Sunt însă unele proprietăţi ale acestora care nu pot fi studiate cu mijloacele puse la dispoziţie de algebră şi de aceea trebuie să ne adresăm analizei matematice, în special calculului diferenţial.

Obiectul geometriei diferenţiale îl constituie studiul proprietăţilor curbelor şi suprafeţelor cu ajutorul analizei matematice.

9.1 Curbe plane

9.1.1 Reprezentări analitice regulate

Fie E_2 planul afin euclidian şi $\mathcal{R} = \{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ un reper cartezian ortonormat în E_2.

Definiţia 9.1 *O submulţime $\mathcal{C} \subset E_2$ se numeşte* curbă plană *dacă există o aplicaţie $\mathbf{r} : I \to E_2$, $I \subset \mathbf{R}$, a.î. $\mathbf{r}(I) = \mathcal{C}$.*

Dacă $M(\mathbf{r}) \in \mathcal{C}$, atunci

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad t \in I, \tag{9.1}$$

este *ecuaţia vectorială* a curbei $\mathcal{C}$. Valoarea lui t pentru care $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}(t)$ se numeşte *coordonata parametrică* a punctului M de pe curbă şi scriem atunci $M(t)$. În proiecţie pe axele reperului ecuaţia (9.1) este echivalentă cu

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in I, \tag{9.2}$$

numite *ecuaţiile parametrice ale curbei $\mathcal{C}$.*

Exemplul 9.1 *Aplicaţia $\mathbf{r} : [0, 2\pi] \to E_2$, definită prin*

$$\mathbf{r} = R(\mathbf{i}\cos t + \mathbf{j}\sin t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

în care R este o constantă pozitivă reală, este ecuaţia vectorială a unui cerc cu centrul în origine, de rază R. Ecuaţiile parametrice ale acestui cerc se scriu

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Ecuaţiile parametrice ale unei curbe nu sunt unice. Dacă $\alpha : J \to I$, $I, J \subset \mathbf{R}$, este o aplicaţie surjectivă, aplicaţiile $\mathbf{r} \circ \alpha$ şi $\mathbf{r}$ au aceeaşi imagine $\mathcal{C}$, deci definesc aceeaşi curbă.

Definiţia 9.2 *O curbă $\mathcal{C}$ se numeşte* curbă de clasă C^k, $k \geq 0$, *dacă admite cel puţin o reprezentare de forma (9.1) cu $\mathbf{r} \in C^k(I)$.*

Dacă I este un interval deschis şi $\mathbf{r}$ o aplicaţie bijectivă continuă cu inversă continuă atunci $\mathcal{C}$ se numeşte arc elementar de curbă.

Dacă I este un interval închis $[a, b]$ şi $\mathbf{r}$ este de clasă $C^0(I)$ atunci curba $\mathcal{C}$ se numeşte drum. *Un drum se numeşte* închis *dacă $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$.*

Curba $\mathcal{C}$ se numeşte curbă simplă *dacă este un arc elementar de curbă sau un drum închis.*

Definiţia 9.3 *Curba $\mathcal{C}$, dată prin reprezentarea (9.1) se numeşte* curbă regulată de clasă C^k, $k \geq 1$, *dacă $\mathbf{r} \in C^k(I)$ şi*

$$\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}, \quad \forall\, t \in I. \tag{9.3}$$

Definiţia 9.4 *Un punct $M_0 \in \mathcal{C}$ se numeşte* punct ordinar *(sau regulat) dacă $\mathcal{C}$ admite cel puţin o reprezentare de forma (9.1) regulată de clasă C^k, $k \geq 1$, în punctul M_0. În caz contrar, M_0 se numeşte* punct singular.

Dacă drept parametru se poate lua abscisa x a unui punct de pe curbă, atunci reprezentarea (9.2) ia forma

$$y = f(x), \quad x \in I, \tag{9.4}$$

în care $f \in C^k(I)$, numită *ecuaţia carteziană explicită* a curbei $\mathcal{C}$. În acest caz toate punctele curbei sunt ordinare deoarece $\mathbf{r}' = \mathbf{i} + f'(x)\,\mathbf{j} \neq \mathbf{0}$, pentru orice $x \in I$.

O curbă plană $\mathcal{C}$ de clasă C^k poate fi dată şi printr-o ecuaţie de forma

$$F(x, y) = 0, \tag{9.5}$$

în care F este o funcţie de clasă C^k, numită *ecuaţia carteziană implicită* a curbei.

Definiţia 9.5 *Un punct $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$ pentru care*

$$\operatorname{grad} F(x_0, y_0) \neq \mathbf{0} \tag{9.6}$$

se numeşte punct ordinar. *În caz contrar, M_0 este un* punct singular.

Deci dacă $M_0(x_0, y_0)$ este punct singular al curbei, atunci

$$F(x_0, y_0) = 0, \ \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0. \tag{9.7}$$

Reprezentarea carteziană explicită poate fi privită ca un caz particular de reprezentare implicită, pentru care $F(x, y) = y - f(x)$.

Exemplul 9.2 *Curba descrisă de un punct M situat pe un cerc de rază R, care se rostogoleşte fără alunecare pe o dreaptă fixă se numeşte* cicloidă. *O reprezentare parametrică a curbei este*

$$x = R(t - \sin t), \quad y = R(1 - \cos t), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Exemplul 9.3 *Curba descrisă de un punct M situat pe un cerc de rază R, care se rostogoleşte fără alunecare pe un cerc fix de rază R_0, cele două cercuri fiind tangente exterior, se numeşte* epicicloidă. *O reprezentare parametrică a curbei este*

$$x = (R_0 + R)\cos t - R\cos\frac{R_0 + R}{R}t, \quad y = (R_0 + R)\sin t - R\sin\frac{R_0 + R}{R}t.$$

În particular, dacă $R = R_0$, curba se numeşte cardioidă *şi are ecuaţia carteziană*

$$(x^2 + y^2 - 2Rx)^2 = 4R^2(x^2 + y^2).$$

Exemplul 9.4 *Curba descrisă de un punct M situat pe un cerc de rază R, care se rostogoleşte fără alunecare pe un cerc fix de rază R_0, cele două cercuri fiind tangente interioare, se numeşte* hipocicloidă. *O reprezentare parametrică a curbei este*

$$x = (R_0 - R)\cos t + R\cos\frac{R_0 - R}{R}t, \quad y = (R_0 - R)\sin t - R\sin\frac{R_0 - R}{R}t.$$

Pentru $R_0 = 3R$ curba se numeşte hipocicloida lui Steiner, *iar pentru $R_0 = 4R$ curba obţinută se numeşte* astroidă *şi are ecuaţia carteziană*

$$x^{2/3} + y^{2/3} = R_0^{2/3}.$$

Exemplul 9.5 *Curba plană cu proprietatea că în fiecare punct al ei, segmentul de tangentă, cuprins între punctul de tangenţă şi intersecţia ei cu o dreaptă fixă situată în planul curbei, are lungimea constantă se numeşte* tractrice *şi are ecuaţia carteziană explicită*

$$y = a\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \sqrt{a^2 - x^2}, \quad x \in [-a, a].$$

Exemplul 9.6 *Figura de echilibru a unui fir greu şi omogen, flexibil dar inextensibil, ale cărui capete sunt fixate în două puncte se numeşte* lănţişor. *Ecuaţia sa carteziană este*

$$y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}.$$

O curbă plană poate fi dată şi în coordonate polare (r, θ).

Exemplul 9.7 *Curba plană descrisă de un punct care se mişcă uniform pe o dreaptă în rotaţie uniformă în jurul unui punct fix al ei O, a cărei ecuaţie este $r = a\theta$ se numeşte* spirala lui Archimede.

Exemplul 9.8 *Curba plană descrisă de un punct care se mişcă cu viteză proporţională cu distanţa parcursă pe o dreaptă în rotaţie uniformă în jurul unui punct fix al ei O, a cărei ecuaţie este $r = ke^{m\theta}$ se numeşte* spirală logaritmică.

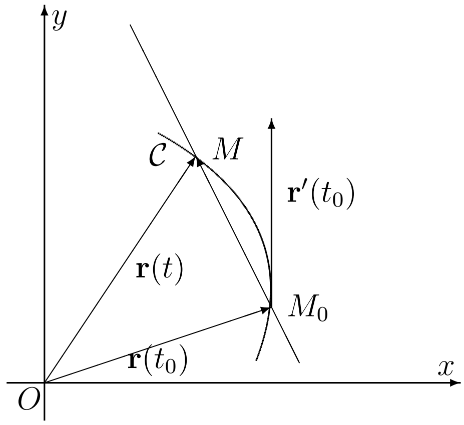


Figura 9.1: Tangenta la o curbă

9.1.2 Tangenta şi normala la o curbă plană

Fie $\mathcal{C}$ o curbă plană de clasă C^k, $k \geq 1$, dată prin ecuaţia (9.1), $M_0(t_0)$ un punct ordinar al ei şi $M(t)$ un punct vecin lui M_0 (Fig. 9.1).

Pentru $t \neq t_0$, deducem că

$$\frac{\overrightarrow{M_0M}}{t-t_0} = \frac{\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(t_0)}{t-t_0},$$

adică vectorul $(\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(t_0))/(t-t_0)$ este coliniar cu $\overrightarrow{M_0M}$, vectorul director al secantei M_0M la curba $\mathcal{C}$. Cum punctul M_0 este ordinar, vectorul $(\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(t_0))/(t-t_0)$ tinde, pentru $M \to M_0$ (adică $t \to t_0$), la o limită bine determinată, $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{0}$.

Definiţia 9.6 *Numim* tangentă *la curba $\mathcal{C}$ poziţia limită a secantei M_0M când punctul $M \to M_0$, pe curbă.*

Din cele de mai sus rezultă că *tangenta* la curba $\mathcal{C}$ în punctul ei ordinar $M_0(t_0)$ are ecuaţia vectorială

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0) + \lambda\mathbf{r}'(t_0), \quad \lambda \in \mathbf{R}, \tag{9.8}$$

de unde ecuaţiile parametrice

$$x = x(t_0) + \lambda x'(t_0), \; y = y(t_0) + \lambda y'(t_0), \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

Eliminând pe λ obţinem ecuaţia canonică

$$\frac{x-x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y-y(t_0)}{y'(t_0)}. \tag{9.9}$$

Dacă curba este dată prin ecuaţia explicită (9.4), din (9.9) rezultă că ecuaţia tangentei la $\mathcal{C}$ în punctul său $M_0(x_0, f(x_0))$ este

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0). \tag{9.10}$$

Dacă curba este dată implicit prin (9.5) şi $M_0(x_0, y_0)$ este un punct ordinar al ei, deci $F(x_0, y_0) = 0$ şi, de exemplu, $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, curba admite într-o vecinătate a punctului M_0 o reprezentare explicită, obţinută prin rezolvarea ecuaţiei (9.5) în privinţa lui y. Fie $y = f(x)$ soluţia acestei ecuaţii, deci $F(x, f(x, y)) \equiv 0$, de unde, prin derivare în raport cu x, obţinem în M_0

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)},$$

cu $y_0 = f(x_0)$. Din (9.10) rezultă că ecuaţia tangentei în punctul $M_0(x_0, y_0)$ la curba $\mathcal{C}$ se scrie

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0. \tag{9.11}$$

Exemplul 9.9 *Ecuaţia tangentei la conica*

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2(b_1x + b_2y) + c = 0$$

în punctul ei $M_0(x_0, y_0)$ *este*

$$a_{11}x_0x + a_{12}(xy_0 + x_0y) + a_{22}y_0y + b_1(x + x_0) + b_2(y + y_0) + c = 0.$$

Definiţia 9.7 *Numim* normală *la curba* $\mathcal{C}$ *în punctul* $M_0 \in \mathcal{C}$, *perpendiculara pe tangenta la curbă în acest punct.*

Dacă curba este dată prin ecuaţia (9.1), cum $\mathbf{v} = \mathbf{r}'(t_0)$ este un vector director al tangentei în M_0, vectorul $\mathbf{r} - \mathbf{r}(t_0)$, unde $\mathbf{r}$ este vectorul de poziţie al unui punct curent al normalei în M_0, este perpendicular pe $\mathbf{v}$, deci

$$\mathbf{r}'(t_0) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}(t_0)) = 0 \tag{9.12}$$

reprezintă *ecuaţia vectorială a normalei* la $\mathcal{C}$ în punctul M_0.

Într-un reper cartezian ortonormat, ecuaţia (9.12) ia forma

$$x'(t_0)(x - x(t_0)) + y'(t_0)(y - y(t_0)) = 0. \tag{9.13}$$

Dacă curba este dată prin reprezentarea carteziană explicită (9.4), atunci ecuaţia normalei în punctul său $M_0(x_0, f(x_0))$ este

$$x - x_0 + f'(x_0)(y - y_0) = 0.$$

În sfârşit, dacă curba este dată prin ecuaţia implicită (9.5), din (9.11) rezultă că vectorul $\mathbf{N}(F'_x(x_0, y_0), F'_y(x_0, y_0))$ este un vector normal pe tangentă şi deci ecuaţia vectorială a normalei este

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \lambda\mathbf{N}(\mathbf{r}_0), \quad \lambda \in \mathbf{R},$$

sau

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0)}, \tag{9.14}$$

cu $F(x_0, y_0) = 0$.

9.1.3 Punctele multiple ale unei curbe plane

Fie dată curba $\mathcal{C}$ prin ecuaţia implicită

$$F(x, y) = 0. \tag{9.15}$$

Definiţia 9.8 *Un punct M_0 al curbei $\mathcal{C}$ se numeşte* punct multiplu de ordinul p *de multiplicitate dacă în M_0 funcţia F şi toate derivatele sale parţiale până la ordinul $p-1$ inclusiv se anulează, fără ca toate derivatele de ordinul p să fie nule.*

Dacă $p = 2$ punctul M_0 este un *punct dublu* pentru curba $\mathcal{C}$. În acest punct

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

şi măcar una dintre derivatele de ordinul al doilea este nenulă. Deci un punct dublu este un punct singular. Într-un asemenea punct tangenta la curbă nu este unic determinată.

Pentru a găsi ecuaţia tangentelor în punctul dublu $M_0(x_0, y_0)$ la $\mathcal{C}$, să observăm că dacă $\mathbf{v}(\ell, m)$ este vectorul director al unei tangente la $\mathcal{C}$ în M_0, atunci

$$\frac{m}{\ell} = \lim_{x \to x_0} f'(x) = -\lim_{x \to x_0} \frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$$

dă o nederminare de forma $0/0$, care se poate ridica cu regula lui L'Hôspital:

$$\frac{m}{\ell} = -\lim_{x \to x_0} \frac{F''_{xx}(x, f(x)) + F''_{xy}(x, f(x)) \cdot f'(x)}{F''_{yx}(x, f(x)) + F''_{yy}(x, f(x)) \cdot f'(x)} = -\frac{F''_{xx}(x_0, y_0) + F''_{xy}(x_0, y_0) \cdot \frac{m}{\ell}}{F''_{yx}(x_0, y_0) + F''_{yy}(x_0, y_0) \cdot \frac{m}{\ell}}$$

sau

$$F''_{xx}(x_0, y_0)\ell^2 + 2F''_{xy}(x_0, y_0)\ell m + F''_{yy}(x_0, y_0)m^2 = 0. \tag{9.16}$$

Dacă

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \lambda \mathbf{v}, \tag{9.17}$$

cu $\mathbf{v}(\ell, m)$ dat de (9.16), este ecuaţia unei tangente în M_0 la $\mathcal{C}$, atunci, eliminând pe $\mathbf{v}$ între (9.16) şi (9.17), obţinem

$$F''_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2F''_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + F''_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 = 0,$$

care reprezintă *ecuaţia pătratică a tangentelor* la $\mathcal{C}$ în punctul dublu $M_0(x_0, y_0)$. Discriminantul acestei ecuaţii se scrie

$$\Delta(x_0, y_0) = [F''_{xy}(x_0, y_0)]^2 - F''_{xx}(x_0, y_0) \cdot F''_{yy}(x_0, y_0).$$

Dacă:

a) $\Delta(x_0, y_0) > 0$, există două tangente reale şi distincte în $M_0(x_0, y_0)$ la $\mathcal{C}$. Punctul M_0 se numeşte *punct dublu real* sau *nod*.

b) $\Delta(x_0, y_0) = 0$, tangentele în M_0 sunt confundate, cele două ramuri ale curbei au în M_0 un *punct de întoarcere*.

c) $\Delta(x_0, y_0) < 0$, punctul M_0 este un *punct dublu izolat*.

9.1.4 Elementul de arc

Fie curba $\mathcal{C}$ dată prin ecuaţia

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t),$$

şi $M_0(t_0)$ un punct fix al ei. Să notăm cu $s = s(t)$ lungimea arcului $\overset{\frown}{M_0M}$. Dacă $M'(t+\Delta t)$ este un punct vecin pe curbă punctului $M(t)$, atunci putem considera $\Delta s = ||\overrightarrow{MM'}||$. Dar $\overrightarrow{MM'} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$ şi deci

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \left\| \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \right\|.$$

Dacă trecem la limită pentru $\Delta t \to 0$, avem

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \left\| \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \right\|,$$

de unde

$$ds = ||\mathbf{r}'(t)||\, dt = ||d\mathbf{r}||. \tag{9.18}$$

Diferenţiala ds dată de (9.18) se numeşte *element de arc* al curbei $\mathcal{C}$. Dacă curba este dată prin ecuaţiile parametrice (9.2), atunci din (9.18) avem

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt. \tag{9.19}$$

În cazul reprezentării explicite (9.4) aceasta revine la

$$ds = \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx. \tag{9.20}$$

Deoarece $s'(t) = ||\mathbf{r}'(t)|| > 0$ în orice punct ordinar al curbei, putem rezolva ecuaţia $s = s(t)$ în privinţa lui t. Obţinem $t = \varphi(s)$. Înlocuind această valoare a parametrului t în ecuaţia (9.1) obţinem

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\varphi(s)). \tag{9.21}$$

Deci, putem scrie ecuaţiile parametrice ale curbei luând ca parametru arcul ei s, care se mai numeşte şi *parametru natural* al curbei.

Dacă curba este dată parametric prin (9.21), în care s este arcul pe curbă, atunci din (9.18) rezultă

$$\left\| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right\| = 1. \tag{9.22}$$

Din (9.19) deducem că lungimea arcului $\overset{\frown}{M_0M}$ este

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'^2(\tau) + y'^2(\tau)}\, d\tau,$$

iar din (9.20)

$$s(x) = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + f'^2(\xi)}\, d\xi.$$

9.1.5 Cerc osculator. Curbură

Fie curba $\mathcal{C}$ dată prin ecuaţiile parametrice

$$x = x(t), \quad y = y(t), \tag{9.23}$$

funcţiile $x(t)$, $y(t)$ având derivate de ordinul cel puţin doi. Fie încă $M_0(x(t_0), y(t_0)) \in \mathcal{C}$.

Definiţia 9.9 *Se numeşte* cerc osculator *al curbei $\mathcal{C}$ în punctul $M_0 \in \mathcal{C}$ un cerc care are cu curba trei puncte confundate în M_0.*

Fie cercul $(\mathbf{r} - \mathbf{a})^2 - R^2 = 0$. Valorile parametrului t pentru care curba $\mathcal{C}$, de ecuaţie $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, întâlneşte cercul sunt soluţii ale ecuaţiei

$$\phi(t) = (\mathbf{r}(t) - \mathbf{a})^2 - R^2 = 0. \tag{9.24}$$

Cercul va intersecta curba în trei puncte confundate în $M_0(t_0)$ dacă ecuaţia (9.24) are rădăcina triplă $t = t_0$, adică dacă

$$\phi(t_0) = 0, \quad \phi'(t_0) = 0, \quad \phi''(t_0) = 0.$$

Notăm $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}'(t_0) = \mathbf{r}'_0$, $\mathbf{r}''(t_0) = \mathbf{r}''_0$. Condiţiile precedente revin la:

$$(\mathbf{r}_0 - \mathbf{a})^2 - R^2 = 0, \quad \mathbf{r}'_0 \cdot (\mathbf{r}_0 - \mathbf{a}) = 0, \quad \mathbf{r}''_0 \cdot (\mathbf{r}_0 - \mathbf{a}) + \mathbf{r}'^2_0 = 0.$$

Ultimele două condiţii se mai scriu

$$x'_0(a - x_0) + y'_0(b - y_0) = 0, \quad x''_0(a - x_0) + y''_0(b - y_0) = x'^2_0 + y'^2_0,$$

care este un sistem Cramer, dacă

$$\Delta = x'_0 y''_0 - x''_0 y'_0 \neq 0,$$

cu soluţia:

$$a = x_0 - y'_0 \frac{x'^2_0 + y'^2_0}{x'_0 y''_0 - x''_0 y'_0}, \quad b = y_0 + x'_0 \frac{x'^2_0 + y'^2_0}{x'_0 y''_0 - x''_0 y'_0}, \tag{9.25}$$

care dau coordonatele cercului osculator.

Prima condiţie dă atunci raza cercului osculator

$$R = \frac{(x'^2_0 + y'^2_0)^{3/2}}{|x'_0 y''_0 - x''_0 y'_0|}. \tag{9.26}$$

Cercul osculator se mai numeşte *cercul de curbură* al curbei în punctul M_0, iar raza sa R *rază de curbură* a curbei în punctul M_0.

Dacă $A(\mathbf{a})$ este centrul cercului osculator, numit şi *centru de curbură* al curbei în punctul M_0, atunci din (9.25) avem

$$\overrightarrow{M_0 A} = \mathbf{a} - \mathbf{r}_0 = \frac{x'^2_0 + y'^2_0}{x'_0 y''_0 - x''_0 y'_0}(-y'_0 \mathbf{i} + x'_0 \mathbf{j}).$$

De aici deducem că $\mathbf{r}'_0 \cdot \overrightarrow{M_0A} = 0$, adică vectorul $\overrightarrow{M_0A}$ are direcţia normalei în M_0 la curbă. Rezultă că centrul de curbură A se află pe normala la curbă în punctul M_0. Tot de aici rezultă că $||\overrightarrow{M_0A}|| = R$.

Dacă curba este dată prin ecuaţia explicită $y = f(x)$, coordonatele centrului de curbură şi raza de curbură în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ sunt date de

$$a = x_0 - f'(x_0)\frac{1 + f'^2(x_0)}{f''(x_0)}, \quad b = f\,(x_0) + \frac{1 + f'^2(x_0)}{f''(x_0)}, \quad R = \frac{(1 + f'^2(x_0))^{3/2}}{|f''(x_0)|},$$

cu $f''(x_0) \neq 0$.

Definiţia 9.10 *Numim* curbură *a curbei $\mathcal{C}$ în punctul M_0 inversul razei de curbură*

$$\kappa = \frac{1}{R} = \frac{|x'_0 y''_0 - x''_0 y'_0|}{(x'^2_0 + y'^2_0)^{3/2}}. \tag{9.27}$$

Să presupunem acum că parametrul pe curba $\mathcal{C}$ este arcul s, adică ecuaţia curbei este

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s).$$

Notând

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \dot{\mathbf{r}},$$

din (9.22) avem $||\dot{\mathbf{r}}|| = 1$, sau $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$ şi derivând $\dot{x}\ddot{y} + \ddot{x}\dot{y} = 0$. În acest caz, curbura κ a curbei $\mathcal{C}$ în punctul $M(s)$ va fi

$$\kappa = |\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|.$$

Ridicând ultimele două egalităţi la pătrat, sumând şi extrăgând radicalul, obţinem

$$\kappa = ||\ddot{\mathbf{r}}|| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}. \tag{9.28}$$

Definiţia 9.11 *Un punct al curbei $\mathcal{C}$ în care curbura se anulează se numeşte* punct de inflexiune.

9.1.6 Interpretarea geometrică a curburii

Fie τ versorul tangentei la curba $\mathcal{C}$, adică

$$\tau = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \dot{\mathbf{r}}, \quad ||\tau|| = 1, \tag{9.29}$$

atunci din (9.28) deducem

$$\kappa = ||\dot{\tau}|| = \left\|\frac{d\tau}{ds}\right\|. \tag{9.30}$$

Fie $\alpha = \alpha(s)$ (Fig. 9.2) unghiul pe care versorul tangentei în punctul $M(s) \in \mathcal{C}$ îl face cu axa Ox, $\alpha = (\mathbf{i}, \tau)$. Atunci $\tau = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\sin\alpha$. Derivând în raport cu s, obţinem

$$\frac{d\tau}{ds} = (-\mathbf{i}\sin\alpha + \mathbf{j}\cos\alpha)\frac{d\alpha}{ds},$$

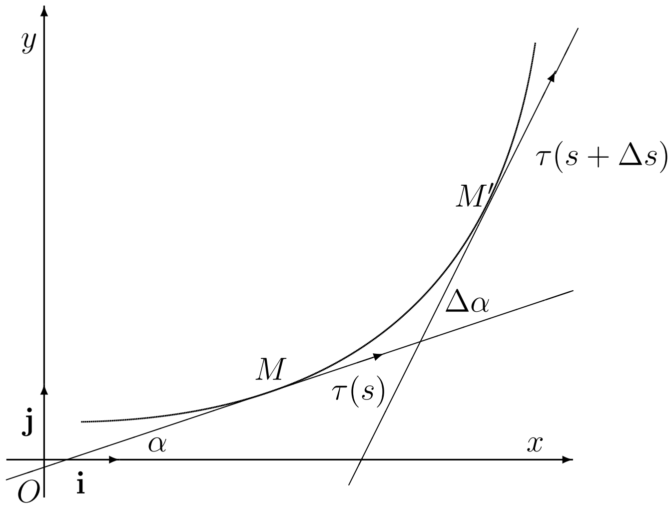


Figura 9.2: Interpretarea geometrică a curburii

de unde

$$\kappa = \left|\frac{d\alpha}{ds}\right|.$$

Fie $M'(s+\Delta s) \in \mathcal{C}$, un punct vecin punctului M şi fie $\Delta\alpha$ unghiul dintre tangentele la $\mathcal{C}$ în M şi M', adică $\Delta\alpha = (\tau(s), \tau(s+\Delta s))$, atunci

$$\kappa = \lim_{\Delta s \to 0} \left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|.$$

Unghiul $\Delta\alpha$ se numeşte *unghi de contingenţă* a arcului de curbă $\overset{\frown}{MM'}$. Raportul dintre unghiul de contingenţă şi lungimea Δs a arcului $\overset{\frown}{MM'}$ se numeşte *curbură medie* a arcului $\overset{\frown}{MM'}$, adică $\kappa_m = |\Delta\alpha/\Delta s|$. Curbura κ a curbei $\mathcal{C}$ în punctul M este atunci limita curburii medii κ_m a arcului $\overset{\frown}{MM'}$ când punctul M' tinde pe curbă la punctul M.

Exemplul 9.10 *Pentru orice segment MM' al unei drepte unghiul de contingenţă $\Delta\alpha = 0$, încât curbura medie $\kappa_m = 0$ şi deci $\kappa = 0$ în orice punct al dreptei.*

Exemplul 9.11 *Pentru un cerc de rază R, lungimea Δs a unui arc $\overset{\frown}{MM'}$ subîntins de unghiul la centru $\Delta\alpha$ este $\Delta s = R\Delta\alpha$ încât $\kappa_m = 1/R$ şi deci $\kappa = 1/R$ în orice punct al cercului.*

9.1.7 Infăşurătoarea unei familii de curbe plane

Fie ecuaţia

$$F(x, y; \alpha) = 0, \tag{9.31}$$

în care α este un parametru real, iar F admite derivate parţiale continue în raport cu toate argumentele, de ordin cel puţin doi.

Pentru fiecare valoare a lui α, ecuaţia (9.31) reprezintă o curbă $\mathcal{C}_\alpha$. Când α variază în mod continuu, spunem că ecuaţia (9.31) reprezintă o *familie de curbe plane*.

Definiţia 9.12 *O curbă* Γ *tangentă la toate curbele familiei de curbe* $\mathcal{C}_\alpha$ *se numeşte* înfăşurătoarea *familiei* $\mathcal{C}_\alpha$.

Fie $\mathcal{C}_\alpha$ curba din familie corespunzătoare valorii α şi M punctul de contact al acestei curbe cu înfăşurătoarea Γ. Punctul M se numeşte *punct caracteristic* al curbei $\mathcal{C}_\alpha$.

Pentru început presupunem că M este punct ordinar pentru curbele $\mathcal{C}_\alpha$ şi Γ. Coordonatele sale sunt funcţii de parametrul α, deci

$$x = x(\alpha), \quad y = y(\alpha). \tag{9.32}$$

Când α variază punctul M descrie curba Γ, deci (9.32) sunt ecuaţiile înfăşurătoarei familiei de curbe de ecuaţie (9.31).

Deoarece punctul M aparţine şi curbei $\mathcal{C}_\alpha$, avem

$$F(x(\alpha), y(\alpha); \alpha) = 0. \tag{9.33}$$

Vectorul director al tangentei la curba Γ în punctul M are coordonatele $(x'(\alpha), y'(\alpha))$, iar al tangentei la curba $\mathcal{C}_\alpha$ în M are coordonatele

$$\left(F'_y(x(\alpha), y(\alpha); \alpha), -F'_x(x(\alpha), y(\alpha); \alpha)\right).$$

Cum cele două curbe au aceeaşi tangentă în punctul M, cei doi vectori sunt coliniari, deci

$$\frac{x'(\alpha)}{F'_y(x(\alpha), y(\alpha); \alpha)} = -\frac{y'(\alpha)}{F'_x(x(\alpha), y(\alpha); \alpha)},$$

sau

$$x'(\alpha)F'_x(x(\alpha), y(\alpha); \alpha) + y'(\alpha)F'_y(x(\alpha), y(\alpha); \alpha) = 0.$$

Pe de altă parte, derivând (9.33) în raport cu α, avem

$$F'_x(x(\alpha), y(\alpha); \alpha)x'(\alpha) + F'_y(x(\alpha), y(\alpha); \alpha)y'(\alpha) + F'_\alpha(x(\alpha), y(\alpha); \alpha) = 0.$$

Din ultimele două relaţii rezultă

$$F'_\alpha(x(\alpha), y(\alpha); \alpha) = 0. \tag{9.34}$$

Deci, dacă curbele familiei (9.31) au numai puncte ordinare, înfăşurătoarea acestei familii este caracterizată prin ecuaţiile:

$$F(x, y; \alpha) = 0, \quad F'_\alpha(x, y; \alpha) = 0. \tag{9.35}$$

Dacă

$$\frac{D(F, F'_\alpha)}{D(x, y)}(x, y; \alpha) \neq 0,$$

prin rezolvarea sistemului (9.35) obţinem o reprezentare parametrică a înfăşurătoarei, iar dacă $F''_{\alpha\alpha}(x, y; \alpha) \neq 0$, prin eliminarea parametrului α se obţine ecuaţia carteziană implicită a înfăşurătoarei.

Presupunem acum că $\mathcal{C}_\alpha$ admite puncte singulare şi să aflăm locul geometric al lor când α variază.

Fie $M(x(\alpha), y(\alpha))$ un punct singular al curbei $\mathcal{C}_\alpha$, deci în care

$$F(x(\alpha), y(\alpha); \alpha) = 0, \quad F'_x(x(\alpha), y(\alpha); \alpha) = 0, \quad F'_y(x(\alpha), y(\alpha); \alpha) = 0.$$

Derivând prima ecuaţie în raport cu α şi ţinând seama de celelalte două ecuaţii, obţinem

$$F'_\alpha(x(\alpha), y(\alpha); \alpha) = 0.$$

Deci şi coordonatele punctelor singulare verifică (9.35). În concluzie, sistemul (9.35) reprezintă înfăşurătoarea familiei de curbe $\mathcal{C}_\alpha$ şi locul geometric al punctelor singulare ale familiei.

9.1.8 Evoluta unei curbe plane

Fie curba plană $\mathcal{C}$ de ecuaţii parametrice

$$x = x(t), \quad y = y(t).$$

Definiţia 9.13 *Numim* evolută *a curbei* $\mathcal{C}$ *locul geometric al centrelor ei de curbură.*

Fie $A(x, y)$ centrul de curbură al curbei $\mathcal{C}$ într-un punct oarecare $M(x(t), y(t))$. Atunci din formulele (9.25) obţinem

$$x = x(t) - y'(t)\frac{x'^2(t) + y'^2(t)}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}, \quad y = y(t) + x'(t)\frac{x'^2(t) + y'^2(t)}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}. \tag{9.36}$$

Când t variază, punctul $M(x(t), y(t))$ descrie curba $\mathcal{C}$, iar punctul $A(x, y)$ cu x, y daţi de (9.36) descrie evoluta acestei curbe, deci (9.36) constituie o *reprezintare parametrică ale evolutei.*

Teorema 9.1 *Evoluta unei curbe este înfăşurătoarea normalelor la această curbă.*

$\triangleleft$ Ecuaţia normalei la curba $\mathcal{C}$ în punctul $M(x(t), y(t))$, după (9.13), este

$$x'(t)(x - x(t)) + y'(t)(y - y(t)) = 0, \tag{9.37}$$

unde (x, y) reprezintă coordonatele unui punct curent al normalei.

Pentru a obţine înfăşurătoarea familiei de drepte (9.37) care depinde de parametrul t, derivăm (9.37) în raport cu t:

$$x''(t)(x - x(t)) + y''(t)(y - y(t)) = x'^2(t) + y'^2(t). \tag{9.38}$$

Rezolvând sistemul format din ecuaţiile (9.37) şi (9.38) obţinem ecuaţiile parametrice ale înfăşurătoarei familiei de normale. Soluţia acestui sistem este (9.36). $\triangleright$

9.1.9 Evolventa unei curbe plane

Fie curba $\mathcal{C}$ dată prin ecuaţiile parametrice

$$x = x(s), \;\; y = y(s),$$

unde s este parametrul natural.

Definiţia 9.14 *Numim* evolventă *a curbei* $\mathcal{C}$ *o curbă* Γ *a cărei evolută este curba* $\mathcal{C}$.

Avem deci problema inversă celei de la paragraful precedent.

Conform definiţiei, dacă $M(x(s), y(s))$ este un punct al curbei $\mathcal{C}$, curba Γ va fi descrisă de un punct $A(X, Y)$ situat pe tangenta în M la $\mathcal{C}$, astfel încât $\overrightarrow{MA}$ să aibă direcţia normalei în A la Γ.

Fie $\tau(\dot{x}, \dot{y})$ versorul tangentei în M la $\mathcal{C}$. Evident $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$. Vectorul $\overrightarrow{MA}$ este coliniar cu τ, $\overrightarrow{MA} = \lambda(s)\tau$, adică

$$X = x(s) + \lambda(s)\dot{x}(s), \;\; Y = y(s) + \lambda(s)\dot{y}(s), \tag{9.39}$$

unde $\lambda(s)$ se determină din condiţia ca $\overrightarrow{MA}$ să aibă direcţia normalei în A la Γ, adică să fie perpendicular pe tangenta în A la Γ. Tangenta în A la Γ are parametrii directori $(\dot{X}, \dot{Y})$ şi deci condiţia de ortogonalitate se scrie

$$\dot{x}\dot{X} + \dot{y}\dot{Y} = 0.$$

Din (9.39) avem însă

$$\dot{X} = \dot{x} + \dot{\lambda}\dot{x} + \lambda\ddot{x}, \;\; \dot{Y} = \dot{y} + \dot{\lambda}\dot{y} + \lambda\ddot{y}$$

şi deci $(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)(1 + \dot{\lambda}) + \lambda(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}) = 0$. Dar $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$ şi prin derivare $\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = 0$, încât $\dot{\lambda} = -1$, de unde $\lambda = -s + k$, în care $k = \text{const}$. Înlocuind λ astfel obţinut în (9.39) obţinem *ecuaţiile evolventei* curbei $\mathcal{C}$:

$$X = x(s) + (k - s)\dot{x}(s), \;\; Y = y(s) + (k - s)\dot{y}(s).$$

Deoarece k este o constantă arbitrară, rezultă că o curbă plană are o infinitate de evolvente.

Dacă curba $\mathcal{C}$ este dată prin ecuaţiile $x = x(t)$, $y = y(t)$, ecuaţiile evolventei se scriu

$$X = x(t) + (k - s(t))\frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}, \; Y = y(t) + (k - s(t))\frac{y'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}.$$

9.1.10 Formulele lui Frénet pentru o curbă plană

Fie dată curba $\mathcal{C}$ prin ecuaţia $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, unde s este parametrul natural. Atunci

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \tau \tag{9.40}$$

este *versorul tangentei* la curbă într-un punct $M(\mathbf{r}(s))$ al acesteia. Fie încă ν versorul normalei, orientat spre centrul de curbură al curbei $\mathcal{C}$ în punctul M. Avem

$$\tau \cdot \nu = 0, \;\; \nu^2 = 1. \tag{9.41}$$

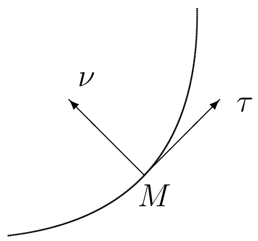


Figura 9.3: Reperul lui Frénet

Versorii τ şi ν formează o bază ortonomată şi deci $\{M, \tau, \nu\}$ constituie un reper ortonormat cu originea în punctul M numit *reper mobil* sau *reperul lui Frénet* asociat curbei în punctul M.

Din (9.40) şi (9.41) rezultă

$$\tau \cdot \dot{\tau} = 0, \quad \tau \cdot \dot{\nu} + \dot{\tau} \cdot \nu = 0, \quad \nu \cdot \dot{\nu} = 0. \tag{9.42}$$

De aici deducem că $\dot{\tau} \perp \tau$, deci $\dot{\tau}$ este coliniar cu ν, adică $\dot{\tau} = \lambda\nu$, $\lambda > 0$. Dar, deoarece $||\dot{\tau}|| = ||\ddot{\mathbf{r}}|| = \kappa$, urmează că $\lambda = \kappa$ şi deci

$$\frac{d\tau}{ds} = \kappa\nu. \tag{9.43}$$

Tot din (9.42) rezultă că $\dot{\nu} \perp \nu$ şi deci $\dot{\nu}$ este coliniar cu τ, adică $\dot{\nu} = \mu\tau$. Din $(9.42)_2$, înlocuind $\dot{\nu}$ şi $\dot{\tau}$ obţinem $\mu = -\kappa$ şi deci

$$\frac{d\nu}{ds} = -\kappa\tau. \tag{9.44}$$

Formulele (9.40), (9.43) şi (9.44) care dau derivatele vectorilor $\mathbf{r}$, τ, ν în funcţie de versorii bazei din definiţia reperului Frénet se numesc *formulele lui Frénet* pentru curba $\mathcal{C}$.

9.1.11 Ramuri infinite. Asimptote

Definiţia 9.15 *Spunem că o curbă $\mathcal{C}$ dată prin ecuaţia $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ are o ramură infinită pentru $t = t_0$, t_0 fiind punct de acumulare al domeniului de definiţie al funcţiei $\mathbf{r}(t)$, dacă*

$$\lim_{t \to t_0} ||\mathbf{r}(t)|| = \infty.$$

Curba $\mathcal{C}$ are în t_0 o ramură infinită d.d. este îndeplinită una din următoarele trei condiţii:

$$(a)\ \lim_{t \to t_0} x(t) = \pm\infty, \quad (b)\ \lim_{t \to t_0} y(t) = \pm\infty, \quad (c)\ \lim_{t \to t_0} x(t) = \pm\infty,\ \lim_{t \to t_0} y(t) = \pm\infty.$$

Dacă $\mathcal{C}$ are o ramură infinită în t_0, atunci punctul $M(\mathbf{r}(t)) \in \mathcal{C}$ se deplasează către ∞ când $t \to t_0$.

Definiţia 9.16 *Direcţia* $\mathbf{v}(\ell, m)$ *se numeşte* asimptotică *la o ramură infinită în* t_0 *a curbei plane* $\mathcal{C}$ *dacă*

$$\lim_{t\to t_0}\frac{y(t)}{x(t)}=\frac{m}{\ell}.$$

Dacă $m=0$ direcţia asimptotică este paralelă cu axa Ox, iar dacă $\ell=0$ direcţia asimptotică este paralelă cu axa Oy.

Definiţia 9.17 *O dreaptă* D *se numeşte* asimptotă *la o ramură infinită în* t_0 *a curbei plane* $\mathcal{C}$ *dacă*

$$\lim_{t\to t_0} d(M(t), D)=0. \tag{9.45}$$

Teorema 9.2 *Dacă curba* $\mathcal{C}$ *are în* t_0 *o ramură infinită de forma* (*a*) *şi există şi este finită*

$$\lim_{t\to t_0} y(t)=b,$$

atunci dreapta D *de ecuaţie* $y=b$ *este* asimptotă orizontală *la ramura infinită în* t_0*.*

◁ Într-adevăr, distanţa de la punctul $M(\mathbf{r}(t))$ la dreapta D este în acest caz

$$d(M(\mathbf{r}(t), D)=|y(t)-b|$$

şi evident tinde la zero pentru $t\to t_0$. ▷

Teorema 9.3 *Dacă curba* $\mathcal{C}$ *are în* t_0 *o ramură infinită de forma* (*b*) *şi există şi este finită*

$$\lim_{t\to t_0} x(t)=a,$$

atunci dreapta D *de ecuaţie* $x=a$ *este* asimptotă verticală *la ramura infinită în* t_0*.*

◁ Într-adevăr, distanţa de la punctul $M(\mathbf{r}(t))$ la dreapta D este în acest caz

$$d(M(\mathbf{r}(t), D)=|x(t)-a|$$

şi evident tinde la zero pentru $t\to t_0$. ▷

Teorema 9.4 *Dacă curba* $\mathcal{C}$ *are în* t_0 *o ramură infinită de forma* (*c*) *şi direcţia* $\mathbf{v}(1,m)$ *este asimptotică, adică*

$$\lim_{t\to t_0}\frac{y(t)}{x(t)}=m,$$

dreapta D *de ecuaţie* $y=mx+n$ *este* asimptotă oblică *la ramura infinită în* t_0 *d.d. există şi este finită:*

$$\lim_{t\to t_0}[y(t)-mx(t)]=n. \tag{9.46}$$

◁ **Necesitatea**. Dacă dreapta D este asimptotă la curba $\mathcal{C}$, atunci

$$\lim_{t\to t_0} d(M(\mathbf{r}(t), D) = \lim_{t\to t_0} \frac{|mx(t) - y(t) + n|}{\sqrt{m^2+1}} = 0,$$

sau

$$\lim_{t\to t_0} [mx(t) - y(t) + n] = 0,$$

de unde rezultă (9.46).

Suficienţa. Dacă există şi este finită limita (9.46), atunci distanţa de la dreapta D de ecuaţie $y = mx+n$ tinde la zero pentru $t \to t_0$ şi deci dreapta D este asimptotă oblică la ramura infinită în t_0. ▷

9.1.12 Trasarea graficului unei curbe plane

Pentru trasarea graficului unei curbe plane dată prin ecuaţii parametrice se efectuează un studiu parcurgând următoarele etape:

1. Se stabileşte *domeniul de definiţie* şi punctele de acumulare ale acestuia. Se stabilesc ramurile infinite ale curbei.
2. Se determină *intersecţiile cu axele* de coordonate.
3. Se studiază *periodicitatea*.
4. Se studiază *simetriile*.
5. Se determină *punctele ordinare, punctele singulare şi de inflexiune*.
6. Se determină *punctele multiple* şi tangentele în aceste puncte.
7. Se întocmeşte *tabloul de variaţie* a funcţiilor $x(t)$ şi $y(t)$ după modelul:

t	
$x'(t)$	
$y'(t)$	
$x(t)$	
$y(t)$	

8. Se determină *asimptotele* curbei.
9. Se trasează graficul.

9.2 Curbe în spaţiu

9.2.1 Reprezentări analitice regulate

Fie $\mathcal{R} = \{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ un reper cartezian ortonormat în E.

Definiţia 9.18 *O submulţime $\mathcal{C} \subset E$ se numeşte* curbă în spaţiu *dacă există o aplicaţie $\mathbf{r} : I \to E$, $I \subset \mathbf{R}$, a.î. $\mathbf{r}(I) = \mathcal{C}$.*

Dacă $M(\mathbf{r}) \in \mathcal{C}$, atunci

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad t \in I, \tag{9.47}$$

este *ecuaţia vectorială* a curbei $\mathcal{C}$. Valoarea lui t pentru care $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}(t)$ se numeşte *coordonata parametrică* a punctului M de pe curbă şi se notează $M(t)$. În proiecţie pe axele reperului ecuaţia (9.1) este echivalentă cu

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in I, \tag{9.48}$$

numite *ecuaţiile parametrice ale curbei* $\mathcal{C}$.

Ecuaţiile parametrice ale unei curbe nu sunt unice. Dacă $\alpha : J \to I$, cu $I, J \subset \mathbf{R}$, este o aplicaţie surjectivă, aplicaţiile $\mathbf{r} \circ \alpha$ şi $\mathbf{r}$ au aceeaşi imagine $\mathcal{C}$, deci definesc aceeaşi curbă.

Definiţia 9.19 *O curbă $\mathcal{C}$ se numeşte* curbă de clasă C^k, *$k \geq 0$, dacă admite cel puţin o reprezentare de forma (9.47) cu $\mathbf{r} \in C^k(I)$.*

Dacă I este un interval deschis şi $\mathbf{r}$ o aplicaţie bijectivă continuă cu inversă continuă atunci $\mathcal{C}$ se numeşte arc elementar de curbă.

Dacă I este un interval închis $[a, b]$ şi $\mathbf{r}$ este de clasă $C^0(I)$ atunci curba $\mathcal{C}$ se numeşte drum. *Un drum se numeşte* închis *dacă $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$.*

Curba $\mathcal{C}$ se numeşte curbă simplă *dacă este un arc elementar de curbă sau un drum închis.*

Definiţia 9.20 *Curba $\mathcal{C}$, dată prin reprezentarea (9.47) se numeşte* curbă regulată de clasă C^k, *$k \geq 1$, dacă $\mathbf{r} \in C^k(I)$ şi*

$$\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}, \quad \forall\, t \in I. \tag{9.49}$$

Definiţia 9.21 *Un punct $M_0 \in \mathcal{C}$ se numeşte* punct ordinar *(sau regulat) dacă $\mathcal{C}$ admite cel puţin o reprezentare de forma (9.47) regulată de clasă C^k, $k \geq 1$, în punctul M_0. În caz contrar, M_0 se numeşte* punct singular.

Dacă drept parametru se poate lua abscisa x a unui punct de pe curbă, atunci reprezentarea (9.48) ia forma

$$y = f(x), \quad z = g(x), \quad x \in I, \tag{9.50}$$

în care $f, g \in C^k(I)$, numită *reprezentarea carteziană explicită* a curbei $\mathcal{C}$. În acest caz toate punctele curbei sunt ordinare deoarece $\mathbf{r}' = \mathbf{i} + f'(x)\mathbf{j} + g'(x)\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$, pentru orice $x \in I$.

O curbă în spaţiu $\mathcal{C}$ de clasă C^k poate fi dată şi prin ecuaţii de forma

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0, \tag{9.51}$$

în care F şi G sunt funcţii de clasă C^k, numit *ecuaţiile carteziane implicite* ale curbei.

