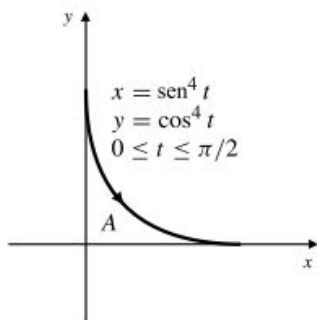
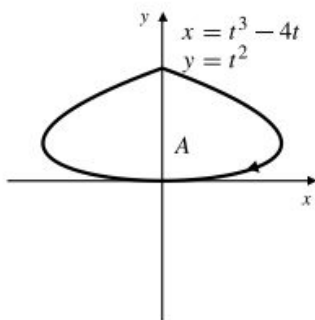
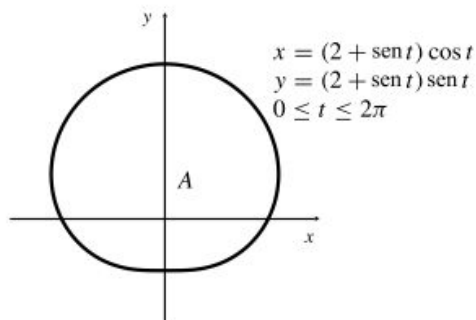


**Sección 8.4 (página 544)**

1.  $4\sqrt{2} - 2$  unidades      3.  $6a$  unidades  
 5.  $\frac{8}{3} ((1 + \pi^2)^{3/2} - 1)$  unidades  
 7. 4 unidades      9.  $8a$  unidades  
 11.  $2\sqrt{2}\pi(1 + 2e^\pi)/5$  unidades al cuad.  
 13.  $72\pi(1 + \sqrt{2})/15$  unidades al cuad.  
 15.  $256/15$  unids. al cuad.      17.  $1/6$  unids. al cuad.



19.  $9\pi/2$  unidades al cuad.

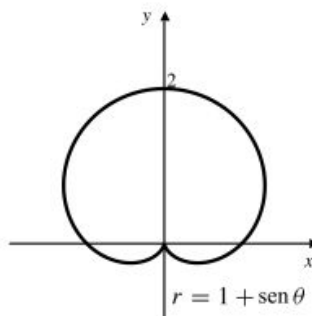