Dacă curba $\mathcal{C}$ este dată prin reprezentările (9.48) şi (9.51), simultan, atunci pentru orice $t \in I$,

$$F(x(t), y(t), z(t)) = 0, \quad G(x(t), y(t), z(t)) = 0.$$

Derivând aceste identităţi în raport cu t, obţinem:

$$\mathbf{r}'(t) \cdot \operatorname{grad} F(x(t), y(t), z(t)) = 0, \quad \mathbf{r}'(t) \cdot \operatorname{grad} G(x(t), y(t), z(t)) = 0,$$

de unde rezultă că $\mathbf{r}'(t) \perp \operatorname{grad} F$, $\mathbf{r}'(t) \perp \operatorname{grad} G$, adică

$$\mathbf{r}'(t) = \lambda(t) \operatorname{grad} F(x(t), y(t), z(t)) \times \operatorname{grad} G(x(t), y(t), z(t)), \quad \forall t \in I. \tag{9.52}$$

Definiţia 9.22 *Un punct $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{C}$ se numeşte* punct ordinar *dacă*

$$\operatorname{grad} F(x_0, y_0, z_0) \times \operatorname{grad} G(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}. \tag{9.53}$$

În caz contrar, M_0 se numeşte punct singular.

Reprezentarea carteziană explicită poate fi privită ca un caz particular de reprezentare implicită, pentru care $F(x, y, z) = y - f(x)$, $G(x, y, z) = z - g(x)$.

Exemplul 9.12 *Curba descrisă de un punct de pe cilindrul $x^2 + y^2 = a^2$ a cărui proiecţie în planul Oxy se deplasează cu viteză unghiulară ω constantă şi a cărui proiecţie pe axa Oz se deplasează cu viteză constantă se numeşte* elice circulară. *O reprezentare parametrică a elicei este*

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Exemplul 9.13 *Curba descrisă de un punct care se deplasează cu viteză constantă pe o dreaptă care se roteşte în jurul unei axe fixe cu viteză unghiulară ω constantă şi care face cu aceasta un unghi constant θ, diferit de $\pi/2$, se numeşte* elice conică. *O reprezentare parametrică a elicei este*

$$x = at \cos \omega t, \quad y = at \sin \omega t, \quad z = bt, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Exemplul 9.14 *Curba descrisă de un punct care se deplasează cu viteză proporţională cu distanţa parcursă pe o dreaptă care se roteşte cu viteză unghiulară ω constantă în jurul unei axe fixe şi care face cu aceasta un unghi constant θ, diferit de $\pi/2$, se numeşte* spirală conică. *O reprezentare parametrică a elicei este*

$$x = ae^{kt} \cos t, \quad y = ae^{kt} \sin \omega t, \quad z = be^{kt}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Exemplul 9.15 *Curbele de intersecţie a doi cilindri circulari de raze a şi b care se taie sub un unghi drept se numesc* bicilindrice. *Ecuaţiile carteziene implicite ale lor sunt*

$$x^2 + z^2 = a^2, \quad y^2 + z^2 = b^2.$$

Dacă $a = b$ bicilindricele sunt două elipse.

9.2.2 Tangenta şi planul normal

Fie $\mathcal{C}$ o curbă în spaţiu de clasă C^k, $k \geq 1$, dată prin ecuaţia (9.47), $M_0(t_0)$ un punct ordinar al ei şi $M(t)$ un punct vecin lui M_0.

Pentru $t \neq t_0$, deducem că

$$\frac{\overrightarrow{M_0M}}{t - t_0} = \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0},$$

adică vectorul $(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0))/(t - t_0)$ este coliniar cu $\overrightarrow{M_0M}$, vectorul director al secantei M_0M la curba $\mathcal{C}$. Cum punctul M_0 este ordinar, vectorul $(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0))/(t - t_0)$ tinde, pentru $M \to M_0$ (adică $t \to t_0$), la o limită bine determinată, $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{0}$.

Definiţia 9.23 *Numim* tangentă *la curba $\mathcal{C}$ poziţia limită a secantei M_0M când punctul $M \to M_0$, pe curbă.*

Din cele de mai sus rezultă că *tangenta* la curba $\mathcal{C}$ în punctul ei ordinar $M_0(t_0)$ are ecuaţia vectorială

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0) + \lambda \mathbf{r}'(t_0), \quad \lambda \in \mathbf{R},$$

de unde ecuaţiile parametrice

$$x = x(t_0) + \lambda x'(t_0), \; y = y(t_0) + \lambda y'(t_0), \quad z = z(t_0) + \lambda z'(t_0), \quad \lambda \in \mathbf{R},$$

sau

$$\mathbf{r}'(t_0) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}(t_0)) = \mathbf{0},$$

sau sub formă carteziană

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)},$$

care reprezintă *ecuaţiile canonice* ale tangentei la curba $\mathcal{C}$.

Vom nota cu

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}'}{||\mathbf{r}'||} \tag{9.54}$$

versorul tangentei într-un punct $M(t) \in \mathcal{C}$.

Dacă curba $\mathcal{C}$ este dată prin ecuaţiile explicite (9.50), atunci toate punctele curbei sunt ordinare şi ecuaţiile tangentei la curbă în punctul $M_0(x_0, f(x_0), g(x_0))$ se scriu

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - f(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{z - g(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Dacă curba $\mathcal{C}$ este dată implicit prin ecuaţii de forma (9.51), din (9.52) rezultă că vectorii $\mathbf{r}'(t_0)$ şi

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} F(x_0, y_0, z_0) \times \operatorname{grad} G(x_0, y_0, z_0)$$

sunt coliniari şi deci $\mathbf{v}$ este un vector director al tangentei la curbă în punctul ei ordinar $M_0(x_0, y_0, z_0)$, încât, ecuaţia tangentei se scrie

$$\mathbf{v} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \mathbf{0},$$

care conduce la ecuaţiile canonice

$$\frac{x-x_0}{\ell}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

în care

$$\ell=\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}_{M_0},\ m=\begin{vmatrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{vmatrix}_{M_0},\ n=\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix}_{M_0}. \tag{9.55}$$

Definiţia 9.24 *Numim* plan normal *la curba $\mathcal{C}$ în punctul $M_0 \in \mathcal{C}$, planul perpendicular pe tangenta în M_0 la curbă.*

Planul normal este definit de punctul M_0 şi de vectorul său normal care este coliniar cu vectorul director al tangentei la curbă în M_0, deci are ecuaţia

$$\mathbf{r}'(t_0)\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}(t_0)=0,$$

care în reperul cartezian $\mathcal{R}$ se scrie

$$x'(t_0)(x-x(t_0))+y'(t_0)(y-y(t_0))+z'(t_0)(z-z(t_0))=0. \tag{9.56}$$

Dacă curba este dată explicit prin ecuaţiile (9.50), din ecuaţia (9.56) deducem că planul tangent în punctul $M_0(x_0, f(x_0), g(x_0))$ este caracterizat prin ecuaţia

$$(x-x_0)+f'(x_0)(y-f(x_0))+g'(x_0)(z-g(x_0))=0.$$

Dacă curba este dată implicit, vectorul $\mathbf{v}$ este un vector perpendicular pe planul normal la $\mathcal{C}$ în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$, încât, ecuaţia sa se scrie

$$\mathbf{v}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=\mathbf{0},$$

sau, în reperul $\mathcal{R}$

$$\ell(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)=0,$$

cu ℓ, m, n daţi de (9.55) şi $F(x_0, y_0, z_0)=0$, $G(x_0, y_0, z_0)=0$.

Exemplul 9.16 *Se dau curba:*

$$\mathbf{r}=a(\sin t+\cos t)\mathbf{i}+a(\sin t-\cos t)\mathbf{j}+be^{-t}\mathbf{k}$$

şi punctul ei $M_0(0)$. Deoarece

$$\mathbf{r}(0)=a(\mathbf{i}-\mathbf{j})+b\mathbf{k},\ \ \mathbf{r}'(0)=a(\mathbf{i}+\mathbf{j})-b\mathbf{k},$$

ecuaţiile tangentei în M_0 la curbă se scriu

$$\frac{x-a}{a}=\frac{y+a}{a}=\frac{z-b}{-b},$$

iar ecuaţia planului normal va fi $a(x-a)+a(y+a)-b(z-b)=0$.

Exemplul 9.17 *Se dau curba:* $y = 2e^x$, $z = 3\ln(x+1)$ *şi punctul* $M_0(0,2,0)$ *situat pe curbă. Deoarece* $f'(0) = 2$, $g'(0) = 3$, *ecuaţiile tangentei în* M_0 *vor fi*

$$\frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3},$$

iar ecuaţia planului normal: $x + 2(y-2) + 3z = 0$.

Exemplul 9.18 *Se dau curba:*

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 - 10 = 0,$$
$$G(x,y,z) = y^2 + z^2 - 25 = 0$$

şi punctul $M_0(1,3,4)$. *Deoarece* $\mathrm{grad}\, F(x,y,z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$, $\mathrm{grad}\, G(x,y,z) = 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$ *şi deci*

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 4(12\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}),$$

ecuaţiile tangentei se scriu

$$\frac{x-1}{12} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-4}{3},$$

iar ecuaţia planului normal: $12(x-1) - 4(y-3) + 3(z-4) = 0$.

9.2.3 Elementul de arc

Fie curba $\mathcal{C}$ dată prin ecuaţia

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t),$$

şi $M_0(t_0)$ un punct fix al său. Să notăm cu $s = s(t)$ lungimea arcului $\overset{\frown}{M_0M}$. Dacă $M'(t + \Delta t)$ este un punct vecin pe curbă punctului $M(t)$, atunci putem considera $\Delta s = ||\overrightarrow{MM'}||$. Dar $\overrightarrow{MM'} = \mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)$ şi deci

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \left\| \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \right\|.$$

Dacă trecem la limită pentru $\Delta t \to 0$, avem

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \left\| \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \right\|,$$

de unde

$$ds = ||\mathbf{r}'(t)||\, dt = ||d\mathbf{r}||. \tag{9.57}$$

Diferenţiala ds dată de (9.57) se numeşte *element de arc* al curbei $\mathcal{C}$. Dacă curba este dată prin ecuaţiile parametrice (9.48), atunci din (9.57) avem

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt. \tag{9.58}$$

În cazul reprezentării explicite (9.50) aceasta revine la

$$ds = \sqrt{1 + f'^2(x) + g'^2(x)}\, dx.$$

Deoarece $s'(t) = ||\mathbf{r}'(t)|| > 0$ în orice punct ordinar al curbei, putem rezolva ecuaţia $s = s(t)$ în privinţa lui t. Obţinem $t = \varphi(s)$. Înlocuind această valoare a parametrului t în ecuaţia (9.47) obţinem

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\varphi(s)). \tag{9.59}$$

Deci, putem scrie ecuaţiile parametrice ale curbei luând la parametru arcul ei s, care se mai numeşte şi *parametru natural* al curbei.

Dacă curba este dată parametric prin (9.59), în care s este arcul pe curbă, atunci din (9.57) rezultă

$$\left\| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right\| = 1,$$

deci vectorul

$$\mathbf{t} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\mathbf{r}'}{||\mathbf{r}'||} \tag{9.60}$$

este un vector unitar, adică $\mathbf{t}^2 = 1$.

Din (9.58) deducem că lungimea arcului $\overset{\frown}{M_0M}$ este

$$s = s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'^2(\tau) + y'^2(\tau) + z'^2(\tau)}\, d\tau,$$

respectiv

$$s = s(x) = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + f'^2(\xi) + g'^2(\xi)}\, d\xi.$$

9.2.4 Planul osculator. Reperul lui Frénet

Definiţia 9.25 *Numim* plan osculator *la curba $\mathcal{C}$ în punctul $M_0 \in \mathcal{C}$, un plan care intersectează curba în trei puncte confundate în M_0.*

Fie curba $\mathcal{C}$ dată prin ecuaţia $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ şi fie $M_0(\mathbf{r}(t_0))$ un punct ordinar al ei. Un plan oarecare prin M_0 are ecuaţia

$$\mathbf{N} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}(t_0)) = 0. \tag{9.61}$$

Coordonatele parametrice ale punctelor de intersecţie ale acestui plan cu curba sunt rădăcinile ecuaţiei

$$\Phi(t) = \mathbf{N} \cdot (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)) = 0. \tag{9.62}$$

Pentru ca planul (9.61) să fie plan osculator la curbă în punctul $M_0(t_0)$ este necesar ca $t = t_0$ să fie rădăcină triplă a ecuaţiei $\Phi(t) = 0$. Deoarece $\Phi(t_0) = 0$, va trebui să avem încă

$$\Phi'(t_0) = \mathbf{N} \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0, \;\; \Phi''(t_0) = \mathbf{N} \cdot \mathbf{r}''(t_0) = 0.$$

De aici rezultă că vectorul $\mathbf{N}$ trebuie să fie coliniar cu produsul vectorial $\mathbf{r}'(t_0) \times \mathbf{r}''(t_0)$, adică putem lua

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}'(t_0) \times \mathbf{r}''(t_0).$$

Deci, dacă

$$\mathbf{r}'(t_0) \times \mathbf{r}''(t_0) \neq \mathbf{0},$$

ecuaţia planului osculator la curba $\mathcal{C}$ în punctul M_0 este

$$(\mathbf{r}'(t_0) \times \mathbf{r}''(t_0)) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}(t_0)) = 0,$$

sau

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t_0), \mathbf{r}'(t_0), \mathbf{r}''(t_0)) = 0.$$

În reperul cartezian $\mathcal{R}$ aceasta devine

$$\begin{vmatrix} x - x(t_0) & y - y(t_0) & z - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Definiţia 9.26 *Un punct $M_0(t_0) \in \mathcal{C}$ în care*

$$\mathbf{r}'(t_0) \times \mathbf{r}''(t_0) = \mathbf{0} \tag{9.63}$$

se numeşte punct de inflexiune *al curbei $\mathcal{C}$.*

Deci, în orice punct ordinar şi neinflexianar al curbei planul osculator este unic determinat.

Fie M_0 un punct ordinar şi neinflexianar al curbei $\mathcal{C}$.

Definiţia 9.27 *Numim* normală principală *la curba $\mathcal{C}$ în punctul M_0 intersecţia planului normal cu planul osculator la curba $\mathcal{C}$ în M_0.*

Vectorul director al normalei principale este deci un vector coliniar cu produsul dublu vectorial

$$(\mathbf{r}'(t_0) \times \mathbf{r}''(t_0)) \times \mathbf{r}'(t_0).$$

Ecuaţia normalei principale se scrie atunci

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t_0)) \times [(\mathbf{r}'(t_0) \times \mathbf{r}''(t_0)) \times \mathbf{r}'(t_0)] = \mathbf{0}.$$

Vom nota versorul normalei principale într-un punct $M(t) \in \mathcal{C}$ cu

$$\mathbf{n} = \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \times \mathbf{r}'}{||(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \times \mathbf{r}'||}. \tag{9.64}$$

Definiţia 9.28 *Numim* binormală *la curba $\mathcal{C}$ în punctul M_0, perpendiculara pe planul osculator în punctul M_0 la curbă.*

Vectorul director al binormalei în M_0 la curbă este coliniar deci cu vectorul $\mathbf{r}'(t_0) \times \mathbf{r}''(t_0)$. Ecuaţia binormalei se va scrie

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t_0)) \times [\mathbf{r}'(t_0) \times \mathbf{r}''(t_0)] = \mathbf{0}.$$

Vom nota versorul binormalei într-un punct $M(t) \in \mathcal{C}$ cu

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{||\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''||}. \tag{9.65}$$

Definiţia 9.29 *Numim* plan rectificator *(rectifiant) la curba $\mathcal{C}$ în punctul M_0, planul determinat de tangenta şi binormala la $\mathcal{C}$ în M_0.*

Ecuaţia planului rectificator este

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t_0), \mathbf{r}'(t_0), \mathbf{r}'(t_0) \times \mathbf{r}''(t_0)) = 0.$$

Versorii $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ daţi de (9.54), (9.64) şi (9.65) satisfac relaţiile

$$\mathbf{t}^2 = \mathbf{n}^2 = \mathbf{b}^2 = 1, \quad \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{t} = 0.$$

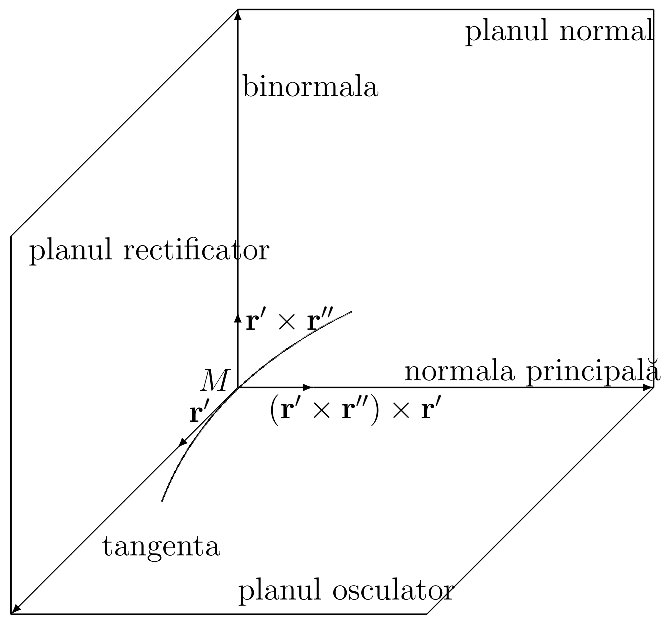


Figura 9.4: Reperul lui Frénet

Reperul cartezian ortonormat $\{M, \mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ cu originea într-un punct M, ordinar şi neinflexionar al curbei se numeşte *reper mobil* sau *reperul lui Frénet* ataşat curbei în punctul M.

Să găsim în încheiere expresiile versorilor reperului Frénet când curba este dată prin ecuaţia $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, unde s este parametrul natural. Deoarece $\dot{\mathbf{r}}^2 = 1$, deci $\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = 0$, deducem că $\dot{\mathbf{r}} \perp \ddot{\mathbf{r}}$ şi

$$(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \times \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}^2 \ddot{\mathbf{r}} - (\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}})\dot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}.$$

Rezultă că $||\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|| = ||\ddot{\mathbf{r}}||$. Din (9.60), (9.64) şi (9.65) obţinem atunci

$$\mathbf{t} = \dot{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{n} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}}{||\ddot{\mathbf{r}}||}, \quad \mathbf{b} = \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}}{||\ddot{\mathbf{r}}||} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}. \tag{9.66}$$

În acest caz, ecuaţiile axelor şi planelor reperului Frénet în punctul $M(\mathbf{r}(s)) \in \mathcal{C}$ se scriu:

- ecuaţia tangentei: $(\mathbf{r} - \mathbf{r}(s)) \times \mathbf{t}(\mathbf{s}) = \mathbf{0}$,

- ecuaţia normalei principale: $(\mathbf{r}-\mathbf{r}(s))\times\mathbf{n}(\mathbf{s})=\mathbf{0}$,
- ecuaţia binormalei: $(\mathbf{r}-\mathbf{r}(s))\times\mathbf{b}(\mathbf{s})=\mathbf{0}$,
- ecuaţia planului normal: $\mathbf{t}(\mathbf{s})\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}(s))=\mathbf{0}$,
- ecuaţia planului rectificator: $\mathbf{n}(\mathbf{s})\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}(s))=\mathbf{0}$,
- ecuaţia planului osculator: $\mathbf{b}(\mathbf{s})\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}(s))=\mathbf{0}$.

Exemplul 9.19 *Se dă curba* $\mathbf{r}=3\cos t\,\mathbf{i}+3\sin t\,\mathbf{j}+4t\,\mathbf{k}$ *(elicea circulară). Să scriem ecuaţiile axelor şi planelor reperului Frénet ataşat curbei într-un punct* $M(t)$ *al acesteia.*

Deoarece $\mathbf{r}'=-3\sin t\,\mathbf{i}=3\cos t\,\mathbf{j}+4\mathbf{k}$, $ds=||\mathbf{r}'(t)||\,dt=5\,dt$. *Deducem că* $t=s/5$. *Avem deci*

$$\mathbf{r}=3\cos\frac{s}{5}\,\mathbf{i}+3\sin\frac{s}{5}\,\mathbf{j}+\frac{4}{5}s\,\mathbf{k},\ \dot{\mathbf{r}}=-\frac{3}{5}\sin\frac{s}{5}\,\mathbf{i}+\frac{3}{5}\sin\frac{s}{5}\,\mathbf{j}+\frac{4}{5}\,\mathbf{k},\ \ddot{\mathbf{r}}=-\frac{3}{25}\cos\frac{s}{5}\,\mathbf{i}-\frac{3}{25}\sin\frac{s}{5}\,\mathbf{j},$$

încât

$$\mathbf{t}=\frac{1}{5}(-3\sin t\,\mathbf{i}+3\cos t\,\mathbf{j}+4\,\mathbf{k}),\ \mathbf{n}=-\cos t\,\mathbf{i}-\sin t\,\mathbf{j},\ \mathbf{b}=\frac{1}{5}(4\sin t\,\mathbf{i}-4\cos t\,\mathbf{j}+3\,\mathbf{k}).$$

Ecuaţiile axelor sunt:

- ecuaţiile tangentei:

$$\frac{x-3\cos t}{-3\sin t}=\frac{y-3\sin t}{3\cos t}=\frac{z-4t}{4},$$

- ecuaţiile normalei principale:

$$\frac{x-3\cos t}{\cot s}=\frac{y-3\sin t}{\sin t}=\frac{z-4t}{0},$$

- ecuaţiile binormalei:

$$\frac{x-3\cos t}{4\sin t}=\frac{y-3\sin t}{-4\cos t}=\frac{z-4t}{3}.$$

Ecuaţiile planelor sunt:

- ecuaţia planului normal: $-3x\sin t+3y\cos t+4z-16t=0$,
- ecuaţia planului rectificator: $x\cos t+y\sin t-3=0$,
- ecuaţia planului osculator: $4x\sin t-4y\cos t+3z-12t=0$.

9.2.5 Curbura unei curbe în spaţiu

Fie $M(s)$ şi $M'(s+\Delta s)$ două puncte vecine pe curba $\mathcal{C}$ dată prin ecuaţia $\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$ şi $\Delta\alpha$ unghiul dintre tangentele la $\mathcal{C}$ în cele două puncte.

Definiţia 9.30 *Numim* curbură *a curbei* $\mathcal{C}$ *în punctul* M,

$$\kappa=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|.$$

Dacă $\mathbf{t}(s)$ şi $\mathbf{t}(s+\Delta s)$ sunt versorii tangentelor la curbă în punctele M şi respectiv M', atunci

$$||\mathbf{t}(s+\Delta s)-\mathbf{t}(s)|| = 2\left|\sin\frac{\Delta\alpha}{2}\right|,$$

de unde

$$\left\|\frac{\mathbf{t}(s+\Delta s)-\mathbf{t}(s)}{\Delta s}\right\| = \left|\frac{\sin\frac{\Delta\alpha}{2}}{\frac{\Delta\alpha}{2}}\right|\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|.$$

Trecând aici la limită pentru $\Delta s\to 0$, obţinem

$$\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\left\|\frac{\mathbf{t}(s+\Delta s)-\mathbf{t}(s)}{\Delta s}\right\| = \left\|\frac{d\mathbf{t}}{ds}\right\|,$$

încât

$$\kappa = ||\dot{\mathbf{t}}|| = ||\ddot{\mathbf{r}}||. \tag{9.67}$$

Cantitatea $R = 1/\kappa$ se numeşte rază de curbură a curbei $\mathcal{C}$ în punctul M.

Din (9.66) găsim imediat că $\mathbf{n} = R\,\ddot{\mathbf{r}} = R\dot{\mathbf{t}}$, de unde

$$\dot{\mathbf{t}} = \kappa\,\mathbf{n}. \tag{9.68}$$

Dacă curba $\mathcal{C}$ este dată prin reprezentarea $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$, regulată de ordin cel puţin doi, curbura în punctul ordinar $M(t)$ are expresia

$$\kappa = \frac{||\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''||}{||\mathbf{r}'||^3} \tag{9.69}$$

Într-adevăr, presupunând $t=t(s)$, avem

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{ds} = \mathbf{r}'\,\frac{dt}{ds},\\ \ddot{\mathbf{r}} &= \mathbf{r}''\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \mathbf{r}'\,\frac{d^2t}{ds^2},\end{aligned}$$

$$\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}} = (\mathbf{r}'\times\mathbf{r}'')\left(\frac{dt}{ds}\right)^3.$$

Dar, cu (9.57), $ds/dt = ||\mathbf{r}'||$, încât

$$||\ddot{\mathbf{r}}|| = ||\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}|| = \frac{||\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''||}{||\mathbf{r}'||^3}.$$

Înlocuind în (9.67) obţinem (9.69).

Din (9.69) rezultă că un punct ordinar al unei curbe este punct de inflexiune d.d. în acel punct curbura este nulă.

Teorema 9.5 *Condiţia necesară şi suficientă ca o curbă să fie o dreaptă este ca în orice punct al ei curbura să fie nulă.*

$\triangleleft$ **Necesitatea**. Dacă curba $\mathcal{C}$ este o dreaptă, atunci $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+t\mathbf{v}$, $\mathbf{r}'=\mathbf{v}$, $\mathbf{r}''=\mathbf{0}$ şi din (9.69) deducem $\kappa=0$, pentru orice $t\in\mathbf{R}$.

Suficienţa. Din $\kappa=0$, ţinând seama de (9.67), urmează $\dot{\mathbf{t}}=\mathbf{0}$ şi deci $\mathbf{t}=\mathbf{v}$ (vector constant), sau $\dot{\mathbf{r}}=\mathbf{v}$, de unde $\mathbf{r}=s\mathbf{v}+\mathbf{r}_0$, deci curba este o dreaptă. $\triangleright$

9.2.6 Torsiunea unei curbe

Fie din nou $M(s)$ şi $M'(s+\Delta s)$ două puncte vecine pe curba $\mathcal{C}$ dată prin ecuaţia $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ şi $\Delta\beta$ unghiul dintre binormalele la $\mathcal{C}$ în cele două puncte.

Definiţia 9.31 *Numim* torsiune absolută *a curbei* $\mathcal{C}$ *în punctul* M*,*

$$|\tau| = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta\beta}{\Delta s} \right| .$$

Dacă $\mathbf{b}(s)$ şi $\mathbf{b}(s+\Delta s)$ sunt versorii binormalelor la curbă în punctele M şi respectiv M', atunci

$$||\mathbf{b}(s+\Delta s) - \mathbf{b}(s)|| = 2 \left| \sin \frac{\Delta\beta}{2} \right| ,$$

de unde

$$\left\| \frac{\mathbf{b}(s+\Delta s) - \mathbf{b}(s)}{\Delta s} \right\| = \left| \frac{\sin \frac{\Delta\beta}{2}}{\frac{\Delta\beta}{2}} \right| \left| \frac{\Delta\beta}{\Delta s} \right| .$$

Trecând aici la limită pentru $\Delta s \to 0$, obţinem

$$\lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta\beta}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \to 0} \left\| \frac{\mathbf{b}(s+\Delta s) - \mathbf{b}(s)}{\Delta s} \right\| = \left\| \frac{d\mathbf{b}}{ds} \right\| ,$$

încât

$$|\tau| = \left\| \dot{\mathbf{b}} \right\| . \tag{9.70}$$

Dar $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ şi $\dot{\mathbf{t}} = \kappa\,\mathbf{n}$, încât $\dot{\mathbf{b}} = \mathbf{t} \times \dot{\mathbf{n}}$, deci $\dot{\mathbf{b}} \perp \mathbf{t}$ şi din $\mathbf{b}^2 = 1$ rezultă $\mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{b}} = 0$, adică $\dot{\mathbf{b}} \perp \mathbf{b}$. În concluzie, $\dot{\mathbf{b}}$ este coliniar cu $\mathbf{n}$, încât

$$|\dot{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{n}| = ||\dot{\mathbf{b}}|| = |\tau|.$$

Cum însă $\mathbf{n} = R\dot{\mathbf{t}}$, $\dot{\mathbf{n}} = \dot{R}\dot{\mathbf{t}} + R\ddot{\mathbf{t}}$, avem

$$\dot{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{t} \times \dot{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{t}, \dot{\mathbf{n}}, \mathbf{n}) = (\mathbf{t}, \dot{R}\dot{\mathbf{t}} + R\ddot{\mathbf{t}}, R\dot{\mathbf{t}}) = -R^2(\mathbf{t}, \dot{\mathbf{t}}, \ddot{\mathbf{t}}) = -\frac{1}{||\ddot{\mathbf{r}}||^2}(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}}),$$

încât

$$|\tau| = \frac{|(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}})|}{||\ddot{\mathbf{r}}||^2} . \tag{9.71}$$

Definiţia 9.32 *Numim* torsiune *a curbei* $\mathcal{C}$ *în punctul* $M(s)$*, mărimea*

$$\tau = \frac{(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}})}{||\ddot{\mathbf{r}}||^2} = -\dot{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{n}. \tag{9.72}$$

Deoarece $\dot{\mathbf{b}}$ este coliniar cu $\mathbf{n}$, urmează că $\dot{\mathbf{b}} = \lambda\,\mathbf{n}$, de unde,

$$\dot{\mathbf{b}} = -\tau\,\mathbf{n}.$$

Dacă curba $\mathcal{C}$ este dată prin reprezentarea $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, regulată de ordin cel puţin doi, torsiunea în punctul ordinar şi neinflexionar $M(t)$ are expresia

$$\tau = \frac{(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')}{||\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''||^2}. \tag{9.73}$$

Într-adevăr, presupunând $t = t(s)$, avem

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}'\,\frac{dt}{ds},\quad \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}''\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \mathbf{r}'\,\frac{d^2t}{ds^2},\quad \dddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}'''\left(\frac{dt}{ds}\right)^3 + 3\mathbf{r}''\left(\frac{dt}{ds}\right)^2\frac{d^2t}{ds^2} + \mathbf{r}'\frac{d^3t}{ds^3},$$

aşa încât, cu $ds/dt = ||\mathbf{r}'||$,

$$(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}}) = (\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')\left(\frac{dt}{ds}\right)^6 = (\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')\frac{1}{||\mathbf{r}'||^6},\quad ||\ddot{\mathbf{r}}|| = \frac{||\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''||}{||\mathbf{r}'||^3},$$

care înlocuite în (9.72) dau (9.73).

Definiţia 9.33 *Un punct al curbei $\mathcal{C}$ în care torsiunea este nulă se numeşte* punct planar.

Teorema 9.6 *Condiţia necesară şi suficientă ca o curbă să fie o curbă plană este ca în orice punct al ei torsiunea să fie nulă.*

◁ **Necesitatea**. Dacă curba este plană, planul osculator fiind planul curbei, rezultă că $\mathbf{b}$ este un vector constant, deci $\dot{\mathbf{b}} = \mathbf{0}$ şi din (9.70) deducem că $\tau = 0$.

Suficienţa. Dacă $\tau = 0$, urmează că $\dot{\mathbf{b}} = \mathbf{0}$ şi deci $\mathbf{b} = \mathbf{b}_0$ (vector constant). Cum $\mathbf{b}\cdot\mathbf{t} = 0$, rezultă că $\mathbf{b}_0 \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0$, de unde, prin integrare, $\mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{r}(s) + D = 0$, D fiind o constantă de integrare. De aici deducem că toate punctele curbei se găsesc în planul de ecuaţie $\mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{r} + D = 0$, adică este o curbă plană. ▷

9.2.7 Formulele lui Frénet

Fie $\mathcal{C}$ un arc de curbă regulat de ordinul cel puţin trei, format din puncte ordinare şi neinflexionare, dat prin ecuaţia

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s),$$

unde s este parametrul natural. Fie încă $\mathcal{R} = \{M, \mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ reperul Frénet (Fig. 9.5) ataşat acestui arc în punctul $M(s)$, în care

$$\mathbf{t} = \dot{\mathbf{r}},\quad \mathbf{n} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}}{||\ddot{\mathbf{r}}||},\quad \mathbf{b} = \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}}{||\ddot{\mathbf{r}}||} \tag{9.74}$$

şi fie

$$\kappa = ||\ddot{\mathbf{r}}||,\quad \tau = -\dot{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{n},$$

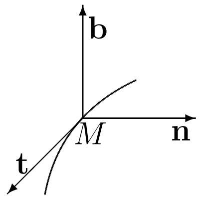


Figura 9.5: Reperul lui Frénet

curbura şi torsiunea curbei în punctul $M(s)$.

Formulele lui Frénet exprimă modul cum variază reperul lui Frénet când punctul M parcurge arcul de curbă, dau deci derivatele versorilor reperului în funcţie de versorii reperului.

Prima dintre aceste formule se obţine imediat din $(9.74)_1$, $(9.74)_2$ şi expresia curburii. Se găseşte

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa\, \mathbf{n}. \tag{9.75}$$

Ţinând apoi seama că $\dot{\mathbf{b}}$ este coliniar cu $\mathbf{n}$ şi de expresia torsiunii, obţinem

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau\, \mathbf{n}. \tag{9.76}$$

În fine, din $\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t}$, prin derivare, avem $\dot{\mathbf{n}} = \dot{\mathbf{b}} \times \mathbf{t} + \mathbf{b} \times \dot{\mathbf{t}}$ şi ţinând seama de precedentele două formule, rezultă

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\kappa\, \mathbf{t} + \tau\, \mathbf{b}. \tag{9.77}$$

Coordonatele vectorilor $\dot{\mathbf{t}}$, $\dot{\mathbf{n}}$, $\dot{\mathbf{b}}$ sunt funcţii numai de curbura κ şi torsiunea τ ale curbei în punctul M. Rezultă de aici că dacă cunoaştem curbura şi torsiunea:

$$\kappa = \kappa(s), \quad \tau = \tau(s), \tag{9.78}$$

prin integrarea sistemului (9.75) - (9.77) se obţin versorii $\mathbf{t} = \mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n} = \mathbf{n}(s)$, $\mathbf{b} = \mathbf{b}(s)$, iar din

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{t},$$

obţinem $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, adică ecuaţia unui arc de curbă de curbură şi torsiune date. Două arce de curbă astfel obţinute coincid până la o mişcare în spaţiu. Din acest motiv ecuaţiile (9.78) se numesc *ecuaţiile intrinseci* ale curbei.

9.3 Suprafeţe

9.3.1 Reprezentări analitice regulate

Fie $\mathcal{R} = \{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ un reper cartezian ortonormat în E.

Definiţia 9.34 *O submulţime $\mathcal{S} \subset E$ se numeşte* suprafaţă *dacă există o aplicaţie* $\mathbf{r}$: $\Delta \to E$, $\Delta \subset \mathbf{R}^2$, *a.î.* $\mathbf{r}(\Delta) = \mathcal{S}$.

Dacă $M(\mathbf{r}) \in \mathcal{S}$, atunci

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \quad (u, v) \in \Delta, \tag{9.79}$$

este *ecuaţia vectorială* a suprafeţei $\mathcal{S}$, iar u şi v pentru care $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}(u, v)$ se numesc *coordonate parametrice* sau *curbilinii* ale punctului M de pe suprafaţă şi se notează $M(u, v)$. În proiecţie pe axele reperului ecuaţia (9.79) este echivalentă cu

$$x = x(u, v), \;\; y = y(u, v), \;\; z = z(u, v), \quad (u, v) \in \Delta, \tag{9.80}$$

numite *ecuaţiile parametrice ale suprafeţei* $\mathcal{S}$.

Exemplul 9.20 *Aplicaţia* $\mathbf{r} : \Delta \to E$, $\Delta = [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$, *definită prin*

$$\mathbf{r} = R(\mathbf{i}\cos u + \mathbf{j}\sin u)\cos v + R\,\mathbf{k}\sin v, \;\; (u, v) \in \Delta,$$

R fiind o constantă reală pozitivă, reprezintă o sferă cu centrul în origine şi rază R. Ecuaţiile parametrice ale acestei sfere se scriu

$$x = R\cos u\cos v, \;\; y = R\sin u\cos v, \;\; z = R\sin v, \;\; (u, v) \in \Delta.$$

Ecuaţiile parametrice ale unei suprafeţe nu sunt unice. Dacă $\alpha : \Delta' \to \Delta$, cu $\Delta, \Delta' \subset \mathbf{R}^2$, este o aplicaţie surjectivă, aplicaţiile $\mathbf{r} \circ \alpha$ şi $\mathbf{r}$ au aceeaşi imagine $\mathcal{S}$, deci definesc aceeaşi suprafaţă.

Definiţia 9.35 *O suprafaţă $\mathcal{S}$ se numeşte* suprafaţă de clasă C^k, $k \geq 0$, *dacă admite cel puţin o reprezentare de forma (9.79) cu* $\mathbf{r} \in C^k(\Delta)$.

Dacă Δ este o mulţime deschisă şi $\mathbf{r}$ o aplicaţie bijectivă continuă cu inversă continuă atunci $\mathcal{S}$ se numeşte suprafaţă simplă.

Definiţia 9.36 *Suprafaţa $\mathcal{S}$, dată prin reprezentarea (9.79) se numeşte* suprafaţă regulată de clasă C^k, $k \geq 1$, *dacă* $\mathbf{r} \in C^k(\Delta)$ *şi*

$$\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v) \neq \mathbf{0}, \;\; \forall\,(u, v) \in \Delta. \tag{9.81}$$

În (9.81) am notat $\mathbf{r}_u = \partial\mathbf{r}/\partial u$, $\mathbf{r}_v = \partial\mathbf{r}/\partial v$.

Definiţia 9.37 *Un punct $M_0 \in \mathcal{S}$ se numeşte* punct ordinar *(sau regulat) dacă $\mathcal{S}$ admite cel puţin o reprezentare de forma (9.79) regulată în punctul M_0. În caz contrar, M_0 se numeşte* punct singular.

Dacă drept parametri se pot lua abscisa x şi ordonata y ale unui punct de pe suprafaţă, atunci reprezentarea (9.80) ia forma

$$z = f(x, y), \;\; (x, y) \in D \subset \mathbf{R}^2, \tag{9.82}$$

în care $f \in C^k(D)$, numită *ecuaţia carteziană explicită* a suprafeţei $\mathcal{S}$. În acest caz toate punctele suprafeţei sunt ordinare deoarece

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = -p(x,y)\,\mathbf{i} - q(x,y)\,\mathbf{j} + \mathbf{k} \neq \mathbf{0}, \tag{9.83}$$

pentru orice $(x,y) \in D$, unde $p = \partial f/\partial x$, $q = \partial f/\partial y$ (notaţiile lui Monge).

O suprafaţă $\mathcal{S}$ de clasă C^k poate fi dată şi printr-o ecuaţie de forma

$$F(x,y,z) = 0, \tag{9.84}$$

în care F este o funcţie de clasă C^k, numită *ecuaţia carteziană implicită* a suprafeţei.

Dacă suprafaţa $\mathcal{S}$ este dată prin reprezentările (9.80) şi (9.84), simultan, atunci pentru orice $(u,v) \in \Delta$,

$$F(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = 0.$$

Derivând parţial această identitate în raport cu u şi v, obţinem:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_u\,(u,v) \cdot \operatorname{grad} F(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = 0, \\ \mathbf{r}_v\,(u,v) \cdot \operatorname{grad} F(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = 0, \end{cases}$$

de unde rezultă că $\mathbf{r}_u\,(u,v) \perp \operatorname{grad} F$, $\mathbf{r}_v\,(u,v) \perp \operatorname{grad} F$, adică

$$\mathbf{r}_u\,(u,v) \times \mathbf{r}_v(u,v) = \lambda(u,v) \operatorname{grad} F(x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \quad \forall\,(u,v) \in \Delta. \tag{9.85}$$

Definiţia 9.38 *Un punct $M_0(x_0,y_0,z_0) \in \mathcal{S}$ se numeşte* punct ordinar *dacă*

$$\operatorname{grad} F(x_0,y_0,z_0) \neq \mathbf{0} \tag{9.86}$$

În caz contrar, M_0 se numeşte punct singular.

Reprezentarea carteziană explicită poate fi privită ca un caz particular de reprezentare implicită, pentru care $F(x,y,z) = z - f(x,y)$.

Exemplul 9.21 *Fie $\mathcal{C}$ o curbă în planul Oxz, de ecuaţii: $x = f(u)$, $y = 0$, $z = g(u)$. Prin rotirea curbei $\mathcal{C}$ în jurul axei Oz se obţine o suprafaţă de rotaţie de ecuaţii: $x = f(u)\cos v$, $y = f(u)\sin v$, $z = g(u)$. Astfel:*

(a) prin rotirea cercului: $x = a + bcosu$, $y = 0$, $z = b\sin u$, cu $a > b$, se obţine torul*:*

$$x = (a + bcosu)\cos v,\ y = (a + bcosu)\sin v,\ z = b\sin u;$$

(b) prin rotirea lănţişorului: $x = a\operatorname{ch}(u/a)$, $y = 0$, $z = u$, se obţine catenoidul*:*

$$x = a\operatorname{ch}(u/a)\cos v,\ y = a\operatorname{ch}(u/a)\sin v,\ z = u;$$

(c) prin rotirea tractricei: $x = a\sin u$, $y = 0$, $z = a(\ln\operatorname{tg}(u/2) + \cos u)$, se obţine pseudosfera*:*

$$x = a\sin u\cos v,\ y = a\sin u\sin v, z = a(\ln\operatorname{tg}(u/2) + \cos u).$$

Exemplul 9.22 *Suprafaţa generată de o curbă $\mathcal{C}$ (numită profil) în mişcare de rotaţie în jurul unei drepte şi în acelaşi timp de translaţie paralelă cu această dreaptă, vitezele acestor mişcări fiind proporţionale, se numeşte* elicoid*. Dacă se ia axa Oz drept axă de rotaţie, o reprezentare parametrică a elicoidului este*

$$x = f(u)\cos v,\ y = f(u)\sin v,\ z = g(u) + av.$$

9.3.2 Curbe pe o suprafaţă

O curbă $\mathcal{C}$ situată pe suprafaţa $\mathcal{S}$ poate fi dată printr-o reprezentare curbilinie parametrică de forma

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad t \in I \subset \mathbf{R}. \tag{9.87}$$

Ecuaţia vectorială a curbei $\mathcal{C}$ se obţine înlocuind pe u şi v din reprezentarea (9.87) în (9.79):

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u(t), v(t)), \quad t \in I, \tag{9.88}$$

iar ecuaţiile carteziene parametrice

$$x = x(u(t), v(t)), \quad y = y(u(t), v(t)), \quad z = z(u(t), v(t)), \quad t \in I. \tag{9.89}$$

Curba $\mathcal{C}$ situată pe suprafaţa $\mathcal{S}$ poate fi dată şi printr-o ecuaţie curbilinie explicită $v = f(u)$ sau printr-o ecuaţie curbilinie implicită $F(u, v) = 0$.

9.3.3 Planul tangent şi normala la o suprafaţă

Fie suprafaţa $\mathcal{S}$ dată prin ecuaţia (9.79) şi $M_0(u_0, v_0)$ un punct ordinar al suprafeţei, deci pentru care

$$\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0) \neq \mathbf{0}.$$

Prin punctul M_0 se pot duce pe suprafaţă o infinitate de curbe. Fie $\mathcal{C}$ o curbă oarecare prin M_0 situată pe suprafaţă, dată prin ecuaţiile (9.87), a cărei reprezentare carteziană parametrică este (9.88). Dacă t_0 este valoarea parametrului t corespunzătoare punctului M_0 ca punct pe curba $\mathcal{C}$, a.î. $u(t_0) = u_0$, $v(t_0) = v_0$, un vector director al tangentei în $M_0(t_0)$ la curba $\mathcal{C}$ este

$$\mathbf{r}'(t_0) = u'(t_0)\mathbf{r}_u(u_0, v_0) + v'(t_0)\mathbf{r}_v(u_0, v_0). \tag{9.90}$$

Din (9.90) rezultă că oricare ar fi curba $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$, care trece prin punctul M_0, vectorul director al tangentei la curbă în M_0 este o combinaţie liniară a vectorilor necoliniari $\mathbf{r}_u(u_0, v_0)$ şi $\mathbf{r}_v(u_0, v_0)$. Deci tangenta prin M_0 la oricare dintre aceste curbe aparţine planului determinat de punctul M_0 şi vectorii necoliniari $\mathbf{r}_u(u_0, v_0)$ şi $\mathbf{r}_v(u_0, v_0)$ paraleli cu planul.

Definiţia 9.39 *Numim* plan tangent *la suprafaţa $\mathcal{S}$ în punctul ordinar $M_0 \in \mathcal{S}$, locul geometric al tangentelor prin M_0 la toate curbele de pe suprafaţă care trec prin M_0.*

Dacă $\mathbf{r}$ este vectorul de poziţie al unui punct curent al planului tangent, atunci *ecuaţia planului tangent* este

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}(u_0, v_0), \mathbf{r}_u(u_0, v_0), \mathbf{r}_v(u_0, v_0)) = 0. \tag{9.91}$$

Definiţia 9.40 *Vectorul* $\mathbf{h}$ *se numeşte* vector tangent *la $\mathcal{S}$ în M_0 dacă este vector director al tangentei la o curbă $\mathcal{C}$ de pe $\mathcal{S}$ ce trece prin M_0.*

Definiţia 9.41 *Numim* spaţiu vectorial tangent *la $\mathcal{S}$ în punctul M_0, $T_{M_0}(\mathcal{S})$, spaţiul vectorial director al planului tangent la $\mathcal{S}$ în M_0, adică mulţimea tuturor vectorilor tangenţi la $\mathcal{S}$ în M_0.*

O bază a spaţiului tangent o formează sistemul de vectori $\{\mathbf{r}_u(u_0, v_0), \mathbf{r}_v(u_0, v_0)\}$.

Definiţia 9.42 *Numim* normală *într-un punct ordinar $M_0 \in \mathcal{S}$ dreapta prin M_0 perpendiculară pe planul tangent în M_0 la $\mathcal{S}$.*

Din definiţia planului tangent rezultă că putem lua ca vector director al normalei la suprafaţa $\mathcal{S}$ în punctul ei ordinar M, vectorul

$$\mathbf{N}(u, v) = \mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v) = A(u, v)\mathbf{i} + B(u, v)\mathbf{j} + C(u, v)\mathbf{k}, \tag{9.92}$$

unde

$$A(u, v) = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \ B(u, v) = \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}, \ C(u, v) = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}.$$

Cu această notaţie, ecuaţia planului tangent se mai poate scrie

$$\mathbf{N}(u_0, v_0) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}(u_0, v_0)) = 0,$$

de unde ecuaţia carteziană

$$A(u_0, v_0)(x - x(u_0, v_0)) + B(u_0, v_0)(y - y(u_0, v_0)) + C(u_0, v_0)(z - z(u_0, v_0)) = 0.$$

Ecuaţia vectorială a normalei în $M_0(u_0, v_0) \in \mathcal{S}$ la suprafaţă va fi atunci

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}(u_0, v_0)) \times \mathbf{N}(u_0, v_0) = \mathbf{0},$$

iar *ecuaţiile canonice ale normalei* se vor scrie

$$\frac{x - x(u_0, v_0)}{A(u_0, v_0)} = \frac{y - y(u_0, v_0)}{B(u_0, v_0)} = \frac{z - z(u_0, v_0)}{C(u_0, v_0)}.$$

Dacă suprafaţa $\mathcal{S}$ este reprezentată analitic prin ecuaţia carteziană explicită (9.82), ţinând seama de (9.83), un vector director al normalei este

$$\mathbf{N}(x, y) = -p(x, y)\,\mathbf{i} - q(x, y)\,\mathbf{j} + \mathbf{k},$$

a.î. ecuaţia planului tangent în punctul $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ al suprafeţei se scrie

$$-p(x_0, y_0)(x - x_0) - q(x_0, y_0)(y - y_0) + z - f(x_0, y_0) = 0,$$

iar ecuaţiile canonice ale normalei

$$\frac{x - x_0}{-p(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{-q(x_0, y_0)} = \frac{z - f(x_0, y_0)}{1}.$$

Dacă suprafaţa $\mathcal{S}$ este reprezentată analitic prin ecuaţia carteziană implicită (9.84), ţinând seama de (9.85), un vector normal suprafeţei în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S}$, pentru care $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, este

$$\mathbf{N}(x_0, y_0, z_0) = \operatorname{grad} F(x_0, y_0, z_0),$$

a.î. ecuaţia planului tangent se scrie

$$\operatorname{grad} F(x_0, y_0, z_0) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0,$$

sau, sub formă carteziană

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Ecuaţia normalei va fi

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \operatorname{grad} F(x_0, y_0, z_0) = \mathbf{0},$$

iar ecuaţiile canonice ale normalei

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

Definiţia 9.43 *Numim* plan normal *la suprafaţa $\mathcal{S}$ în punctul ei ordinar M_0 orice plan care conţine normala în M_0 la $\mathcal{S}$.*

Definiţia 9.44 *Numim* secţiune normală *a suprafeţei $\mathcal{S}$ curba de intersecţie a suprafeţei cu un plan normal.*

9.3.4 Linii şi reţele pe o suprafaţă

Definiţia 9.45 *Numim* familie simplă de linii *pe o suprafaţă $\mathcal{S}$ o familie uniparametrică de curbe situate pe suprafaţă cu proprietatea că prin fiecare punct ordinar al ei trece o curbă a familiei şi numai una.*

Dacă suprafaţa este dată prin reprezenarea parametrică (9.80), o familie simplă de linii pe $\mathcal{S}$ poate fi dată printr-o ecuaţie de forma

$$\varphi(u, v) = c, \tag{9.93}$$

unde c este o constantă arbitrară. Deoarece (9.93) poate fi privită ca soluţia generală a unei ecuaţii diferenţiale de forma

$$P(u, v)\, du + Q(u, v)\, dv = 0, \tag{9.94}$$

în care $P(u, v)$ şi $Q(u, v)$ sunt funcţii continue pe Δ, deducem că o familie simplă de linii pe $\mathcal{S}$ poate fi dată printr-o ecuaţie diferenţială de forma (9.94).

Exemplul 9.23 *Curbele* $v = \text{const}$ *şi* $u = \text{const}$ *formează două familii simple de linii pe suprafaţa* $\mathcal{S}$. *Ecuaţiile lor diferenţiale sunt* $dv = 0$ *şi respectiv* $du = 0$. *Prin fiecare punct* $M_0(u_0, v_0) \in \mathcal{S}$ *trece curba* $v = v_0$ *din prima familie şi curba* $u = u_0$ *din cea de-a doua familie. Ecuaţiile vectoriale ale acestor curbe sunt*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_0), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v).$$

Aceste familii simple de linii se numesc liniile parametrice ale suprafeţei.

Definiţia 9.46 *Numim* reţea *pe suprafaţa* $\mathcal{S}$ *două familii simple de linii de pe* $\mathcal{S}$ *cu proprietatea că prin fiecare punct ordinar al ei trece câte o curbă din fiecare familie având în acest punct tangente distincte.*

O reţea pe suprafaţa $\mathcal{S}$ poate fi dată prin ecuaţiile $\varphi(u, v) = c_1, \quad \psi(u, v) = c_2$, cu condiţia

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \neq 0,$$

sau printr-o ecuaţie diferenţială de forma

$$A(u, v)\, du^2 + 2B(u, v)\, du\, dv + C(u, v)\, dv^2 = 0, \tag{9.95}$$

cu condiţia $B^2 - AC > 0$ în Δ.

Exemplul 9.24 *Cele două familii de linii parametrice ale suprafeţei formează o reţea pe suprafaţă. Într-adevăr, vectorii directori ai tangentelor în* M_0 *sunt* $\mathbf{r}_u(u_0, v_0)$ *şi respectiv* $\mathbf{r}_v(u_0, v_0)$. *Punctul* M_0 *fiind ordinar, tangentele în* M_0 *sunt distincte. Vom numi această reţea,* reţeaua parametrică a suprafeţei. *Ecuaţia sa diferenţială este* $du\, dv = 0$.

9.3.5 Prima formă fundamentală a unei suprafeţe

Fie suprafaţa $\mathcal{S}$, regulată de ordin cel puţin unu, dată prin ecuaţia

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \quad (u, v) \in \Delta.$$

În fiecare punct ordinar $M(u, v)$ al suprafeţei, sistemul de vectori $\{\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\}$ formează o bază în spaţiul vectorial $T_M(\mathcal{S})$ tangent la $\mathcal{S}$ în M, a.î. orice vector $d\mathbf{r} \in T_M(\mathcal{S})$ se scrie $d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv$.

Spaţiul vectorial $T_M(\mathcal{S})$ poate fi organizat ca spaţiu euclidian. Produsul scalar din E induce pe $T_M(\mathcal{S})$ *produsul scalar*

$$\phi(d\mathbf{r}_1, d\mathbf{r}_2) = d\mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{r}_2, \;\; \forall\, d\mathbf{r}_1, d\mathbf{r}_2 \in T_M(\mathcal{S}).$$

Dacă în baza $\{\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\}$: $d\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_u du_1 + \mathbf{r}_v dv_1$, $d\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_u du_2 + \mathbf{r}_v dv_2$, notând (după Gauss) cu

$$E = \mathbf{r}_u^2, \;\; F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v, \;\; G = \mathbf{r}_v^2,$$

expresia analitică a produsului scalar în $T_M(\mathcal{S})$ va fi

$$\phi(d\mathbf{r}_1, d\mathbf{r}_2) = E du_1 du_2 + F\,(du_1 dv_2 + du_2 dv_1) + G\, dv_1 dv_2.$$

Evident, forma biliniară ϕ este simetrică, iar forma pătratică asociată

$$\Phi(d\mathbf{r}) = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \quad \forall\, d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv \in T_M(\mathcal{S}), \tag{9.96}$$

este pozitiv definită. Această formă pătratică se numeşte *prima formă fundamentală a suprafeţei.*

Deşi ecuaţia $\Phi(d\mathbf{r}) = 0$ este de forma (9.95), ea nu defineşte pe $\mathcal{S}$ o reţea reală deoarece $F^2 - EG < 0$.

Dacă suprafaţa $\mathcal{S}$ este dată prin ecuaţia explicită $z = f(x, y)$, luând pe x şi y drept parametri, prima formă fundamentală a suprafeţei se scrie:

$$\Phi(dx, dy) = (1 + p^2)\,dx^2 + 2pq\,dx\,dy + (1 + q^2)\,dy^2,$$

unde s-a notat (după Monge) cu $p = \partial f/\partial x$, $q = \partial f/\partial y$.

Exemplul 9.25 *Prima formă fundamentală a planului Oxy, de ecuaţie $z = 0$, este*

$$\Phi(dx, dy) = dx^2 + dy^2.$$

Prima formă fundamentală defineşte *metrica suprafeţei* (indusă de metrica lui E), adică ne permite să calculăm *lungimea unui arc de curbă* situat pe suprafaţă, *unghiul dintre două direcţii tangente* într-un punct al suprafeţei cât şi *aria unui domeniu* de pe suprafaţă.

Lungimea unui arc de curbă de pe suprafaţă

Fie $\mathcal{C} = \widehat{AB}$ un arc de curbă pe suprafaţa $\mathcal{S}$, dat prin ecuaţiile

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad t \in [a, b],$$

cu extremităţile în punctele $A(a)$, $B(b)$. Ecuaţia sa vectorială este

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u(t), v(t)), \quad t \in [a, b],$$

prin urmare $d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)\,dt = (\mathbf{r}_u u'(t) + \mathbf{r}_v v'(t))\,dt$ şi ca atare elementul de arc va fi dat de

$$ds = ||d\mathbf{r}|| = \sqrt{\Phi(d\mathbf{r})} = \sqrt{\Phi(u', v')}\,dt.$$

Lungimea arcului de curbă $\widehat{AB}$ se scrie atunci

$$L_{AB} = \int_{\widehat{AB}} ds = \int_a^b \sqrt{\Phi(u', v')}\,dt = \int_a^b \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}\,dt,$$

în care coeficienţii E, F, G ai formei pătratice Φ se calculează în punctul $M(u(t), v(t))$.

Unghiul dintre două direcţii tangente suprafeţei

Fie

$$\mathcal{C}_1: \ u = u_1(t_1), \ v = v_1(t_1), \quad \mathcal{C}_2: \ u = u_2(t_2), \ v = v_2(t_2),$$

două arce de curbă pe suprafaţa $\mathcal{S}$, care se intersectează în punctul M_0 şi fie t_1^0 şi respectiv t_2^0 valorile parametrilor pe cele două curbe pentru care se obţine punctul M_0. Prin unghi dintre arcele $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ în punctul M_0, înţelegem unghiul θ dintre vectorii directori ai tangentelor la cele două arce în M_0. Deoarece

$$\mathcal{C}_1: \ \mathbf{r} = \mathbf{r}(u_1(t_1), v_1(t_1)) = \mathbf{r}_1(t_1), \ \ \mathcal{C}_2: \ \mathbf{r} = \mathbf{r}(u_2(t_2), v_2(t_2)) = \mathbf{r}_2(t_2),$$

rezultă că

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{r}_1'(t_1^0)\cdot\mathbf{r}_2'(t_2^0)}{||\mathbf{r}_1'(t_1^0)||\,||\mathbf{r}_2'(t_2^0)||} = \left.\frac{d\mathbf{r}_1\cdot d\mathbf{r}_2}{\sqrt{d\mathbf{r}_1^2}\,\sqrt{d\mathbf{r}_2^2}}\right|_{M_0} = \left.\frac{\phi(d\mathbf{r}_1, d\mathbf{r}_2)}{\sqrt{\Phi(d\mathbf{r}_1)}\,\sqrt{\Phi(d\mathbf{r}_2)}}\right|_{M_0},$$

sau

$$\cos\theta = \left.\frac{E\,du_1du_2 + F(du_1dv_2 + du_2dv_1) + G\,dv_1dv_2}{\sqrt{E\,du_1^2 + 2F\,du_1dv_1 + G\,dv_1^2}\,\sqrt{E\,du_2^2 + 2F\,du_2dv_2 + G\,dv_2^2}}\right|_{M_0}.$$

Exemplul 9.26 *Să calculăm unghiul dintre liniile parametrice ale suprafeţei care trec prin punctul $M_0(u_0, v_0)$, ale căror ecuaţii sunt: $v = v_0$, $u = u_0$. Avem*

$$\mathcal{C}_1: \ \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_0) = \mathbf{r}_1(u), \ \ \mathcal{C}_2: \ \mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v) = \mathbf{r}_2(v)$$

şi deci $d\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_u\,du$, $d\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_v\,dv$ şi cum $d\mathbf{r}_1\cdot d\mathbf{r}_2 = F\,dudv$, $||d\mathbf{r}_1|| = \sqrt{E}\,du$, $||d\mathbf{r}_2|| = \sqrt{G}\,dv$, găsim

$$\cos\theta = \left.\frac{F}{\sqrt{EG}}\right|_{M_0}.$$

Direcţiile $d\mathbf{r}_1$ şi $d\mathbf{r}_2$ tangente într-un punct M la suprafaţă sunt *ortogonale* dacă $d\mathbf{r}_1\cdot d\mathbf{r}_2 = 0$, sau

$$\phi(d\mathbf{r}_1, d\mathbf{r}_2) = E\,du_1du_2 + F(du_1dv_2 + du_2dv_1) + G\,dv_1dv_2 = 0. \tag{9.97}$$

Definiţia 9.47 *O reţea pe $\mathcal{S}$ se numeşte* ortogonală *dacă direcţiile definite de ea în fiecare punct sunt ortogonale.*

Teorema 9.7 *Reţeaua*

$$A(u,v)\,du^2 + 2B(u,v)\,du\,dv + C(u,v)\,dv^2 = 0 \tag{9.98}$$

este ortogonală d.d.

$$AG - 2BF + CE = 0. \tag{9.99}$$

$\triangleleft$ Într-adevăr, presupunând $A \neq 0$, ecuaţia (9.98) se mai scrie

$$A\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2B\,\frac{du}{dv} + C = 0.$$

Dacă $d\mathbf{r}_1(du_1, dv_1)$, $d\mathbf{r}_2(du_2, dv_2)$ sunt direcţiile definite de ecuaţia (9.98), atunci

$$\frac{du_1}{dv_1} + \frac{du_2}{dv_2} = -\frac{2B}{A}, \quad \frac{du_1}{dv_1}\cdot\frac{du_2}{dv_2} = \frac{C}{A},$$

care înlocuite în condiţia de ortogonalitate (9.97), conduc la condiţia (9.99). $\triangleright$

Reţeaua parametrică pe $\mathcal{S}$ este ortogonală d.d. $F = 0$ în fiecare punct de pe $\mathcal{S}$.

Elementul de arie a unei suprafaţe

Fie $v = v_0$, $u = u_0$ liniile parametrice ale suprafeţei prin punctul $M_0(u_0, v_0)$ şi $d\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_u\,du$, $d\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_v\,dv$ vectorii diferenţiali ai direcţiilor tangentelor la cele două linii. Vom numi *element de arie* a suprafeţei $\mathcal{S}$ aria paralelogramului construit pe vectorii $d\mathbf{r}_1$, $d\mathbf{r}_2$ ca laturi

$$dS = ||d\mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_2|| = ||\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v||\,dudv = \sqrt{EG - F^2}dudv.$$

9.3.6 A doua formă fundamentală a unei suprafeţe

Fie dată suprafaţa $\mathcal{S}$, regulată de ordin cel puţin doi

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \quad (u, v) \in \Delta \tag{9.100}$$

şi fie

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{||\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v||}, \tag{9.101}$$

versorul normalei la $\mathcal{S}$ în punctul $M(u, v)$. Deoarece $\mathbf{N}^2 = 1$, urmează că $\mathbf{N}\cdot\mathbf{N}_u = 0$, $\mathbf{N}\cdot\mathbf{N}_v = 0$, adică $\mathbf{N}_u$, $\mathbf{N}_v \in T_M(\mathcal{S})$.

Aplicaţia $T : T_M(\mathcal{S}) \to T_M(\mathcal{S})$, definită prin

$$T(d\mathbf{r}) = -d\mathbf{N} = -\left(\mathbf{N}_u du + \mathbf{N}_v dv\right), \ \ \forall\, d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv \in T_M(\mathcal{S})$$

se numeşte *operatorul lui Weingarten.*

Prin calcul direct se arată că:

$$\begin{cases} T(\alpha_1 d\mathbf{r}_1 + \alpha_2 d\mathbf{r}_2) = \alpha_1 T(d\mathbf{r}_1) + \alpha_2 T(d\mathbf{r}_2), \\ T(d\mathbf{r}_1)\cdot d\mathbf{r}_2 = d\mathbf{r}_1\cdot T(d\mathbf{r}_2), \end{cases} \quad \forall\, d\mathbf{r}_1, d\mathbf{r}_2 \in T_M(\mathcal{S}),$$

adică T este o *transformare liniară simetrică* pe $T_M(\mathcal{S})$. Putem atunci asocia lui T *forma biliniară* ψ pe $T_M(\mathcal{S})$:

$$\psi(d\mathbf{r}_1, d\mathbf{r}_2) = T(d\mathbf{r}_1)\cdot\ d\mathbf{r}_2, \quad \forall\, d\mathbf{r}_1, d\mathbf{r}_2 \in T_M(\mathcal{S}). \tag{9.102}$$

Din $\mathbf{N}\cdot\mathbf{r}_u = 0$, $\mathbf{N}\cdot\mathbf{r}_v = 0$, prin derivare rezultă:

$$\mathbf{N}_u\cdot\mathbf{r}_u + \mathbf{N}\cdot\mathbf{r}_{uu} = 0, \ \ \mathbf{N}_v\cdot\mathbf{r}_u + \mathbf{N}\cdot\mathbf{r}_{uv} = 0, \ \ \mathbf{N}_u\cdot\mathbf{r}_v + \mathbf{N}\cdot\mathbf{r}_{vu} = 0, \ \ \mathbf{N}_v\cdot\mathbf{r}_v + \mathbf{N}\cdot\mathbf{r}_{vv} = 0.$$

Notând: $L = \mathbf{N} \cdot \mathbf{r}_{uu}$, $M = \mathbf{N} \cdot \mathbf{r}_{uv}$, $N = \mathbf{N} \cdot \mathbf{r}_{vv}$, obţinem expresia analitică a formei ψ în baza $\{\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\}$:

$$\psi(d\mathbf{r}_1, d\mathbf{r}_2) = L\, du_1 du_2 + M(du_1 dv_2 + du_2 dv_1) + N\, dv_1 dv_2. \tag{9.103}$$

Forma pătratică asociată formei biliniare simetrice ψ, a cărei expresie analitică este

$$\Psi(d\mathbf{r}) = T(d\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -d\mathbf{N} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{N} \cdot d^2\mathbf{r} = L\, du^2 + 2M\, dudv + N\, dv^2,$$

se numeşte *a doua formă fundamentală a suprafeţei.* Ţinând seama de (9.101), coeficienţii formei Ψ vor avea expresiile:

$$L = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_{uu}),\ M = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_{uv}),\ N = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_{vv}),\quad \Delta = EG - F^2.$$

Dacă suprafaţa este dată prin ecuaţia explicită $z = f(x, y)$, forma a doua fundamentală se scrie

$$\Psi(dx, dy) = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}(r\, dx^2 + 2s\, dxdy + t\, dy^2),$$

unde $p = \partial f/\partial x$, $q = \partial f/\partial y$, $r = \partial^2 f/\partial x^2$, $s = \partial^2 f/\partial x \partial y$, $t = \partial^2 f/\partial y^2$.

Definiţia 9.48 *Direcţia* $d\mathbf{r}(du, dv)$ *tangentă în* M *la* $\mathcal{S}$ *se numeşte* asimptotică *dacă*

$$\Psi(d\mathbf{r}) = L\, du^2 + 2M\, dudv + N\, dv^2 = 0. \tag{9.104}$$

Dacă L, M, N nu sunt simultan nuli, ecuaţia (9.104) determină două direcţii asimptotice reale distincte, confundate sau imaginare, după cum $M^2 - LN$ este pozitiv, nul sau negativ.

Definiţia 9.49 *Punctul* $M(u, v) \in \mathcal{S}$ *se numeşte:*
a) hiperbolic *dacă* $M^2 - LN > 0$,
b) parabolic *dacă* $M^2 - LN = 0$,
c) eliptic *dacă* $M^2 - LN < 0$.
Un punct al suprafeţei în care $L = M = N = 0$ *se numeşte* punct planar.

Exemplul 9.27 *1. Toate punctele unui hiperboloid cu o pânză şi ale unui paraboloid hiperbolic sunt* hiperbolice. *Direcţiile asimptotice sunt direcţiile generatoarelor rectilinii ale acestor suprafeţe.*

2. Toate punctele unui elipsoid, hiperboloid cu două pânze sau paraboloid eliptic sunt eliptice.

3. Toate punctele unui plan sunt planare.

Definiţia 9.50 *Numim* linii asimptotice *pe suprafaţa* $\mathcal{S}$ *curbele de pe suprafaţă ale căror angente în fiecare punct al lor au direcţii asimptotice.*

Pe o suprafaţă formată din puncte hiperbolice, liniile asimptotice formează o reţea reală numită *reţeaua asimptotică*, a cărei ecuaţie diferenţială este (9.104).

Reţeaua parametrică pe $\mathcal{S}$ este o reţea asimptotică d.d. $L = N = 0$.

O proprietate a liniilor asimptotice este pusă în evidenţă de teorema care urmează.

Teorema 9.8 *Planul osculator în fiecare punct ordinar al unei linii asimptotice coincide cu planul tangent la suprafaţă în acel punct.*

$\triangleleft$ Fie $u = u(t)$, $v = v(t)$ o linie parametrică pe $\mathcal{S}$, deci a cărei direcţie a tangentei în $M(u(t), v(t))$ este asimptotică: $\Psi(d\mathbf{r}) = 0$ sau $\mathbf{N} \cdot d^2\mathbf{r} = 0$, adică $\mathbf{N} \cdot \mathbf{r}'' = 0$. Dar cum $\mathbf{N} \cdot \mathbf{r}' = 0$ pentru orice curbă, deducem $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' \parallel \mathbf{N}$, adică normala la planul osculator este coliniară cu normala la $\mathcal{S}$ în M, deci planul osculator coincide cu planul tangent la suprafaţă. $\triangleright$

Consecinţa 9.1 *Orice dreaptă situată pe o suprafaţă regulată este linie asimptotică pe suprafaţă.*

Exemplul 9.28 *Generatoarele rectilinii ale hiperboloidului cu o pânză şi ale paraboloidului hiperbolic sunt linii asimptotice pe aceste suprafeţe.*

Definiţia 9.51 *Spunem că două direcţii $d\mathbf{r}_1(du_1, dv_1)$, $d\mathbf{r}_2(du_2, dv_2)$ tangente la $\mathcal{S}$ într-un punct ordinar al ei sunt* conjugate *dacă*

$$\psi(d\mathbf{r}_1, d\mathbf{r}_2) = L\, du_1 du_2 + M(du_1 dv_2 + du_2 dv_1) + N\, dv_1 dv_2 = 0. \tag{9.105}$$

Teorema 9.9 *Reţeaua*

$$A(u, v)\, du^2 + 2B(u, v)\, du\, dv + C(u, v)\, dv^2 = 0$$

este o reţea conjugată d.d. $AN - 2BM + CL = 0$.

$\triangleleft$ Demonstraţia este asemănătoare celei de la Teorema 9.7. $\triangleright$

Reţeaua parametrică pe $\mathcal{S}$ este conjugată d.d. $M = 0$.

Exemplul 9.29 *Fie sfera de rază R cu centrul în origine $\mathbf{r} = R(\mathbf{i}\cos v + \mathbf{j}\sin v)\cos u + R\,\mathbf{k}\sin u$. Avem*

$$\mathbf{r}_u = -R(\mathbf{i}\cos v + \mathbf{j}\sin v)\sin u + R\,\mathbf{k}\cos u, \quad \mathbf{r}_v = R(-\mathbf{i}\sin v + \mathbf{j}\cos v)\cos u,$$

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = -[R^2(\mathbf{i}\cos v + \mathbf{j}\sin v)\cos^2 u + R^2\mathbf{k}\sin u\cos u],$$

deci $||\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|| = R^2\cos v$, $\mathbf{N} = -[(\mathbf{i}\cos v + \mathbf{j}\sin v)\cos u + \mathbf{k}\sin u]$. Apoi

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{uu} = -R(\mathbf{i}\cos v + \mathbf{j}\sin v)\cos u - R\,\mathbf{k}\sin u, \\ \mathbf{r}_{uv} = R(\mathbf{i}\sin v - \mathbf{j}\cos v)\sin u, \\ \mathbf{r}_{vv} = -R(\mathbf{i}\cos v + \mathbf{j}\sin v)\cos u, \end{cases}$$

de unde: $L = \mathbf{N} \cdot \mathbf{r}_{uu} = R$, $M = \mathbf{N} \cdot \mathbf{r}_{uv} = 0$, $N = \mathbf{N} \cdot \mathbf{r}_{vv} = R\cos^2 u$, deci

$$\Psi(d\mathbf{r}) = R(\, du^2 + \cos^2 u\, dv^2), \;\; \psi(d\mathbf{r}_1, d\mathbf{r}_2) = R(\, du_1 du_2 + \cos^2 u\;\, dv_1 dv_2).$$

Ecuaţia $\Psi(d\mathbf{r}) = 0$ nu are rădăcini reale, deci sfera nu are direcţii asimptotice, toate punctele sale sunt eliptice.

Două direcţii $d\mathbf{r}_1(du_1, dv_1)$, $d\mathbf{r}_2(du_2, dv_2)$ tangente într-un punct al sferei sunt *conjugate* dacă $du_1 du_2 + \cos^2 u\;\, dv_1 dv_2 = 0$.

9.3.7 Curbura normală. Curburi principale

Fie dată suprafaţa $\mathcal{S}$, regulată de ordin cel puţin doi

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \quad (u, v) \in \Delta \tag{9.106}$$

şi fie $\mathcal{C}_n$ un arc al unei secţiuni normale la $\mathcal{S}$ în punctul $M(u, v)$, reprezentat analitic prin ecuaţiile

$$u = u(s), \quad v = v(s), \tag{9.107}$$

unde s este parametrul natural pe $\mathcal{C}_n$. Cum planul osculator al curbei $\mathcal{C}_n$ în M este planul secţiunii normale, rezultă că $\mathbf{N} = \pm\mathbf{n}_n$ sau $|\mathbf{N} \cdot \mathbf{n}_n| = 1$, unde am notat cu $\mathbf{n}_n$ versorul normalei principale la curba $\mathcal{C}_n$. Fie κ_n curbura secţiunii normale $\mathcal{C}_n$ în $M(u(s), v(s))$. Din prima formulă a lui Frénet avem că

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \kappa_n\, \mathbf{n}_n, \tag{9.108}$$

de unde, cu $|\mathbf{N} \cdot \mathbf{n}_n| = 1$, deducem pentru curbura secţiunii normale expresia

$$\kappa_n = \left|\frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{d}^2\mathbf{r}}{ds^2}\right| = \left|\frac{\Psi(d\mathbf{r})}{\Phi(d\mathbf{r})}\right|. \tag{9.109}$$

Deoarece raportul $\Psi(d\mathbf{r})/\Phi(d\mathbf{r})$ nu depinde decât de direcţia $d\mathbf{r}$ tangentă în M la $\mathcal{S}$, putem da următoarea definiţie.

Definiţia 9.52 *Numim* curbură normală *a suprafeţei $\mathcal{S}$ în punctul ei ordinar $M(u, v)$, în direcţia $d\mathbf{r}(du, dv)$, raportul*

$$K_n(d\mathbf{r}) = \frac{\Psi(d\mathbf{r})}{\Phi(d\mathbf{r})}. \tag{9.110}$$

Din (9.109) deducem atunci: $\kappa_n = |K_n|$.

Ţinând seama de (9.104) şi (9.110) rezultă că direcţiile asimptotice într-un punct al suprafeţei $\mathcal{S}$ se caracterizează prin condiţia $K_n(d\mathbf{r}) = 0$.

Definiţia 9.53 *Numim* direcţie principală *într-un punct ordinar al suprafeţei $\mathcal{S}$ direcţia tangentă la $\mathcal{S}$ pentru care curbura normală are o valoare extremă.*

Valoarea curburii normale pentru o direcţie principală se numeşte curbură principală.

Direcţiile principale sunt nedeterminate în punctele *planare* (pentru care $L = M = N = 0$) şi în punctele *ombilicale* (pentru care coeficienţii celor două forma fundamentale sunt proporţionali). În primul caz $K_n = 0$ pentru orice direcţie, iar în cel de-al doilea caz K_n nu depinde de direcţie.

Teorema 9.10 *Prin orice punct ordinar al unei suprafeţe, care nu este punct planar sau ombilical, trec două direcţii principale reale şi distincte.*

◁ Dacă $d\mathbf{r}(du, dv)$ este o direcţie principală, deci pentru care K_n are o valoare extremă, atunci derivatele parţiale ale lui $K_n(du, dv)$ în raport cu du şi dv se anulează. Cum $\Psi = K_n\Phi$, din $\partial K_n/\partial(du) = 0$, $\partial K_n/\partial(dv) = 0$, deducem

$$\frac{\partial\Psi/\partial(du)}{\partial\Phi/\partial(du)} = \frac{\partial\Psi/\partial(dv)}{\partial\Phi/\partial(dv)} = K_n,$$

sau

$$\frac{L\,du + M\,dv}{E\,du + F\,dv} = \frac{M\,du + N\,dv}{F\,du + G\,dv} = K_n. \tag{9.111}$$

Deci direcţiile principale satisfac ecuaţia diferenţială

$$\begin{vmatrix} E\,du + F\,dv & F\,du + G\,dv \\ L\,du + M\,dv & M\,du + N\,dv \end{vmatrix} = 0 \tag{9.112}$$

sau echivalent

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$

sau încă

$$(EM - FL)\,du^2 + (EN - GL)\,du\,dv + (FN - GM)\,dv^2 = 0. \tag{9.113}$$

Discriminantul ecuaţiei (9.113) $D = (EN-GL)^2-4(EM-FL)(FN-GM)$ se poate pune sub forma

$$D = \frac{1}{EG}[E(FN - GM) - G(EM - FL)]^2 + \frac{EG - F^2}{EG}(EN - GL)^2 > 0.$$

Cum $D > 0$ în orice punct care un este planar sau ombilical, ecuaţia (9.113) are două rădăcini reale şi distincte. ▷

Teorema 9.11 *Două direcţii $d\mathbf{r}_1$ şi $d\mathbf{r}_2$ tangente în punctul M la $\mathcal{S}$ sunt* principale *d.d. sunt* ortogonale *şi* conjugate.

◁ Direcţiile $d\mathbf{r}_1(du_1, dv_1)$, $d\mathbf{r}_2(du_2, dv_2)$ sunt ortogonale şi conjugate dacă:

$$\begin{cases} \phi(d\mathbf{r}_1, d\mathbf{r}_2) = E\,du_1du_2 + F(du_1dv_2 + du_2dv_1) + G\,dv_1dv_2 = 0, \\ \psi(d\mathbf{r}_1, d\mathbf{r}_2) = L\,du_1du_2 + M(du_1dv_2 + du_2dv_1) + N\,dv_1dv_2 = 0. \end{cases} \tag{9.114}$$

Necesitatea. Dacă direcţiile $d\mathbf{r}_1$, $d\mathbf{r}_2$ sunt principale, atunci (du_1, dv_1) şi (du_2, dv_2) sunt rădăcinile ecuaţiei (9.113) şi ţinând seama de relaţiile dintre rădăcinile şi coeficienţii unei ecuaţii de gradul al doilea, rezultă că verifică (9.114), adică sunt ortogonale şi conjugate.

Suficienţa. Sistemul (9.114) în necunoscutele (du_2, dv_2) admite soluţii nebanale d.d. (du_1, dv_1) satisface (9.112), adică direcţia $d\mathbf{r}_1$ este principală. Schimbând rolul celor două direcţii, rezultă că şi $d\mathbf{r}_2$ este principală. ▷

Definiţia 9.54 *Numim* linii de curbură *ale suprafeţei $\mathcal{S}$ curbele de pe suprafaţă tangente în fiecare punct al lor direcţiilor principale.*

Ecuaţia diferenţială a liniilor de curbură este ecuaţia (9.112).

În vecinătatea oricărui punct al suprafeţei $\mathcal{S}$, care nu este planar sau ombilical, liniile de curbură formează o reţea conjugată şi ortogonală.

Reţeaua parametrică pe $\mathcal{S}$ este reţeaua liniilor de curbură d.d. $F = 0$ (este ortogonală) şi $M = 0$ (este conjugată).

Din (9.111) rezultă că o direcţie principală $d\mathbf{r}(du, dv)$ este o soluţie nebanală a sistemului:

$$\begin{cases} (L - EK_n)\, du + (M - FK_n)\, dv = 0, \\ (M - FK_n)\, du + (N - GK_n)\, dv = 0. \end{cases}$$

Dar curbura normală într-o direcţie principală este o curbură principală. Cum sistemul precedent admite soluţii nebanale d.d. determinantul său este nul, rezultă că curburile principale sunt rădăcinile ecuaţiei

$$\begin{vmatrix} L - EK_n & M - FK_n \\ M - FK_n & N - GK_n \end{vmatrix} = 0 \tag{9.115}$$

sau

$$(EG - F^2)\, K_n^2 - (EN - 2FM + GL)\, K_n + LN - M^2 = 0. \tag{9.116}$$

Ecuaţia (9.116) ne permite să calculăm direct (fără a determina direcţiile principale) curburile principale: $K_1 = K_n(d\mathbf{r}_1)$, $K_2 = K_n(d\mathbf{r}_2)$.

Produsul rădăcinilor ecuaţiei (9.116) se mai numeşte *curbură totală* (gaussiană) a suprafeţei în punctul M

$$\mathcal{K} = K_1 \cdot K_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$

iar semisuma acestor rădăcini se mai numeşte *curbură medie* a suprafeţei în punctul M

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(K_1 + K_2) = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}.$$

Cu acestea ecuaţia (9.116) se mai scrie $K_n^2 - 2\mathcal{H}\, K_n + \mathcal{K} = 0$.

Punctul M al suprafeţei $\mathcal{S}$ este: a) *hiperbolic* dacă $\mathcal{K} < 0$, b) *parabolic* dacă $\mathcal{K} = 0$, c) *eliptic* dacă $\mathcal{K} > 0$.

Exemplul 9.30 *Sfera de rază R are curbura totală constantă $\mathcal{K} = 1/R^2$.*

Capitolul 10

INTEGRALA RIEMANN ŞI EXTINDERI

10.1 Primitive. Integrala nedefinită

Fie I un interval oarecare (mărginit sau nemărginit, închis sau deschis) al axei reale şi $f : I \to \mathbf{R}$.

Definiţia 10.1 *Se numeşte* primitivă *a funcţiei f pe intervalul I, o funcţie $F : I \to \mathbf{R}$, derivabilă pe I, care satisface condiţia*

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I. \tag{10.1}$$

Din definiţie rezultă că funcţia şi primitiva ei sunt definite pe un interval ce nu se reduce la un punct şi nu pe o reuniune de intervale sau alt tip de mulţime de numere reale.

Când spunem că funcţia $F(x)$ este primitiva funcţiei $f(x)$, fără a indica intervalul I, atunci se subînţelege că I este orice interval pe care funcţia f este definită.

Teorema 10.1 *Dacă $F(x)$ este o primitivă a funcţiei $f(x)$ pe intervalul I, atunci funcţia $F(x) + C$ este de asemenea o primitivă a funcţiei f. Dacă $F(x)$ şi $\Phi(x)$ sunt două primitive ale funcţiei f pe intervalul I, atunci $\Phi(x) - F(x) = C$, oricare ar fi $x \in I$.*

$\lhd$ Deoarece $(F(x) + C)' = f(x)$, rezultă că $F(x) + C$ este o primitivă a funcţiei f. Pe de altă parte, deoarece $F(x)$ şi $\Phi(x)$ sunt primitive ale funcţiei $f(x)$ pe intervalul I, rezultă că $(\Phi(x) - F(x))' = 0$. Cum I este interval, deducem că $\Phi(x) - F(x) = C$. $\rhd$

Din această teoremă rezultă că dacă funcţia f admite o primitivă atunci ea admite o infinitate de primitive; dacă $F(x)$ este o primitivă a funcţiei $f(x)$, atunci orice altă primitivă este de forma $F(x) + C$. Spunem că primitiva unei funcţii se determină până la o constantă aditivă.

Definiţia 10.2 *Se numeşte* integrală nedefinită *a funcţiei $f : I \to \mathbf{R}$, mulţimea tuturor primitivelor funcţiei f pe intervalul I.*

Integrala nedefinită a funcţiei f se notează cu simbolul $\int f(x)\,dx$. Din teorema precedentă rezultă că dacă $F(x)$ este o primitivă oarecare a funcţiei $f(x)$ pe intervalul I, atunci

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbf{R}. \tag{10.2}$$

Din definiţie şi expresia (10.2), rezultă următoarele proprietăţi imediate ale integralei nedefinite:

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx, \quad \frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x), \tag{10.3}$$

$$\int dF(x) = F(x) + C, \quad \int F'(x)\,dx = F(x) + C. \tag{10.4}$$

În legătură cu primitivele unei funcţii se pun următoarele probleme:

- care sunt clasele de funcţii ce admit primitive;

- dacă o funcţie admite primitive, cum se determină ele.

În ceea ce priveşte prima problemă afirmăm că: *orice funcţie continuă admite primitive*. Demonstraţia va fi dată în capitolul următor. Ne vom ocupa numai de primitivele funcţiilor continue.

În legătură cu a doua problemă, precizăm că ne va preocupa determinarea primitivelor acelor funcţii pentru care primitivele pot fi exprimate sub formă finită, adică pot fi exprimate cu ajutorul unui număr finit de operaţii aritmetice sau operaţii de compunere a funcţiilor elementare.

Există şi funcţii continue ale căror primitive nu pot fi exprimate sub formă finită. De exemplu:

$$e^{-x^2}, \quad \sin x^2, \quad \cos x^2, \quad \frac{\sin x}{x^n}, \quad \frac{\cos x}{x^n}, \quad \frac{1}{\ln x}, \quad \frac{e^x}{x}, \quad etc.$$

10.2 Calculul primitivelor

10.2.1 Integrala sumei şi produsului cu o constantă

Dacă funcţiile f şi g au primitive pe intervalul I, atunci funcţia $f + g$ are primitive pe I şi

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx. \tag{10.5}$$

Dacă funcţia f are primitive pe intervalul I şi $\alpha \in \mathbf{R}$, atunci funcţia αf are primitive pe I şi

$$\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx. \tag{10.6}$$

10.2.2 Integrarea prin părţi

Teorema 10.2 *Dacă funcţiile u şi v, definite pe intervalul I, au derivate continue pe I, atunci*

$$\int uv'dx = uv - \int u'v\,dx. \tag{10.7}$$

◁ Deoarece $(uv)' = u'v + uv'$ şi deci $uv' = (uv)' - u'v$, ţinând seama de (10.4), rezultă (10.7), numită şi *formula de integrare prin părţi.* ▷

Dacă presupunem că funcţiile u şi v, definite pe intervalul I, au derivate continue până la ordinul $n+1$ inclusiv, atunci are loc formula

$$\int uv^{(n+1)}dx = uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + \cdots + (-1)^n u^{(n)}v + (-1)^{(n+1)} \int u^{(n+1)}v\,dx, \tag{10.8}$$

numită şi *formula generalizată de integrare prin părţi.*

10.2.3 Schimbarea de variabilă în integrala nedefinită

Teorema 10.3 *Fie I şi J două intervale şi funcţiile $u : I \to J$, $f : J \to \mathbf{R}$. Dacă funcţia u are derivată continuă pe I, f este continuă pe J, iar F este o primitivă a funcţiei f, adică are loc (10.2), atunci funcţia compusă $F \circ u : I \to \mathbf{R}$, definită prin $(F \circ u)(t) = F(u(t))$, este o primitivă a funcţiei $f(u(t)) \cdot u'(t)$ pe I şi deci*

$$\int f(u(t)) \cdot u'(t)\,dt = F(u(t)) + C. \tag{10.9}$$

◁ Deoarece funcţiile F şi u sunt derivabile, funcţia $F \circ u$ este derivabilă şi avem

$$\frac{d}{dt}F(u(t)) = \frac{dF}{dx}(u(t)) \cdot u'(t).$$

Cum $F'(x) = f(x)$, rezultă că

$$\frac{d}{dt}F(u(t)) = f(u(t)) \cdot u'(t),$$

de unde (10.9). ▷

Teorema precedentă stă la baza *metodei schimbării de variabilă* (metoda substituţiei) în integrala nedefinită. Ea se foloseşte de fapt pentru găsirea primitivelor funcţiei $f(x)$ pe J atunci când, în urma substituţiei $x = u(t)$, este mai uşor de găsit o primitivă a funcţiei $f(u(t))u'(t)$ pe I. Dacă $\Phi(t)$ este o primitivă a funcţiei $f(u(t))u'(t)$, atunci

$$F(u(t)) = \Phi(t) + C_0. \tag{10.10}$$

Această relaţie ne permite să determinăm pe $F(x)$. Pentru aceasta presupunem că funcţia $u : I \to J$ este inversabilă, adică există funcţia $u^{-1} : J \to I$, $t = u^{-1}(x)$. Înlocuind în (10.10), găsim

$$F(x) = \Phi(u^{-1}(x)) + C_0.$$

Exemplul 10.1 *Prin schimbarea de variabilă $x = t + a$ obţinem*

$$I = \int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C.$$

Exemplul 10.2 *Prin schimbarea de variabilă $x = t + a$ obţinem*

$$I = \int \frac{dx}{(x-a)^n} = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C.$$

Exemplul 10.3 *Se dă integrala*

$$I = \int \frac{dx}{x^2 - 2ax + b}, \quad a^2 - b < 0.$$

Deoarece $x^2 - 2ax + b = (x-a)^2 + \alpha^2$ cu $\alpha = \sqrt{b - a^2}$, prin schimbarea de variabilă $x = \alpha t + a$, obţinem

$$I = \frac{1}{\alpha} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{x-a}{\alpha} + C.$$

10.2.4 Integrarea prin recurenţă

În multe cazuri funcţia de integrat depinde nu numai de argumentul său ci şi de un număr natural n. Se poate întâmpla ca aplicând metoda de integrare prin părţi să obţinem o integrală de aceeaşi formă dar pentru o valoarea a lui n mai mică cu cel puţin o unitate. Continuând în acest mod, după un număr finit de paşi ajungem la una din integralele imediate. O asemenea metodă de calcul a integralelor se numeşte *integrarea prin recurenţă*. Vom ilustra această metodă prin câteva exemple.

Exemplul 10.4 *Fie integrala*

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2+1)^n}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Integrând prin părţi, avem

$$I_n = \frac{t}{(t^2+1)^n} - \int t\, d\left(\frac{1}{(t^2+1)^n}\right) = \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2n \int \frac{t^2}{(t^2+1)^{n+1}} dt.$$

De unde

$$I_{n+1}(t) = \frac{1}{2n} \frac{t}{(t^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n(t), \quad cu \quad I_1(t) = \operatorname{arctg} t + C.$$

Exemplul 10.5 *Fie integrala*

$$J_n(x) = \int \frac{Ax + B}{(x^2 - 2ax + b)^n} dx, \quad a^2 - b < 0, \ n \in \mathbf{N}.$$

După transformări evidente, găsim

$$J_n(x) = \frac{A}{2}\int \frac{2(x-a)}{(x^2-2ax+b)^n}dx + (Aa+B)\int \frac{dx}{(x^2-2ax+b)^n}.$$

Pentru $n = 1$ obţinem

$$J_1(x) = \frac{A}{2}\ln(x^2-2ax+b) + \frac{Aa+B}{\alpha}\mathrm{arctg}\frac{x-a}{\alpha} + c, \quad \alpha = \sqrt{b-a^2}.$$

Pentru $n > 1$, să efectuăm în integrala a doua schimbarea de variabilă $x = \alpha t + a$, cu $\alpha = \sqrt{b-a^2}$. Avem

$$\int \frac{dx}{(x^2-2ax+b)^n} = \int \frac{dx}{[(x-a)^2+\alpha^2]^n} = \frac{1}{\alpha^{2n-1}}I_n(t),$$

în care $I_n(t)$ este integrala din exerciţiul precedent. Prin urmare

$$J_n(x) = \frac{A}{2(1-n)}\frac{1}{(x^2-2ax+b)^{n-1}} + \frac{Aa+B}{\alpha^{2n-1}}\cdot I_n\left(\frac{x-a}{\alpha}\right).$$

10.3 Integrarea funcţiilor raţionale

O clasă importantă de funcţii ale căror primitive se pot exprima sub formă finită este clasa funcţiilor raţionale. Prin *funcţie raţională* se înţelege o funcţie de forma

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \tag{10.11}$$

unde $P(x)$ şi $Q(x)$ sunt polinoame reale.

Asemenea funcţii sunt definite pe reuniuni de intervale şi sunt continue pe tot domeniul de definiţie. Vom presupune că $P(x)$ şi $Q(x)$ nu au factori comuni.

Fără a restrânge generalitatea putem presupune că

$$\mathrm{grad}\, P(x) < \mathrm{grad}\, Q(x). \tag{10.12}$$

În caz contrar, făcând împărţirea, avem

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}, \quad \mathrm{grad}\, P_1(x) < \mathrm{grad}\, Q(x). \tag{10.13}$$

Va fi atunci suficient să ne ocupăm de integrarea funcţiilor raţionale de forma (10.11) cu condiţia (10.12). Presupunem că $\mathrm{grad}\, Q(x) = n$.

Dacă a_i, $i = \overline{1,r}$, sunt rădăcinile reale, de ordinele de multiplicitate n_i şi $\alpha_k \pm i\beta_k$, $k = \overline{1,s}$, sunt rădăcinile complexe de ordinele de multiplicitate m_k, ale ecuaţiei $Q(x) = 0$, atunci $Q(x)$ se poate factoriza sub forma

$$Q(x) = a_0(x-a_1)^{n_1}\cdots(x-a_r)^{n_r}(x^2-2p_1x+q_1)^{m_1}\cdots(x^2-2p_sx+q_s)^{m_s}, \tag{10.14}$$

unde $n_1 + \cdots + n_r + 2(m_1 + \cdots + m_s) = n$, iar $\alpha_k \pm i\beta_k$ sunt rădăcinile ecuaţiei

$$x^2 - 2p_k x + q_k = 0, \quad \text{cu} \quad p_k^2 - q_k < 0.$$

Vom numi *fracţii simple* funcţiile raţionale de forma

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \quad \frac{Mx+N}{(x^2-2px+q)^m},$$

unde $A, M, N, a, p, q \in \mathbf{R}$ cu $p^2 - q < 0$, $n, m \in \mathbf{N}$.

Orice funcţie raţională de forma (10.11) se poate reprezenta în mod unic sub forma unei sume finite de fracţii simple.

Când se cunoaşte descompunerea (10.14) a polinomului $Q(x)$, pentru scrierea funcţiei raţionale $R(x)$ ca sumă de fracţii simple trebuie să ţinem seama de următoarele:

a). Prezenţa unui factor de forma $(x-a)^n$ în (10.14) furnizează în descompunere o sumă de fracţii simple de forma

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n}. \tag{10.15}$$

b). Prezenţa unui factor de forma $(x^2-2px+q)^m$ în (10.14) furnizează în descompunere o sumă de fracţii simple de forma

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2-2px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2-2px+q)^2} + \cdots + \frac{M_mx+N_m}{(x^2-2px+q)^m}. \tag{10.16}$$

Coeficienţii A_i, M_k, N_k se pot determina prin metoda coeficienţilor nedeterminaţi.

Rezultă că integrarea funcţiilor raţionale se reduce la integrarea fracţiilor simple. Integrarea acestora s-a făcut în exemplele precedente.

10.3.1 Integrale reductibile la integrale din funcţii raţionale

Prin funcţie raţională în variabilele x, y înţelegem o funcţie de forma

$$R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)},$$

unde $P(x,y)$ şi $Q(x,y)$ sunt polinoame în variabilele x şi y.

A). Primitive de forma

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx.$$

Efectuând schimbarea de variabilă $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, adică $x = 2\operatorname{arctg} t$, $t \in \mathbf{R}$, integrala devine

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx = 2\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{dt}{1+t^2}.$$

Dacă integrala se poate scrie sub una din formele

$$\int f(\sin x)\cos x\, dx, \quad \int f(\cos x)\sin x\, dx, \quad \int f(\operatorname{tg} x)\, dx,$$

sunt de preferat substituţiile $t = \sin x$, $t = \cos x$, $t = \operatorname{tg} x$, respectiv.

B). Primitive de forma

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx.$$

Presupunem că $ad - bc \neq 0$, căci în caz contrar

$$\frac{ax+b}{cx+d} = k.$$

Cu ajutorul schimbării de variabilă

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \quad x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n},$$

obţinem

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = n(ad-bc)\int R\left(\frac{dt^n - b}{a - ct^n}, t\right) \frac{t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}\, dt.$$

C). Primitive de forma

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx.$$

Presupunem că trinomul $ax^2 + bx + c$ ia valori pozitive pe un anumit interval şi că $b^2 - 4ac \neq 0$.

Integralele de această formă se reduc la primitive din funcţii raţionale în urma unei *substituţii Euler*.

1. Dacă $a > 0$ se poate face schimbarea de variabilă

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a} + t, \quad x = \frac{t^2 - c}{b - 2t\sqrt{a}}.$$

Obţinem

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx =$$

$$= -2\int R\left(\frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}}, -\frac{t^2\sqrt{a} - bt + c\sqrt{a}}{b-2t\sqrt{a}}\right) \frac{t^2\sqrt{a} - bt + c\sqrt{a}}{(b-2t\sqrt{a})^2}\, dt.$$

2. Dacă $c \geq 0$ se poate face schimbarea de variabilă

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}, \quad x = \frac{2t\sqrt{c} - b}{a - t^2}.$$

Obţinem

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx =$$

$$= 2\int R\left(\frac{2t\sqrt{c}-b}{a-t^2}, \frac{t^2\sqrt{c}-bt+a\sqrt{c}}{a-t^2}\right)\frac{t^2\sqrt{c}-bt+a\sqrt{c}}{(a-t^2)^2}\,dt.$$

3. Dacă $a < 0$ şi $c < 0$ avem $b^2 - 4ac > 0$, căci altfel $ax^2 + bx + c < 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Fie x_1 şi x_2 rădăcinile reale ale ecuaţiei $ax^2 + bx + c = 0$. Atunci

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Efectuând substituţia

$$\sqrt{a(x - x_1)(x - x_2)} = t(x - x_1),$$

rezultă

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx = 2a(x_2 - x_1)\int R\left(\frac{ax_2 - x_1t^2}{a-t^2}, \frac{a(x_2-x_1)t}{a-t^2}\right)\frac{dt}{(a-t^2)^2}.$$

D). Integrale binome.

Prin *integrale binome* înţelegem integralele de forma

$$I = \int x^m(ax^n + b)^p dx, \tag{10.17}$$

unde m, n, p sunt numere raţionale. Cebâşev a demonstrat că există numai trei cazuri în care o integrală binomă se poate reduce la o integrală dintr-o funcţie raţională.

Să efectuăm în integrala (10.17) schimbarea de variabilă $x^n = t$, adică $x = t^{1/n}$. Obţinem

$$I = \frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1}(at+b)^p dt = \frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}+p-1}\left(\frac{at+b}{t}\right)^p dt. \tag{10.18}$$

Cele trei cazuri în care integrala binomă I se reduce la o integrală dintr-o funcţie raţională sunt:

1. Dacă p este întreg şi $\frac{m+1}{n} = \frac{r}{s}$, cu r şi s numere întregi, se efectuează schimbarea de variabilă $t = u^s$.

2. Dacă p nu este întreg, dar $\frac{m+1}{n}$ este întreg, $p = \frac{r}{s}$ cu r şi s numere întregi, se efectuează schimbarea de variabilă $at + b = u^s$.

3. Dacă p nu este întreg, $\frac{m+1}{n}$ nu este întreg, dar $\frac{m+1}{n} + p$ este întreg, $p = \frac{r}{s}$ cu r şi s numere întregi, se efectuează schimbarea de variabilă $\frac{at+b}{t} = u^s$.

10.4 Integrala definită

10.4.1 Sume integrale Riemann. Integrabilitate

Fie $[a, b]$, $a < b$, un interval închis şi mărginit al axei reale. O mulţime finită şi ordonată de puncte

$$\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset [a, b], \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

determină o *diviziune* sau o partiţie a intervalului $[a, b]$. Punctele $x_0, x_1, \dots, x_n$ se numesc *puncte de diviziune* ale diviziunii Δ. Fiecare interval $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$, se numeşte *interval parţial* al diviziunii Δ. Dacă notăm cu $\delta x_i = x_i - x_{i-1}$ *lungimea unui interval parţial* al diviziunii, avem

$$b - a = \sum_{i=1}^{n} \delta x_i.$$

Definiţia 10.3 *Se numeşte* normă *a diviziunii* Δ *numărul* $\nu = \nu(\Delta) = \max\left\{\delta x_i, i = \overline{1, n}\right\}$, *adică lungimea celui mai mare interval al diviziunii* Δ.

Fie (Δ_n) un şir de diviziuni ale intervalului $[a, b]$ şi (ν_n) şirul normelor acestora, $\nu_n = \nu(\Delta_n)$, $n \in \mathbf{N}$.

Definiţia 10.4 *Spunem că şirul* (Δ_n) *este un* şir normal de diviziuni *ale intervalului* $[a, b]$ *dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} \nu_n = 0$.

Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcţie definită pe intervalul *închis şi mărginit* $[a, b]$, Δ o diviziune a intervalului $[a, b]$ şi $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$.

Definiţia 10.5 *Se numeşte* sumă integrală Riemann *a funcţiei* f *corespunzătoare diviziunii* Δ *şi unei alegeri date a punctelor intermediare* ξ_i*, numărul* $\sigma = \sigma_\Delta(f)$ *definit prin*

$$\sigma = \sigma_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \delta x_i.$$

Deoarece există o infinitate de diviziuni ale unui interval $[a, b]$ şi pentru fiecare diviziune există o infinitate de moduri de alegere a punctelor intermediare ξ_i, rezultă că pentru o funcţie f mulţimea sumelor integrale Riemann este o mulţime infinită.

Sumele Riemann au următoarele proprietăţi:

1. Suma Riemann a funcţiei constante $f(x) = c$, $x \in [a, b]$ este

$$\sigma_\Delta(c) = \sum_{i=1}^{n} c\, \delta x_i = c \sum_{i=1}^{n} \delta x_i = c(b - a).$$

2. Dacă $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ şi α, β sunt constante arbitrare, avem $\sigma_\Delta(\alpha f + \beta g) = \alpha\sigma_\Delta(f) + \beta\sigma_\Delta(g)$.

3. Dacă $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ şi $f(x) \le g(x)$, $\forall x \in [a, b]$, atunci $\sigma_\Delta(f) \le \sigma_\Delta(g)$. În particular, dacă $f(x) \ge 0$, $\forall x \in [a, b]$, atunci $\sigma_\Delta(f) \ge 0$.

4. Pentru orice funcţie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, avem $|\sigma_\Delta(f)| \le \sigma_\Delta(|f|)$.

Definiţia 10.6 *Numărul finit I se numeşte* limita sumelor integrale $\sigma_\Delta(f)$ *când norma diviziunii tinde la zero, dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un $\delta(\varepsilon) > 0$ a.î. pentru orice diviziune Δ a cărei normă $\nu(\Delta) < \delta(\varepsilon)$ şi pentru orice alegere a punctelor intermediare, să avem*

$$|\sigma_\Delta(f) - I| < \varepsilon.$$

Scriem atunci

$$I = \lim_{\nu\to 0} \sigma_\Delta(f) = \lim_{\nu\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \delta x_i.$$

Se poate demonstra că definiţia precedentă este echivalentă cu definiţia următoare:

Definiţia 10.7 *Numărul finit I se numeşte* limita sumelor integrale $\sigma_\Delta(f)$ *când norma diviziunii tinde la zero, dacă pentru orice şir normal de diviziuni (Δ_n), şirul corespunzător al sumelor integrale $\sigma_n = \sigma_{\Delta_n}(f)$ este convergent la I, adică*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = I,$$

pentru orice alegere a punctelor intermediare ξ_i.

Dacă există numărul I spunem că funcţia f este *integrabilă* (în sens Riemann) pe $[a, b]$, iar I se numeşte *integrala definită* sau *integrala Riemann* a funcţiei f pe $[a, b]$ şi se notează

$$I(f) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Numerele a şi b se numesc *limite de integrare*, funcţia f *funcţia de integrat* sau *integrand*, iar x *variabilă de integrare.*

Exemplul 10.6 *Funcţia $f(x) = c$, $x \in [a, b]$, este integrabilă şi*

$$\int_a^b c\, dx = c(b - a).$$

Dacă funcţia f este pozitivă, atunci suma Riemann $\sigma_\Delta(f)$ reprezintă suma ariilor dreptunghiurilor de bază $x_i - x_{i-1}$ şi de înălţime $f(\xi_i)$. Deci $\sigma_\Delta(f)$ aproximează aria mulţimii din plan

$$D_y = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\},$$

delimitată de axa Ox, graficul funcţiei f şi dreptele $x = a$, $x = b$. Se poate arăta că dacă f este continuă, atunci mulţimea D_y are arie şi

$$A(D_y) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Mai general, dacă $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ sunt două funcţii continue şi $f(x) \le g(x)$ pe $[a, b]$, atunci mulţimea

$$D_y = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \le x \le b,\ f(x) \le y \le g(x)\},$$

cuprinsă între graficele funcţiilor f, g şi dreptele $x = a$, $x = b$, are arie şi

$$A(D_y) = \int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx.$$

Teorema 10.4 *Numărul $I(f)$ asociat unei funcţii f pe intervalul $[a, b]$ este unic determinat.*

$\triangleleft$ Prin reducere la absurd. $|I_1 - I_2| < |I_1 - \sigma| + |\sigma - I_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. $\triangleright$

Teorema 10.5 *Orice funcţie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, integrabilă pe $[a, b]$, este mărginită pe $[a, b]$.*

$\triangleleft$ Deoarece f este integrabilă pe $[a, b]$, rezultă că există I cu proprietatea că lui $\varepsilon = 1$ îi corespunde un $\delta > 0$ a.î.

$$|\sigma_\Delta(f) - I| < 1, \tag{10.19}$$

oricare ar fi diviziunea Δ cu $\nu(\Delta) < \delta$ şi oricare ar fi punctele intermediare ξ_i.

Fie Δ o asemenea diviziune. Este suficient să arătăm că f este mărginită pe fiecare interval $[x_{k-1}, x_k]$, $k = \overline{1, n}$. În acest scop, pentru $x \in [x_{k-1}, x_k]$, arbitrar, considerăm următorul sistem de puncte intermediare

$$\xi_i = x_i, \quad \text{deci} \;\; i \neq k, \quad \xi_k = x.$$

Atunci, din (10.19) avem

$$|f(x)\, \delta x_k + \sum_{i \neq k} f(x_i)\, \delta x_i - I| < 1,$$

de unde

$$|f(x)| \leq M_k, \quad \text{cu} \;\; M_k = \frac{1}{\delta x_k}(1 + |\sum_{i \neq k} f(x_i)\, \delta x_i| + |I|) > 0.$$

Luând $M = \max\left\{M_k, k = \overline{1, n}\right\}$, obţinem $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in [a, b]$. $\triangleright$

Consecinţa 10.1 *O funcţie nemărginită pe un interval închis* nu este integrabilă *pe acel interval.*

Reciproca teoremei nu este adevărată. Există funcţii mărginite pe un interval închis şi mărginit $[a, b]$, fără a fi integrabile pe acel interval.

10.4.2 Sume Darboux. Criteriu de integrabilitate

Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcţie mărginită şi Δ o diviziune a intervalului $[a, b]$. Deoarece f este mărginită pe $[a, b]$, ea este mărginită pe orice interval parţial $[x_{i-1}, x_i]$. Există deci numerele

$$m = \inf f(x), \quad M = \sup f(x), \quad x \in [a, b],$$

$$m_i = \inf f(x), \quad M_i = \sup f(x), \quad x \in [x_{i-1}, x_i],$$

care se găsesc în relaţia

$$m \leq m_i \leq f(x) \leq M_i \leq M, \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i]. \tag{10.20}$$

Definiţia 10.8 *Sumele*

$$s = s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \delta x_i, \quad S = S_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \delta x_i \tag{10.21}$$

se numesc sume integrale Darboux *(s - inferioară, S - superioară) ale funcţiei f corespunzătoare diviziunii* Δ.

Pentru o diviziune dată Δ se pot forma o infinitate de sume Riemann σ_Δ, dar numai o singură sumă Darboux inferioară s_Δ şi o singură sumă Darboux superioară S_Δ; în plus, pentru orice diviziune Δ, avem

$$m(b-a) \leq s_\Delta \leq \sigma_\Delta \leq S_\Delta \leq M(b-a). \tag{10.22}$$

În adevăr, oricare ar fi $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, avem

$$m \leq m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i \leq M,$$

de unde, prin înmulţire cu δx_i şi sumare după i, obţinem (10.22).

Teorema 10.6 ***(Criteriul de integrabilitate)*** *Condiţia necesară şi suficientă ca funcţia $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ să fie integrabilă pe $[a,b]$ este ca oricare ar fi $\varepsilon > 0$ să existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ a.î.*

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon, \tag{10.23}$$

pentru orice diviziune Δ a cărei normă $\nu(\Delta) < \delta$.

Condiţia (10.23) se poate scrie şi sub forma

$$\lim_{\nu\to 0}(S_\Delta - s_\Delta) = 0.$$

Dacă funcţia f este integrabilă pe $[a,b]$, atunci pentru orice şir normal de diviziuni, şirurile (s_n), (S_n) şi (σ_n) sunt convergente şi au aceeaşi limită I. Şirurile (s_n), (S_n) şi (σ_n) aproximează integrala, şirul (s_n) prin lipsă, iar şirul (S_n) prin adaos.

Aplicând criteriul de integrabilitate vom găsi unele clase de funcţii integrabile.

Teorema 10.7 *Orice funcţie $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ continuă pe $[a,b]$ este integrabilă pe $[a,b]$.*

$\triangleleft$ Deoarece f este continuă pe intervalul închis şi mărginit $[a,b]$ rezultă că ea este uniform continuă pe $[a,b]$. Prin urmare, oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există un $\delta(\varepsilon) > 0$ a.î. pentru orice $x, x' \in [a,b]$ pentru care $|x - x'| < \delta$,

$$|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Fie acum Δ o diviziune a intervalului $[a,b]$ având norma $\nu(\Delta) < \delta$ şi $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$, subintervalele parţiale ale diviziunii.

Deoarece f este continuă pe $[a, b]$, ea este continuă pe orice subinterval $[x_{i-1}, x_i]$. După a doua teoremă a lui Weierstrass, rezultă că există x_i^m şi x_i^M în $[x_{i-1}, x_i]$ a.î.

$$m_i = f(x_i^m), \quad M_i = f(x_i^M).$$

Prin urmare

$$S_\Delta - s_\Delta = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\, \delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i^M) - f(x_i^m))\, \delta x_i.$$

Deoarece $\nu(\Delta) < \delta$, rezultă că $\delta x_i < \delta(\varepsilon)$ şi deci, cu atât mai mult $|x_i^M - x_i^m| < \delta(\varepsilon)$. Pentru asemenea puncte avem $f(x_i^M) - f(x_i^m) < \frac{\varepsilon}{b-a}$ şi deci

$$S_\Delta - s_\Delta < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \delta x_i = \varepsilon. \,\triangleright$$

Continuitatea este suficientă dar nu necesară pentru integrabilitate. Există funcţii discontinue pe $[a, b]$ care sunt integrabile pe $[a, b]$. Astfel, funcţiile monotone pot avea discontinuităţi dar sunt integrabile.

Teorema 10.8 *O funcţie monotonă pe $[a, b]$ este integrabilă pe $[a, b]$.*

$\triangleleft$ Dacă f este constantă pe $[a, b]$ ea este integrabilă. Vom presupune că funcţia monotonă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este diferită de o constantă şi deci $f(a) \neq f(b)$. O funcţie monotonă pe $[a, b]$ este mărginită pe $[a, b]$ căci mulţimea valorilor ei este cuprinsă între $f(a)$ şi $f(b)$. Să presupunem că f este monoton crescătoare.

Fie Δ o diviziune a lui $[a, b]$ şi $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$, subintervalele parţiale ale diviziunii. Deoarece f este crescătoare, avem

$$m = f(a) = f(x_0), \quad m_i = f(x_{i-1}), \quad M_i = f(x_i), \quad M = f(b) = f(x_n).$$

Fie $\varepsilon > 0$ şi $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{M-m}$. Pentru orice diviziune Δ a cărei normă $\nu(\Delta) < \frac{\varepsilon}{M-m}$, avem

$$S_\Delta - s_\Delta = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\, \delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))\, \delta x_i \leq \frac{\varepsilon}{M-m} \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})).$$

Deci, $S_\Delta - s_\Delta \leq \varepsilon$ şi după criteriul de integrabilitate, funcţia f este integrabilă pe $[a, b]$. $\triangleright$

10.4.3 Proprietăţi ale funcţiilor integrabile

1. Dacă f este integrabilă pe $[a, b]$ atunci f este integrabilă şi pe $[b, a]$ şi

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx. \tag{10.24}$$

Pentru $b = a$ avem atunci

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0.$$

2. Dacă f şi g sunt integrabile pe $[a, b]$ şi $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ sunt constante arbitrare, atunci funcţia $\alpha f + \beta g$ este integrabilă pe $[a, b]$ şi

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx. \tag{10.25}$$

3. Dacă f şi g sunt integrabile pe $[a, b]$, atunci

$$f(x) \leq g(x),\ x \in [a, b] \Longrightarrow \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx. \tag{10.26}$$

4. Dacă funcţia f este integrabilă pe $[a, b]$, atunci funcţia $|f|$ este integrabilă pe $[a, b]$ şi

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx, \quad a < b.$$

5. Dacă f şi g sunt integrabile pe $[a, b]$, atunci funcţia $f \cdot g$ este integrabilă pe $[a, b]$.

6. Dacă f este integrabilă pe $[a, b]$, $f(x) \neq 0$ pe $[a, b]$ şi $\frac{1}{f(x)}$ este mărginită pe $[a, b]$, atunci funcţia $\frac{1}{f(x)}$ este integrabilă pe $[a, b]$.

7. Dacă f este integrabilă pe $[a, b]$, atunci ea este integrabilă pe orice subinterval închis şi mărginit $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$.

8. Dacă f este integrabilă pe $[a, c]$ şi $[c, b]$, atunci este integrabilă pe $[a, b]$ şi avem

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

O funcţie f se numeşte *continuă pe porţiuni* pe $[a, b]$ dacă există o diviziune a intervalului $[a, b]$,

$$a = x_0 < x_i < \cdots < x_n = b$$

a.î. f este continuă pe intervalele deschise (x_{k-1}, x_k), $k = \overline{1, n}$, are limitele laterale finite $f(x_0{+}0)$, $f(x_1{-}0)$, $f(x_1{+}0)$, $\ldots$,$f(x_n{-}0)$ şi ia valori arbitrare în capetele subintervalelor $[x_{k-1}, x_k]$, $k = \overline{1, n}$.
9. Orice funcţie continuă pe porţiuni pe intervalul $[a, b]$ este integrabilă pe $[a, b]$.

10.4.4 Formule de medie

Teorema 10.9 *Fie f şi g două funcţii integrabile pe $[a, b]$ şi m, M marginile inferioară şi superioară a valorilor funcţiei f pe $[a, b]$. Dacă $g(x)$ păstrază semn constant pe $[a, b]$ atunci există numărul $\mu \in [m, M]$ a.î.*

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = \mu \int_a^b g(x)\, dx. \tag{10.27}$$

◃ Din $m \leq f(x) \leq M$ pentru orice $x \in [a,b]$, presupunând $g(x) \geq 0$ pe $[a,b]$, rezultă

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x), \quad \forall x \in [a,b].$$

Cum f şi g sunt integrabile pe $[a,b]$, produsul $f(x) \cdot g(x)$ este o funcţie integrabilă pe $[a,b]$ şi după proprietatea 3. rezultă

$$m \int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M \int_a^b g(x)\,dx. \tag{10.28}$$

Deoarece $g(x) \geq 0$ urmează că $\int_a^b g(x)\,dx \geq 0$. Dacă $\int_a^b g(x)\,dx = 0$ din (10.28) rezultă că

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$$

şi deci (10.27) are loc oricare ar fi μ. Dacă însă $\int_a^b g(x)\,dx > 0$, împărţind prin $\int_a^b g(x)\,dx$, (10.28) devine

$$m \leq \mu \leq M, \quad \text{cu} \ \ \mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}. \ ▹$$

Formula (10.27) se numeşte *prima formulă de medie sub formă generală.*

Dacă sunt îndeplinite condiţiile teoremei precedente şi în plus f este continuă pe $[a,b]$, atunci există $\xi \in [a,b]$ a.î.

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx. \tag{10.29}$$

În adevăr, în acest caz există $\xi \in [a,b]$ a.î. $f(\xi) = \mu$, deoarece $m \leq \mu \leq M$.

Dacă în teorema precedentă luăm $g(x) = 1$, (10.27) devine

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a), \tag{10.30}$$

iar dacă în plus f este continuă, atunci există $\xi \in [a,b]$ a.î.

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a). \tag{10.31}$$

Formula (10.30) se numeşte *prima formulă de medie.*

10.4.5 Existenţa primitivelor funcţiilor continue

Fie $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ o funcţie integrabilă pe $[a,b]$. Deoarece f este integrabilă pe orice subinterval $[c,x]$, $c, x \in [a,b]$, definim funcţia $F : [a,b] \to \mathbf{R}$ prin

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt. \tag{10.32}$$

Funcţia F se mai numeşte *integrală cu limita superioară variabilă* sau integrala definită ca *funcţie de limita superioară.*

Teorema 10.10 *Dacă funcţia f este integrabilă pe $[a,b]$ atunci funcţia F este uniform continuă pe $[a,b]$.*

$\lhd$ Deoarece f este integrabilă pe $[a,b]$ este mărginită pe $[a,b]$, deci există un $M > 0$ a.î. $|f(x)| \le M$ pe $[a,b]$. Dar pentru orice $x, x' \in [a,b]$ putem scrie

$$F(x) - F(x') = \int_c^x f(t)\,dt - \int_c^{x'} f(t)\,dt = \int_c^x f(t)\,dt + \int_{x'}^c f(t)\,dt = \int_{x'}^x f(t)\,dt.$$

De aici rezultă

$$|F(x) - F(x')| = |\int_{x'}^x f(t)\,dt| \le |\int_{x'}^x |f(t)|\,dt| \le M|x - x'|$$

şi folosind definiţia continuităţii uniforme rezultă concluzia teoremei. $\rhd$

Teorema 10.11 ***(Existenţa primitivelor funcţiilor continue)*** *Orice funcţie reală $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ continuă pe $[a,b]$ admite primitive pe $[a,b]$. Una dintre aceste primitive este funcţia (10.32).*

$\lhd$ Fie x arbitrar din $[a,b]$ şi h a.î. $x+h \in [a,b]$. Avem

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_c^{x+h} f(t)\,dt - \int_c^x f(t)\,dt\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Aplicând teorema de medie rezultă că există $\xi \in [x, x+h]$ sau $\xi \in [x+h, x]$ a.î.

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = h \cdot f(\xi).$$

Prin urmare

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(\xi).$$

Deoarece pentru $h \to 0$, $\xi \to x$ şi f este continuă pe $[a,b]$, rezultă că $\lim\limits_{h \to 0} f(\xi) = f(x)$. Deci există

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x),$$

adică F este derivabilă şi $F'(x) = f(x)$. $\rhd$

Prin această teoremă am dovedit că derivata integralei definite ca funcţie de limita superioară este funcţia de sub semnul de integrală

$$\frac{d}{dx}\int_c^x f(t)\,dt = f(x).$$

10.4.6 Metode de calcul a integralelor definite

Teorema 10.12 ***(Formula fundamentală a calculului integral)*** *Dacă funcţia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este continuă pe $[a, b]$ şi $\Phi(x)$ este o primitivă a ei pe $[a, b]$ atunci*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{10.33}$$

$\triangleleft$ Fie $\Phi(x)$ o primitivă a lui $f(x)$ pe $[a, b]$. După teorema precedentă,

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$$

este de asemenea o primitivă a lui $f(x)$ pe $[a, b]$ şi deci

$$\Phi(x) = \int_c^x f(t)\,dt + C.$$

Atunci

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt. \triangleright$$

Aşadar, pentru calculul integralei definite a funcţiei $f(x)$ este suficient să cunoaştem o primitivă a funcţiei $f(x)$.

Formula (10.33) se numeşte *formula fundamentală a calculului integral* sau *formula lui Leibniz-Newton.* Numărul $\Phi(b) - \Phi(a)$ se notează $\Phi(x)|_a^b$, încât formula (10.33) se mai scrie

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(x)|_a^b\,. \tag{10.34}$$

Teorema 10.13 ***(Formula schimbării de variabilă)*** *Dacă:*

1. *funcţia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este continuă pe $[a, b]$,*
2. *funcţia $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ are derivată continuă pe $[\alpha, \beta]$ şi $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$,*

atunci are loc formula

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt. \tag{10.35}$$

$\triangleleft$ Deoarece $f(x)$ este continuă pe $[a, b]$ ea are primitive pe $[a, b]$. De asemenea funcţia $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ fiind continuă pe $[\alpha, \beta]$ are primitive pe $[\alpha, \beta]$. Dacă $F(x)$ este o primitivă a lui $f(x)$ pe $[a, b]$ atunci $F(\varphi(t))$ este o primitivă a funcţiei $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ pe $[\alpha, \beta]$. Aplicând formula lui Leibniz-Newton, avem

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx. \triangleright$$

Teorema 10.14 ***(Formula de integrare prin părţi)*** *Dacă u şi v au derivate continue pe $[a,b]$, atunci are loc formula*

$$\int_a^b uv'dx = uv|_a^b - \int_a^b u'v\,dx. \tag{10.36}$$

◃ Deoarece $uv' = (uv)' - u'v$ rezultă că

$$\int_a^b uv'dx = \int_a^b (uv)'dx - \int_a^b u'v\,dx = uv|_a^b - \int_a^b u'v\,dx. \ ▹$$

Formula (10.36) se mai scrie şi sub forma

$$\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b v\,du. \tag{10.37}$$

Formula (10.36) sau (10.37) se numeşte *formula de integrare prin părţi.*

O generalizare a teoremei precedente este teorema:

Teorema 10.15 *Dacă u şi v au derivate până la ordinul $n+1$ continue pe $[a,b]$, atunci are loc formula*

$$\int_a^b uv^{(n+1)}dx = [uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + \cdots + (-1)^n u^{(n)}v]|_a^b + (-1)^{n+1}\int_a^b u^{(n+1)}v\,dx. \tag{10.38}$$

O aplicaţie importantă a formulei (10.38) este dată de:

Teorema 10.16 *Dacă f are derivate până la ordinul $n+1$ continue pe $[a,b]$, atunci are loc formula*

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!}f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{1}{n!}\int_a^b (b-x)^n f^{(n+1)}(x)\,dx. \tag{10.39}$$

◃ Formula (10.39) se obţine luând în (10.38) $u(x) = \frac{(b-x)^n}{n!}$ şi $v(x) = f(x)$ şi ţinând seama că

$$u^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{(b-x)^{n-k}}{(n-k)!},\ k = \overline{1,n}, \quad u^{(n+1)}(x) = 0.$$

Înlocuind aici pe b cu x şi pe a cu x_0 avem

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!}f'(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt, \tag{10.40}$$

care este *formula lui Taylor cu restul sub formă integrală.*

10.5 Integrale improprii

Până aici, studiind integrala definită, am presupus că intervalul $[a, b]$ este mărginit şi funcţia $f(x)$ mărginită pe $[a, b]$. Există probleme care necesită extinderea noţiunii de integrală definită, cerând fie ca intervalul de integrare să fie nemărginit, fie ca funcţia să fie nemărginită.

Fie $f : [a, +\infty) \to \mathbf{R}$ o funcţie integrabilă pe orice interval mărginit $[a, t] \subset [a, +\infty)$. Notăm

$$F(t) = \int_a^t f(x)\, dx.$$

Definiţia 10.9 *Dacă există şi este finită* $\lim\limits_{t\to\infty} F(t)$ *spunem că funcţia* f *este integrabilă pe* $[a, +\infty)$ *şi scriem*

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = \lim_{t\to\infty} F(t) \tag{10.41}$$

şi o vom numi integrală improprie de speţa întâi*.*

În acest caz spunem că $\int\limits_a^\infty f(x)\, dx$ este *convergentă.*

Dacă funcţia $F(t)$ nu are limită pentru $t \to \infty$ sau dacă $\lim\limits_{t\to\infty} |F(t)| = \infty$ spunem că integrala este *divergentă.*

Exemplul 10.7 *Integrala*

$$\int\limits_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}\, dx, \quad a > 0,$$

este convergentă pentru $\alpha > 1$ *şi divergentă pentru* $\alpha \leq 1$*.*

În adevăr, avem

$$F(t) = \int_a^t \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{t^{\alpha-1}} - \frac{1}{a^{\alpha-1}}\right], & \alpha \neq 1, \\ \ln t - \ln a, & \alpha = 1 \end{cases}$$

şi deci

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{a^{\alpha-1}}, & \alpha > 1, \\ +\infty, & \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Analog se definesc şi integralele $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\, dx$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$.

Fie $\Phi(x)$ o primitivă a funcţiei $f(x)$ pe $[a, \infty)$. Aplicând formula lui Leibniz-Newton pe intervalul $[a, t]$, putem scrie

$$F(t) = \int_a^t f(x)\, dx = \Phi(t) - \Phi(a).$$

Rezultă de aici că integrala este convergentă d.d. există şi este finită $\lim\limits_{t\to\infty} \Phi(t)$. Notând $\Phi(+\infty) = \lim\limits_{x\to\infty} \Phi(x)$ putem scrie

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = \Phi(+\infty) - \Phi(a) = \Phi(x)\big|_a^\infty,$$

care se numeşte *formula lui Leibniz-Newton pentru integrale improprii de speţa întâi.*

Fie $f : [a, b) \to \mathbf{R}$ o funcţie integrabilă pe orice interval mărginit $[a, t]$, $a < t < b$ şi $\lim_{x \to b-0} |f(x)| = +\infty$. Notăm

$$F(t) = \int_a^t f(x)\, dx.$$

Definiţia 10.10 *Dacă există şi este finită* $\lim_{t \to b-0} F(t)$ *spunem că funcţia* f *este integrabilă pe* $[a, b)$ *şi scriem*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{t \to b-0} F(t)$$

şi o vom numi integrală improprie de speţa a doua.

În acest caz spunem că $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ este *convergentă.*

Dacă funcţia $F(t)$ nu are limită pentru $t \to b - 0$ sau dacă $\lim_{t \to b-0} |F(t)| = \infty$ spunem că integrala este *divergentă.*

În această situaţie punctul b se numeşte *punct singular.*

Exemplul 10.8 *Integrala*

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(b - x)^\alpha}$$

este convergentă pentru $\alpha < 1$ *şi divergentă pentru* $\alpha \geq 1$. *Punctul* b *este punct singular.*

În adevăr, avem

$$F(t) = \int_a^t \frac{dx}{(b - x)^\alpha} = \begin{cases} -\frac{1}{1-\alpha} \left[\frac{1}{(b-t)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}} \right], & \alpha \neq 1, \\ -\ln(b - t) + \ln(b - a), & \alpha = 1 \end{cases}$$

şi deci

$$\lim_{t \to b-0} F(t) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}}, & \alpha < 1, \\ +\infty, & \alpha \geq 1. \end{cases}$$

Analog se definesc şi integralele

$$\int_a^b f(x)\, dx, \quad \text{cu} \quad \lim_{x \to a+0} |f(x)| = +\infty,$$

$$\int_a^b f(x)\, dx, \quad \text{cu} \quad \lim_{x \to a+0} |f(x)| = +\infty, \quad \lim_{x \to b-0} |f(x)| = +\infty.$$

Formula lui Leibniz-Newton rămâne adevărată şi pentru integrale improprii de speţa a doua dacă există şi sunt finite $\lim_{t \to b-0} \Phi(t)$, respectiv $\lim_{t \to a+0} \Phi(t)$.

Din cele de mai sus rezultă că studiul integralelor improprii se reduce la cercetarea limitei funcţiei

$$F(t) = \int_a^t f(x)\, dx,$$

la $+\infty$ pentru integrale improprii de speţa întâi şi la stânga lui b pentru integrale improprii de speţa a doua.

Teorema 10.17 ***(Criteriul lui Cauchy-Bolzano)*** *Condiţia necesară şi suficientă ca integrala improprie*

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

având numai pe b ca punct singular, să fie convergentă este ca oricare ar fi $\varepsilon > 0$ să existe un $A \in [a,b)$ a.î. pentru orice $t, t' \in (A,b)$ să avem

$$\left|\int_t^{t'} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

◁ Deoarece

$$\left|\int_t^{t'} f(x)\,dx\right| < |F(t') - F(t)|,$$

teorema este o consecinţă a teoremei lui Cauchy-Bolzano de caracterizare a funcţiilor cu limită finită pentru $t \to b-0$ ($b = +\infty$ sau finit). ▷

Definiţia 10.11 *Integrala improprie* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, *cu* $b = +\infty$ *sau finit, se numeşte* absolut convergentă *dacă integrala improprie* $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ *este convergentă. În acest caz spunem că f este absolut integrabilă pe $[a,b)$.*

Teorema 10.18 *Dacă integrala improprie* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *este absolut convergentă atunci ea este convergentă.*

◁ Pentru orice $t, t' \in (a,b)$ avem

$$\left|\int_t^{t'} f(x)\,dx\right| \leq \left|\int_t^{t'} |f(x)|\;dx\right|$$

şi concluzia teoremei rezultă ţinând seama de teorema precedentă. ▷

Reciproca teoremei nu este adevărată. Există integrale improprii care sunt convergente fără a fi absolut convergente.

Definiţia 10.12 *Integrala improprie* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *se numeşte* semiconvergentă *dacă ea este convergentă dar nu este absolut convergentă.*

Teorema 10.19 ***(Criteriul de comparaţie)*** *Fie integrala improprie*

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

având numai pe b ca punct singular, cu $b = +\infty$ sau finit.

a). Dacă există un $A \in [a, b)$ a.î. $|f(x)| \le g(x)$ pentru orice $x \in (A, b)$ şi dacă integrala $\int\limits_a^b g(x)\, dx$ este convergentă, atunci şi integrala $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ este convergentă.

b). Dacă există un $A \in [a, b)$ a.î. $f(x) \ge h(x) \ge 0$ pentru orice $x \in (A, b)$ şi dacă integrala $\int\limits_a^b h(x)\, dx$ este divergentă, atunci şi integrala $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ este divergentă.

$\triangleleft$ a). Deoarece pentru orice $t, t' \in [a, b)$ cu $A < t < t'$ avem

$$\int_t^{t'} |f(x)|\, dx \le \int_t^{t'} g(x)\, dx,$$

aplicând criteriul lui Cauchy-Bolzano ţinând seama că integrala $\int\limits_a^b g(x)\, dx$ este convergentă, rezultă că integrala $\int\limits_a^b |f(x)|\, dx$ este convergentă, adică integrala $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ este absolut convergentă şi deci convergentă.

b). Dacă presupunem că integrala $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ este convergentă, după partea a). a teoremei, ar rezulta că integrala $\int\limits_a^b h(x)\, dx$ este convergentă. Se ajunge astfel la contradicţie. $\triangleright$

Consecinţa 10.2 *Fie integrala improprie de speţa întâi $\int_a^\infty f(x)\, dx$.*

a). Dacă există un $\alpha > 1$ şi un $A \in [a, +\infty)$ a.î. $|f(x)|x^\alpha \le M$, pentru orice $x \in (A, +\infty)$ atunci integrala este absolut convergentă.

b). Dacă există un $\alpha \le 1$ şi un $A \in [a, +\infty)$ a.î. $f(x)x^\alpha \ge m > 0$, pentru orice $x \in (A, +\infty)$ atunci integrala este divergentă.

Consecinţa 10.3 *Fie integrala improprie de speţa a doua $\int_a^b f(x)\, dx$, având pe b ca punct singular.*

a). Dacă există un $\alpha < 1$ şi un $A \in [a, b)$ a.î. $|f(x)|(b - x)^\alpha \le M$, pentru orice $x \in (A, b)$ atunci integrala este absolut convergentă.

b). Dacă există un $\alpha \ge 1$ şi un $A \in [a, b)$ a.î. $f(x)(b - x)^\alpha \ge m > 0$, pentru orice $x \in (A, b)$ atunci integrala este divergentă.

Exemplul 10.9 ***(Integrala lui Euler de prima speţă)*** *Fie integrala*

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1 - x)^{q-1} dx, \quad p, q \in \mathbf{R}.$$

Integrala este convergentă pentru $p > 0$ şi $q > 0$ şi divergentă pentru $p \le 0$ sau $q \le 0$.

Exemplul 10.10 ***(Integrala lui Euler de speţa a doua)*** *Fie integrala*

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx, \quad p \in \mathbf{R}.$$

Integrala este convergentă pentru $p > 0$ *şi divergentă pentru* $p \leq 0$.

10.6 Integrale care depind de un parametru

10.6.1 Trecerea la limită sub semnul integral

Integralele de forma

$$I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx, \quad J(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx$$

se numesc integrale care depind de un parametru. Funcţia $f(x,y)$, definită pe o mulţime $[a,b] \times E$, unde $E \subset \mathbf{R}$, este integrabilă pe $[a,b]$ pentru orice $y \in E$ şi $a(y), b(y)$ sunt funcţii definite pe E.

Fie y_0 un punct de acumulare al mulţimii E şi fie

$$g(x) = \lim_{y \to y_0} f(x,y), \quad \forall x \in [a,b].$$

Definiţia 10.13 *Spunem că funcţia* g *este limita uniformă pe* $[a,b]$ *a funcţiei* f *când* $y \to y_0$ *dacă*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \text{ pentru care } |f(x,y) - g(x)| < \varepsilon \text{ cu } |y - y_0| < \delta,\ \forall x \in [a,b].$$

Teorema care urmează ne dă regula de intervertire a operaţiei de integrare cu operaţia de trecere la limită.

Teorema 10.20 *Dacă* g *este limita uniformă pe* $[a,b]$ *a funcţiei* f *şi* f *este continuă pe* $[a,b]$ *oricare ar fi* $y \in E$, *atunci*

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b \left[\lim_{y \to y_0} f(x,y)\right] dx. \tag{10.42}$$

◁ Funcţia $g(x)$ este continuă pe $[a,b]$. Într-adevăr, pentru orice şir (y_n), $y_n \in E$, $y_n \to y_0$, şirul (f_n), $f_n(x) = f(x,y_n)$ este un şir uniform convergent pe $[a,b]$ la funcţia $g(x)$. După teorema referitoare la continuitatea şirurilor de funcţii uniform convergente, rezultă atunci că $g(x)$ este continuă pe $[a,b]$ şi deci integrabilă pe $[a,b]$.

Deoarece g este limita uniformă pe $[a,b]$ a funcţiei f, rezultă că

$$\left| \int_a^b f(x,y)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x,y) - g(x)|\,dx < \varepsilon(b-a), \quad \text{pentru } |y - y_0| < \delta,$$

de unde (10.42). ▷

10.6.2 Derivarea integralelor care depind de un parametru

Teorema 10.21 *Fie $f : D \to \mathbf{R}$, unde $D = [\alpha, \beta] \times [c, d] \subset \mathbf{R}^2$. Dacă funcţia $f(x, y)$ este continuă şi are derivată parţială în raport cu y continuă pe D, iar funcţiile $a, b : [c, d] \to [\alpha, \beta]$ au derivate continue pe $[c, d]$, atunci funcţia $J : [c, d] \to \mathbf{R}$ este derivabilă pe $[c, d]$ şi*

$$J'(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x, y)\, dx + b'(y) f(b(y), y) - a'(y) f(a(y), y). \tag{10.43}$$

$\triangleleft$ Fie $y_0 \in [c, d]$. Arătăm că J este derivabilă în y_0 şi are loc (10.43) pentru $y = y_0$. Să notăm $a(y) = a$, $b(y) = b$, $a(y_0) = a_0$, $b(y_0) = b_0$ şi să observăm că

$$J(y) = \int_{a_0}^{b_0} f(x, y)\, dx + \int_{b_0}^{b} f(x, y)\, dx - \int_{a_0}^{a} f(x, y)\, dx, \quad J(y_0) = \int_{a_0}^{b_0} f(x, y_0)\, dx.$$

Deci:

$$(a) \quad \frac{J(y) - J(y_0)}{y - y_0} = .$$

$$= \int_{a_0}^{b_0} \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0}\, dx + \frac{1}{y - y_0} \int_{b_0}^{b} f(x, y)\, dx - \frac{1}{y - y_0} \int_{a_0}^{a} f(x, y)\, dx.$$

Ne vom ocupa pe rând de fiecare din integralele din membrul drept.

Aplicând teorema lui Lagrange funcţiei f, ca funcţie de variabila y, avem

$$\frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0} = f'_y(x, y_0 + \eta), \quad |\eta| < |y - y_0|.$$

Funcţia $f'_y(x, y)$ fiind uniform continuă pe D, urmează că pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $\delta(\varepsilon) > 0$ a.î.

$$\left| \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0} - f'_y(x, y_0) \right| = |f'_y(x, y_0 + \eta) - f'_y(x, y_0)| < \varepsilon, \quad \text{pentru} \ \ |y - y_0| < \delta$$

şi pentru orice $x \in [a_0, b_0]$, deci funcţia

$$\frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0}$$

converge uniform pe $[a_0, b_0]$ la $f'_y(x, y_0)$ când $y \to y_0$. Conform teoremei precedente

$$(b) \ \lim_{y \to y_0} \int_{a_0}^{b_0} \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0} dx = \int_{a_0}^{b_0} \left[\lim_{y \to y_0} \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0} \right] dx = \int_{a_0}^{b_0} f'_y(x, y_0) dx.$$

Aplicând teorema de medie celei de a doua integrale, avem

$$\frac{1}{y - y_0} \int_{b_0}^{b} f(x, y)\, dx = \frac{b(y) - b(y_0)}{y - y_0} \cdot f(b(y_0) + \xi, y), \quad |\xi| < |b - b_0|$$

şi la limită

$$(c) \qquad \lim_{y\to y_0} \frac{1}{y-y_0}\int_{b_0}^{b} f(x,y)\,dx = b'(y_0)f(b(y_0),y_0),$$

deoarece b este derivabilă pe $[c,d]$ şi f este continuă pe D.

Asemănător, găsim

$$(d) \qquad \lim_{y\to y_0} \frac{1}{y-y_0}\int_{a_0}^{a} f(x,y)\,dx = a'(y_0)f(a(y_0),y_0).$$

Din (a), (b), (c) şi (d) rezultă (10.43). $\triangleright$

Capitolul 11

INTEGRALE CURBILINII

11.1 Noţiuni de teoria curbelor

Reamintim că dacă x, y, z sunt trei funcţii continue pe un interval $I \subset \mathbf{R}$, mulţimea Γ a punctelor $M \in \mathbf{R}^3$ de coordonate $(x(t), y(t), z(t))$, $t \in I$, se numeşte *curbă continuă*, iar

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ \ t \in I \tag{11.1}$$

se numesc *ecuaţiile parametrice* ale curbei Γ, t este parametrul pe curbă. Dacă raportăm pe $\mathbf{R}^3$ la un reper ortonormat $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, în care $\mathbf{i} = (1,0,0)$, $\mathbf{j} = (0,1,0)$, $\mathbf{k} = (0,0,1)$, şi $\mathbf{r}$ este vectorul de poziţie al punctului $M \in \Gamma$ faţă de O, ecuaţiile (11.1) se pot scrie sub forma

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad t \in I. \tag{11.2}$$

În acest mod, curba Γ este imaginea intervalului I prin funcţia vectorială (11.2).

Dacă $z(t) = 0$, atunci

$$x = x(t),\ y = y(t),\ \ t \in I \tag{11.3}$$

sau

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \quad t \in I. \tag{11.4}$$

reprezintă o curbă *plană*, situată în planul Oxy.

Pe o curbă putem stabili două sensuri de parcurs. A *orienta* curba înseamnă a alege un sens de parcurs pe ea; o astfel de curbă o vom numi *orientată*. Unul din sensurile de parcurs îl vom numi *pozitiv*, iar celălalt *negativ*. În general, se alege ca sens pozitiv sensul de deplasare a punctului $M(t)$ pe curbă când t creşte.

Partea din curba Γ formată din punctele $M(t)$ cu $t \in [a, b] \subset I$ se numeşte *arc de curbă continuă* sau *drum* cu originea în punctul $A(a)$ şi extremitatea în punctul $B(b)$. Un drum se numeşte *cu tangentă continuă* dacă funcţiile $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ au derivate continue pe $[a, b]$.

Punctul $M_0(t_0)$ se numeşte *punct singular* al curbei Γ dacă $\mathbf{r}'(t_0) = \mathbf{0}$. Un drum cu tangentă continuă se numeşte *drum neted* dacă nu are puncte singulare. Un drum se numeşte *parţial neted* sau *neted pe porţiuni* dacă este reuniunea unui număr finit de drumuri netede.

11.2 Lungimea unui arc de curbă

Fie Γ un drum cu extremităţile $A(a)$ şi $B(b)$ (cu $A = B$ dacă drumul este închis), orientat în sensul de creştere a parametrului $t \in [a, b]$.

Pe drumul Γ alegem punctele $A = M_0,\ M_1,\ \ldots,\ M_{i-1},\ M_i,\ \ldots,\ M_n = B$, în ordinea dictată de orientarea lui Γ. Spunem că punctele M_i, $i = \overline{0, n}$, definesc o diviziune a lui Γ, pe care o vom nota cu Δ_Γ. Vom numi *normă a diviziunii* Δ_Γ numărul $\nu_\Gamma = \nu(\Delta_\Gamma) = \max\limits_{i=\overline{1,n}} d(M_{i-1}, M_i)$.

Diviziunea Δ_Γ a lui Γ determină o diviziune Δ a lui $[a, b]$:

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{i-1} < t_i < \ldots < t_n = b, \tag{11.5}$$

cu norma $\nu = \nu(\Delta) = \max\limits_{i=\overline{1,n}}(t_i - t_{i-1})$ şi reciproc. Să observăm că $\nu \to 0$ implică $\nu_\Gamma \to 0$. Reciproca fiind adevărată numai pentru drumuri deschise.

Diviziunea Δ_Γ a lui Γ defineşte o linie poligonală $AM_1M_2 \ldots M_{i-1}M_i \ldots B$, înscrisă în Γ a cărei lungime este

$$\ell_\Delta = \sum_{i=1}^{n} d(M_{i-1}, M_i). \tag{11.6}$$

Deoarece $M_i(x(t_i), y(t_i), z(t_i))$, avem

$$\ell_\Delta = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2 + (z(t_i) - z(t_{i-1}))^2}. \tag{11.7}$$

Definiţia 11.1 *Drumul Γ se numeşte rectificabil dacă există şi este finită limita lungimilor ℓ_Δ a liniilor poligonale înscrise în Γ când norma diviziunii tinde la zero. Numărul*

$$L = \lim_{\nu \to 0} \ell_\Delta \tag{11.8}$$

se numeşte atunci lungimea drumului Γ.

Teorema 11.1 *Orice drum Γ cu tangentă continuă este rectificabil şi lungimea lui este dată de*

$$L = \int_a^b ||\mathbf{r}'(t)||\, dt. \tag{11.9}$$

$\triangleleft$ Aplicând teorema lui Lagrange funcţiilor $x(t)$, $y(t)$ şi $z(t)$ pe intervalul $[t_{i-1}, t_i]$, ℓ_Δ se mai scrie

$$\ell_\Delta = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x'^2(\theta_i^x) + y'^2(\theta_i^y) + z'^2(\theta_i^z)} \cdot (t_i - t_{i-1}),$$

cu $\theta_i^x, \theta_i^y, \theta_i^z \in (x_{i-1}, x_i)$. Fie, pe de altă parte, σ_Δ suma Riemann a funcţiei

$$f(t) = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$$

corespunzătoare diviziunii Δ şi punctelor intermediare $\theta_i \in [t_{i-1}, t_i]$, adică

$$\sigma_\Delta = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x'^2(\theta_i) + y'^2(\theta_i) + z'^2(\theta_i)} \cdot (t_i - t_{i-1}).$$

Deoarece $f(t)$ este integrabilă pe $[a, b]$,

$$\lim_{\nu \to 0} \sigma_\Delta = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt.$$

Dar $\lim\limits_{\nu \to 0} \ell_\Delta = \lim\limits_{\nu \to 0} \sigma_\Delta$ şi deci

$$L = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt. \triangleright$$

Fie $M(t) \in \Gamma$ şi $s(t)$ lungimea arcului de curbă $\overset{\frown}{AM}$. Atunci

$$s(t) = \int_a^t ||\mathbf{r}'(\tau)||\, d\tau.$$

de unde $s'(t) = ||\mathbf{r}'(t)||$ şi deci

$$ds = ||\mathbf{r}'(t)||\, dt = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt.$$

ds se numeşte *element de arc* al curbei Γ.

11.3 Integrale curbilinii de primul tip

Fie $\Gamma = \overset{\frown}{AB}$ un arc de curbă netedă pe porţiuni, dată prin ecuaţiile parametrice (11.1) şi $f(M) = f(x, y, z)$ o funcţie definită pe arcul $\overset{\frown}{AB}$.

Fie încă Δ_Γ o diviziune a arcului $\overset{\frown}{AB}$, Δ diviziunea corespunzătoare a intervalului $[a, b]$, $P_i(\tau_i) \in \overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$, cu $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = \overline{1, n}$, puncte intermediare ale diviziunii Δ_Γ şi s_i lungimea arcului $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$

$$s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt. \tag{11.10}$$

Definiţia 11.2 *Se numeşte* sumă integrală *a funcţiei f, corespunzătoare diviziunii Δ_Γ a arcului $\overset{\frown}{AB}$ şi punctelor intermediare P_i, suma*

$$\sigma_{\Delta_\Gamma}(f) = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\, s_i = \sum_{i=1}^{n} f(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i))\, s_i. \tag{11.11}$$

Definiţia 11.3 *Spunem că funcţia f este* integrabilă *pe $\overset{\frown}{AB}$ dacă există şi este finită*

$$\lim_{\nu_\Gamma \to 0} \sigma_{\Delta_\Gamma}(f) = I,$$

oricare ar fi punctele intermediare P_i.

Dacă funcţia f este integrabilă pe $\overset{\frown}{AB}$ atunci I se numeşte integrala curbilinie de primul tip *a funcţiei f pe $\overset{\frown}{AB}$ şi scriem*

$$I = \int_{\overset{\frown}{AB}} f(M)\, ds = \int_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y, z)\, ds.$$

Prin urmare

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y, z)\, ds = \lim_{\nu_\Gamma \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i))\, s_i. \tag{11.12}$$

Teorema care urmează dă legătura între integrala curbilinie de primul tip şi integrala Riemann.

Teorema 11.2 *Dacă funcţia $f(x(t), y(t), z(t))$ este integrabilă pe intervalul $[a, b]$, atunci funcţia $f(x, y, z)$ este integrabilă pe $\overset{\frown}{AB}$ şi*

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt. \tag{11.13}$$

$\lhd$ Deoarece arcul $\overset{\frown}{AB}$ este neted pe porţiuni, funcţiile $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ sunt continue şi au derivate continue $[t_{i-1}, t_i]$. Aplicând atunci teorema de medie integralei (11.10), obţinem $s_i = \sqrt{x'^2(\theta_i) + y'^2(\theta_i) + z'^2(\theta_i)} \cdot (t_i - t_{i-1})$, cu $\theta_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Putem scrie deci

$$\sigma_{\Delta_\Gamma}(f) = \sum_{i=1}^{n} f(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)) \sqrt{x'^2(\theta_i) + y'^2(\theta_i) + z'^2(\theta_i)} \cdot (t_i - t_{i-1}). \tag{11.14}$$

Considerăm funcţia $\Phi(t) = f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$, definită pe $[a, b]$, integrabilă pe $[a, b]$ şi fie σ_Δ suma sa Riemann corespunzătoare diviziunii Δ şi punctelor intermediare τ_i. Avem că $\lim\limits_{\nu_\Gamma \to 0} \sigma_{\Delta_\Gamma} = \lim\limits_{\nu \to 0} \sigma_\Delta$, de unde (11.13). $\rhd$

Interpretarea geometrică a integralei curbilinii

Fie $f(M) = f(x, y)$ şi $\overset{\frown}{AB}$ un arc de curbă plană, dat prin ecuaţiile parametrice (11.3). Să considerăm suprafaţa cilindrică având curba directoare $\overset{\frown}{AB}$ şi generatoarele paralele cu axa Oz. Pe această suprafaţă să considerăm curba netedă pe porţiuni $\overset{\frown}{A'B'}$, de ecuaţii parametrice $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = f(x(t), y(t))$, $t \in I$. Atunci, $\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)\, ds$ este tocmai aria porţiunii din suprafaţa cilindrică cuprinsă între generatoarele AA', BB' şi arcele de curbă $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{A'B'}$.

11.4 Integrale curbilinii de tipul al doilea

Fie $\overset{\frown}{AB}$ un arc de curbă netedă, dat prin ecuaţiile (11.1), orientată de la A la B, în sensul de creştere a parametrului t de la a la b. Fie Δ_Γ o diviziune a arcului $\overset{\frown}{AB}$ şi $M_i(x_i, y_i, z_i)$, cu $x_i = x(t_i)$, $y_i = y(t_i)$, $z_i = z(t_i)$, punctele diviziunii şi $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, cu $\xi_i = x(\tau_i)$, $\eta_i = y(\tau_i)$, $\zeta_i = z(\tau_i)$, puncte intermediare. Proiecţiile segmentului orientat $[M_{i-1}M_i]$ pe axele de coordonate Ox, Oy, Oz, sunt segmentele orientate $[x_{i-1}, x_i]$, $[y_{i-1}, y_i]$ şi respectiv $[z_{i-1}, z_i]$. Aceste segmente sunt în acelaşi timp proiecţiile arcului orientat $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ pe cele trei axe. Fie încă $f(M) = f(x, y, z)$ o funcţie definită pe arcul $\overset{\frown}{AB}$.

Definiţia 11.4 *Se numeşte* sumă integrală *în raport cu x a funcţiei f, corespunzătoare diviziunii Δ_Γ a arcului $\overset{\frown}{AB}$ şi punctelor intermediare P_i, suma*

$$\sigma^x_{\Delta_\Gamma}(f) = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,(x_i - x_{i-1}). \tag{11.15}$$

Definiţia 11.5 *Spunem că funcţia f este* integrabilă *pe $\overset{\frown}{AB}$ în raport cu x dacă există şi este finită*

$$\lim_{\nu_\Gamma \to 0} \sigma^x_{\Delta_\Gamma}(f) = I^x,$$

oricare ar fi punctele intermediare P_i.

Dacă funcţia f este integrabilă pe $\overset{\frown}{AB}$ în raport cu x, atunci I^x se numeşte integrala curbilinie de tipul al doilea *în raport cu x a funcţiei f pe $\overset{\frown}{AB}$ şi scriem*

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y, z)\,dx = \lim_{\nu_\Gamma \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,(x_i - x_{i-1}). \tag{11.16}$$

În mod analog putem forma sumele integrale ale funcţiei f în raport cu y şi în raport cu z:

$$\sigma^y_{\Delta_\Gamma}(f) = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,(y_i - y_{i-1}), \quad \sigma^z_{\Delta_\Gamma}(f) = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,(z_i - z_{i-1})$$

şi putem defini integralele curbilinii de tipul al doilea ale funcţiei f în raport cu y şi în raport cu z:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y, z)\,dy = \lim_{\nu_\Gamma \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,(y_i - y_{i-1}),$$

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y, z)\,dz = \lim_{\nu_\Gamma \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,(z_i - z_{i-1}).$$

Teorema 11.3 *Dacă funcţia $f(x(t), y(t), z(t))$ este integrabilă pe $[a, b]$, iar $\overset{\frown}{AB}$ este un arc neted, atunci funcţia $f(x, y, z)$ este integrabilă pe $\overset{\frown}{AB}$ în raport cu x şi*

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y, z)\, dx = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))x'(t)\, dt. \tag{11.17}$$

◁ Aplicând teorema lui Lagrange funcţiei $x(t)$, suma integrală (11.15) se mai scrie

$$\sigma^x_{\Delta_\Gamma}(f) = \sum_{i=1}^{n} f(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i))x'(\theta_i)(t_i - t_{i-1}),$$

cu $\theta_i \in (t_{i-1}, t_i)$. Considerăm apoi funcţia $\Phi(t) = f(x(t), y(t), z(t))x'(t)$, definită pe $[a, b]$, integrabilă pe $[a, b]$ şi fie σ^x_Δ suma sa Riemann corespunzătoare diviziunii Δ şi punctelor intermediare τ_i. Avem că $\lim\limits_{\nu_\Gamma \to 0} \sigma^x_{\Delta_\Gamma} = \lim\limits_{\nu \to 0} \sigma^x_\Delta$, de unde (11.17). ▷

În mod asemănător se arată că

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y, z)\, dy = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))y'(t)\, dt,$$

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y, z)\, dz = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))z'(t)\, dt.$$

Dacă arcul $\overset{\frown}{AB}$ este un segment de dreaptă paralel cu axa Oz atunci

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y, z)\, dx = 0, \quad \int_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y, z)\, dy = 0, \quad \text{etc.}$$

Integrala curbilinie de tipul al doilea de formă generală

Fie $\overset{\frown}{AB}$ un arc de curbă netedă pe porţiuni şi trei funcţii $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$ definite pe arcul $\overset{\frown}{AB}$, P integrabilă pe $\overset{\frown}{AB}$ în raport cu x, Q în raport cu y şi R în raport cu z.

Prin *integrală curbilinie de tipul al doilea de formă generală* înţelegem expresia

$$I = \int_{\overset{\frown}{AB}} P\, dx + Q\, dy + R\, dz = \int_{\overset{\frown}{AB}} P(M)\, dx + \int_{\overset{\frown}{AB}} Q(M)\, dy + \int_{\overset{\frown}{AB}} R(M)\, dz. \tag{11.18}$$

Uneori este comod să scriem integrala curbilinie de tipul al doilea sub formă vectorială. Fie $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\mathbf{i} + Q(x, y, z)\,\mathbf{j} + R(x, y, z)\,\mathbf{k}$ o funcţie vectorială definită pe arcul $\overset{\frown}{AB}$. Deoarece $d\mathbf{r} = \mathbf{i}\, dx + \mathbf{j}\, dy + \mathbf{k}\, dz$, urmează că $P\, dx + Q\, dy + R\, dz = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ şi deci (11.18) se scrie sub forma

$$I = \int_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \tag{11.19}$$

Fie $\tau = d\mathbf{r}/ds$ versorul tangentei la curbă, orientat în sensul creşterii parametrului s. Avem atunci următoarea legătură între integrala curbilinie de tipul al doilea de formă generală şi integrala curbilinie de primul tip:

$$\int_{\widehat{AB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\widehat{AB}} (\mathbf{F} \cdot \tau)\, ds. \tag{11.20}$$

11.5 Independenţa de drum a integralelor curbilinii

Definiţia 11.6 *O mulţime de puncte din plan sau spaţiu se numeşte* conexă *dacă oricare două puncte ale ei pot fi unite printr-un arc de curbă complet conţinut în mulţime.*

Definiţia 11.7 *O mulţime deschisă şi conexă se numeşte* domeniu.

Definiţia 11.8 *O mulţime de puncte din plan sau spaţiu se numeşte* convexă *dacă oricare două puncte ale ei pot fi unite printr-un segment de dreaptă complet conţinut în mulţime.*

Orice mulţime convexă este şi conexă. Reciproca nu este adevărată. Există mulţimi conexe care nu sunt convexe.

Definiţia 11.9 *Un domeniu plan D se numeşte* simplu conex *dacă, oricare ar fi curba închisă Γ din D, mulţimea plană mărginită de Γ este inclusă în D.*

Un domeniu D din spaţiu se numeşte simplu conex *dacă, oricare ar fi curba închisă Γ din D, există cel puţin o suprafaţă S mărginită de Γ, situată în întregime în D.*

Un domeniu care nu este simplu conex se numeşte multiplu conex.

Fie $D \subset \mathbf{R}^3$ un domeniu şi $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$ trei funcţii definite pe D.

Definiţia 11.10 *Spunem că integrala curbilinie*

$$I = \int_{\widehat{AB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz \tag{11.21}$$

unde $\widehat{AB}$ este un drum în D, este independentă de drum *în D dacă, oricare ar fi $A, B \in D$ şi oricare ar fi arcele netede pe porţiuni Γ_1 şi Γ_2 situate în D cu extremitătile în A şi B, având aceeaşi orientare, avem*

$$\int_{\Gamma_1} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{\Gamma_2} P\,dx + Q\,dy + R\,dz. \tag{11.22}$$

Teorema 11.4 *Condiţia necesară şi suficientă ca integrala I să fie independentă de drum în D este ca oricare ar fi drumul închis C, neted pe porţiuni, conţinut în D să avem*

$$\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0. \tag{11.23}$$

◁ **Necesitatea**. Presupunem I independentă de drum pe D. Fie C un contur închis conţinut în D şi $A, B \in C$. Notăm cu Γ_1 şi Γ_2 arcele determinate de punctele A şi B pe C, având aceeaşi orientare (de exemplu, de la A la B). Atunci

$$\int_{A\Gamma_1 B} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{A\Gamma_2 B} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Deoarece $C = A\Gamma_1 B \cup B\Gamma_2 A$, rezultă (11.23).

Suficienţa. Presupunem că are loc (11.23). Fie Γ_1 şi Γ_2 două arce situate în D cu extremităţile în A şi B, având aceeaşi orientare. Deoarece $A\Gamma_1 B \cup B\Gamma_2 A = C$ din (11.23) rezultă (11.22). ▷

Proprietăţile integralei curbilinii I depind de proprietăţile *expresiei diferenţiale* $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$.

Definiţia 11.11 *Spunem că expresia diferenţială $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ este o* diferenţială exactă *pe D, dacă există o funcţie $U(x, y, z)$, diferenţiabilă pe D, a.î.*

$$dU(x, y, z) = P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz. \tag{11.24}$$

Funcţia U se numeşte primitiva *expresiei diferenţiale $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$.*

Teorema 11.5 *Fie P, Q, R trei funcţii continue pe D. Integrala I este independentă de drum pe D d.d. $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ este o diferenţială exactă pe D.*

◁ **Necesitatea**. Presupunem I independentă de drum pe D. Fie $\overset{\frown}{AM}$ un drum în D şi

$$U(x, y, z) = \int_{\overset{\frown}{AM}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Dacă $x = x(\tau)$, $y = y(\tau)$, $z = z(\tau)$, $\tau \in [a, t]$ este o reprezentare parametrică a arcului $\overset{\frown}{AM}$, atunci

$$U(t) = \int_a^t (P(\tau)x'(\tau) + Q(\tau)y'(\tau) + R(\tau)z'(\tau))\,d\tau,$$

de unde, prin derivare, $U'(t) = P(t)x'(t) + Q(t)y'(t) + R(t)z'(t)$ sau $dU = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$.

Suficienţa. Dacă $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ este o diferenţială exactă, rezultă că

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = R \tag{11.25}$$

şi deci pentru orice arc $\overset{\frown}{AB}$ din D, putem scrie

$$I = \int_{\overset{\frown}{AB}} \frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy + \frac{\partial U}{\partial z}\,dz =$$

$$= \int_a^b \left[\frac{\partial U}{\partial x}(t)x'(t) + \frac{\partial U}{\partial y}(t)y'(t) + \frac{\partial U}{\partial z}(t)z'(t)\right] dt = \int_a^b U'(t)\,dt = U(t)\big|_a^b\,,$$

adică I nu depinde de drum. $\triangleright$

Din (11.25) rezultă că dacă I este independentă de drum în D atunci funcţiile P, Q, R satisfac condiţiile

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}. \tag{11.26}$$

Se poate arăta că dacă domeniul D este simplu conex, atunci este adevărată şi reciproca afirmaţiei precedente.

11.6 Noţiuni elementare de teoria câmpului

Definiţia 11.12 *Se numeşte* câmp scalar *pe domeniul D o funcţie reală $U(x, y, z)$ definită pe D.*

Dacă $U(x, y, z)$ are derivate parţiale pe D, atunci vectorul

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\,\mathbf{k} \tag{11.27}$$

se numeşte *gradientul câmpului scalar U.*

Dacă funcţia U este diferenţiabilă atunci $dU = \operatorname{grad} U \cdot d\mathbf{r}$.

Definiţia 11.13 *Se numeşte* câmp vectorial *pe domeniul D o funcţie vectorială $\mathbf{F}(x, y, z)$ definită pe D.*

Definiţia 11.14 *Câmpul vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$ se numeşte* câmp potenţial *dacă există un câmpul scalar $U(x, y, z)$ a.î. $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{grad} U(x, y, z)$. În acest caz, funcţia U, numită* potenţialul *lui $\mathbf{F} = (P, Q, R)$, este primitiva expresiei diferenţiale $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$.*

Definiţia 11.15 *Se numeşte* divergenţă *a câmpului vectorial $\mathbf{F} = (P, Q, R)$, câmpul scalar*

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Un câmp vectorial se numeşte *solenoidal* dacă $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$.

Definiţia 11.16 *Se numeşte* rotor *al câmpului vectorial* $\mathbf{F} = (P, Q, R)$, *câmpul vectorial*

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Definiţia 11.17 *Se numeşte* circulaţia câmpului vectorial $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ *pe arcul* $\overset{\frown}{AB}$, *integrala* $I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

Dacă $\mathbf{F}$ este un câmp potenţial atunci $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Dacă domeniul D este simplu conex, atunci este adevărată şi afirmaţia reciprocă.

Pentru ca integrala I să fie independentă de drum pe D este necesar, iar dacă D este simplu conex, este şi suficient ca $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

11.7 Orientarea curbelor şi domeniilor plane

Fie Π un plan raportat la reperul cartezian ortonomat $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ orientat drept. Spunem în acest caz că planul Π este *orientat pozitiv*. Versorul $\mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$ este versorul normalei la *faţa pozitivă* a planului Π, iar $-\mathbf{k}$ este versorul normalei la faţa negativă. Un plan orientat pozitiv îl vom nota Oxy.

Un contur închis C din planul Π se numeşte *orientat pozitiv* dacă un observator perpendicular pe plan, în direcţia normalei pozitive la plan, care se mişcă pe conturul C, vede mereu în stânga lui domeniul D mărginit de conturul C. În acest caz spunem că domeniul D este *orientat pozitiv*.

Dacă domeniul D este multiplu conex, adică frontiera lui este formată din mai multe contururi închise, orientarea pozitivă se defineşte ca mai sus pe fiecare din contururile închise care alcătuiesc frontiera lui.

11.8 Calculul ariei cu ajutorul integralei curbilinii

Fie D_y un domeniu compact definit prin $D_y = \{(x, y),\ \varphi(x) \le y \le \psi(x), x \in [a, b]\}$, unde φ şi ψ sunt funcţii continue pe $[a, b]$ şi $\varphi(x) < \psi(x)$ pentru $x \in (a, b)$. Vom numi un asemenea domeniu *simplu în raport cu axa Oy*.

Un domeniu D_x, compact, definit prin $D_x = \{(x, y),\ \varphi(y) \le x \le \psi(y), y \in [c, d]\}$, se numeşte *simplu în raport cu axa Ox*.

Un domeniu plan poate fi simplu şi în raport cu Ox şi în raport cu Oy.

Fie C conturul închis, orientat pozitiv, ce mărgineşte domeniul D_y, presupus simplu în raport cu axa Oy, A, A' şi B, B' punctele în care dreptele $x = a$ şi respectiv $x = b$ întâlnesc curbele $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$. Atunci $C = \overset{\frown}{AB} \cup \overset{\frown}{BB'} \cup \overset{\frown}{B'A'} \cup \overset{\frown}{A'A}$.

Să calculăm integrala curbilinie $\oint\limits_C y\,dx = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} y\,dx + \int\limits_{\overset{\frown}{BB'}} y\,dx + \int\limits_{\overset{\frown}{B'A'}} y\,dx + \int\limits_{\overset{\frown}{A'A}} y\,dx$. Însă

$$\int\limits_{\overset{\frown}{BB'}} y\,dx = \int\limits_{\overset{\frown}{A'A}} y\,dx = 0, \quad \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} y\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx, \quad \int\limits_{\overset{\frown}{B'A'}} y\,dx = \int_b^a \psi(x)\,dx.$$

Prin urmare $\oint\limits_C y\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx + \int_b^a \psi(x)\,dx = -\int_a^b [\psi(x) - \varphi(x)]\,dx$. Deci aria domeniului D_y este dată de $\mathcal{A} = -\oint\limits_C y\,dx$. Pentru domenii simple în raport cu Ox, se poate arăta că $\mathcal{A} = \oint\limits_C x\,dy$. Formule de acest tip au loc pentru orice domenii D mărginite de una sau mai multe curbe continue şi închise. În astfel de cazuri se utilizează formula ce rezultă din acestea

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\oint\limits_C x\,dy - y\,dx,$$

integrala curbilinie fiind luată pe frontiera conturului C, care mărgineşte domeniul D, orientat în sens pozitiv.

Capitolul 12

INTEGRALE MULTIPLE

12.1 Integrala dublă

12.1.1 Definiţia integralei duble

Fie D o mulţime de puncte din plan sau spaţiu.

Definiţia 12.1 *Numim* diametru *al mulţimii D, marginea superioară a distanţelor dintre punctele ei.*

Mulţimea D este *mărginită* dacă şi numai dacă diametrul său este finit.

Fie D un domeniu plan închis şi mărginit, de arie Ω.

Definiţia 12.2 *Numim* diviziune Δ *a domeniului D o mulţime finită de submulţimi ale lui D fără puncte interioare comune, a căror reuniune este D,*

$$\Delta = \{D_1,\ D_2,\ \ldots\ ,\ D_n\} \subset D,$$

cu $\bigcup_{i=1}^{n} D_i = D$. D_i se numesc elementele *diviziunii* Δ.

Fie $d_i = \max\{d(P,Q),\ P,Q \in D_i\}$ *diametrul* mulţimii D_i, $i = \overline{1,n}$.

Definiţia 12.3 *Numim* normă *a diviziunii Δ numărul $\nu = \nu(\Delta) = \max\{d_i,\ i = \overline{1,n}\}$.*

Notăm cu ω_i aria elementului D_i al diviziunii Δ, cu $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = \Omega$ şi cu $P_i(\xi_i, \eta_i) \in D_i$, $i = \overline{1,n}$, puncte arbitrare, numite *puncte intermediare* ale diviziunii Δ. Fie încă $f : D \to \mathbf{R}$.

Definiţia 12.4 *Se numeşte* sumă integrală Riemann *a funcţiei f, corespunzătoare diviziunii Δ a domeniului D şi punctelor intermediare P_i, suma*

$$\sigma_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\omega_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\omega_i. \tag{12.1}$$

Definiţia 12.5 *Numărul finit I se numeşte* limita sumelor integrale $\sigma_\Delta(f)$ *când norma diviziunii tinde la zero, dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un $\delta(\varepsilon) > 0$ a.î. pentru orice diviziune Δ a cărei normă $\nu(\Delta) < \delta(\varepsilon)$ şi pentru orice alegere a punctelor intermediare, să avem $|\sigma_\Delta(f) - I| < \varepsilon$.*

Scriem atunci

$$I = \lim_{\nu \to 0} \sigma_\Delta(f) = \lim_{\nu \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, \omega_i.$$

Dacă există numărul I spunem că funcţia f este integrabilă pe D, iar I se numeşte *integrala dublă* a funcţiei f pe D şi se notează

$$I(f) = \iint_D f(x, y)\, dxdy.$$

Exemplul 12.1 *Dacă $f(x, y) = C$ pe D, atunci*

$$\sigma_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} C\, \omega_i = C \sum_{i=1}^{n} \omega_i = C\Omega,$$

şi deci

$$\iint_D C\, dxdy = C\Omega.$$

Se poate demonstra că orice funcţie integrabilă pe D este *mărginită* pe D.

12.1.2 Sume Darboux. Criteriu de integrabilitate

Fie $f : D \to \mathbf{R}$ o funcţie mărginită şi Δ o diviziune a domeniului D. Deoarece f este mărginită pe D, ea este mărginită pe orice element D_i al diviziunii. Există deci numerele

$$m = \inf f(x, y), \quad M = \sup f(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

$$m_i = \inf f(x, y), \quad M_i = \sup f(x, y), \quad (x, y) \in D_i,$$

care se găsesc în relaţia

$$m \le m_i \le f(x, y) \le M_i \le M, \quad \forall (x, y) \in D_i.$$

Definiţia 12.6 *Sumele*

$$s = s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \omega_i, \quad S = S_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \omega_i$$

se numesc sume integrale Darboux *(s - inferioară, S - superioară) ale funcţiei f corespunzătoare diviziunii Δ.*

Sumele Darboux au proprietăţi asemănătoare sumelor Darboux definite pentru integrala simplă.

Teorema 12.1 ***(Criteriul de integrabilitate)*** *Condiţia necesară şi suficientă ca funcţia $f : D \to \mathbf{R}$ să fie integrabilă pe D este ca oricare ar fi $\varepsilon > 0$ să existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ a.î.*

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon, \tag{12.2}$$

pentru orice diviziune Δ a cărei normă $\nu(\Delta) < \delta$.

Aplicând criteriul de integrabilitate putem pune în evidenţă clase de funcţii integrabile.

Teorema 12.2 *Orice funcţie $f : D \to \mathbf{R}$ continuă pe D este integrabilă pe D.*

Proprietăţile funcţiilor integrabile pe D sunt analoage proprietăţilor funcţiilor integrabile pe $[a, b]$. Semnalăm aici doar teorema de medie.

Teorema 12.3 *Fie f o funcţie integrabilă pe D şi m, M marginile inferioară şi superioară ale valorilor funcţiei f pe D. Există atunci numărul $\mu \in [m, M]$ a.î.*

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \mu\Omega.$$

Dacă f este continuă pe D, atunci există punctul $P(\xi, \eta) \in D$ a.î. $f(\xi, \eta) = \mu$. În acest caz avem următoarea *formulă de medie*

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = f(\xi, \eta)\Omega.$$

Dacă $f(x, y) = 1$ pe D din formula precedentă găsim

$$\Omega = \iint_D dxdy = \iint_D d\omega,$$

formulă care dă expresia ariei domeniului D cu ajutorul integralei duble. Aici $d\omega = dxdy$ se numeşte *element de arie* în coordonate carteziene.

12.1.3 Reducerea integralei duble la integrale simple iterate

Cazul domeniului dreptunghiular

Teorema 12.4 *Dacă funcţia f este integrabilă pe dreptunghiul*

$$D = \{(x, y),\ a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$$

şi pentru orice $x \in [a,b]$, există integrala simplă

$$I(x) = \int\limits_c^d f(x,y)\,dy,$$

atunci există şi integrala iterată $\int\limits_a^b I(x)\,dx$ şi are loc egalitatea

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b I(x)\,dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy. \tag{12.3}$$

Cazul domeniului oarecare

Vom considera mai întâi cazul unui domeniu D_y simplu în raport cu axa Oy

$$D_y = \{(x,y),\ \varphi(x) \le y \le \psi(x), x \in [a,b]\},$$

unde φ şi ψ sunt funcţii continue pe $[a,b]$ şi $\varphi(x) < \psi(x)$ pentru $x \in (a,b)$.

Teorema 12.5 *Dacă funcţia f este integrabilă pe domeniul D_y şi pentru orice $x \in [a,b]$, există integrala simplă*

$$I(x) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy,$$

atunci există şi integrala iterată $\int\limits_a^b I(x)\,dx$ şi are loc egalitatea

$$\iint\limits_{D_y} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b I(x)\,dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy. \tag{12.4}$$

$\lhd$ Fie $c = \inf \varphi(x),\ d = \sup \psi(x), \quad x \in [a,b]$ şi dreptunghiul

$$D = \{(x,y),\ a \le x \le b,\ c \le y \le d\}.$$

Definim pe D funcţia $\overline{f}(x,y)$ prin

$$\overline{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D_y, \\ 0, & (x,y) \in D \setminus D_y, \end{cases}$$

Evident că

$$\iint\limits_{D_y} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_D \overline{f}(x,y)\,dxdy. \tag{12.5}$$

Pentru x fixat din $[a,b]$ avem

$$\overline{f}(x,y)=\begin{cases}0, & y\in[c,\varphi(x)),\\ f(x,y), & y\in[\varphi(x),\psi(x)],\\ 0, & y\in(\psi(x),d].\end{cases}$$

Deoarece pentru fiecare x fixat din $[a,b]$ există integrala $I(x)$, rezultă că există şi integrala

$$\overline{I}(x)=\int\limits_c^d \overline{f}(x,y)\,dy=\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy=I(x).$$

Atunci, după (12.3)

$$\iint\limits_D \overline{f}(x,y)\,dxdy=\int\limits_a^b \overline{I}(x)\,dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy. \tag{12.6}$$

Din (12.5) şi (12.6) rezultă (12.4). $\triangleright$

Să schimbăm rolul variabilelor x şi y în teorema precedentă, adică să presupunem că domeniul de integrat este simplu în raport cu axa Ox

$$D_x=\{(x,y),\ \varphi(y)\le x\le\psi(y),\ y\in[c,d]\},$$

unde φ şi ψ sunt funcţii continue pe $[c,d]$ şi $\varphi(y)<\psi(y)$ pentru $y\in(c,d)$.

Dacă funcţia f este integrabilă pe domeniul D_x şi pentru orice $y\in[c,d]$, există integrala simpă $J(y)=\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx$, atunci există şi integrala iterată $\int\limits_c^d J(y)\,dy$ şi are loc egalitatea

$$\iint\limits_{D_x} f(x,y)\,dxdy=\int\limits_c^d J(y)\,dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx. \tag{12.7}$$

Dacă domeniul de integrat D nu este simplu în raport cu nici una dintre axe, se împarte în subdomenii simple şi se aplică formulele precedente.

Interpretarea geometrică a integralei duble

Dacă $f(x,y)\ge 0$, $(x,y)\in D$, deoarece produsul $f(P_i)\cdot\omega_i$ este volumul unui cilindru drept cu baza D_i şi înălţimea egală cu $f(P_i)$, integrala dublă pe D din funcţia $f(x,y)$ este tocmai *volumul* corpului delimitat de cilindrul cu generatoarele paralele cu axa Oz având drept curbă directoare frontiera domeniului D, planul Oxy şi suprafaţa $z=f(x,y)$, $(x,y)\in D$, adică

$$\mathcal{V}=\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy.$$

12.1.4 Formula lui Green

Vom studia acum legătura dintre integrala dublă pe un domeniu compact şi integrala curbilinie pe frontiera acelui domeniu.

Teorema 12.6 ***(Formula lui Green)*** *Dacă $P(x,y)$ şi $Q(x,y)$ sunt două funcţii continue pe domeniul plan D, orientat, mărginit de curba C, Q are derivată parţială în raport cu x, iar P are derivată parţială în raport cu y, continue pe D, atunci*

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dxdy. \tag{12.8}$$

$\triangleleft$ Considerăm pentru început cazul unui domeniu simplu în raport cu axa Oy

$$D_y = \{(x,y),\ \varphi(x) \le y \le \psi(x), x \in [a,b]\},$$

unde φ şi ψ sunt funcţii continue pe $[a,b]$ şi $\varphi(x) < \psi(x)$ pentru $x \in (a,b)$. Presupunem acest domeniu orientat pozitiv. Fie

$$C = \overset{\frown}{AB} \cup \overset{\frown}{BB'} \cup \overset{\frown}{B'A'} \cup \overset{\frown}{A'A}$$

frontiera sa descrisă în sens direct.

Deoarece $P(x,y)$ este continuă pe D_y, cu derivată parţială în raport cu y continuă pe D_y, avem

$$\iint_{D_y} \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy = \int_a^b [P(x,\psi(x)) - P(x,\varphi(x))]\,dx =$$

$$= \int_a^b P(x,\psi(x))\,dx - \int_a^b P(x,\varphi(x))\,dx = -\left(\int_{\overset{\frown}{B'A'}} P(x,y)\,dx + \int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)\,dx\right).$$

Dar integralele pe segmentele $\overline{BB'}$ şi $\overline{A'A}$, paralele cu axa Oy sunt nule. Obţinem

$$\iint_{D_y} \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy = -\oint_C P(x,y)\,dx.$$

Această formulă rămâne valabilă şi pentru un domeniu D oarecare, simplu sau multiplu conex, care poate fi descompus într-un număr finit de domenii simple în raport cu Oy

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy = -\oint_C P(x,y)\,dx.$$

Analog se arată că dacă D este un domeniu închis cu frontieră netedă, iar $Q(x,y)$ este o funcţie continuă pe D şi are derivată parţială în raport cu x continuă pe D, atunci

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy = \oint_C Q(x,y)\,dy.$$

Adunând membru cu membru ultimele două relaţii obţinem (12.8).

Dacă $u, v : D \to \mathbf{R}$ sunt două funcţii continue pe D care au derivate parţiale continue în raport cu x continue pe D, atunci luând în formula lui Green $P = 0$ şi $Q = u \cdot v$, obţinem

$$\iint\limits_D u\frac{\partial v}{\partial x}\,dxdy = \oint\limits_C uv\,dy - \iint\limits_D v\frac{\partial u}{\partial x}\,dxdy,$$

numită *formula de integrare prin părţi în integrala dublă.*

12.1.5 Schimbarea de variabile în integrala dublă

Să analizăm mai întâi modul cum se transformă un domeniu plan printr-o transformare punctuală a lui $\mathbf{R}^2$.

Fie D, domeniul plan mărginit de o curbă C, imaginea domeniului D', mărginit de curba C', prin transformarea punctuală regulată

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta), \\ y = y(\xi, \eta), \end{cases} \quad (\xi, \eta) \in D', \tag{12.9}$$

cu jacobianul

$$J(\xi, \eta) = \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \neq 0, \quad (\xi, \eta) \in D'.$$

Definiţia 12.7 *Spunem că transformarea domeniului D' în domeniul D este directă dacă unui punct care se deplasează pe C' în sens direct îi corespunde prin (12.9) un punct care se deplasează pe C în sens direct. În caz contrar spunem că transformarea este inversă.*

Teorema 12.7 *Dacă jacobianul $J(\xi, \eta) > 0$ în D', transformarea punctuală (12.9) este directă.*

$\lhd$ Aria Ω a domeniului D este dată de

$$\Omega = \iint\limits_D dxdy = \oint\limits_C x\,dy,$$

conturul C fiind parcurs în sens direct.

Să calculăm transformata acestei integrale prin (12.9)

$$\Omega = \oint\limits_{C'} x(\xi, \eta)\left[\frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta\right] = \oint\limits_{C'} x\frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi + x\frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta =$$

$$= \iint\limits_{D'} \left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(x\frac{\partial y}{\partial \eta}\right) - \frac{\partial}{\partial \eta}\left(x\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\right] d\xi d\eta = \iint\limits_{D'} J(\xi, \eta)\,d\xi d\eta.$$

De aici rezultă că dacă $J(\xi, \eta) > 0$, pentru ca $\Omega > 0$ este necesar să parcurgem conturul C' în sens direct, deci transformarea este directă.

Dacă aplicăm formula de medie ultimei integrale duble, obţinem

$$\Omega = |J(\xi_0, \eta_0)| \cdot \Omega', \quad (\xi_0, \eta_0) \in D', \tag{12.10}$$

unde $\Omega' = \iint\limits_{D'} d\xi d\eta$ este aria domeniului D'.

Putem acum deduce formula schimbării de variabile în integrala dublă. Fie Δ' o diviziune a domeniului D' căreia, prin transformarea (12.9) îi corespunde diviziunea Δ a domeniului D. Dacă ω_i şi ω_i' sunt ariile elementelor D_i şi respectiv D_i', cu (12.10) avem

$$\omega_i = |J(\xi_i, \eta_i)| \cdot \omega_i', \quad (\xi_i, \eta_i) \in D_i', \tag{12.11}$$

pentru $i = \overline{1, n}$.

Dacă notăm cu

$$\begin{cases} x_i = x(\xi_i, \eta_i), \\ y_i = y(\xi_i, \eta_i), \end{cases} \quad (x_i, y_i) \in D_i,$$

avem egalitatea

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\omega_i = \sum_{i=1}^{n} f(x(\xi_i, \eta_i), y(\xi_i, \eta_i))\, |J(\xi_i, \eta_i)|\, \omega_i'. \tag{12.12}$$

Trecând aici la limită pentru $\nu' = \nu(\Delta') \to 0$, ceea ce implică $\nu = \nu(\Delta) \to 0$, obţinem

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\, dxdy = \iint\limits_{D'} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))\, |J(\xi, \eta)|\; d\xi d\eta,$$

care este *formula schimbării de variabile în integrala dublă.*

12.2 Integrale de suprafaţă

12.2.1 Noţiuni de teoria suprafeţelor

Fie D un domeniu în planul Oxy şi $f : D \to \mathbf{R}$ o funcţie cu derivate parţiale continue pe D. Mulţimea $\Sigma = \{(x, y, z),\ z = f(x, y), (x, y) \in D\}$ se numeşte *suprafaţă netedă.* Spunem că

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D, \tag{12.13}$$

este *ecuaţia explicită a suprafeţei* Σ.

Spunem că suprafaţa Σ admite o *reprezentare parametrică regulată* dacă punctele sale (x, y, z) pot fi reprezentate sub forma

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \quad (u, v) \in \Delta \\ z = z(u, v), \end{cases} \tag{12.14}$$

unde $\Delta \subset \mathbf{R}^2$ este un domeniu plan, iar funcţiile x, y, z admit derivate parţiale continue pe Δ care satisfac condiţia

$$A^2 + B^2 + C^2 > 0, \quad (u, v) \in \Delta, \tag{12.15}$$

unde

$$A = \frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \quad B = \frac{D(z,x)}{D(u,v)}, \quad C = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}.$$

Dacă reprezentarea parametrică (12.14) stabileşte o corespondenţă biunivocă între punctele $(u, v) \in \Delta$ şi punctele $(x, y, z) \in \Sigma$, atunci suprafaţa Σ este o *suprafaţă netedă.*

Ecuaţiile (12.14) se pot scrie şi sub formă vectorială

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in \Delta. \tag{12.16}$$

Vectorii

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \;\; \mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

sunt vectorii tangentelor la curbele $v = \text{const}$ şi $u = \text{const}$ în punctul de coordonate parametrice (u, v). Condiţia (12.15) exprimă faptul că vectorii $\mathbf{r}_u$ şi $\mathbf{r}_v$ nu sunt coliniari în nici un punct al suprafeţei.

Normala la suprafaţă are direcţia vectorului

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k} \tag{12.17}$$

şi deci *versorii normalei* sunt daţi de

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\pm||\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v||} = \frac{A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{12.18}$$

Prin alegerea unuia din cei doi versori ai normalei, *orientăm* suprafaţa alegând una dintre feţele sale ca fiind *faţa pozitivă.*

Dacă α, β, γ sunt unghiurile dintre versorul $\mathbf{n}$ al normalei la faţa pozitivă a suprafeţei şi versorii $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ ai axelor, atunci

$$\mathbf{n} = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma.$$

Orice suprafaţă definită printr-o reprezentare explicită, de forma (12.13) este o suprafaţă cu două feţe. Pentru o astfel de suprafaţă se alege de obicei ca faţă pozitivă faţa superioară a suprafeţei în raport cu planul Oxy, adică aceea pentru care versorul $\mathbf{n}$ al normalei într-un punct al suprafeţei face un unghi ascuţit cu axa Oz, deci $\cos\gamma > 0$, având deci cosinii directori ai normalei

$$\cos\alpha = \frac{-p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad \cos\beta = \frac{-q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \tag{12.19}$$

unde $p = \partial f/\partial x$, $q = \partial f/\partial y$ (notaţiile lui Monge).

Orice suprafaţă netedă închisă este o suprafaţă cu două feţe. Pentru o astfel de suprafaţă se alege de obicei ca faţă pozitivă faţa exterioară a suprafeţei, adică aceea pentru care versorul normalei la suprafaţă este îndreptat spre exteriorul corpului mărginit de suprafaţă.

Fie C o curbă închisă (contur) ce mărgineşte suprafaţa Σ. Un sens de parcurs al conturului C se numeşte *pozitiv* sau *coerent cu orientarea suprafeţei* dacă un observator situat pe conturul C, în direcţia şi sensul normalei la suprafaţă, care se mişcă în acest sens, vede suprafaţa în stânga lui.

12.2.2 Aria suprafeţelor

Fie Σ o suprafaţă netedă definită prin ecuaţia explicită

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D, \tag{12.20}$$

unde D este un domeniu mărginit din planul Oxy.

Fie $\{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ o diviziune a domeniului D, $M_i(\xi_i, \eta_i)$ un punct arbitrar din D_i şi $P_i(\xi_i, \eta_i, f(\xi_i, \eta_i))$ punctul corespunzător de pe Σ.

În punctul $P_i \in \Sigma$ construim planul tangent. Cilindrul cu generatoarele paralele cu axa Oz şi curbă directoarea frontiera elementului D_i taie pe planul tangent o porţiune plană de suprafaţă de arie S_i. Dacă ω_i este aria lui D_i atunci

$$\omega_i = S_i |\cos\gamma(P_i)|, \quad \text{sau} \quad S_i = \sqrt{1 + p^2 + q^2}|_{M_i} \cdot \omega_i, \tag{12.21}$$

unde $\gamma(P_i)$ este unghiul dintre normala la suprafaţă în P_i şi axa Oz.

Aria suprafeţei Σ este atunci definită prin

$$S = \lim_{\nu \to 0} \sum_{i=1}^{n} S_i = \lim_{\nu \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\Big|_{M_i} \cdot \omega_i, \tag{12.22}$$

unde ν este norma diviziunii domeniului D. Rezultă că

$$S = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dxdy. \tag{12.23}$$

Expresia

$$dS = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dxdy = \frac{1}{|\cos\gamma|}\, dxdy,$$

se numeşte *element de arie* pe suprafaţa Σ în coordonate carteziene.

Dacă suprafaţa Σ este dată printr-o reprezentare parametrică

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), (u, v) \in \Delta,$$

atunci

$$S = \iint_\Delta \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, dudv = \iint_\Delta ||\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v||\, dudv,$$

iar elementul de arie are expresia

$$dS = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, dudv = ||\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v||\, dudv.$$

12.2.3 Integrala de suprafaţă de primul tip

Fie suprafaţa Σ dată prin reprezentarea parametrică

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in \Delta, \tag{12.24}$$

unde Δ este un domeniu plan mărginit, iar funcţiile x, y, z au derivate parţiale continue pe Δ şi satisfac condiţia

$$||\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|| > 0, \quad (u, v) \in \Delta.$$

Fie $\{\delta_1, \ \delta_2, \ \ldots \ , \ \delta_n\}$ o diviziune a domeniului Δ, având norma ν şi fie ω_i aria elementului δ_i. Acestei diviziuni a domeniului Δ îi corespunde prin reprezentarea (12.24) o diviziune a suprafeţei Σ: $\{\sigma_1, \ \sigma_2, \ \ldots \ , \ \sigma_n\}$ şi fie S_i aria elementului σ_i. Elementul σ_i este la rândul lui o suprafaţă netedă reprezentată parametric prin ecuaţiile (12.24) cu $(u, v) \in \delta_i$. Aria sa este dată de

$$S_i = \iint_{\delta_i} ||\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v||\, dudv. \tag{12.25}$$

Fie $F(x, y, z)$ o funcţie definită pe Σ, $P_i(x_i, y_i, z_i)$ un punct arbitrar din σ_i şi $M_i(u_i, v_i)$ punctul corespunzător din δ_i, $i = \overline{1, n}$:

$$x_i = x(u_i, v_i), \quad y_i = y(u_i, v_i), \quad z_i = z(u_i, v_i).$$

Definiţia 12.8 *Numim sumă integrală a funcţiei F pe suprafaţa Σ suma*

$$\sigma(F) = \sum_{i=1}^{n} F(P_i)S_i = \sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i, z_i)S_i. \tag{12.26}$$

Definiţia 12.9 *Spunem că funcţia F este integrabilă pe Σ dacă există şi este finită*

$$I = \lim_{\nu \to 0} \sigma(F) \tag{12.27}$$

şi aceasta este independentă de alegerea punctelor P_i. Numărul I se numeşte integrala de suprafaţă de primul tip *a funcţiei F pe Σ şi scriem*

$$\iint_{\Sigma} F(x, y, z)\, dS = \lim_{\nu \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i, z_i)S_i. \tag{12.28}$$

Teorema 12.8 *Dacă funcţia $F(x, y, z)$ este continuă pe Σ atunci ea este integrabilă pe Σ şi*

$$\iint_{\Sigma} F(x, y, z)\, dS = \iint_{\Delta} F(x(u, v), y(u, v), z(u, v))||\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v||\, dudv. \tag{12.29}$$

$\lhd$ Aplicând teorema de medie integralei duble (12.25), rezultă

$$S_i = ||\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v||_{\overline{M}_i} \cdot \omega_i.$$

Prin urmare, putem scrie

$$\sigma(F) = \sum_{i=1}^{n} F(P_i)S_i = \sum_{i=1}^{n} F(x(M_i), y(M_i), z(M_i))||\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v||_{\overline{M}_i} \cdot \omega_i.$$

Fie, pe de altă parte,

$$\sigma(\Psi) = \sum_{i=1}^{n} \Psi(M_i)\omega_i = \sum_{i=1}^{n} F(x(M_i), y(M_i), z(M_i))||\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v||_{M_i} \cdot \omega_i,$$

suma integrală a funcţiei

$$\Psi(u, v) = F(x(u, v), y(u, v), z(u, v))||\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)||,$$

definită pe Δ, corespunzătoare punctelor intermediare $M_i(u_i, v_i) \in \delta_i$. Funcţia Ψ fiind continuă pe Δ este integrabilă pe Δ şi deci avem

$$\lim_{\nu\to 0} \sigma(F) = \lim_{\nu\to 0} \sigma(\Psi),$$

de unde (12.29).

Dacă suprafaţa Σ este dată prin ecuaţia explicită $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, funcţia f având derivate parţiale continue pe D, iar F fiind continuă pe Σ, formula (12.29) devine

$$\iint_{\Sigma} F(x, y, z)\, dS = \iint_{D} F(x, y, f(x, y))\sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dxdy. \tag{12.30}$$

12.2.4 Integrale de suprafaţă de tipul al doilea

Fie suprafaţa Σ dată prin reprezentarea parametrică

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in \Delta, \tag{12.31}$$

unde Δ este un domeniu plan mărginit, iar funcţiile x, y, z au derivate parţiale continue pe Δ. Vom presupune că determinanţii funcţionali A, B, C nu se anulează în Δ.

Presupunem că suprafaţa Σ este *orientată*, având ca faţă *pozitivă* faţa superioară în raport cu planul Oxy, adică aceea pentru care versorul $\mathbf{n}$ al normalei într-un punct al suprafeţei face un unghi ascuţit cu axa Oz.

Fie D proiecţia suprafeţei Σ în planul Oxy. Presupunem că domeniul plan D este orientat. Fie $\{D_1,\ D_2,\ \ldots\ ,\ D_n\}$ o diviziune a domeniului D, $M_i(\xi_i, \eta_i)$ un punct arbitrar din D_i şi $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ punctul corespunzător de pe Σ.

În punctul $P_i \in \Sigma$ construim planul tangent. Cilindrul cu generatoarele paralele cu axa Oz şi curbă directoarea frontiera elementului D_i taie pe planul tangent o porţiune plană de suprafaţă de arie S_i. Dacă ω_i este aria lui D_i atunci $\omega_i = S_i|\cos\gamma_i|$, unde $\gamma_i = \gamma(P_i)$ este unghiul dintre normala la suprafaţă în P_i şi axa Oz. Fie încă $F(x, y, z)$ o funcţie definită pe Σ.

Definiţia 12.10 *Se numeşte sumă integrală în raport cu planul $z = 0$ a funcţiei F, pe suprafaţa Σ, suma*

$$\sigma^z = \sum_{i=1}^{n} F(P_i)\,\omega_i = \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\omega_i.$$

Definiţia 12.11 *Spunem că funcţia F este integrabilă pe Σ în raport cu planul $z = 0$ dacă există şi este finită*

$$\lim_{\nu\to 0} \sigma^z = I^z,$$

oricare ar fi punctele intermediare P_i.

Dacă funcţia F este integrabilă pe Σ în raport cu planul $z = 0$, atunci I^z se numeşte integrala de suprafaţă de tipul al doilea *în raport cu planul $z = 0$ a funcţiei F pe Σ şi scriem*

$$\iint_{\Sigma} F(x, y, z)\,dxdy = \lim_{\nu\to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\omega_i.$$

Deoarece $\omega_i = S_i|\cos\gamma_i|$, putem scrie

$$\sigma^z = \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)|\cos\gamma_i| \cdot S_i,$$

de unde prin trecere la limită pentru $\nu \to 0$, rezultă

$$\iint_{\Sigma} F(x, y, z)\,dxdy = \iint_{\Sigma} F(x, y, z)|\cos\gamma|\,dS, \tag{12.32}$$

care exprimă legătura între integrala de suprafaţă de tipul al doilea în raport cu planul $z = 0$ şi integrala de suprafaţă de primul tip.

Dacă suprafaţa Σ este dată prin reprezentarea parametrică (12.31), atunci

$$\cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{1}{\pm||\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v||} \cdot \frac{D(x, y)}{D(u, v)}.$$

Dacă funcţia F este continuă pe Σ, atunci după (12.29)

$$\iint_{\Sigma} F(x, y, z)\,dxdy = \pm \iint_{\Delta} F(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\,dudv,$$

cu $+$ dacă Σ şi Δ au aceeaşi orientare şi cu $-$ dacă Σ şi Δ au orientări diferite.

Dacă suprafaţa Σ este dată prin ecuaţia explicită $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, formula precedentă devine

$$\iint_{\Sigma} F(x, y, z)\,dxdy = \pm \iint_{D} F(x, y, f(x, y))\,dxdy,$$

cu $+$ dacă Σ şi D au aceeaşi orientare şi cu $-$ dacă Σ şi D au orientări diferite.

În mod asemănător se definesc integralele de suprafaţă de tipul al doilea în raport cu planele $x = 0$ şi $y = 0$ ale funcţiei F pe Σ şi

$$\iint_\Sigma F(x,y,z)\,dydz = \iint_\Sigma F(x,y,z)|\cos\alpha|\,dS,$$

$$\iint_\Sigma F(x,y,z)\,dzdx = \iint_\Sigma F(x,y,z)|\cos\beta|\,dS.$$

Dacă funcţia F este continuă pe Σ, atunci după (12.29)

$$\iint_\Sigma F(x,y,z)\,dydz = \pm\iint_\Delta F(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\,dudv,$$

$$\iint_\Sigma F(x,y,z)\,dzdx = \pm\iint_\Delta F(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\,dudv,$$

cu $+$ dacă Σ şi Δ au aceeaşi orientare şi cu $-$ dacă Σ şi Δ au orientări diferite.

Integrala de suprafaţă de tipul al doilea de formă generală

Fie Σ o suprafaţă netedă şi $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$ trei funcţii definite pe suprafaţa Σ, P integrabilă pe Σ în raport cu planul $x = 0$, Q în raport cu planul $y = 0$ şi R în raport cu planul $z = 0$.

Prin *integrală de suprafaţă de tipul al doilea de formă generală* înţelegem expresia

$$\iint_\Sigma P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iint_\Sigma P\,dydz + \iint_\Sigma Q\,dzdx + \iint_\Sigma R\,dxdy. \tag{12.33}$$

Uneori este comod să scriem integrala de suprafaţă de tipul al doilea sub formă vectorială. Fie

$$\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$$

o funcţie vectorială definită pe suprafaţa Σ. Deoarece,

$$\mathbf{n} = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma,$$

dacă Σ şi Δ au aceeaşi orientare, atunci

$$\iint_\Sigma P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iint_\Sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS,$$

adică

$$\iint_\Sigma P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iint_\Sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS,$$

care reprezintă *fluxul* câmpului vectorial $\mathbf{F}$ prin suprafaţa Σ.

12.2.5 Formula lui Stokes

Formula lui Stokes exprimă o legătură între integrala de suprafaţă şi integrala curbilinie pe frontiera acestei suprafeţe. Această formulă generalizează formula lui Green.

Fie

$$\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$$

un câmp vectorial definit pe suprafaţa Σ, pentru care există câmpul vectorial

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

Teorema 12.9 ***(Formula lui Stokes)*** *Fluxul câmpului vectorial* $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ *prin suprafaţa* Σ *este egal cu circulaţia câmpului vectorial* $\mathbf{F}$ *pe conturul* Γ *ce mărgineşte suprafaţa* Σ, *având orientarea coerentă cu orientarea suprafeţei, adică*

$$\iint_{\Sigma} (\mathbf{n}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{F})\,dS = \oint_{\Gamma} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}. \tag{12.34}$$

$\triangleleft$ Avem de arătat că

$$\oint_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Fie suprafaţa Σ dată prin ecuaţia explicită

$$z = f(x,y), \quad (x,y)\in D,$$

unde D este proiecţia suprafaţei Σ în planul Oxy. Fie C (frontiera domeniului D) proiecţia frontierei Γ în planul Oxy. Vom presupune că orientarea conturului C este cea impusă de orientarea lui Γ, coerentă cu orientarea suprafaţei Σ, având versorul normalei la faţa pozitivă a lui Σ dat de (12.19). Atunci

$$\frac{\partial f}{\partial y} = q = -\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}. \tag{12.35}$$

Să transformăm pentru început primul termen din integrala curbilinie

$$I_x = \oint_{\Gamma} P(x,y,z)\,dx = \oint_{\Gamma} P(x,y,f(x,y))\,dx = \oint_{C} P(x,y,f(x,y))\,dx.$$

Aplicând ultimei integrale formula lui Green, obţinem

$$I_x = -\iint_{D} \frac{\partial}{\partial y} P(x,y,f(x,y))\,dxdy = -\iint_{D} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy,$$

sau, ţinând seama de (12.35)

$$I_x = -\iint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right) dxdy,$$

care provine din integrala de suprafaţă

$$I_x = -\iint\limits_\Sigma \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right) \cos\gamma\, dS.$$

Deci

$$I_x = \oint\limits_\Gamma P\,dx = \iint\limits_\Sigma \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right) dS$$

şi în mod asemănător obţinem

$$I_y = \oint\limits_\Gamma Q\,dy = \iint\limits_\Sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\right) dS,$$

$$I_z = \oint\limits_\Gamma R\,dz = \iint\limits_\Sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\right) dS.$$

Adunând membru cu membru ultimele trei formule obţinem (12.34).

Demonstraţia formulei lui Stokes s-a făcut în ipoteza că suprafaţa orientată Σ se poate proiecta biunivoc pe fiecare din planele de coordonate, iar frontiera sa este o curbă netedă. Teorema rămâne însă valabilă şi în cazul general al unei suprafeţe netede pe porţiuni având frontiera netedă pe porţiuni.

Formula lui Stokes conţine ca un caz particular formula lui Green. Dacă Σ este domeniul plan orientat de contur Γ situat în planul $z = 0$, atunci $\cos\alpha = 0$, $\cos\beta = 0$ şi $\cos\gamma = 1$, care înlocuite în (12.34) ne conduc la formula lui Green.

12.3 Integrala triplă

12.3.1 Definiţia integralei triple

Fie V o domeniu spaţial mărginit, de volum $\mathcal{V}$. Numim *diviziune* Δ a domeniului V o mulţime finită de submulţimi ale lui V fără puncte interioare comune, a căror reuniune este V

$$\Delta = \{V_1,\ V_2,\ \ldots\ ,\ V_n\} \subset V, \quad \bigcup_{i=1}^n V_i = V.$$

V_i se numesc *elementele* diviziunii Δ.

Fie $d_i = \max\{d(P,Q),\ P,Q \in V_i\}$ *diametrul* mulţimii V_i, $i = \overline{1,n}$. Numim *normă* a diviziunii Δ numărul $\nu = \nu(\Delta) = \max\{d_i,\ i = \overline{1,n}\}$. Notăm cu τ_i volumul elementului V_i al diviziunii Δ, cu $\sum\limits_{i=1}^n \tau_i = \mathcal{V}$ şi cu $P_i(x_i, y_i, z_i) \in V_i$, $i = \overline{1,n}$, puncte arbitrare, numite *puncte intermediare* ale diviziunii Δ. Fie încă $f : V \to \mathbf{R}$.

Definiţia 12.12 *Se numeşte* sumă integrală Riemann *a funcţiei f, corespunzătoare diviziunii Δ a domeniului V şi punctelor intermediare P_i, suma*

$$\sigma_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\tau_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\tau_i. \qquad (12.36)$$

Definiţia 12.13 *Numărul finit I se numeşte* limita sumelor integrale $\sigma_\Delta(f)$ *când norma diviziunii tinde la zero, dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un $\delta(\varepsilon) > 0$ a.î. pentru orice diviziune Δ a cărei normă $\nu(\Delta) < \delta(\varepsilon)$ şi pentru orice alegere a punctelor intermediare, să avem*

$$|\sigma_\Delta(f) - I| < \varepsilon.$$

Scriem atunci

$$I = \lim_{\nu \to 0} \sigma_\Delta(f) = \lim_{\nu \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\tau_i.$$

Dacă există numărul I spunem că funcţia f este integrabilă pe V, iar I se numeşte *integrala triplă* a funcţiei f pe V şi se notează

$$I(f) = \iiint_V f(x, y, z)\,dxdydz.$$

Exemplul 12.2 *Dacă $f(x, y, z) = C$ pe V, atunci*

$$\sigma_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} C\,\tau_i = C \sum_{i=1}^{n} \tau_i = C\mathcal{V},$$

şi deci

$$\iiint_V C\,dxdydz = C\mathcal{V}.$$

Se poate demonstra că orice funcţie integrabilă pe V este *mărginită* pe V.

12.3.2 Sume Darboux. Criteriu de integrabilitate

Fie $f : V \to \mathbf{R}$ o funcţie mărginită şi Δ o diviziune a domeniului V. Deoarece f este mărginită pe V, ea este mărginită pe orice element V_i al diviziunii. Există deci numerele

$$m = \inf f(x, y, z),\ \ M = \sup f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in V,$$

$$m_i = \inf f(x, y, z),\ \ M_i = \sup f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in V_i,$$

care se găsesc în relaţia

$$m \le m_i \le f(x, y, z) \le M_i \le M, \quad \forall (x, y, z) \in V_i.$$

Definiţia 12.14 *Sumele*

$$s = s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \tau_i, \quad S = S_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \tau_i$$

se numesc sume integrale Darboux (s - inferioară, S - superioară) ale funcţiei f corespunzătoare diviziunii Δ.

Sumele Darboux au proprietăţi asemănătoare sumelor Darboux definite pentru integrala simplă.

Teorema 12.10 ***(Criteriul de integrabilitate)*** *Condiţia necesară şi suficientă ca funcţia* $f : V \to \mathbf{R}$ *să fie integrabilă pe* V *este ca oricare ar fi* $\varepsilon > 0$ *să existe un* $\delta(\varepsilon) > 0$ *a.î.*

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon, \tag{12.37}$$

pentru orice diviziune Δ *a cărei normă* $\nu(\Delta) < \delta$.

Aplicând criteriul de integrabilitate putem pune în evidenţă clase de funcţii integrabile.

Teorema 12.11 *Orice funcţie* $f : V \to \mathbf{R}$ *continuă pe* V *este integrabilă pe* V.

Proprietăţile funcţiilor integrabile pe V sunt analoage proprietăţilor funcţiilor integrabile pe $[a, b]$. Semnalăm aici doar teorema de medie.

Teorema 12.12 *Fie* f *o funcţie integrabilă pe* V *şi* m, M *marginile inferioară şi superioară ale valorilor funcţiei* f *pe* V. *Există atunci numărul* $\mu \in [m, M]$ *a.î.*

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dxdydz = \mu \mathcal{V}.$$

Dacă f este continuă pe V, atunci există punctul $P(\xi, \eta, \zeta) \in V$ a.î. $f(\xi, \eta, \zeta) = \mu$. În acest caz avem următoarea *formulă de medie*

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dxdydz = f(\xi, \eta, \zeta)\mathcal{V}.$$

Dacă $f(x, y, z) = 1$ pe V din formula precedentă găsim

$$\mathcal{V} = \iiint_V dxdydz = \iiint_V d\tau,$$

formulă care dă expresia volumului domeniului V cu ajutorul integralei triple. Aici $d\tau = dxdydz$ se numeşte *element de volum* în coordonate carteziene.

12.3.3 Reducerea integralei triple la integrale iterate

Cazul domeniului paralelipipedic

Teorema 12.13 *Dacă funcţia f este integrabilă pe paralelipipedul*

$$V = \{(x, y, z),\ a_1 \leq x \leq a_2,\ b_1 \leq y \leq b_2\ c_1 \leq z \leq c_2\}$$

şi pentru orice

$$(x, y) \in D = \{(x, y),\ a_1 \leq x \leq a_2,\ b_1 \leq y \leq b_2\},$$

există integrala simplă

$$I(x, y) = \int_{c_1}^{c_2} f(x, y, z)\, dz,$$

atunci există şi integrala iterată $\iint\limits_D I(x, y)\, dxdy$ şi are loc egalitatea

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dxdydz = \iint\limits_D I(x, y)\, dxdy = \iint\limits_D dxdy \int_{c_1}^{c_2} f(x, y, z)\, dz. \qquad (12.38)$$

Cazul domeniului oarecare

Vom considera mai întâi cazul unui domeniu V_z simplu în raport cu axa Oz

$$V_z = \{(x, y, z),\ \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y),\ (x, y) \in D_z\},$$

unde φ şi ψ sunt funcţii continue pe D_z, unde D_z este proiecţia domeniului V_z pe planul $z = 0$.

Teorema 12.14 *Dacă funcţia f este integrabilă pe domeniul V_z şi pentru orice $(x, y) \in D_z$, există integrala simplă*

$$I(x, y) = \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)\, dz,$$

atunci există şi integrala iterată $\iint\limits_{D_z} I(x, y)\, dxdy$ şi are loc egalitatea

$$\iiint\limits_{V_z} f(x, y, z)\, dxdydz = \iint\limits_{D_z} I(x, y)\, dxdy = \iint\limits_{D_z} dxdy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)\, dz. \qquad (12.39)$$

Dacă domeniul de integrat V nu este simplu în raport cu nici una dintre axe, se împarte în subdomenii simple şi se aplică formulele precedente.

12.3.4 Formula lui Gauss-Ostrogradski

Vom studia acum legătura dintre integrala triplă pe un domeniu compact şi integrala de suprafaţă pe frontiera acelui domeniu.

Fie

$$\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$$

un câmp vectorial definit pe domeniul V mărginit de suprafaţa Σ, pentru care există câmpul scalar

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Teorema 12.15 ***(Formula divergenţei)*** *Dacă funcţiile P, Q, R şi câmpul scalar $\operatorname{div}\mathbf{F}$ sunt continue pe V, atunci*

$$\iiint_V (\operatorname{div}\mathbf{F})\, d\tau = \iint_\Sigma (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\, dS, \tag{12.40}$$

unde $\mathbf{n}$ este versorul normalei exterioare la Σ.

$\triangleleft$ Avem de arătat că

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint_\Sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS.$$

Considerăm cazul unui domeniu simplu în raport cu axa Oz

$$V = \{(x,y,z),\ \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y),\ (x,y)\in D_z\},$$

unde φ şi ψ sunt funcţii continue pe D_z, unde D_z este proiecţia domeniului V pe planul $z=0$. Să evaluăm al treilea termen folosind formula de calcul a integralei triple

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dxdydz = \iint_{D_z} dxdy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dz =$$

$$= \iint_{D_z} R(x,y,\psi(x,y))\, dxdy - \iint_{D_z} R(x,y,\varphi(x,y))\, dxdy.$$

Să observăm că suprafaţa Σ care mărgineşte domeniul V se poate scrie: $\Sigma = \Sigma_i \cup \Sigma_s \cup \Sigma_l$, în care Σ_i şi Σ_s sunt faţa inferioară şi faţa superioară, iar Σ_l faţa laterală. Deoarece pe faţa superioară $\cos\gamma > 0$, pe faţa inferioară $\cos\gamma < 0$, iar pe faţa laterală $\cos\gamma = 0$, ţinând seama de formula de calcul a integralei de suprafaţă de tipul al doilea, avem

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dxdydz = \iint_{\Sigma_s} R\, dxdy + \iint_{\Sigma_i} R\, dxdy + \iint_{\Sigma_l} R\, dxdy = \iint_\Sigma R\, dxdy$$

şi deci

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}\,dxdydz = \iint\limits_\Sigma R\cos\gamma\,dS,$$

care nu este altceva decât formala divergenţei pentru câmpul vectorial $\mathbf{F} = R\mathbf{k}$, corespunzătoare domeniului V simplu în raport cu axa Oz. Această formulă este adevărată şi pentru un domeniu V care poate fi împărţit într-un număr finit de domenii simple în raport cu axa Oz.

Dacă V este un domeniu ce se poate descompune într-un număr finit de domenii simple în raport cu axa Ox, iar $P(x, y, z)$ este o funcţie continuă, cu derivată parţială în raport cu x, continuă pe V, atunci

$$\iiint\limits_V \frac{\partial P}{\partial x}\,dxdydz = \iint\limits_\Sigma P\cos\alpha\,dS.$$

Dacă V este un domeniu ce se poate descompune într-un număr finit de domenii simple în raport cu axa Oy, iar $Q(x, y, z)$ este o funcţie continuă, cu derivată parţială în raport cu y, continuă pe V, atunci

$$\iiint\limits_V \frac{\partial Q}{\partial y}\,dxdydz = \iint\limits_\Sigma P\cos\beta\,dS.$$

Prin urmare, dacă V este un domeniu ce se poate descompune într-un număr finit de domenii simple în raport cu toate axele, adunând ultimele trei relaţii obţinem (12.40).

Dacă $u, v : V \to \mathbf{R}$ sunt două funcţii continue pe V care au derivate parţiale continue în raport cu x continue pe V, atunci luând în formula lui Gauss-Ostrogradski $P = u \cdot v$ şi $Q = R = 0$, obţinem

$$\iiint\limits_V u\frac{\partial v}{\partial x}\,dxdydz = \iint\limits_\Sigma uv\,dydz - \iiint\limits_V v\frac{\partial u}{\partial x}\,dxdydz,$$

numită *formula de integrare prin părţi în integrala triplă.*

12.3.5 Schimbarea de variabile în integrala triplă

Fie V un domeniu spaţial mărginit şi V' imaginea sa prin transformarea punctuală regulată

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta, \zeta), \\ y = y(\xi, \eta, \zeta), \quad (\xi, \eta, \zeta) \in V', \\ z = z(\xi, \eta, \zeta), \end{cases} \tag{12.41}$$

cu jacobianul

$$J(\xi, \eta, \zeta) = \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} \neq 0, \quad (\xi, \eta, \zeta) \in V'.$$

Se poate arăta ca şi la integrala dublă că dacă $\mathcal{V} = \iiint\limits_V dxdydz$, este volumul domeniului V, atunci

$$\mathcal{V} = \iiint\limits_{V'} |J(\xi, \eta, \zeta)| \, d\xi d\eta d\zeta.$$

Dacă aplicăm formula de medie ultimei integrale, obţinem

$$\mathcal{V} = |J(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)| \cdot \mathcal{V}', \quad (\xi_0, \eta_0, \zeta_0) \in V', \tag{12.42}$$

unde

$$\mathcal{V}' = \iiint\limits_{V'} d\xi d\eta d\zeta$$

este volumul domeniului V'.

Fie Δ' o diviziune a domeniului V' căreia, prin transformarea (12.41) îi corespunde diviziunea Δ a domeniului V. Dacă τ_i şi τ_i' sunt volumele elementelor V_i şi respectiv V_i', cu (12.42) avem

$$\tau_i = |J(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)| \cdot \tau_i', \quad (\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in V_i', \tag{12.43}$$

pentru $i = \overline{1, n}$.

Dacă notăm cu

$$\begin{cases} x_i = x(\xi_i, \eta_i, \zeta_i), \\ y_i = y(\xi_i, \eta_i, \zeta_i), \quad (x_i, y_i, z_i) \in V_i, \\ z_i = z(\xi_i, \eta_i, \zeta_i), \end{cases}$$

avem egalitatea

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\tau_i = \sum_{i=1}^{n} f(x(\xi_i, \eta_i, \zeta_i), y(\xi_i, \eta_i, \zeta_i), z(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)) \, |J(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)| \, \tau_i'. \tag{12.44}$$

Trecând aici la limită pentru $\nu' = \nu(\Delta') \to 0$, ceea ce implică $\nu = \nu(\Delta) \to 0$, obţinem

$$\iiint\limits_V f(x, y, z) \, dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)) \, |J(\xi, \eta, \zeta)| \, d\xi d\eta d\zeta,$$

care este *formula schimbării de variabile în integrala triplă.*

Exemplul 12.3 *Să se calculeze integrala*

$$I = \iiint\limits_V \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2 + a^2} \, dxdydz,$$

unde

$$V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0\}.$$

Trecem la coordonate sferice:

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi, \\ y = r \sin\theta \sin\varphi, \quad (r, \theta, \varphi) \in [0, R] \times \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]. \\ z = r \cos\theta, \end{cases}$$

Se găseşte

$$dx\,dy\,dz = r^2 \sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

şi deci

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R \frac{r^3 \sin^2\theta \cos\varphi}{r^2 + a^2}\,dr.$$

Efectuând calculule se obţine

$$I = \frac{\pi}{8}\left(R^2 + a^2 \ln\frac{a^2}{a^2 + R^2}\right).$$

Capitolul 13

ECUAŢII DIFERENŢIALE ORDINARE

13.1 Ecuaţii diferenţiale de ordinul I

13.1.1 Ecuaţii diferenţiale. Soluţii

Definiţia 13.1 *Se numesc* ecuaţii diferenţiale *ecuaţiile ale căror necunoscute sunt funcţii de una sau mai multe variabile, în care intră atât funcţiile cât şi derivate ale lor.*

Dacă funcţiile necunoscute depind de mai multe variabile, ecuaţiile se numesc *ecuaţii cu derivate parţiale*; în caz contrar, adică dacă funcţiile necunoscute depind de o singură variabilă independentă, ecuaţiile se numesc *ecuaţii diferenţiale ordinare*. În cele ce urmează ne vom ocupa de acestea din urmă.

Deoarece în numeroase aplicaţii fizice variabila independentă este timpul care se notează cu t, vom utiliza şi noi această notaţie. Funcţiile necunoscute vor fi notate cu x, y, z etc. Derivatele acestora în raport cu t le vom nota x', x'', $\ldots$, $x^{(n)}$.

Definiţia 13.2 *Fie $F(t, x, x', \ldots, x^{(n)})$ o funcţie reală având drept argumente variabila reală $t \in [a, b]$ şi funcţia reală x împreună cu derivatele ei x', x'', $\ldots$, $x^{(n)}$. Relaţia*

$$F(t, x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0 \tag{13.1}$$

se numeşte ecuaţie diferenţială de ordinul n *dacă se cere să se determine funcţiile $x = x(t)$, definite pe intervalul $[a, b]$, având derivate până la ordinul n inclusiv în orice punct al intervalului $[a, b]$ a.î. să avem*

$$F(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)) = 0, \quad \forall t \in [a, b].$$

Funcţiile reale $x(t)$ care îndeplinesc condiţiile precedente se numesc soluţii *ale ecuaţiei diferenţiale (13.1).*

Dacă $n = 1$ obţinem *ecuaţiile diferenţiale de ordinul întâi*, care sunt, conform definiţiei precedente, de forma implicită

$$F(t, x, x') = 0 \tag{13.2}$$

sau sub forma explicită

$$x' = f(t, x). \tag{13.3}$$

Exemplul 13.1 *Ecuaţia $x' = x + t$ este o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi. O soluţie a acestei ecuaţii este $x(t) = e^t - t - 1$, $t \in \mathbf{R}$. Funcţia $x(t) = Ce^t - t - 1$, unde C este o constantă arbitrară, reprezintă o familie de soluţii ale ecuaţiei date.*

Exemplul 13.2 *Ecuaţia $x'' - x = t$, $t \in \mathbf{R}$ este o ecuaţie diferenţială de ordinul doi. Funcţia $x(t) = C_1e^t + C_2e^{-t} - t$, $t \in \mathbf{R}$, cu C_1 şi C_2 constante arbitrare, reprezintă o familie de soluţii ale ecuaţiei date.*

În continuare ne vom ocupa numai de *ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi*. Din exemplele prezentate se vede că ecuaţiile diferenţiale admit familii de soluţii care depind de constante arbitrare. Pentru ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi aceste familii depind de o singură constantă arbitrară.

Definiţia 13.3 *Spunem că funcţia $x = x(t, C)$ este* soluţia generală *a ecuaţiei diferenţiale de ordinul întâi (13.2) dacă $x = x(t, C)$ este o soluţie a ecuaţiei (13.2) şi dacă prin particularizarea constantei C obţinem orice soluţie a ecuaţiei (13.2).*

Soluţia generală a unei ecuaţii diferenţiale se mai numeşte şi *integrala generală* a ecuaţiei considerate.

Definiţia 13.4 *Se numeşte* soluţie particulară *a ecuaţiei (13.2) o soluţie $x = x(t)$, $t \in [a, b]$, care se obţine din soluţia generală dând constantei C o valoare particulară.*

Exemplul 13.3 *Ecuaţia $x = tx' + (x')^2$ are soluţia generală $x(t) = Ct + C^2$, $t \in \mathbf{R}$. Soluţia $x(t) = t + 1$ este o soluţie particulară care se obţine pentru $C = 1$.*

O soluţie a ecuaţiei diferenţiale (13.2) care nu conţine o constantă arbitrară nu este în mod necesar o soluţie particulară. O astfel de soluţie se numeşte *soluţie singulară*.

Exemplul 13.4 *Funcţia $x(t) = -\frac{1}{4}t^2$, $t \in \mathbf{R}$ este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale din exemplul precedent, dar nu este o soluţie particulară deoarece nu se obţine din soluţia generală prin particularizarea constantei C. Este deci o soluţie singulară.*

Graficul unei soluţii a unei ecuaţii diferenţiale este o curbă plană numită *curbă integrală*.

13.1.2 Interpretarea geometrică a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi

Să considerăm ecuaţia diferenţială sub formă explicită (13.3), funcţia f fiind definită într-un domeniu $D \subset \mathbf{R}^2$.

Fiecărui punct $(t_0, x_0) \in D$ îi corespunde o direcţie de coeficient unghiular $x_0' = f(t_0, x_0)$. Prin urmare ecuaţia $x' = f(t, x)$ asociază fiecărui punct $M_0(t_0, x_0)$ o direcţie $\mathbf{v}(1, f(t_0, x_0))$. Dacă $x = x(t)$, $(t, x) \in D$ este o soluţie a ecuaţiei (13.3), fiecărui punct $M(t, x(t)) \in D$ i se asociază direcţia $\mathbf{v}(1, f(t, x(t)))$. Graficul soluţiei $x = x(t)$ este deci curba integrală din D care are proprietatea că în fiecare punct al ei, tangenta la curbă are direcţia $\mathbf{v}$.

Problema integrării ecuaţiei (13.3) în D revine la găsirea curbelor integrale din D cu proprietatea că în fiecare punct al lor sunt tangente câmpului de direcţii $\mathbf{v}(1, f(t, x))$.

Exemplul 13.5 *Ecuaţia $x' = 1$, $t \in \mathbf{R}$, defineşte câmpul de direcţii $\mathbf{v}(1, 1)$ paralel cu prima bisectoare a axelor. Curbele integrale sunt drepte paralele cu această bisectoare. Ecuaţia lor este $x(t) = t + C$, $t \in \mathbf{R}$, unde C este o constantă arbitrară. Orice paralelă la prima bisectoare este o curbă integrală particulară.*

13.1.3 Condiţii iniţiale. Problema lui Cauchy

Problema determinării soluţiei ecuaţiei diferenţiale (13.3) care pentru $t = t_0$ ia valoarea $x = x_0$, deci al cărei grafic trece prin punctul (t_0, x_0), se numeşte *problema lui Cauchy*, iar condiţia ca $x(t_0) = x_0$ se numeşte *condiţie iniţială*.

Exemplul 13.6 *Fie ecuaţia diferenţială $x' = f(t)$, cu f o funcţie continuă pe $[a, b]$. Soluţia ei generală este dată de*

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} f(t)\, dt + C,$$

unde $t_0 \in [a, b]$, iar C este o constantă arbitrară. Soluţia care satisface condiţia iniţială $x(t_0) = x_0$, $x_0 \in \mathbf{R}$, este

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t)\, dt.$$

De aici rezultă că pentru orice punct $(t_0, x_0) \in [a, b] \times \mathbf{R}$ există o soluţie unică care satisface condiţia $x(t_0) = x_0$, sau, altfel spus, prin orice punct din $[a, b] \times \mathbf{R} \subset \mathbf{R}^2$, trece o curbă integrală a ecuaţiei $x' = f(t)$ şi numai una.

13.1.4 Ecuaţii diferenţiale explicite, integrabile prin metode elementare

1. Ecuaţii diferenţiale care provin din anularea unei diferenţiale exacte

Să considerăm ecuaţia diferenţială de ordinul întâi sub forma simetrică

$$P(t, x)\, dt + Q(t, x)\, dx = 0, \tag{13.4}$$

P şi Q fiind funcţii continue, cu derivate parţiale continue pe un domeniu $D \subset \mathbf{R}^2$. Să observăm mai întâi că orice ecuaţie $x' = f(t,x)$ se poate pune sub formă (13.4) cu $-P/Q = f$.

Teorema 13.1 *Dacă funcţiile $P(t,x)$ şi $Q(t,x)$ au derivate parţiale continue în domeniul $D \subset \mathbf{R}^2$, care verifică pentru orice $(t,x) \in D$ relaţia*

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t}, \tag{13.5}$$

integrala generală a ecuaţiei (13.4) este dată de

$$\int_{t_0}^{t} P(\tau, x_0)\, d\tau + \int_{x_0}^{x} Q(t,\xi)\, d\xi = C, \quad (t_0, x_0) \in D. \tag{13.6}$$

$\triangleleft$ Deoarece funcţiile P şi Q satisfac condiţia (13.5), expresia diferenţială $P(t,x)\,dt + Q(t,x)\,dx$ este o diferenţială exactă, adică există funcţia $F(t,x)$, diferenţiabilă în D a.î.

$$dF(t,x) = P(t,x)\,dt + Q(t,x)\,dx, \tag{13.7}$$

sau

$$\frac{\partial F}{\partial t} = P(t,x), \quad \frac{\partial F}{\partial x} = Q(t,x), \quad \forall (t,x) \in D.$$

Integrând ecuaţia a doua în raport cu x avem $F(t,x) = \int_{x_0}^{x} Q(t,\xi)\,d\xi + G(t)$. Înlocuind în prima ecuaţie şi ţinând seama de (13.5), găsim

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial \xi}(t,\xi)\,d\xi + G'(t) = P(t,x),$$

de unde rezultă $G(t) = \int_{t_0}^{t} P(\tau, x_0)\,d\tau$ şi deci

$$F(t,x) = \int_{t_0}^{t} P(\tau, x_0)\,d\tau + \int_{x_0}^{x} Q(t,\xi)\,d\xi.$$

Cu $F(t,x)$ astfel determinată, integrala generală a ecuaţiei (13.4) este dată de $F(t,x) = C$, cum rezultă din (13.7). $\triangleright$

Integrala generală (13.6) se obţine prin două operaţii de integrare numite şi *cuadraturi*. Ea defineşte soluţia generală a ecuaţiei (13.4) sub formă implicită.

Exemplul 13.7 *Să se integreze ecuaţia $(t^2 - x^2)\,dt - 2tx\,dx = 0$ şi apoi să se determine curba integrală care trece prin punctul $(1,1)$.*

Avem $P(t,x) = t^2 - x^2$, $Q(t,x) = -2tx$ şi $P_x = Q_t = -2x$, deci membrul stâng al ecuaţiei date este o diferenţială exactă. Atunci integrala generală este dată de

$$\int_{t_0}^{t} (\tau^2 - x_0^2)\,d\tau - 2\int_{x_0}^{x} t\xi\,d\xi = C, \quad (t_0, x_0) \in D.$$

sau $\frac{1}{3}t^3 - tx^2 = C$. Soluţia particicutară care satisface condiţia iniţială dată este $t^3 - 3tx^2 + 2 = 0$.

2. Ecuaţii cu variabile separate

Fie ecuaţia diferenţială $P(t)\,dt + Q(x)\,dx = 0$, unde $P(t)$ este derivabilă pe $[a,b]$ şi $Q(x)$ este derivabilă pe $[c,d]$. Funcţiile P şi Q satisfac condiţia (13.5) pentru orice $(t,x) \in [a,b] \times [c,d]$. O astfel de ecuaţie se numeşte *cu variabile separate* şi integrala sa generală este dată, după (13.6), de

$$\int_{t_0}^{t} P(\tau)\,d\tau + \int_{x_0}^{x} Q(\xi)\,d\xi = C,$$

cu $(t_0, x_0) \in [a,b] \times [c,d]$.

Exemplul 13.8 *Să se determine soluţia ecuaţiei* $(x^2+1)\,dt + (2t+1)x^2\,dx = 0$*, care trece prin punctul* $(1,0)$*. Putem separa variabilele*

$$\frac{1}{2t+1}\,dt + \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = 0,$$

cu soluţia generală $\ln(2t+1)^2 + x - \operatorname{arctg} x = C$*. Soluţia particulară care satisface condiţia dată este* $\ln(2t+1)^2 + x - \operatorname{arctg} x = \ln 9$.

O ecuaţie diferenţială de ordinul întâi de forma $x' = f(t) \cdot g(x)$ este o ecuaţie cu variabile separabile. Într-adevăr, ea poate fi pusă sub forma

$$f(t)\,dt - \frac{1}{g(x)}\,dx = 0.$$

3. Metoda factorului integrant

Fie ecuaţia diferenţială

$$P(t,x)\,dt + Q(t,x)\,dx = 0, \tag{13.8}$$

P şi Q fiind funcţii continue, cu derivate parţiale continue pe un domeniu $D \subset \mathbf{R}^2$.

Dacă $P\,dt + Q\,dx$ nu este o diferenţială exactă în D, ne propunem să determinăm o funcţie $\mu(t,x)$ a.î. expresia $\mu(P\,dt + Q\,dx)$ să fie o diferenţială exactă în D. Trebuie deci să avem

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial t}(\mu Q), \quad \text{sau} \quad Q\,\frac{\partial \mu}{\partial t} - P\,\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial x}\right) = 0. \tag{13.9}$$

Definiţia 13.5 *Funcţia* $\mu(t,x)$*, definită în* D *şi cu derivate parţiale continue în* D*, care verifică ecuaţia (13.9), se numeşte* factor integrant *al ecuaţiei (13.8).*

Ecuaţia (13.9) este o ecuaţie cu derivate parţiale pentru funcţia $\mu(t,x)$. După cum se va vedea mai târziu, integrarea ei revine la integrarea ecuaţiei (13.8). Dar aici nu avem nevoie de soluţia generală a ecuaţiei (13.9), ci doar de o soluţie particulară a acesteia şi în anumite cazuri determinarea unei astfel de soluţii este posibilă.

De exemplu, dacă ecuaţia admite un factor integrant $\mu(t)$, funcţie numai de t, ecuaţia (13.9) devine

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dt} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t}\right) \tag{13.10}$$

şi determinarea lui μ este posibilă dacă membrul drept al ecuaţiei (13.10) este funcţie numai de t.

Într-adevăr, în acest caz în ecuaţia (13.10) variabilele se separă şi obţinem pe μ printr-o cuadratură

$$\ln\mu = \int \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t}\right) dt.$$

În mod asemănător, dacă ecuaţia admite un factor integrant $\mu(x)$, funcţie numai de x, ecuaţia (13.9) devine

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial x}\right) \tag{13.11}$$

şi determinarea lui μ este posibilă dacă membrul drept al ecuaţiei (13.11) este funcţie numai de x.

În acest caz, obţinem

$$\ln\mu = \int \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial x}\right) dx.$$

Exemplul 13.9 *Să se integreze ecuaţia* $(t^3\sin x - 2x)\,dt + (t^4\cos x + t)\,dx = 0$. *Avem* $P_x = t^3\cos x - 2$, $Q_t = 4t^3\cos x + 1$ *şi deci*

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t}\right) = -\frac{3}{t}$$

este funcţie numai de t. *Ca atare avem* $\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dt} = -\frac{3}{t}$ *şi o soluţie particulară este* $\mu = \frac{1}{t^3}$. *Înmulţind ecuaţia cu* μ, *obţinem*

$$\left(\sin x - \frac{2x}{t^3}\right) dt + \left(t\cos x + \frac{1}{t^2}\right) dx = 0$$

a cărei soluţie generală este $t\sin x + \frac{x}{t^2} = C$.

4. Ecuaţii omogene

Ecuaţiile diferenţiale de forma

$$\frac{dx}{dt} = \frac{P(t,x)}{Q(t,x)},$$

unde $P(t,x)$ şi $Q(t,x)$ sunt funcţii omogene în t şi x de acelaşi grad m se numesc *ecuaţii diferenţiale omogene*. Deoarece

$$P(t,x) = t^m P(1, \frac{x}{t}), \quad Q(t,x) = t^m Q(1, \frac{x}{t}),$$

ecuaţia se poate pune sub forma

$$\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{x}{t}\right). \tag{13.12}$$

Prin schimbarea de funcţie $x = ty$ ecuaţia (13.12) se transformă într-o ecuaţie cu variabile separabile. Într-adevăr, deoarece $x' = ty' + y$ ecuaţia devine $ty' + y = f(y)$, sau separând variabilele

$$\frac{dy}{f(y) - y} = \frac{dt}{t}, \tag{13.13}$$

care este o ecuaţie cu variabile separate. Dacă f este continuă şi $f(y) - y \neq 0$, integrând obţinem

$$\ln|t| + C = \int \frac{dy}{f(y) - y} = \Phi(y)$$

şi soluţia generală a ecuaţiei (13.12) este

$$\ln|t| + C = \Phi\left(\frac{x}{t}\right). \tag{13.14}$$

Dacă y_0 este o rădăcină a ecuaţiei $f(y) - y = 0$, atunci $y(t) = y_0$ este o soluţie a ecuaţiei $ty' + y = f(y)$, deci $x(t) = y_0 t$ este o soluţie singulară a ecuaţiei (13.12).

Exemplul 13.10 *Să se găsească soluţia ecuaţiei $t^2 + 2x^2 = txx'$, care satisface condiţia iniţială $x(1) = 2$.*

Cu schimbarea de variabilă $x = ty$, ecuaţia devine

$$\frac{ydy}{1 + y^2} = \frac{dt}{t},$$

cu soluţia generală $t = C\sqrt{1 + y^2}$. Înlocuind pe y, avem $t^2 = C\sqrt{t^2 + x^2}$. Condiţia iniţială determină pe $C = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Soluţia particulară căutată este $t^2\sqrt{5} = \sqrt{t^2 + x^2}$.

5. Ecuaţii reductibile la ecuaţii omogene

Să considerăm o ecuaţie de forma

$$\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{at + bx + c}{a't + b'x + c'}\right) \tag{13.15}$$

unde a, b, c, a', b', c' sunt constante.

a). Dacă $c^2 + (c')^2 = 0$, (13.15) este o ecuaţie omogenă. Cu substituţia $x = ty$ se separă variabilele.

b). Dacă $c^2 + (c')^2 > 0$ şi $ab' - a'b \neq 0$, dreptele

$$at + bx + c = 0, \quad a't + b'x + c' = 0$$

se intersectează într-un punct (t_0, x_0). Prin schimbările de variabilă independentă şi de funcţie $\tau = t - t_0$, $\xi = x - x_0$, ecuaţia devine

$$\frac{d\xi}{d\tau} = f\left(\frac{a\tau + b\xi}{a'\tau + b'\xi'}\right)$$

care este o ecuaţie omogenă.

c). Dacă $c^2 + (c')^2 > 0$ şi $ab' - a'b = 0$, rezultă $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = k$ şi deci

$$\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{at + bx + c}{k(at + bx) + c'}\right).$$

Prin schimbarea de funcţie $at + bx = y$ ecuaţia (13.15) se transformă într-o ecuaţie cu variabile separabile. Într-adevăr, deoarece $bx' = y' - a$, separând variabilele ecuaţia devine

$$\frac{dy}{bf\left(\frac{y+c}{ky+c'}\right) + a} = dt.$$

Dacă $bf\left(\frac{y+c}{ky+c'}\right) + a \neq 0$, prin integrare obţinem

$$t + C = \int \frac{dy}{bf\left(\frac{y+c}{ky+c'}\right) + a} = \Phi(y).$$

Revenind la variabilele iniţiale, soluţia generală a ecuaţiei (13.15) va fi dată implicit prin: $t + C = \Phi(at + bx)$.

6. Ecuaţii liniare de ordinul întâi

O ecuaţie de forma

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t), \tag{13.16}$$

unde $a(t)$ şi $b(t)$ sunt funcţii continue pe un interval I, se numeşte *ecuaţie diferenţială liniară de ordinul întâi.*

Dacă $b(t) \equiv 0$ ecuaţia se numeşte *omogenă*

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x.$$

Să integrăm mai întâi ecuaţia omogenă, care este o ecuaţie cu variabile separabile. Într-adevăr, putem scrie

$$\frac{dx}{x} = a(t)\,dt,$$

de unde

$$\ln|x| = \int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau + \ln|C|,$$

sau

$$x(t) = C\exp\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau, \quad t \in I,$$

cu $t_0 \in I$, fixat, reprezintă soluţia generală a ecuaţiei omogene. Dacă notăm cu

$$x_0(t) = \exp\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau,$$

o soluţie particulară a ecuaţiei omogene, atunci soluţia sa generală se scrie

$$x(t) = Cx_0(t).$$

Teorema 13.2 *Soluţia generală a ecuaţiei liniare neomogene este suma dintre soluţia generală a ecuaţiei liniare omogene corespunzătoare şi o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene.*

$\triangleleft$ Fie $x^*(t)$ o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene şi $y(t) = x(t) - x^*(t)$. Avem că $y'(t) = x'(t) - (x^*)'(t)$ sau $y'(t) = a(t)(x(t) - x^*(t))$, adică $y'(t) = a(t)y(t)$. Deci, $y(t)$ este soluţia generală a ecuaţiei omogene $y(t) = Cx_0(t)$. Încât

$$x(t) = Cx_0(t) + x^*(t).$$

O soluţie particulară a ecuaţiei neomogene se poate obţine prin *metoda variaţiei constantelor.* Aceasta constă în a căuta o soluţie de forma soluţiei generale a ecuaţiei omogene, în care constanta C se înlocuieşte printr-o funcţie $u(t)$,

$$x^*(t) = u(t)x_0(t). \tag{13.17}$$

Înlocuind în ecuaţia (13.16) găsim $(x_0'(t) - a(t)x_0(t))u + x_0(t)u' = b(t)$. Cum x_0 este soluţie a ecuaţiei omogene, rămâne, pentru determinarea funcţiei u, ecuaţia

$$x_0(t)u' = b(t).$$

O soluţie a acestei ecuaţii este

$$u(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{b(s)}{x_0(s)}\, ds,$$

care înlocuită în (13.17) ne conduce la soluţia particulară

$$x^*(t) = x_0(t) \int_{t_0}^{t} \frac{b(s)}{x_0(s)}\, ds.$$

Soluţia generală a ecuaţiei neomogene se scrie atunci

$$x(t) = Cx_0(t) + x_0(t) \int_{t_0}^{t} \frac{b(s)}{x_0(s)}\, ds.$$

Geometric, ea reprezintă o familie de curbe ce depinde liniar de constanta arbitrară C.

Exemplul 13.11 *Să se integreze ecuaţia liniară neomogenă $x' = x\operatorname{tg} t + \cos t$, pentru $t \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi\}$.*

Ecuaţia omogenă corespunzătoare, $x' = x\operatorname{tg} t$, are soluţia generală

$$x(t) = C \cdot \frac{1}{\cos t}, \quad t \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi\right\}.$$

Căutăm pentru ecuaţia neomogenă o soluţie particulară de forma

$$x^*(t) = u(t) \cdot \frac{1}{\cos t}.$$

Se obţine pentru u ecuaţia $u' = \cos^2 t$, de unde $u(t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t$. În consecinţă, soluţia generală a ecuaţiei date este

$$x(t) = C \cdot \frac{1}{\cos t} + \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right) \cdot \frac{1}{\cos t}, \quad t \in R \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi\right\}.$$

7. Ecuaţii de ordinul întâi reductibile la ecuaţii liniare

a). *Ecuaţia Bernoulli* este o ecuaţie de forma

$$x' = a(t)x + b(t)x^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}. \tag{13.18}$$

Prin schimbarea de funcţie $x^{1-\alpha} = y$, ecuaţia Bernoulli se transformă într-o ecuaţie liniară. Într-adevăr, cum $(1-\alpha)x^{-\alpha}x' = y'$, înlocuind în (13.18) obţinem

$$y' = (1-\alpha)a(t)y + (1-\alpha)b(t),$$

care este o ecuaţie liniară.

b). *Ecuaţia Riccati* este o ecuaţie de forma

$$x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t). \tag{13.19}$$

Dacă se cunoaşte o soluţie particulară $x^*(t)$ a ecuaţiei Riccati, prin schimbarea de funcţie $x = x^* + \frac{1}{y}$, ecuaţia (13.19) se transformă într-o ecuaţie liniară. Într-adevăr, cum $x' = (x^*)' - \frac{1}{y^2}y'$, ecuaţia (13.19) devine

$$(x^*)' - \frac{1}{y^2}y' = a(t)\left(x^* + \frac{1}{y}\right)^2 + b(t)\left(x^* + \frac{1}{y}\right) + c(t).$$

De unde, ţinând seamă că x^* este soluţie, obţinem

$$y' = -(2x^*(t)a(t) + b(t))y - a(t),$$

care este o ecuaţie liniară.

8. Ecuaţii algebrice în x'

Fie ecuaţia diferenţială

$$a_0(t,x)(x')^n + a_1(t,x)(x')^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(t,x)x' + a_n(t,x) = 0, \tag{13.20}$$

care se obţine prin anularea unui polinom în x' cu coeficienţii $a_k(t,x)$ funcţii continue şi $a_0(t,x) \neq 0$.

Considerată ca ecuaţie algebrică în x', (13.20) are n rădăcini $f_k(t,x)$, $k = \overline{1,n}$. Fiecare rădăcină reală ne dă o ecuaţie diferenţială de forma $x' = f(t,x)$. Orice soluţie a unei astfel de ecuaţii este soluţie a ecuaţiei (13.20).

13.1.5 Alte ecuaţii de ordinul întâi, integrabile prin metode elementare

1. Ecuaţia $x = f(x')$

Dacă f este o funcţie cu derivată continuă, soluţia generală a ecuaţiei $x = f(x')$ este dată parametric de

$$t = \int \frac{1}{p} f'(p)\, dp + C, \quad x = f(p).$$

Într-adevăr, să punem $x' = p$ şi să luăm pe p ca variabilă independentă. Avem

$$x = f(p), \quad dx = f'(p)\,dp, \quad dt = \frac{1}{p}\,dx = \frac{1}{p}f'(p)\,dp,$$

de unde obţinem pe t ca funcţie de p printr-o cuadratură.

Exemplul 13.12 *Să se integreze ecuaţia*

$$x = a_n(x')^n + a_{n-1}(x')^{n-1} + \cdots + a_1x' + a_0.$$

Punem $x' = p$. Atunci $dx = p\,dt$, $dt = \frac{1}{p}\,dx$, de unde

$$t = \int \frac{1}{p}(na_np^{n-1} + (n-1)a_{n-1}p^{n-2} + \cdots + a_1)\,dp.$$

Soluţia generală este dată de

$$\begin{cases} t = \frac{n}{n-1}a_np^{n-1} + \frac{n-1}{n-2}a_{n-1}p^{n-2} + \cdots + a_2p + a_1\ln p + C, \\ x = a_np^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1p + a_0, \quad p > 0. \end{cases}$$

2. Ecuaţia $F(x, x') = 0$

Integrarea ecuaţiei $F(x, x') = 0$ se reduce la o cuadratură dacă se cunoaşte o reprezentare parametrică a curbei $F(u, v) = 0$, anume $u = \varphi(\tau)$, $v = \psi(\tau)$, $\tau \in [a, b]$.

Într-adevăr, dacă φ şi ψ sunt continue, iar φ are derivată continuă pe $[a, b]$, putem scrie $x = \varphi(\tau)$, $x' = \psi(\tau)$, $\tau \in [a, b]$ şi deci

$$\frac{dx}{d\tau} = \varphi'(\tau), \quad dt = \frac{1}{\psi(\tau)}\varphi'(\tau)\,d\tau,$$

încât integrala generală este dată parametric de

$$t = \int \frac{1}{\psi(\tau)}\varphi'(\tau)\,d\tau + C, \quad x = \varphi(\tau).$$

3. Ecuaţia $t = f(x')$

Dacă f este o funcţie cu derivată continuă, soluţia generală a ecuaţiei $t = f(x')$ este dată parametric de

$$t = f(p), \quad x = \int pf'(p)\,dp + C.$$

Într-adevăr, să punem $x' = p$ şi să luăm pe p ca variabilă independentă. Avem

$$t = f(p), \quad dt = f'(p)\,dp, \quad dx = p\,dt = pf'(p)\,dp,$$

de unde obţinem pe x ca funcţie de p printr-o cuadratură.

Exemplul 13.13 *Să se integreze ecuaţia $t = 2x' + e^{x'}$. Punem $x' = p$. Atunci $t = 2p + e^p$, $dx = p\,dt = (2p + pe^p)\,dp$. Soluţia generală este dată de*

$$t = 2p + e^p, \quad x = p^2 + (p-1)e^p + C.$$

4. Ecuaţia $F(t, x') = 0$

Integrarea ecuaţiei $F(t, x') = 0$ se reduce la o cuadratură dacă se cunoaşte o reprezentare parametrică a curbei $F(u, v) = 0$, anume $u = \varphi(\tau)$, $v = \psi(\tau)$, $\tau \in [a, b]$.

Într-adevăr, dacă φ şi ψ sunt continue, iar φ are derivată continuă pe $[a, b]$, putem scrie $t = \varphi(\tau)$, $\frac{dx}{dt} = \psi(\tau)$, $\tau \in [a, b]$ şi deci

$$dx = \varphi'(\tau)\psi(\tau)\, d\tau,$$

încât integrala generală este dată parametric de

$$t = \varphi(\tau), \quad x = \int \psi(\tau)\varphi'(\tau)\, d\tau + C.$$

5. Ecuaţia Lagrange

Se numeşte *ecuaţie Lagrange* o ecuaţie diferenţială de forma

$$A(x')t + B(x')x + C(x') = 0,$$

cu A, B, C funcţii continue, cu derivate de ordinul întâi continue pe un interval $[a, b]$. Dacă $B(x') \neq 0$, ecuaţia Lagrange se poate scrie sub forma

$$x = \varphi(x')t + \psi(x').$$

Integrarea ecuaţiei Lagrange se reduce la integrarea unei ecuaţii liniare. Într-adevăr, dacă notăm $x' = p$, avem $x = \varphi(p)t + \psi(p)$. Derivăm în raport cu t şi ţinem seama că p este funcţie de t:

$$p - \varphi(p) = [\varphi'(p)t + \psi'(p)]\frac{dp}{dt}, \tag{13.21}$$

de unde, pentru $p - \varphi(p) \neq 0$, rezultă

$$\frac{dt}{dp} = \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)}t + \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)},$$

care este o ecuaţie liniară în t ca funcţie necunoscută şi p ca variabilă independentă. Prin integrarea acesteia obţinem pe t ca funcţie de p, care împreună cu $x = \varphi(p)t + \psi(p)$ determină integrala generală sub formă parametrică.

Dacă $p = p_0$ este o rădăcină a ecuaţiei $p - \varphi(p) = 0$, atunci $p(t) = p_0$ este o soluţie a ecuaţiei (13.21) şi deci $x = p_0 t + \psi(p_0)$ este o soluţie singulară a ecuaţiei lui Lagrange. Evident, vom avea atâtea soluţii particulare câte rădăcini are ecuaţia $p - \varphi(p) = 0$.

Exemplul 13.14 *Să se integreze ecuaţia $x = 2tx' + (x')^2$. Punem $x' = p$. Atunci $x = 2tp + p^2$ şi diferenţiem: $dx = 2p\,dt + 2t\,dp + 2p\,dp$. Dar $dx = p\,dt$ şi deci*

$$\frac{dt}{dp} = -\frac{2}{p}t - 2,$$

care este o ecuaţie liniară, a cărei soluţie generală, pentru $p \neq 0$, este $t = \frac{C}{p^2} - 2\frac{p}{3}$, încât soluţia generală a ecuaţiei date se scrie

$$t = \frac{C}{p^2} - 2\frac{p}{3}, \quad x = \frac{2C}{p} - \frac{p^2}{3}, \quad p \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

Pentru $p = 0$ se obţine $x(t) \equiv 0$, care este o soluţie singulară.

6. Ecuaţia Clairaut

Se numeşte *ecuaţie Clairaut* o ecuaţie diferenţială de forma

$$x = tx' + \psi(x').$$

unde ψ este o funcţie cu derivată continuă pe un interval $[a, b]$.

Ecuaţia Clairaut este o ecuaţie Lagrange particulară, anume cu $\varphi(p) = p$. Pentru integrarea ei procedăm la fel ca pentru integrarea ecuaţiei Lagrange. Înlocuim $x' = p$, $x = tp + \psi(p)$, apoi derivăm în raport cu t şi ţinem seama că p este funcţie de t. Obţinem

$$(t + \psi'(p)) \cdot \frac{dp}{dt} = 0.$$

Avem două posibilităţi. Sau $\frac{dp}{dt} = 0$, $p = C$ şi deci $x(t) = Ct + \psi(C)$ este soluţia generală a ecuaţiei Clairaut. Sau $t + \psi'(p) = 0$, care ne conduce la soluţia singulară

$$t = -\psi'(p), \quad x = -p\psi'(p) + \psi(p).$$

Exemplul 13.15 *Să se integreze ecuaţia $x = tx' + (x')^n$. Punem $x' = p$ şi derivând obţinem: $p = tp' + p + np^{n-1}p'$ sau $p'(t + np^{n-1}) = 0$. Avem: $p' = 0$, $p = C$, care dă soluţia gererală $x(t) = Ct + C^n$. Sau $t = -np^{n-1}$, $x = (1 - n)p^n$, care reprezintă o integrală singulară.*

7. Ecuaţia $x = f(t, x')$

Notând $x' = p$, avem $x = f(t, p)$ şi derivăm în raport cu t, ţinând seama că p este funcţie de t. Obţinem

$$p = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dt},$$

de unde putem explicita pe dp/dt. Dacă această ecuaţie poate fi integrată şi $p = \varphi(t, C)$ este soluţia sa generală, atunci $x(t) = f(t, \varphi(t, C))$ este soluţia generală a ecuaţiei date.

Exemplul 13.16 *Să se integreze ecuaţia*

$$(x')^2 + tx' + 3x + t^2 = 0.$$

Punem $x' = p$, avem $p^2 + tp + 3x + t^2 = 0$. Derivăm în raport cu t: $2pp' + p + tp' + 3p + 2t = 0$ sau $(2p + 1)(p' + 2) = 0$. Din $p' = -2$ urmează $p = -2t + C$, de unde soluţia generală

$$x(t) = -\frac{1}{3}[t^2 + t(C - 2t) + (C - 2t)^2], \quad t \in \mathbf{R}.$$

Apoi $t = -2p$ şi $x = -p^2$, care reprezintă o integrală singulară.

8. Ecuaţia $t = f(x, x')$

Notând $x' = p$, avem $t = f(x, p)$ şi derivăm în raport cu x, considerând pe t şi p ca funcţii de x. Obţinem

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx}.$$

Dacă putem integra această ecuaţie şi $p = \varphi(x, C)$ este soluţia sa generală, atunci $t(x) = f(x, \varphi(x, C))$ este soluţia generală a ecuaţiei date.

Exemplul 13.17 *Să se integreze ecuaţia* $t = \frac{1}{x'}x + (x')^n$. *Punem* $x' = p$, *avem* $t = \frac{1}{p}x + p^n$. *Derivăm în raport cu* x. *Obţinem*

$$\frac{dp}{dx} \cdot (np^{n-1} - \frac{1}{p^2}) = 0.$$

Deci $\frac{dp}{dx} = 0$, $p = C$, *de unde soluţia generală* $t(x) = \frac{1}{C}x + C^n$, *sau* $x = np^{n+1}$, $t = (n+1)p^n$, *care reprezintă o integrală singulară.*

13.1.6 Teorema de existenţă şi unicitate

În cele ce urmează vom stabili condiţiile în care problema lui Cauchy pentru o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi are soluţie unică şi vom da un mijloc de construcţie efectivă a acestei soluţii.

Fie ecuaţia diferenţială de ordinul întâi

$$x' = f(t, x), \tag{13.22}$$

cu condiţia iniţială

$$x(t_0) = x_0. \tag{13.23}$$

Teorema 13.3 *Dacă:*

a). funcţia $f(t, x)$ *este continuă pe domeniul închis* D, *definit prin*

$$D = \{(t, x) \in \mathbf{R}^2,\ |t - t_0| \leq a,\ |x - x_0| \leq b\}$$

b). pentru orice $(t, x_1), (t, x_2) \in D$, *funcţia* $f(t, x)$ *satisface inegalitatea*

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|, \quad L > 0,$$

numită condiţia lui Lipschitz, atunci există un număr real pozitiv $h \leq a$ *şi o singură funcţie* $x = x(t)$ *definită şi derivabilă pe intervalul* $[t_0 - h, t_0 + h]$, *soluţie a ecuaţiei (13.22) pe intervalul* $[t_0 - h, t_0 + h]$ *şi care satisface condiţia iniţială (13.23).*

$\triangleleft$ Funcţia $f(t, x)$ este continuă pe domeniul închis D, deci este mărginită pe D. Fie $M > 0$, a.î.

$$|f(t, x)| \leq M, \quad (t, x) \in D.$$

Luăm $h = \min\{a, b/M\}$ şi fie $I = [t_0 - h, t_0 + h]$.

Pentru determinarea soluţiei vom folosi *metoda aproximaţiilor succesive.* Metoda constă din a construi un şir de funcţii

$$x_0,\ x_1(t),\ \dots,\ x_n(t),\ \dots$$

care converge în mod uniform pe I către o funcţie care îndeplineşte condiţiile din enunţul teoremei.

Primul termen al şirului îl luăm x_0 şi se numeşte aproximaţia de ordinul zero. Al doilea termen al şirului de funcţii, numit şi aproximaţia de ordinul întâi, îl definim prin

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, x_0)\, dt, \quad t \in I,$$

aproximaţia de ordinul doi prin

$$x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, x_1(t))\, dt, \quad t \in I$$

şi în general, aproximaţia de ordinul n, prin

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, x_{n-1}(t))\, dt, \quad t \in I. \tag{13.24}$$

Şirul de funcţii astfel definit are următoarele proprietăţi:

1. Toate funcţiile $x_n(t)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ satisfac condiţia iniţială $x_n(t_0) = x_0$.

2. Toţi termenii şirului sunt funcţii continue pe intervalul I. Într-adevăr, f este continuă pe D, deci toate integralele care intervin sunt funcţii continue pe I.

3. Pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $x_n(t) \in [x_0 - b, x_0 + b]$, pentru $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$.

Demonstraţie prin inducţie. Deoarece $|f(t, x_0)| \leq M$, avem

$$|x_1 - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(t, x_0)\, dt \right| \leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(t, x_0)|\; dt \right| \leq M|t - t_0| \leq Mh \leq b.$$

Să presupunem că aproximaţia de ordinul $n-1$ îndeplineşte această condiţie, deci $x_{n-1} \in [x_0 - b, x_0 + b]$. Atunci $|f(t, x_{n-1})| \leq M$ şi putem scrie

$$|x_n - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(t, x_{n-1})\, dt \right| \leq M\,|t - t_0| \leq Mh \leq b,$$

prin urmare, pentru $t \in I$ toate aproximaţiile aparţin intervalului $[x_0 - b, x_0 + b]$.

Vom arăta acum că şirul de funcţii $(x_n(t))$ converge uniform pe intervalul I la o funcţie $x(t)$ când $n \to \infty$. Convergenţa acestui şir este echivalentă cu convergenţa seriei de funcţii

$$x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) + \cdots, \tag{13.25}$$

deoarece şirul sumelor parţiale ale seriei (13.25) este tocmai şirul (x_n).

Pentru a arăta că seria (13.25) este uniform convergentă pe I este suficient să arătăm că ea este majorată de o serie numerică cu termeni pozitivi convergentă. Mai precis, vom arăta că pentru orice $t \in I$,

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leq M \cdot L^{n-1} \cdot \frac{|t-t_0|^n}{n!}, \quad n \in \mathbf{N}. \tag{13.26}$$

Demonstraţie prin inducţie. Avem

$$|x_1(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(t, x_0)\, dt \right| \leq M\, |t - t_0|,$$

deci pentru $n = 1$ inegalitatea (13.26) este verificată. Presupunem că ea este adevărată pentru $n - 1$, adică

$$|x_{n-1}(t) - x_{n-2}(t)| \leq M \cdot L^{n-2} \cdot \frac{|t-t_0|^{n-1}}{(n-1)!} \tag{13.27}$$

şi arătăm că este adevărată şi pentru n. Avem

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leq \left| \int_{t_0}^{t} [f(t, x_{n-1}) - f(t, x_{n-2})]\, dt \right|$$

şi dacă folosim condiţia lui Lipschitz şi inegalitatea (13.27), găsim

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leq L \left| \int_{t_0}^{t} |x_{n-1} - x_{n-2}|\, dt \right| \leq L \left| \int_{t_0}^{t} M L^{n-2} \frac{|t-t_0|^{n-1}}{(n-1)!}\, dt \right|,$$

de unde (13.26).

Deoarece $|t - t_0| \leq h$, avem majorarea

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leq \frac{M}{L} \cdot \frac{(Lh)^n}{n!}, \quad t \in I,$$

de unde rezultă că seria (13.25) este absolut şi uniform convergentă pe I, deoarece seria numerică

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{M}{L} \cdot \frac{(Lh)^n}{n!}$$

este convergentă. Într-adevăr, folosind criteriul raportului avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{Lh}{n+1} = 0.$$

Se poate observa că avem efectiv

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{M}{L} \cdot \frac{(Lh)^n}{n!} = \frac{M}{L} \cdot (e^{Lh} - 1).$$

Rezultă de aici că şirul aproximaţiilor succesive are ca limită o funcţie continuă pe I

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t).$$

Trecând la limită în relaţia de recurenţă (13.24), găsim că

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau, \quad t \in I. \tag{13.28}$$

Derivând (13.28) în raport cu t, obţinem

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in I,$$

de unde deducem că funcţia $x = x(t)$ este soluţie pe I a ecuaţiei diferenţiale (13.22). Ea verifică şi condiţia iniţială (13.23), cum rezultă din (13.28).

Unicitatea soluţiei rezultă din unicitatea limitei unui şir convergent.

Funcţiile $x_n(t)$ constituie aproximaţii ale soluţiei $x(t)$, care sunt cu atât mai apropiate de $x(t)$ cu cât n este mai mare. Deci metoda folosită în demonstraţia precedentă, numită metoda aproximaţiilor succesive, dă şi un procedeu de aproximare a soluţiei ecuaţiei diferenţiale (13.22) care trece printr-un punct dat (t_0, x_0), adică un procedeu de rezolvare a problemei lui Cauchy.

13.2 Ecuaţii diferenţiale de ordin superior

13.2.1 Soluţia generală. Soluţii particulare

Fie ecuaţia diferenţială

$$F(t, x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0. \tag{13.29}$$

Ordinul maxim al derivatei care figurează în (13.29) se numeşte *ordinul* ecuaţiei diferenţiale (13.29). Dacă $n \geq 2$ spunem că ecuaţia diferenţială este *de ordin superior*.

Reamintim că funcţiile $x = x(t)$, definite pe intervalul $[a, b]$, având derivate până la ordinul n inclusiv în orice punct al intervalului $[a, b]$ se numeşte *soluţie* a ecuaţiei diferenţiale (13.29) pe intervalul $[a, b]$ dacă

$$F(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)) = 0, \quad \forall t \in [a, b].$$

Exemplul 13.18 *Ecuaţia diferenţială de ordinul trei*

$$x''' - x'' + x' - x = 0$$

admite soluţiile $x_1(t) = e^t$, $x_2(t) = \cos t$, $x_3(t) = \sin t$. *Ecuaţia admite şi soluţia*

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 \cos t + C_3 \sin t, \quad t \in \mathbf{R},$$

unde C_1, C_2, C_3 *sunt constante arbitrare.*

Din exemplul precedent se vede că soluţiile unei ecuaţii diferenţiale de ordin superior pot depinde de constante arbitrare.

Definiţia 13.6 *Funcţia* $x = x(t, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ *este* soluţia generală *a ecuaţiei diferenţiale (13.29) în domeniul* $D \subset \mathbf{R}^2$*, dacă este soluţie a ecuaţiei (13.29) şi dacă prin alegerea convenabilă a constantelor se transformă în orice soluţie a ecuaţiei (13.29) al cărei grafic se află în* D.

Soluţia generală a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n poate fi scrisă şi sub formă *implicită*

$$\Phi(t, x, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0.$$

De obicei, unei relaţii de această formă i se dă denumirea de *integrala generală* a ecuaţiei diferenţiale de ordinul n.

Soluţia generală a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n poate fi scrisă şi sub formă *parametrică*

$$t = \varphi(\tau, C_1, C_2, \ldots, C_n), \quad x = \psi(\tau, C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

Definiţia 13.7 *Numim* soluţie particulară *a ecuaţiei (13.29) orice funcţie* $x = x(t)$, $t \in [a, b]$, $(t, x) \in D \subset \mathbf{R}^2$*, care se obţine din soluţia generală dând valori particulare constantelor* $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Graficul unei soluţii particulară a ecuaţiei (13.29) este o curbă plană numită *curbă integrală.*

Exemplul 13.19 *Ecuaţia* $x'' + x = t$ *are soluţia generală* $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + t$, $t \in \mathbf{R}$. *Funcţia* $x(t) = \cos t + t$ *este o soluţie particulară care se obţine din soluţia generală pentru* $C_1 = 1$ *şi* $C_2 = 0$.

Soluţia generală a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n depinde de n constante arbitrare.

13.2.2 Integrale intermediare. Integrale prime

Fie dată ecuaţia diferenţială de ordinul n

$$F(t, x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0 \tag{13.30}$$

şi fie

$$\Phi(t, x, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0 \tag{13.31}$$

integrala sa generală. Dacă derivăm relaţia (13.31) de $n - k$ ori şi eliminăm între aceste $n - k + 1$ relaţii constantele $C_{k+1}, C_{k+2}, \ldots, C_n$, obţinem o relaţie de forma

$$\Psi(t, x, x', \ldots, x^{(n-k)} C_1, C_2, \ldots, C_k) = 0. \tag{13.32}$$

Definiţia 13.8 *Se numeşte* integrală intermediară *a ecuaţiei (13.30) o ecuaţie diferenţială de ordinul $n-k$, de forma (13.32), care conţine $k \geq 1$ constante arbitrare şi care este verificată de integrala generală (13.31) a ecuaţiei (13.30). În particular, pentru $k = 1$, (13.32) se numeşte* integrală primă.

Cunoaşterea unei integrale intermediare simplifică rezolvarea ecuaţiei diferenţiale iniţiale. Dacă (13.32) este o integrală intermediară a ecuaţiei (13.30), atunci integrarea ecuaţiei (13.30) se reduce la integrarea ecuaţiei (13.32), care este o ecuaţie diferenţială de ordinul $n-k$.

Într-adevăr, integrala generală a ecuaţiei (13.32) conţine $n-k$ constante arbitrare şi dacă adăugăm la acestea cele k constante care intră în structura ecuaţiei (13.32), soluţia găsită va conţine n constante arbitrare, deci va fi integrala generală a ecuaţiei (13.30).

În particular, cunoaşterea a n integrale prime distincte ale ecuaţiei (13.30)

$$\Psi_i(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}, C_i) = 0, \quad i = \overline{1, n} \tag{13.33}$$

este echivalentă cu cunoaşterea soluţiei generale a ecuaţiei (13.30), deoarece din sistemul (13.33) putem obţine pe x, x', …, $x^{(n-1)}$ în funcţie de t, C_1, C_2, …, C_n, de unde, în particular, rezultă $x = x(t, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, adică soluţia generală a ecuaţiei (13.30).

13.2.3 Condiţii iniţiale. Problema lui Cauchy

În multe probleme care conduc la rezolvarea unei ecuaţii diferenţiale de forma (13.30) nu este necesar să cunoaştem soluţia generală ci doar o anumită soluţie, care să satisfacă anumite condiţii, numite *condiţii iniţiale* şi care o determină în mod unic.

În general, se cere o soluţie a ecuaţiei (13.30) cu proprietatea că pentru $t = t_0$, x şi derivatele sale până la ordinul $n-1$ iau valori date

$$x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_0',\ \ldots,\ x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{n-1}. \tag{13.34}$$

Problema determinării soluţiei $x(t)$ care satisface condiţiile iniţiale (13.34) se numeşte *problema lui Cauchy*.

13.2.4 Ecuaţii de ordin superior integrabile prin cuadraturi

1. Ecuaţia $x^{(n)} = 0$

Este cea mai simplă ecuaţie diferenţială de ordinul n. Prin n cuadraturi succesive obţinem soluţia generală sub forma

$$x(t) = \frac{C_1}{(n-1)!}t^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!}t^{n-2} + \cdots + \frac{C_{n-1}}{1!}t + C_n,$$

adică un polinom arbitrar de gradul $n-1$.

Exemplul 13.20 *Să se găsească soluţia ecuaţiei $x^{(5)} = 0$, care satisface condiţiile iniţiale:*

$$x(0) = 1,\ x'(0) = 0,\ x''(0) = -1,\ x^{(3)}(0) = 0,\ x^{(4)}(0) = 1.$$

Soluţia generală este

$$x(t) = \frac{C_1}{4!}t^4 + \frac{C_2}{3!}t^3 + \frac{C_3}{2!}t^2 + \frac{C_4}{1!}t + C_5.$$

Condiţiile iniţiale precizate conduc la soluţia particulară

$$x(t) = \frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{2}t^2 + 1, \quad t \in \mathbf{R}.$$

2. Ecuaţia $x^{(n)} = f(t)$

Dacă f este continuă pe intervalul $[a, b]$, soluţia generală a acestei ecuaţii se poate pune sub forma

$$x(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{t_0}^{t}(t-\tau)^{n-1}f(\tau)\,d\tau + \frac{C_1}{(n-1)!}t^{n-1} + \cdots + \frac{C_{n-1}}{1!}t + C_n,$$

cu $t_0 \in [a, b]$.

Într-adevăr, ecuaţia se mai scrie $(x^{(n-1)})' = f(t)$, de unde, prin cuadraturi succesive, avem

$$\begin{aligned}
&x^{(n-1)} = \textstyle\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt + C_1,\\
&x^{(n-2)} = \textstyle\int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} f(t)\,dt + C_1 t + C_2,\\
&\cdots\ \cdots\ \cdots\\
&x = \textstyle\int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} dt\ \cdots \int_{t_0}^{t} f(t)\,dt + \frac{C_1}{(n-1)!}t^{n-1} + \cdots + \frac{C_{n-1}}{1!}t + C_n.
\end{aligned}$$

Rămâne de arătat că

$$\int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} dt \cdots \int_{t_0}^{t} f(t)\,dt = \frac{1}{(n-1)!}\int_{t_0}^{t}(t-\tau)^{n-1}f(\tau)\,d\tau. \tag{13.35}$$

Prin inducţie după n. Pentru $n = 2$, avem

$$\int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} f(t)\,dt = \int_{t_0}^{t} d\theta \int_{t_0}^{\theta} f(\tau)\,d\tau = \int_{t_0}^{t}\left[\int_{t_0}^{\theta} f(\tau)\,d\tau\right]d\theta = \iint_D f(\tau)\,d\theta\,d\tau,$$

unde D este triunghiul din planul $\theta\tau$ mărginit de dreptele $\tau = \theta$, $\theta = t$ şi $\tau = t_0$. Inversând ordinea de integrare, putem scrie

$$\iint_D f(\tau)\,d\theta\,d\tau = \int_{t_0}^{t}\left[\int_{\tau}^{t} f(\tau)\,d\theta\right]d\tau = \int_{t_0}^{t}(t-\tau)f(\tau)\,d\tau.$$

Deci formula (13.35) este adevărată pentru $n = 2$. Presupunem (13.35) adevărată pentru $n-1$ şi arătăm că este adevărată pentru n. Din (13.35) pentru n trecut în $n-1$, integrând în raport cu t avem

$$\int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} dt \cdots \int_{t_0}^{t} f(t)\,dt = \frac{1}{(n-2)!}\int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t}(t-\tau)^{n-2}f(\tau)\,d\tau =$$

$$\frac{1}{(n-2)!}\int_{t_0}^{t} d\theta \int_{t_0}^{\theta} (\theta-\tau)^{n-2} f(\tau)\, d\tau = \frac{1}{(n-2)!}\iint_D (\theta-\tau)^{n-2} f(\tau)\, d\theta\, d\tau =$$

$$\frac{1}{(n-2)!}\int_{t_0}^{t} d\tau \int_{\tau}^{t} (\theta-\tau)^{n-2} f(\tau)\, d\theta = \frac{1}{(n-1)!}\int_{t_0}^{t} (t-\tau)^{n-1} f(\tau)\, d\tau.$$

Deci formula este adevărată pentru orice n.

Exemplul 13.21 *Să se determine soluţia ecuaţiei* $x''' = \sin t$*, care satisface condiţiile iniţiale* $x(0) = 1$*,* $x'(0) = -1$*,* $x''(0) = 0$*. Prin trei integrări succesive obţinem soluţia generală*

$$x(t) = \cos t + \frac{1}{2}C_1 t^2 + C_2 t + C_3.$$

Soluţia problemei lui Cauchy este $x(t) = \cos t + t^2 - t$*.*

3. Ecuaţia $F(t, x^{(n)}) = 0$

Dacă se cunoaşte o reprezentare parametrică a curbei $F(u, v) = 0$ şi anume $u = \varphi(\tau)$, $v = \psi(\tau)$, cu φ şi ψ funcţii continue şi φ cu derivată continuă pe $[a, b]$, atunci integrala generală pe $[a, b]$ a ecuaţiei diferenţiale se obţine prin n cuadraturi.

Într-adevăr, luând $t = \varphi(\tau)$, $x^{(n)} = \psi(\tau)$, avem $dt = \varphi'(\tau)\, d\tau$, $dx^{(n-1)} = \psi(\tau)\, dt = \psi(\tau)\varphi'(\tau)\, d\tau$. De unde obţinem printr-o cuadratură

$$x^{(n-1)} = \int \psi(\tau)\varphi'(\tau)\, d\tau + C_1 = \Psi_1(\tau) + C_1.$$

Apoi $dx^{(n-2)} = (\Psi_1(\tau) + C_1)\, dt = (\Psi_1(\tau) + C_1)\varphi'(\tau)\, d\tau$. De unde

$$x^{(n-2)} = \int \Psi_1(\tau)\varphi'(\tau)\, d\tau + C_1\varphi(\tau) + C_2 = \Psi_2(\tau) + C_1\varphi(\tau) + C_2.$$

Repetând operaţia de n ori, obţinem soluţia sub formă parametrică

$$t = \varphi(\tau), \quad x = \Psi_n(\tau) + P_{n-1}(\varphi(\tau)),$$

în care P_{n-1} este un polinom de gradul $n-1$ în $\varphi(\tau)$.

Dacă ecuaţia poate fi explicitată în raport cu t, adică putem obţine $t = f(x^{(n)})$, atunci o reprezentare parametrică este dată de $x^{(n)} = \tau$, $t = f(\tau)$.

Exemplul 13.22 *Să se găsească soluţia generală a ecuaţiei* $t = x'' + \ln x''$*. Punem* $x'' = \tau$*,* $t = \tau + \ln\tau$*. Avem* $dx' = \tau\, dt = \tau(1 + \frac{1}{\tau})\, d\tau$*. Se obţine soluţia generală*

$$t = \tau + \ln\tau, \quad x = \frac{1}{6}\tau^3 + \frac{3}{4}\tau^2 + C_1(\tau + \ln\tau) + C_2.$$

4. Ecuaţia $F(x^{(n-1)}, x^{(n)}) = 0$

Dacă se cunoaşte o reprezentare parametrică a curbei $F(u, v) = 0$ şi anume $u = \varphi(\tau)$, $v = \psi(\tau)$, cu φ şi ψ funcţii continue şi φ cu derivată continuă pe $[a, b]$, atunci integrala generală pe $[a, b]$ a ecuaţiei diferenţiale se obţine prin n cuadraturi.

Într-adevăr, luând $x^{(n-1)} = \varphi(\tau)$, $x^{(n)} = \psi(\tau)$, avem $dx^{(n-1)} = \varphi'(\tau)\, d\tau$, $dx^{(n-1)} = \psi(\tau)\, dt$. De unde $dt = \frac{\varphi'(\tau)}{\psi(\tau)}\, d\tau$ şi printr-o cuadratură obţinem

$$t = \int \frac{\varphi'(\tau)}{\psi(\tau)}\, d\tau + C_1 = \Psi(\tau) + C_1, \quad x^{(n-1)} = \varphi(\tau),$$

Aşadar am redus problema la cazul precedent.

Exemplul 13.23 *Să se integreze ecuaţia* $x^{(3)} \cdot x^{(4)} = -1$. *O reprezentare parametrică este* $x^{(3)} = \tau$, $x^{(4)} = -\frac{1}{\tau}$, $\tau \neq 0$. *Obţinem* $dx^{(3)} = d\tau$, $dx^{(3)} = -\frac{1}{\tau}\, dt$, *deci* $dt = -\tau\, d\tau$. *Se obţine soluţia generală*

$$t = -\frac{1}{2}\tau^2 + C_1, \quad x = -\frac{1}{105}\tau^7 + \frac{1}{8}C_1\tau^4 - \frac{1}{2}C_2\tau^2 + C_3.$$

5. Ecuaţia $F(x^{(n-2)}, x^{(n)}) = 0$

Dacă se cunoaşte o reprezentare parametrică a curbei $F(u, v) = 0$ şi anume $u = \varphi(\tau)$, $v = \psi(\tau)$, cu φ şi ψ funcţii continue şi φ cu derivată continuă pe $[a, b]$, atunci integrala generală pe $[a, b]$ a ecuaţiei diferenţiale se obţine prin n cuadraturi.

Într-adevăr, luând $x^{(n-2)} = \varphi(\tau)$, $x^{(n)} = \psi(\tau)$, din $dx^{(n-1)} = x^{(n)}\, dt$, $dx^{(n-2)} = x^{(n-1)}\, dt$, prin eliminarea lui dt găsim

$$x^{(n-1)}\, dx^{(n-1)} = x^{(n)}\, dx^{(n-2)} = \varphi'(\tau)\psi(\tau)\, d\tau,$$

de unde

$$x^{(n-1)} = \sqrt{2\int \varphi'(\tau)\psi(\tau)\, d\tau + C_1}, \quad x^{(n-2)} = \varphi(\tau).$$

Aşadar am redus problema la cazul precedent.

13.2.5 Ecuaţii cărora li se poate micşora ordinul

1. Ecuaţia $F(t, x^{(k)}, x^{(k+1)}, \ldots, x^{(n)}) = 0$

Ecuaţia se transformă într-o ecuaţie diferenţială de ordinul $n - k$ prin schimbarea de funcţie $x^{(k)} = u$. Derivând şi înlocuind obţinem ecuaţia

$$F(t, u, u', \ldots, u^{(n-k)}) = 0.$$

Dacă această ecuaţie poate fi integrată, suluţia sa generală va fi de forma

$$u(t) = \varphi(t, C_1, \ldots, C_{n-k}).$$

Integrarea ecuaţiei date se reduce atunci la integrarea ecuaţiei de ordinul k:

$$x^{(k)} = \varphi(t, C_1, \ldots, C_{n-k}).$$

Exemplul 13.24 *În ecuaţia*

$$x^{(n)}\sin t - x^{(n-1)}\cos t + 1 = 0,$$

punem $x^{(n-1)} = u$ *şi ecuaţia se transformă într-o ecuaţie liniară în* u*:*

$$u'\sin t - u\cos t + 1 = 0.$$

2. Ecuaţia $F(x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0$

Prin schimbarea de funcţie $x' = p$, luând pe x ca variabilă independentă, reducem ordinul ecuaţiei date cu o unitate. Obţinem succesiv

$$\frac{dx}{dt} = p,\ \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dx}p,$$

$$\frac{d^3x}{dt^3} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \frac{d}{dt}\left(p\frac{dp}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dx}\right)p = p\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 + p^2\frac{d^2p}{dx^2}.$$

Se observă că derivatele $\frac{d^kx}{dt^k}$ se exprimă cu ajutorul lui p, $\frac{dp}{dx}$, $\ldots$, $\frac{d^{k-1}p}{dx^{k-1}}$. Înlocuite în ecuaţie ne conduc la o ecuaţie de ordinul $n-1$ în funcţia p de variabila independentă x.

Exemplul 13.25 *Să se integreze ecuaţia*

$$xx'' - (x')^2 = x^2.$$

Punem $x' = p$, $x'' = p\frac{dp}{dx}$ *şi obţinem ecuaţia*

$$xp\frac{dp}{dx} = p^2 + x^2,$$

care este o ecuaţie omogenă.

3. Ecuaţia $F(t, x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0$ **omogenă în** $x, x', \ldots, x^{(n)}$

Ecuaţia fiind omogenă în $x, x', \ldots, x^{(n)}$, se poate pune sub forma

$$F\left(t, \frac{x'}{x}, \ldots, \frac{x^{(n)}}{x}\right) = 0.$$

Cu schimbarea de funcţie $\frac{x'}{x} = u$, obţinem succesiv

$$x' = xu,\ x'' = x(u^2 + u'),\ x''' = x(u^3 + 3uu' + u'').$$

Se observă că $\frac{x^{(k)}}{x}$ se exprimă în funcţie de u, u', $\ldots$, $u^{(k-1)}$, care înlocuite în ecuaţie ne conduc la o ecuaţie de ordinul $n-1$ în u.

Exemplul 13.26 *Să se integreze ecuaţia*

$$txx'' + t(x')^2 - xx' = 0.$$

Este o ecuaţie omogenă în x, x', x''*. Cu schimbarea de funcţie* $\frac{x'}{x} = u$*, obţinem*

$$u' - \frac{1}{t}u + 2u^2 = 0$$

care este o ecuaţie Bernoulli.

4. Ecuaţia $F(t, x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^n x}{dt^n}) = 0$ omogenă în $t, x, dt, dx, \ldots, d^n x$

Fiind omogenă în toate argumentele se poate pune sub forma

$$F\left(\frac{x}{t}, \frac{dx}{dt}, \frac{td^2x}{dt^2}, \ldots, \frac{t^{n-1}d^n x}{dt^n}\right) = 0.$$

Prin schimbarea de funcţie $\frac{x}{t} = u$ şi schimbarea de variabilă independentă $t = e^\tau$, se transformă într-o ecuaţie căreia i se poate reduce ordinul cu o unitate. Obţinem succesiv

$$\frac{x}{t} = u, \ \frac{dx}{dt} = u' + u, \ t\frac{d^2x}{dt^2} = u'' + u'.$$

Se observă că produsele $t^{k-1}\frac{d^k x}{dt^k}$ nu conţin decât pe u şi derivatele sale în raport cu τ până la ordinul k, încât ecuaţia devine

$$F(u, u' + u, u'' + u', \ldots) = 0,$$

care este o ecuaţie ce nu conţine explicit variabila independentă, de forma studiată la punctul 2., deci căreia i se poate reduce ordinul cu o unitate.

Exemplul 13.27 *Ecuaţia*

$$t^2 x x'' + t^2 (x')^2 - 5txx' + 4x^2 = 0$$

este omogenă de ordinul 4. Împărţind prin t^2 se poate pune sub forma

$$\frac{x}{t} \cdot tx'' + (x')^2 - 5\frac{x}{t} \cdot x' + 4\left(\frac{x}{t}\right)^2 = 0.$$

Punem $t = e^\tau$, $x = tu$ şi ecuaţia devine

$$uu'' + (u')^2 - 2uu' = 0.$$

Luând acum $u' = p$ obţinem ecuaţia liniară

$$\frac{dp}{du} + \frac{1}{u}p - 2 = 0.$$

5. Ecuaţia $F(x, tx', t^2x'', \ldots, t^n x^{(n)}) = 0$

Prin schimbarea de variabilă independentă $t = e^\tau$, obţinem o ecuaţie căreia i se poate reduce ordinul cu o unitate. Obţinem

$$tx' = \frac{dx}{d\tau}, \ t^2 x'' = \frac{d^2x}{d\tau^2} - \frac{dx}{d\tau}.$$

Se observă că $t^k x^{(k)}$ se exprimă în funcţie numai de $\frac{dx}{d\tau}$, ..., $\frac{d^k x}{d\tau^k}$. Prin urmare ecuaţia ia forma

$$F\left(x, \frac{dx}{d\tau}, \frac{d^2x}{d\tau^2} - \frac{dx}{d\tau}, \ldots\right) = 0,$$

în care nu apare explicit τ. Punem $\frac{dx}{d\tau} = p$ şi luăm pe x ca variabilă independentă. Se reduce astfel ordinul ecuaţiei cu o unitate.

Capitolul 14

ECUAŢII ŞI SISTEME DIFERENŢIALE LINIARE

Studiul ecuaţiilor şi sistemelor de ecuaţii diferenţiale liniare oferă exemplul unei teorii închegate, bazată pe metodele şi rezultatele algebrei liniare.

14.1 Sisteme diferenţiale liniare de ordinul I

Un *sistem de ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi* este de forma:

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + b_i(t), \quad i = \overline{1,n}, \quad t \in I, \tag{14.1}$$

unde a_{ij} şi b_i sunt funcţii reale *continue* pe un interval $I \subset \mathbf{R}$. Sistemul (14.1) se numeşte *neomogen*. Dacă $b_i \equiv 0$, $i = \overline{1,n}$, atunci sistemul ia forma:

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j, \quad i = \overline{1,n}, \quad t \in I \tag{14.2}$$

şi se numeşte *omogen*.

Prin *soluţie* a sistemului diferenţial (14.1) se înţelege un sistem de funcţii

$$(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)), \quad t \in I,$$

continuu diferenţiabile pe intervalul I care verifică ecuaţiile (14.1) pe acest interval, adică:

$$x_i'(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t) + b_i(t), \quad \forall t \in I, \quad i = \overline{1,n}.$$

În general, mulţimea soluţiilor sistemului (14.1) este infinită şi o vom numi *soluţie generală*. O *soluţie particulară* a sistemului se poate obţine impunând anumite condiţii. Cel mai uzual tip de condiţii îl constituie *condiţiile iniţiale*:

$$x_1(t_0) = x_1^0, \; x_2(t_0) = x_2^0, \; \ldots \; , x_n(t_0) = x_n^0, \tag{14.3}$$

unde $t_0 \in I$ şi $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbf{R}^n$ sunt date şi se numesc *valori iniţiale.*

Prin *problemă Cauchy* asociată sistemului (14.1) se înţelege determinarea unei soluţii

$$x_i = x_i(t), \quad i = \overline{1, n} \tag{14.4}$$

a sistemului (14.1) care să verifice condiţiile iniţiale (14.3).

Din punct de vedere geometric, o soluţie a sistemului (14.1) reprezintă parametric o curbă în spaţiul $\mathbf{R}^n$, numită *curbă integrală* a sistemului (14.1).

Fie matricea $A(t) = ||a_{ij}(t)||$, pătratică de ordinul n şi vectorii din $\mathbf{R}^n$:

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)),\ \mathbf{b}(t) = (b_1(t), b_2(t), \ldots, b_n(t)),\ \mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0).$$

Fie încă aplicaţia $T = T(t; \mathbf{x})$, liniară în $\mathbf{x}$, definită în baza canonică din $\mathbf{R}^n$, prin $T(t; \mathbf{e}_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}(t)\mathbf{e}_i$. Atunci sistemul (14.1) se poate scrie sub forma vectorială:

$$\mathbf{x}' = A\,(t)\,\mathbf{x} + \mathbf{b}(t),\ \text{ sau }\ \mathbf{x}' = T(t;\, \mathbf{x}) + \mathbf{b}(t), \quad t \in I, \tag{14.5}$$

iar condiţiile iniţiale (14.3):

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \tag{14.6}$$

Teorema 14.1 *Dacă a_{ij} şi b_i sunt funcţii continue pe I, $\forall\, t_0 \in I$ şi oricare ar fi vectorul $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$,* există o singură soluţie $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ *a sistemului liniar (14.5), definită pe întreg intervalul I şi satisfăcând condiţia iniţială (14.6).*

$\triangleleft$ Pentru $t_0 \in I$ fixat, construim aproximaţiile succesive:

$$\mathbf{x}^0(t) = \mathbf{x}_0,\ \mathbf{x}^{k+1}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} T(t; \mathbf{x}^k(t))\, dt + \int_{t_0}^{t} \mathbf{b}(t)\, dt, \quad t \in I \tag{14.7}$$

şi arătăm că şirul $\left(\mathbf{x}^k(t)\right)_{k \in N}$ converge uniform pe I la soluţia căutată.

În adevăr, notând cu $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = T(t; \mathbf{x}) + \mathbf{b}(t)$, avem pentru $t \in I$ şi $\mathbf{x}$ oarecare

$$||\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})|| \leq L||\mathbf{x} - \mathbf{y}||,$$

unde $L = \sup ||A(t)||$, pentru $t \in I$. Prin norma unei matrice înţelegem tot norma euclidiană, adică rădăcina pătrată din suma pătratelor tuturor elementelor sale. Dacă notăm cu $M = \sup ||\mathbf{x}^1(t) - \mathbf{x}_0||$, pentru $t \in I$, vom găsi majorarea

$$||\mathbf{x}^{k+1}(t) - \mathbf{x}^k(t)|| \leq M \cdot \frac{(L|t - t_0|)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

care atrage convergenţa uniformă pe I a şirului $\left(\mathbf{x}^k(t)\right)$ la soluţia căutată. $\triangleright$

14.2 Sisteme diferenţiale liniare omogene

Vom studia pentru început sistemul diferenţial omogen (14.2), care sub formă vectorială se mai scrie

$$\mathbf{x}' = A\,(t)\,\mathbf{x}, \quad \text{sau} \quad \mathbf{x}' = T(t;\,\mathbf{x}), \quad t \in I. \tag{14.8}$$

Teorema 14.2 *Dacă $\mathbf{x}^1(t)$ şi $\mathbf{x}^2(t)$ sunt două soluţii particulare ale sistemului omogen (14.8) şi $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$, atunci $\alpha_1\mathbf{x}^1(t) + \alpha_2\mathbf{x}^2(t)$ este de asemenea soluţie.*

$\triangleleft$ Cum $\mathbf{x}^1(t)$ şi $\mathbf{x}^2(t)$ sunt soluţii, putem scrie

$$[\alpha_1\mathbf{x}^1(t) + \alpha_2\mathbf{x}^2(t)]' = T(t;\alpha_1\mathbf{x}^1(t) + \alpha_2\mathbf{x}^2(t)). \triangleright$$

Teorema 14.3 *Mulţimea soluţiilor sistemului omogen (14.8) formează un spaţiu vectorial de dimensiune n.*

$\triangleleft$ Că mulţimea soluţiilor sistemului (14.8) formează un spaţiu vectorial rezultă din Teorema 14.2. Pentru a demonstra că dimensiunea acestui spaţiu este n vom arăta că există un izomorfism între spaţiul S al soluţiilor sistemului (14.8) şi spaţiul $\mathbf{R}^n$. Pentru aceasta introducem aplicaţia $\Gamma : S \to \mathbf{R}^n$ definită prin $\Gamma(\mathbf{x}) = \mathbf{x}(t_0)$, pentru $t_0 \in I$ fixat. Evident că Γ este o aplicaţie liniară. Din Teorema 14.1 de existenţă şi unicitate a soluţiei problemei lui Cauchy asociată sistemului (14.8) rezultă că Γ este surjectivă (adică $\Gamma(S) = \mathbf{R}^n$) şi injectivă (adică $\ker\Gamma = \{\mathbf{0}\}$). Prin urmare, Γ este un izomorfism al spaţiului S pe $\mathbf{R}^n$. Deci, $\dim S = \dim \mathbf{R}^n = n$. $\triangleright$

Din Teorema 14.3 rezultă că spaţiul S al soluţiilor sistemului (14.8) admite o bază formată din n elemente. Fie $\{\mathbf{x}^1(t), \mathbf{x}^2(t), \ldots, \mathbf{x}^n(t)\}$ o astfel de bază, adică un sistem de n soluţii ale sistemului (14.8), liniar independente pe I.

Orice sistem de n soluţii $\{\mathbf{x}^1(t), \mathbf{x}^2(t), \ldots, \mathbf{x}^n(t)\}$ liniar independente ale sistemului (14.8) se numeşte *sistem fundamental de soluţii.*

Matricea $X(t)$, pătratică de ordinul n, ce are drept coloane coordonatele celor n vectori soluţii,

$$X(t) = [\mathbf{x}^1(t), \mathbf{x}^2(t), \ldots, \mathbf{x}^n(t)], \quad t \in I,$$

se numeşte *matrice fundamentală.* Deoarece $\left(\mathbf{x}^k(t)\right)' = A(t)\mathbf{x}^k(t)$, pentru $k = \overline{1,n}$, rezultă că matricea $X(t)$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale matriceale

$$X'(t) = A(t)X(t), \quad t \in I. \tag{14.9}$$

(S-a notat cu $X'(t)$ matricea formată din derivatele elementelor matricii $X(t)$). Evident, matricea fundamentală nu este unică.

Fiind dat un sistem de n soluţii ale sistemului (14.8), se numeşte *wronskianul* acestui sistem, notat cu $W(t)$, determinantul

$$W(t) = \det X(t). \tag{14.10}$$

Teorema 14.4 *Dacă există un $t_0 \in I$ a.î. $W(t_0) = 0$, atunci $W(t) = 0$ pentru orice $t \in I$.*

$\lhd$ Deoarece $W(t_0) = 0$, între coloanele determinantului (14.10), pentru $t = t_0$, există o relaţie de dependenţă liniară, deci există scalarii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{R}$, nu toţi nuli, a.î.

$$\lambda_1 \mathbf{x}^1(t_0) + \lambda_2 \mathbf{x}^2(t_0) + \ldots + \lambda_n \mathbf{x}^n(t_0) = \mathbf{0}.$$

Cu aceşti λ_i formăm combinaţia liniară

$$\mathbf{x}(t) = \lambda_1 \mathbf{x}^1(t) + \lambda_2 \mathbf{x}^2(t) + \ldots + \lambda_n \mathbf{x}^n(t), \quad t \in I.$$

Observăm că $\mathbf{x}(t)$ astfel definit este o soluţie a sistemului (14.8) şi $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$. Dar din Teorema 14.1, care asigură unicitatea soluţiei problemei lui Cauchy pentru sistemul (14.8) cu condiţia iniţială $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$, rezultă că $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ pentru orice $t \in I$, adică între coloanele determinantului (14.10) există o relaţie de dependenţă liniară pentru orice $t \in I$ şi deci $W(t) = 0$ pentru orice $t \in I$. $\rhd$

Teorema 14.5 *Sistemul de soluţii* $\{\mathbf{x}^1(t), \mathbf{x}^2(t), \ldots, \mathbf{x}^n(t)\}$ *este fundamental d.d. există un* $t_0 \in I$ *a.î.* $W(t_0) \neq 0$.

$\lhd$ Dacă sistemul $\{\mathbf{x}^1(t), \mathbf{x}^2(t), \ldots, \mathbf{x}^n(t)\}$ este fundamental el este liniar independent pe I, deci pentru t_0 arbitrar din I, vectorii $\mathbf{x}^1(t_0)$, $\mathbf{x}^2(t_0)$, $\ldots$, $\mathbf{x}^n(t_0)$ sunt liniar independenţi şi în consecinţă $W(t_0) \neq 0$.

Reciproc, dacă există un $t_0 \in I$ a.î. $W(t_0) \neq 0$, după Teorema 14.4, $W(t) \neq 0$ pentru orice $t \in I$, deci sistemul $\{\mathbf{x}^1(t), \mathbf{x}^2(t), \ldots, \mathbf{x}^n(t)\}$ este liniar independent pe I, adică este sistem fundamental. $\rhd$

Din teoremele precedente rezultă:

Teorema 14.6 *Dacă* $\{\mathbf{x}^1(t), \mathbf{x}^2(t), \ldots, \mathbf{x}^n(t)\}$ *este un sistem de* n *soluţii ale sistemului (14.8) pentru care există un* $t_0 \in I$ *a.î.* $W(t_0) \neq 0$, *atunci acesta este un sistem fundametal de soluţii pentru (14.8) şi soluţia sa generală este de forma*

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{x}^1(t) + c_2 \mathbf{x}^2(t) + \ldots + c_n \mathbf{x}^n(t) = X(t)\,\mathbf{c}, \quad t \in I,$$

în care $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ *este un vector arbitrar din* $\mathbf{R}^n$.

Exemplul 14.1 *Sistemul*

$$x' = \frac{4}{t}\,x - \frac{4}{t^2}\,y, \quad y' = 2\,x - \frac{1}{t}\,y$$

admite soluţiile particulare: $x_1(t) = 1$, $y_1(t) = t$ *şi* $x_2(t) = 2t^2$, $y_2(t) = t^3$, $t \in (0, \infty)$.

Deoarece $W(t) = -t^3 \neq 0$, *cele două soluţii formează un sistem fundametal de soluţii pentru sistemul dat şi deci soluţia generală este*

$$x(t) = c_1 + 2c_2\,t^2, \quad y(t) = c_1\,t + c_2\,t^3.$$

14.3 Sisteme diferenţiale liniare neomogene

Vom studia acum sistemul diferenţial neomogen

$$\mathbf{x}' = A\,(t)\,\mathbf{x} + \mathbf{b}\,(t)\,, \quad \text{sau} \quad \mathbf{x}' = T(t;\,\mathbf{x}) + \mathbf{b}(t), \quad t \in I. \tag{14.11}$$

Un prim rezultat se referă la structura mulţimii soluţiilor.

Teorema 14.7 *Fie $X(t)$ o matrice fundamentală a sistemului omogen corespunzător (14.8) şi $\mathbf{x}^*(t)$ o soluţie particulară a sistemului neomogen (14.11). Soluţia generală a sistemului neomogen este suma dintre soluţia generală a sistemului omogen şi o soluţie particulară a sistemului neomogen, adică*

$$\mathbf{x}(t) = X(t)\,\mathbf{c} + \mathbf{x}^*(t), \quad t \in I, \tag{14.12}$$

unde $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^n$ este un vector arbitrar.

◁ Fie $\mathbf{x}(t)$ o soluţie a sistemului neomogen. Punem $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)$. Avem

$$\mathbf{y}' = \mathbf{x}' - \mathbf{x}^{*\prime} = T(t;\mathbf{x}) + \mathbf{b} - (T(t;\mathbf{x}^*) + \mathbf{b}) = T(t;\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) = T(t;\mathbf{y}),$$

deci $\mathbf{y}(t)$ este soluţia generală a sistemului omogen, adică $\mathbf{y}(t) = X(t)\,\mathbf{c}$, $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^n$ şi deci are loc (14.12). ▷

Teorema 14.8 ***(Metoda variaţiei constantelor)*** *Fie $X(t)$ o matrice fundamentală a sistemului omogen (14.8). Atunci o soluţie particulară a sistemului neomogen (14.11) este*

$$\mathbf{x}^*(t) = X(t)\,\mathbf{u}(t) = u_1(t)\mathbf{x}^1(t) + u_2(t)\mathbf{x}^2(t) + \cdots + u_n(t)\mathbf{x}^n(t), \tag{14.13}$$

unde funcţia $\mathbf{u} : I \to \mathbf{R}^n$ este dată, până la un vector constant aditiv, de

$$\mathbf{u}'(t) = X^{-1}(t)\mathbf{b}(t), \quad t \in I. \tag{14.14}$$

◁ Căutăm o soluţie particulară pentru sistemul neomogen de forma soluţiei generale a sistemului omogen, în care vectorul $\mathbf{c}$ îl presupunem o funcţie $\mathbf{u}(t)$, deci de forma (14.13). Derivând şi înlocuind în (14.11), se obţine

$$X'(t)\,\mathbf{u}(t) + X(t)\,\mathbf{u}'(t) = A(t)X(t)\,\mathbf{u}(t) + \mathbf{b}(t),$$

care împreună cu (14.9) dă $X(t)\,\mathbf{u}'(t) = \mathbf{b}(t)$. Dar $W(t) \neq 0$, deci există $X^{-1}(t)$, încât $\mathbf{u}'(t) = X^{-1}(t)\,\mathbf{b}(t)$, $t \in I$.

Din (14.12), (14.13) şi (14.14) rezultă că soluţia problemei lui Cauchy pentru sistemul (14.11) cu condiţia iniţială $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ este

$$\mathbf{x}(t) = X(t)X^{-1}(t_0)\,\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} X(t)X^{-1}(s)\,\mathbf{b}(s)\,ds, \quad t \in I. \tag{14.15}$$

Matricea $U(t,s) = X(t)X^{-1}(s)$ se numeşte *matricea de tranziţie* a sistemului.

Exemplul 14.2 *Fie sistemul liniar neomogen*

$$x' = \frac{4}{t}\,x - \frac{4}{t^2}\,y + \frac{1}{t}, \quad y' = 2\,x - \frac{1}{t}y + t, \quad t \in (0,\infty).$$

Aşa cum am văvut, soluţia generală a sistemului omogen corespunzător este

$$x(t) = c_1 + 2c_2\,t^2, \quad y(t) = c_1\,t + c_2\,t^3.$$

Căutăm pentru sistemul neomogen o soluţie particulară de forma

$$x^*(t) = u(t) + 2t^2\,v(t), \;\; y(t) = t\,u(t) + t^3\,v(t).$$

Derivând şi înlocuind în sistem, obţinem

$$u' + 2t^2\,v' = \frac{1}{t}, \quad tu' + t^3\,v' = t,$$

sau, rezolvând în privinţa lui u' şi v':

$$u' = 2 - \frac{1}{t}, \quad v' = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3},$$

de unde, prin integrare

$$u(t) = 2t - \ln t, \quad v(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2}.$$

Înlocuind în $x^*(t)$ şi $y^*(t)$, obţinem soluţia particulară a sistemului neomogen

$$x^*(t) = 4t - 1 - \ln t, \quad y^*(t) = 3t^2 - \frac{1}{2}t - t\ln t$$

şi deci soluţia generală a sistemului neomogen este

$$x(t) = c_1 + 2c_2\,t^2 + 4t - 1 - \ln t, \quad y(t) = c_1\,t + c_2\,t^3 + 3t^2 - \frac{1}{2}t - t\ln t, \;\; t > 0.$$

Problema cea mai dificilă în rezolvarea unui sistem liniar o constituie determinarea unui sistem fundamental de soluţii.

În cele ce urmează vom arăta că în cazul particular când matricea A a sistemului este o *matrice constantă*, problema determinării unui sistem fundamental de soluţii se reduce la o problemă de algebră liniară şi anume la *determinarea valorilor proprii şi a vectorilor proprii ai matricei A*.

14.4 Sisteme diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi

Considerăm *sistemul diferenţial liniar omogen cu coeficienţi constanţi*

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \text{ sau } \mathbf{x}' = T(\mathbf{x}), \quad t \in \mathbf{R}, \tag{14.16}$$

unde $A = ||a_{ij}|| \in \mathcal{M}(\mathbf{R})$ este o matrice pătratică cu elemente constante.

Aplicaţia $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ definită prin $T(\mathbf{e}_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{e}_i$, $j = \overline{1,n}$, este o transformare liniară pe $\mathbf{R}^n$.

Teorema 14.9 *Funcţia $\mathbf{x} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$, definită prin*

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}\, e^{\lambda t}, \quad t \in \mathbf{R}, \tag{14.17}$$

este o soluţie a sistemului (14.16) d.d. λ este valoare proprie a transformării liniare T, iar $\mathbf{u}$ vector propriu corespunzător.

◁ Derivând (14.17) şi înlocuind în (14.16), obţinem

$$T(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u}. \tag{14.18}$$

Deci λ trebuie să fie valoare proprie pentru T, iar $\mathbf{u}$ vector propriu corespunzător.

Reciproc, dacă $\mathbf{u}$ este vector propriu al transformării liniare T corespunzător valorii proprii λ, atunci are loc (14.18), de unde prin înmulţire cu $e^{\lambda t}$, găsim că $\mathbf{x}(t)$ dat de (14.17) este soluţie a sistemului (14.16).

Pentru a obţine soluţia generală a sistumului (14.16) sunt necesare n *soluţii liniar independente*, care în general nu pot fi toate de forma (14.17) deoarece nu orice transformare liniară poate fi adusă la expresia canonică.

Teorema 14.10 *Dacă transformarea liniară T poate fi adusă la expresia canonică, adică există n vectori proprii $\mathbf{u}^1$, $\mathbf{u}^2$, ..., $\mathbf{u}^n$ liniar independenţi, corespunzători valorilor proprii λ_1, λ_2, ..., λ_n nu neapărat distincte, atunci funcţiile*

$$\mathbf{x}^1(t) = \mathbf{u}^1 e^{\lambda_1 t}, \mathbf{x}^2(t) = \mathbf{u}^2 e^{\lambda_2 t}, \ldots, \mathbf{x}^n(t) = \mathbf{u}^n e^{\lambda_n t}, \quad t \in \mathbf{R} \tag{14.19}$$

formează un sistem fundamental de soluţii pentru sistemul diferenţial (14.16).

◁ Prin ipoteză sistemul $\{\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^n\}$ de vectori din $\mathbf{R}^n$ formează o bază în $\mathbf{R}^n$ în care matricea transformării T are forma diagonală $\operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, deci

$$T(\mathbf{u}^k) = \lambda_k \mathbf{u}^k, \quad k = \overline{1,n}. \tag{14.20}$$

Conform teoremei precedente, funcţiile (14.19) sunt soluţii ale sistemului (14.16). Pentru a forma un sistem fundamental de soluţii este necesar să fie liniar independente. Fie deci combinaţia liniară

$$\alpha_1\mathbf{x}^1(t) + \alpha_2\mathbf{x}^2(t) + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}^n(t) = \mathbf{0}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Ţinând seama de (14.19), urmează

$$\alpha_1 \mathbf{u}^1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 \mathbf{u}^2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + \alpha_n \mathbf{u}^n e^{\lambda_n t} = \mathbf{0}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Deoarece $\{\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^n\}$ formează o bază în $\mathbf{R}^n$, rezultă că egalitatea precedentă are loc numai dacă $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\ldots$, $\alpha_n = 0$ şi deci vectorii $\mathbf{x}^1(t)$, $\mathbf{x}^2(t)$, $\ldots$, $\mathbf{x}^n(t)$ sunt liniar independenţi. $\triangleright$

Exemplul 14.3 *Să determinăm soluţia generală a sistemului*

$$x' = 3y - 4z, \quad y' = -z, \quad z' = -2x + y.$$

Matricea transformării liniare asociate este

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ecuaţia caracteristică a transformării liniare T este $\lambda^3 - 7\lambda - 6 = 0$, cu rădăcinile $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 3$, simple. Deci transformarea T poate fi adusă la expresia canonică. Vectorii proprii corespunzători sunt

$$\mathbf{u}^1 = (1,1,1), \quad \mathbf{u}^2 = (5,2,4), \quad \mathbf{u}^3 = (5,1,-3).$$

Deci funcţiile

$$\mathbf{x}^1(t) = e^{-t}(1,1,1), \quad \mathbf{x}^2(t) = e^{-2t}(5,2,4), \quad \mathbf{x}^3(t) = e^{3t}(5,1,-3)$$

formează un sistem fundamental de soluţii. Soluţia generală a sistemului se scrie atunci

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = c_1 e^{-t} + 5c_2 e^{-2t} + 5c_3 e^{3t}, \\ y(t) = c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{-2t} + \ c_3 e^{3t}, \\ z(t) = c_1 e^{-t} + 4c_2 e^{-2t} - 3c_3 e^{3t}, \end{array} \right. \quad t \in \mathbf{R}.$$

Dacă ecuaţia caracteristică admite o rădăcină complexă λ_1, atunci $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$, conjugata sa complexă, este de asemenea o rădăcină. Vectorii proprii corespunzători vor avea coordonate complex conjugate. Deoarece $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ şi deci

$$\frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \cos\theta, \quad \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \sin\theta,$$

putem înlocui soluţiile complexe corespunzătoare $\mathbf{x}^1(t)$, $\mathbf{x}^2(t)$ (complex conjugate) prin soluţii reale, efectuând schimbarea

$$\mathbf{y}^1(t) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}^1(t) + \mathbf{x}^2(t)), \quad \mathbf{y}^2(t) = \frac{1}{2i}(\mathbf{x}^1(t) - \mathbf{x}^2(t)).$$

Exemplul 14.4 *Să determinăm soluţia generală a sistemului*

$$x' = y, \quad y' = -x.$$

Ecuaţia caracteristică este $\lambda^2 + 1 = 0$ *şi deci* $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, *iar vectorii proprii corespunzători* $\mathbf{u}^1 = (1, i)$, $\mathbf{u}^2 = (1, -i)$. *Un sistem fundamental de soluţii (complexe) va fi*

$$\mathbf{x}^1(t) = (e^{it}, ie^{it}), \quad \mathbf{x}^2(t) = (e^{-it}, -ie^{-it}).$$

Prin schimbarea precedentă, obţinem sistemul fundamental de soluţii (reale)

$$\mathbf{y}^1(t) = (\cos t, -\sin t), \quad \mathbf{y}^2(t) = (\sin t, \cos t),$$

încât, soluţia generală a sistemului diferenţial dat se va scrie

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \quad y(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t.$$

Dacă transformarea liniară T *nu* poate fi adusă la expresia canonică şi λ este o valoare proprie multiplă de ordinul m, atunci se poate căuta o soluţie de forma

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}_{m-1}(t)e^{\lambda t}, \quad t \in \mathbf{R}$$

unde $\mathbf{P}_{m-1}(t)$ este un vector ale cărui coordonate sunt polinoame de grad cel mult $m-1$.

Dacă λ_1, λ_2, ..., λ_s sunt valorile proprii ale transformării liniare T şi m_1, m_2, ..., m_s ordinele lor de multiplicitate, cu $m_1 + m_2 + \ldots + m_s = n$, soluţia generală a sistemului (14.16) va fi de forma

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^{s} \mathbf{P}_{m_k-1}(t)e^{\lambda_k t}, \quad t \in \mathbf{R}$$

unde $\mathbf{P}_{m_k-1}(t)$ sunt vectori ale căror coordonate sunt polinoame de grad cel mult $m_k - 1$, $k = \overline{1, s}$. Coeficienţii acestor polinoame se determină prin identificare, în funcţie de n dintre ei, aleşi drept constante arbitrare.

Acest mod de a obţine soluţia generală a sistemului se numeşte *metoda coeficienţilor nedeterminaţi*.

Exemplul 14.5 *Să determinăm soluţia generală a sistemului*

$$x' = y, \quad y' = -x + 2y.$$

Ecuaţia caracteristică este $(\lambda - 1)^2 = 0$ *şi deci* $\lambda_1 = 1$, *cu* $m_1 = 2$, *iar vectorul propriu corespunzător* $\mathbf{u}^1 = (1, 1)$. *Transformarea liniară* T *nu poate fi adusă la expresia canonică. Căutăm atunci soluţia generală sub forma*

$$x(t) = (a + bt)e^t, \quad y(t) = (c + dt)e^t.$$

Derivând şi înlocuind în sistem, obţinem pentru a, b, c, d *sistemul:* $a + b = c$, $b = d$, $a - c + d = 0$, $b - d = 0$, *care este compatibil dublu nedeterminat. Luând* $a = c_1$, $b = c_2$, *găsim* $c = c_1 + c_2$, $d = c_2$ *a.î. soluţia generală va fi*

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^t, \quad y(t) = (c_1 + c_2 + c_2 t)e^t.$$

14.5 Ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul n

Să considerăm *ecuaţia diferenţială liniară de ordinul* n, neomogenă

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x = f(t), \quad t \in I \tag{14.21}$$

şi ecuaţia omogenă asociată

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x = 0, \quad t \in I \tag{14.22}$$

unde $a_i(t)$, $i = \overline{1,n}$ şi $f(t)$ sunt funcţii continue pe intervalul I.

Ecuaţia diferenţială (14.21) (respectiv (14.22)) se reduce la un sistem diferenţial de ordinul I. Asociem funcţiei necunoscute x, funcţia vectorială $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ prin relaţiile

$$x_1 = x,\ x_2 = x',\ x_3 = x'',\ \ldots,\ x_n = x^{(n-1)}. \tag{14.23}$$

Cu această substituţie, ecuaţia neomogenă (14.21) este echivalentă cu următorul sistem diferenţial liniar de ordinul întâi

$$\begin{cases} x_i' = x_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}, \\ x_n' = -a_n(t)x_1 - \cdots - a_1(t)x_n + f(t). \end{cases} \tag{14.24}$$

Mai precis, aplicaţia Λ definită prin $\mathbf{x} = \Lambda(x) = (x, x', \ldots, x^{(n-1)})$ este un izomorfism între mulţimea soluţiilor ecuaţiei (14.21) şi mulţimea soluţiilor sistemului (14.24).

Ecuaţiei omogene (14.22) îi corespunde prin izomorfismul Λ sistemul liniar omogen

$$\begin{cases} x_i' = x_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}, \\ x_n' = -a_n(t)x_1 - \cdots - a_1(t)x_n. \end{cases} \tag{14.25}$$

Din teorema de existenţă şi unicitate a soluţiei pentru sisteme diferenţiale, rezultă:

Teorema 14.11 *Oricare ar fi $t_0 \in I$ şi oricare ar fi $(x_0, x_0', \ldots, x^{(n-1)})$ din $\mathbf{R}^n$ există o singură soluţie $x = x(t)$ a ecuaţiei (14.21), definită pe întreg intervalul I şi care satisface condiţiile iniţiale*

$$x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_0',\ \ldots,\ x_0^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}. \tag{14.26}$$

Conform Teoremei 14.3 de la sisteme diferenţiale avem:

Teorema 14.12 *Mulţimea soluţiilor ecuaţiei omogene (14.22) formează un spaţiu vectorial de dimensiune n.*

Fie $\{x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t)\}$ o bază în acest spaţiu, adică n soluţii liniar independente ale ecuaţiei (14.22). Ca şi în cazul sistemelor diferenţiale liniare, un sistem format din n soluţii liniar independente ale ecuaţiei (14.22) îl vom numi *sistem fundamental de soluţii*.

Cum prin izomorfismul Λ fiecărei soluţii $x(t)$ a ecuaţiei omogene îi corespunde o soluţie

$$\mathbf{x}(t) = (x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t))$$

a sistemului omogen, sistemului de soluţii $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ îi corespunde matricea

$$X(t) = \begin{bmatrix} x^1 & x^2 & \dots & x^n \\ (x^1)' & (x^2)' & \dots & (x^n)' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x^1)^{(n-1)} & (x^2)^{(n-1)} & \dots & (x^n)^{(n-1)} \end{bmatrix}. \tag{14.27}$$

Fie încă $W(t) = \det X(t)$ *wronskianul* sistemului de soluţii. Din Teorema 14.5 deducem atunci:

Teorema 14.13 *Sistemul de soluţii $\{x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t)\}$ este fundamental d.d. există un $t_0 \in I$ a.î. $W(t_0) \neq 0$.*

În final, obţinem din Teorema 14.6:

Teorema 14.14 *Fie $\{x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t)\}$ este un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia (14.22), atunci soluţia generală a ecuaţiei (14.22) este*

$$x(t) = c_1 x^1(t) + c_2 x^2(t) + \dots + c_n x^n(t), \quad t \in I, \tag{14.28}$$

unde $c_1, c_2, \dots, c_n$ sunt constante arbitrare.

Exemplul 14.6 *Ecuaţia diferenţială $x'' + a^2 x = 0$, $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ admite soluţiile $x^1(t) = \cos at$, $x^2(t) = \sin at$. Wronskianul sistemului $\{x^1(t), x^2(t)\}$ este*

$$W(t) = \begin{vmatrix} \cos at & \sin at \\ -a \sin at & a \cos at \end{vmatrix} = a \neq 0.$$

Deci $\{x^1(t), x^2(t)\}$ formează un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia dată, iar soluţia ei generală este

$$x(t) = c_1 \cos at + c_2 \sin at, \quad t \in \mathbf{R}.$$

cu c_1, c_2 constante arbitrare.

Din Teorema 14.7 de la sisteme liniare neomogene, rezultă că soluţia generală a ecuaţiei liniare neomogene de ordinul n, este de forma

$$x(t) = c_1 x^1(t) + c_2 x^2(t) + \dots + c_n x^n(t) + x^*(t), \ t \in I, \tag{14.29}$$

unde $\{x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t)\}$ este un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia omogenă asociată, iar $x^*(t)$ este o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene.

O soluţie particulară pentru ecuaţia neomogenă se poate căuta prin *metoda variaţiei constantelor* deja utilizată pentru sisteme; vom lua deci $x^*(t)$ de forma

$$x^*(t) = u_1(t) x^1(t) + u_2(t) x^2(t) + \dots + u_n(t) x^n(t), \tag{14.30}$$

în care $\{x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t)\}$ este un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia omogenă, iar $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t))$ este o soluţie a sistemului (14.14)

$$X(t)\,\mathbf{u}'(t) = \mathbf{b}(t), \tag{14.31}$$

cu $\mathbf{b}(t) = (0, 0, \ldots, f(t))$, după cum rezultă din (14.24), adică

$$\begin{cases} x^1 u_1' + x^2 u_2' + \cdots + x^n u_n' = 0 \\ (x^1)' u_1' + (x^2)' u_2' + \cdots + (x^n)' u_n' = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (x^1)^{(n-2)} u_1' + (x^2)^{(n-2)} u_2' + \cdots + (x^n)^{(n-2)} u_n' = 0 \\ (x^1)^{(n-1)} u_1' + (x^2)^{(n-1)} u_2' + \cdots + (x^n)^{(n-1)} u_n' = f(t) \end{cases} \tag{14.32}$$

Deoarece $\det X(t) = W(t) \neq 0$ pe I, sistemul (14.32) determină în mod unic funcţia $\mathbf{u}'(t)$. Soluţia sa se scrie

$$\mathbf{u}'(t) = X^{-1}(t)\mathbf{b}(t). \tag{14.33}$$

De unde se determină atunci $\mathbf{u}(t)$ până la un vector $\mathbf{c}$ arbitrar.

Exemplul 14.7 *Fie ecuaţia $x'' + a^2 x = \cos at$, $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Soluţia generală a ecuaţiei omogene asociate este*

$$x(t) = c_1 \cos at + c_2 \sin at, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Căutăm o soluţie particulară pentru ecuaţia neomogenă sub forma

$$x^*(t) = u_1(t) \cos at + u_2(t) \sin at, \quad t \in \mathbf{R}.$$

în care $u_1'(t)$ şi $u_2'(t)$ verifică sistemul

$$u_1' \cos at + u_2' \sin at = 0, \quad -a u_1' \sin at + a u_2' \cos at = \cos at.$$

Rezultă

$$u_1' = -\frac{1}{2a} \sin 2at, \quad u_2' = \frac{1}{2a}(1 + \cos 2at).$$

De unde, până la constante aditive arbitrare, obţinem

$$u_1(t) = \frac{1}{4a^2} \cos 2at, \quad u_2(t) = \frac{1}{2a}\, t + \frac{1}{4a^2} \sin 2at.$$

Avem deci soluţia particulară

$$x^*(t) = \frac{1}{4a^2} \cos at + \frac{1}{2a} t \sin at, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Soluţia generală a ecuaţiei date se scrie atunci

$$x(t) = c_1 \cos at + c_2 \sin at + \frac{1}{4a^2} \cos at + \frac{1}{2a} t \sin at, \quad t \in \mathbf{R}.$$

cu c_1, c_2 constante arbitrare. Soluţia problemei lui Cauchy cu condiţiile iniţiale $x(\pi/a) = 0$, $x'(\pi/a) = -\pi/2a$, cum $c_1 = -\frac{1}{4a^2}$, $c_2 = 0$, este $x(t) = \frac{t}{2a} \sin at$.

14.6 Ecuaţii de ordinul n cu coeficienţi constanţi

O ecuaţie diferenţială liniară

$$L_n(x) = a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x' + a_n x = 0, \quad a_0 \neq 0 \tag{14.34}$$

unde a_i, $i = \overline{0,n}$ sunt constante reale, este o ecuaţie de ordinul n, *cu coeficienţi constanţi*, omogenă.

Pentru această clasă de ecuaţii putem determina totdeauna un sistem fundamental de soluţii.

Căutăm o soluţie de forma $x = e^{rt}$. Deoarece $x^{(k)} = r^k e^{rt}$, înlocuind în ecuaţia (14.34) obţinem $e^{rt} K_n(r) = 0$, unde

$$K_n(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0. \tag{14.35}$$

Prin urmare, numărul r (real sau complex) trebuie să fie rădăcină a ecuaţiei algebrice (14.35) pe care o vom numi *ecuaţia caracteristică* a ecuaţiei diferenţiale (14.34).

În cele ce urmează vom analiza modul în care se poate obţine un sistem fundamental de soluţii în funcţie de natura rădăcinilor ecuaţiei caracteristice.

14.6.1 Ecuaţia caracteristică are rădăcini distincte

Teorema 14.15 *Dacă ecuaţia caracteristică are rădăcinile simple $r_1, r_2, \ldots, r_n$, atunci soluţiile particulare*

$$x_1(t) = e^{r_1 t},\ x_2(t) = e^{r_2 t}, \ldots,\ x_n(t) = e^{r_n t}, \tag{14.36}$$

formează un sistem fundamental de soluţii ale ecuaţiei (14.34).

◁ Că funcţiile (14.36) sunt soluţii rezultă din teorema precedentă. Wronskianul acestui sistem de soluţii este

$$W(t) = \exp t(\sum_{k=1}^{n} r_k) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ r_1 & r_2 & \ldots & r_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \ldots & r_n^{n-1} \end{vmatrix} = \exp\left(t(\sum_{k=1}^{n} r_k)\right) \prod_{1\leq j<i\leq n} (r_i - r_j) \neq 0,$$

deoarece $r_i \neq r_j$ pentru $i \neq j$. Deci soluţiile (14.36) formează un sistem fundamental de soluţii. ▷

Dacă toate rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt *reale*, atunci soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (14.34) este de forma

$$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + \cdots + c_n e^{r_n t}, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{14.37}$$

Dacă ecuaţia caracteristică are o rădăcină complexă $r = \alpha + i\beta$, atunci şi $\overline{r} = \alpha - i\beta$ este rădăcină, şi soluţiile cu valori complexe

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t),\ e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t),$$

pot fi înlocuite în (14.37) prin soluţiile cu valori reale

$$\frac{1}{2}(e^{(\alpha+i\beta)t} + e^{(\alpha-i\beta)t}) = e^{\alpha t}\cos\beta t,\ \frac{1}{2i}(e^{(\alpha+i\beta)t} - e^{(\alpha-i\beta)t}) = e^{\alpha t}\sin\beta t.$$

14.6.2 Ecuaţia caracteristică are rădăcini multiple

Teorema 14.16 *Dacă ecuaţia caracteristică (14.35) are rădăcina multiplă $r = \alpha$, de ordinul de multiplicitate $m + 1$, atunci funcţiile*

$$x^p(t) = t^p e^{\alpha t}, \quad t \in \mathbf{R},\ p = \overline{0, m},$$

sunt soluţii liniar independente ale ecuaţiei (14.34).

$\lhd$ Pentru orice $t \in \mathbf{R}$ şi r real sau complex, are loc identitatea

$$L_n(e^{rt}) = e^{rt} \cdot K_n(r).$$

Să derivăm această identitate de p ori în raport cu r, $p = \overline{1, m}$,

$$[L_n(e^{rt})]_r^{(p)} = [e^{rt} \cdot K_n(r)]_r^{(p)}.$$

Să observăm că operatorul L_n comută cu derivata în raport cu r deoarece L_n este un operator liniar cu coeficienţi constanţi, iar e^{rt} are derivate de orice ordin continue. În membrul drept vom aplica regula lui Leibniz de derivare a unui produs. Putem deci scrie

$$L_n(t^p e^{rt}) = e^{rt}[t^p K_n(r) + C_p^1 t^{p-1} K_n'(r) + \cdots + C_p^p K_n^{(p)}(r)]. \tag{14.38}$$

Pe de altă parte, dacă $r = \alpha$ este rădăcina multiplă, de ordinul de multiplicitate $m + 1$, a ecuaţiei caracteristice $K_n(r) = 0$, atunci

$$K_n(\alpha) = 0,\ K_n'(\alpha) = 0,\ \ldots,\ K_n^{(m)}(\alpha) = 0,\ K_n^{(m+1)}(\alpha) \neq 0. \tag{14.39}$$

Din (14.38) rezultă atunci că $L_n(t^p e^{\alpha t}) = 0$, pentru $p = \overline{0, m}$.

Soluţiile $t^p e^{\alpha t}$, $p = \overline{0, m}$, sunt liniar independente pe $\mathbf{R}$ deoarece funcţiile t^p, $p = \overline{0, m}$, sunt liniar independente pe $\mathbf{R}$. $\rhd$

Dacă rădăcina $r = \alpha$ a ecuaţiei caracteristice este *reală*, atunci contribuţia ei la soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (14.34) este de forma

$$x(t) = (c_0 + c_1 t + \cdots + c_m t^m) e^{\alpha t}, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{14.40}$$

Dacă ecuaţia caracteristică are o rădăcină complexă $r = \alpha + i\beta$, atunci şi $\overline{r} = \alpha - i\beta$ este rădăcină, şi soluţiile cu valori complexe

$$t^p e^{(\alpha+i\beta)t} = t^p e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t),\ t^p e^{(\alpha-i\beta)t} = t^p e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t),$$

pot fi înlocuite prin soluţiile cu valori reale

$$\frac{1}{2} t^p (e^{(\alpha+i\beta)t} + e^{(\alpha-i\beta)t}) = t^p e^{\alpha t}\cos\beta t,$$

$$\frac{1}{2i} t^p (e^{(\alpha+i\beta)t} - e^{(\alpha-i\beta)t}) = t^p e^{\alpha t}\sin\beta t,$$

cu $p = \overline{0, m}$, contribuţia acestei rădăcini la soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (14.34) fiind de forma

$$x(t) = (\sum_{p=0}^{m} c_p t^p) e^{\alpha t} \cos \beta t + (\sum_{p=0}^{m} c'_p t^p) e^{\alpha t} \sin \beta t.$$

Pentru determinarea unei soluţii particulare a ecuaţiei neomogene

$$L_n(x) = a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t),$$

putem folosi *metoda variaţiei constantelor.*

Exemplul 14.8 *Să se integreze ecuaţia*

$$x'' + x = \frac{1}{\cos t}, \quad t \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2}\}.$$

Ecuaţia omogenă $x'' + x = 0$ are ecuaţia caracteristică $r^2 + 1 = 0$, cu rădăcinile $r_1 = i$, $r_2 = -i$. Soluţia generală a ecuaţiei omogene este deci

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t.$$

Căutăm o soluţie particulară pentru ecuaţia neomogenă sub forma

$$x^*(t) = u_1(t) \cos t + u_2(t) \sin t,$$

cu

$$u'_1 \cos t + u'_2 \sin t = 0, \quad -u'_1 \sin t + u'_2 \cos t = \frac{1}{\cos t},$$

de unde $u'_1 = -\operatorname{tg} t$, $u'_2 = 1$ şi deci

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \ln|\cos t|, \\ u_2(t) &= t, \end{aligned}$$

încât, soluţia generală a ecuaţiei neomogene va fi

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \cos t \cdot \ln|\cos t| + t \sin t.$$

În unele cazuri particulare putem găsi o soluţie particulară, *prin identificare*, fără a apela la metoda variaţiei constantelor. Un astfel de caz este cel în care termenul liber al ecuaţiei neomogene este de forma

$$f(t) = P_m(t) e^{\alpha t} \cos \beta t + Q_m(t) e^{\alpha t} \sin \beta t,$$

unde $P_m(t)$ şi $Q_m(t)$ sunt polinoame, $m = \max\{\operatorname{grad} P_m(t), \operatorname{grad} Q_m(t)\}$.

În acest caz se poate căuta o soluţie particulară de forma

$$x^*(t) = P^*_m(t) e^{\alpha t} \cos \beta t + Q^*_m(t) e^{\alpha t} \sin \beta t,$$

în care $P^*_m(t)$ şi $Q^*_m(t)$ sunt polinoame de grad cel mult m, ai căror coeficienţi se determină prin identificare.

Dacă $r = \alpha + i\beta$ este rădăcină a ecuaţiei caracteristice, de ordin de multiplicitate p, atunci, pentru a fi posibilă identificarea, soluţia particulară se caută de forma

$$x^*(t) = t^p P^*_m(t) e^{\alpha t} \cos \beta t + t^p Q^*_m(t) e^{\alpha t} \sin \beta t.$$

Exemplul 14.9 *Să se găsească soluţia generală a ecuaţiei*

$$x^{IV} + 2x''' + 5x'' + 8x' + 4x = 40e^{-t} + \cos t.$$

Ecuaţia caracteristică $r^4 + 2r^3 + 5r^2 + 8r + 4 = 0$ *are rădăcinile* $r_1 = r_2 = -1$ *şi* $r_3 = 2i$, $r_4 = -2i$. *Soluţia generală a ecuaţiei omogene se scrie*

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-t} + c_3 \cos 2t + c_4 \sin 2t, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Deoarece $r = -1$ *este rădăcină dublă pentru ecuaţia caracteristică, vom căuta o soluţie particulară de forma*

$$x^*(t) = At^2 e^{-t} + B\cos t + C \sin t.$$

Introducând în ecuaţie şi identificând coeficienţii, se găseşte $A = 4$, $B = 0$, $C = 1/6$ *şi deci soluţia generală a ecuaţiei neomogene va fi*

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-t} + c_3 \cos 2t + c_4 \sin 2t + 4t^2 e^{-t} + \frac{1}{6}\sin t, \quad t \in \mathbf{R}.$$

14.7 Ecuaţia lui Euler

O ecuaţie diferenţială liniară de ordinul n de forma

$$a_0 t^n x^{(n)} + a_1 t^{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} t x' + a_n x = f(t), \tag{14.41}$$

cu a_i, $i = \overline{0,n}$ constante reale, se numeşte *ecuaţia lui Euler*.

Prin schimbarea de variabilă independentă $|t| = e^\tau$, ecuaţia (14.41) se transformă într-o ecuaţie diferenţială liniară cu coeficienţi constanţi.

Într-adevăr, luând, pentru $t > 0$, $t = e^\tau$, găsim

$$tx' = \frac{dx}{d\tau}, \ t^2 x'' = \frac{d^2 x}{d\tau^2} - \frac{dx}{d\tau}, \ \ldots$$

adică, $t^k x^{(k)}$ este o combinaţie liniară cu coeficienţi constanţi de derivatele până la ordinul k ale funcţiei x în raport cu τ. Înlocuind în (14.41) obţinem o ecuaţie liniară cu coeficienţi constanţi, de forma

$$b_0 \frac{d^n x}{d\tau^n} + b_1 \frac{d^{n-1} x}{d\tau^{n-1}} + \cdots + b_{n-1}\frac{dx}{d\tau} + b_n x = f(e^\tau). \tag{14.42}$$

Pentru $t < 0$ se ajunge la acelaşi rezultat.

Ecuaţia omogenă corespunzătoare ecuaţiei (14.42) admite soluţii de forma $e^{\alpha\tau}$, unde $r = \alpha$ este o rădăcină a ecuaţiei caracteristice. Revenind la ecuaţia iniţială şi observând că $e^{\alpha\tau} = (e^\tau)^\alpha = |t|^\alpha$, deducem că ecuaţia Euler omogenă admite soluţii de forma $|t|^\alpha$.

Căutând pentru ecuaţia Euler omogenă o soluţie de forma

$$x(t) = A|t|^r, \ \ A \neq 0,$$

găsim ecuaţia caracteristică a ecuaţiei Euler

$$K_n(r) = a_0 r(r-1)\cdots(r-n+1) + \cdots + a_{n-1}r + a_n = 0.$$

Fie r_1, r_2, ..., r_n rădăcinile ecuaţiei caracteristice. În funcţie de ordinele de multiplicitate şi natura acestor rădăcini, se determină, la fel ca la ecuaţia diferenţială liniară cu coeficienţi constanţi, un sistem fundamental de soluţii.

Dacă toate rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt *reale*, atunci soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (14.41) este de forma

$$x(t) = c_1|t|^{r_1} + c_2|t|^{r_2} + \cdots + c_n|t|^{r_n}, \quad t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

Dacă ecuaţia caracteristică are o rădăcină simplă complexă $r = \alpha + i\beta$, atunci şi $\overline{r} = \alpha - i\beta$ este rădăcină, şi lor le corespund soluţiile cu valori reale

$$|t|^\alpha \cos(\beta \ln|t|), \quad |t|^\alpha \sin(\beta \ln|t|).$$

Dacă $r = \alpha$ este rădăcină *reală* de ordinul de multiplicitate $m+1$ a ecuaţiei caracteristice, atunci contribuţia ei la soluţia generală este de forma

$$x(t) = (c_0 + c_1 \ln|t| + \cdots + c_m \ln^m|t|)|t|^\alpha, \quad t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

Dacă ecuaţia caracteristică are o rădăcină complexă $r = \alpha + i\beta$, de ordinul de multiplicitate $m+1$, atunci şi $\overline{r} = \alpha - i\beta$ este rădăcină de acelaşi ordin de multiplicitate, şi contribuţia acestor rădăcini la soluţia generală este de forma

$$x(t) = (\sum_{p=0}^{m} c_p \ln^p|t|)|t|^\alpha \cos(\beta \ln|t|) + (\sum_{p=0}^{m} c'_p \ln^p|t|)|t|^\alpha \sin(\beta \ln|t|).$$

Pentru determinarea unei soluţii particulare a ecuaţiei Euler neomogene putem folosi *metoda variaţiei constantelor.*

Bibliografie

[1] Lia Aramă, T. Morozanu, *Culegere de probleme de calcul diferenţial şi integral, Vol. I*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1967.

[2] V. Barbu, *Ecuaţii diferenţiale*, Editura Junimea, Iaşi, 1985.

[3] G. N. Berman, *A Problem Book in Mathematical Analysis*, Mir Publishers, Moscow,1980.

[4] Gh. Bucur, E. Câmpu, S. Găină, *Culegere de probleme de calcul diferenţial şi integral, Vol. II şi III*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1967.

[5] I. Burdujan, *Elemente de algebră liniară şi geometrie analitică*, Rotaprint IPI, 1982.

[6] N. Calistru, Gh. Ciobanu, *Curs de analiză matematică*, Rotaprint IPI, 1988.

[7] G. Chilov, *Analyse mathématique*, Éditions Mir, Moscou, 1984.

[8] S. Chiriţă, *Probleme de matematici superioare*, Editura Didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1989.

[9] A. Corduneanu, *Ecuaţii diferenţiale cu aplicaţii în electrotehnică*, Editura FACLA, Timişoara, 1981.

[10] A. Corduneanu, A. L. Pletea, *Noţiuni de teoria ecuaţiilor diferenţiale*, Editura MATRIX ROM, Bucureşti, 1999.

[11] B. Demidovich, *Problems in mathematical analysis*, Mir Publishers, Moscow, 1981.

[12] N. Donciu, D. Flondor, *Analiză matematică. Culegere de probleme*, Editura ALL, Bucureşti, 1993.

[13] N. Gheorghiu, T. Precupanu, *Analiză matematică*, Editura Didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1979.

[14] M. Krasnov, A. Kiselev, G. Makarenko, E. Shihin, *Mathematical Analysis for Engineers*, Vol. I and II, Mir Publishers, Mosvow, 1990.

[15] V. A. Kudryavtsev and B. P. Demidovich, *A Brief Course of Higher Mathematics*, Mir Publishers, Moscow, 1978.

[16] Gh. Moroşanu, *Ecuaţii diferenţiale. Aplicaţii*, Editura Academiei, Bucureşti, 1989.

[17] C. P. Nicolescu, *Teste de analiză matematică*, Editura Albatros, Bucureşti, 1984.

[18] M. Nicolescu, N. Dinculeanu, S. Marcus, A*naliză matematică*, Vol. I, Editura Didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1966

[19] Gh. Procopiuc, *Matematică*, Univ. Tehnică "Gh. Asachi" Iaşi, 1999.

[20] Gh. Procopiuc, Gh. Slabu, M. Ispas, *Matematică, teorie şi aplicaţii*, Editura "Gh. Asachi" Iaşi, 2001.

[21] M. Roşculeţ, *Analiză matematică*, Editura Didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1984.

[22] Ioan A. Rus, Paraschiva Pavel, Gh. Micula, B. B. Ionescu, *Probleme de ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţiale*, Editura Didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1982.

[23] A. A. Shestakov, *A Course of Higher Mathematics*, Mir Publishers, Moskow, 1990.

[24] Gh. Sireţchi, *Calcul diferenţial şi integral, Vol. 1, Noţiuni fundamentale*, Ed. şt. şi Encicl., Bucureşti, 1985.

[25] Gh. Sireţchi, *Calcul diferenţial şi integral, Vol. 2, Exerciţii*, Ed. Şt. şi Encicl., Bucureşti, 1985.

[26] Rodica Tudorache, *Culegere de probleme de analiză matematică, Vol. I, Calculul diferenţial*, Univ. Tehnică "Gh. Asachi" Iaşi, 2000.

[27] Rodica Tudorache, *Culegere de probleme de analiză matematică, Vol. II, Calculul integral*, Univ. Tehnică. "Gh. Asachi" Iaşi, 2001.

Index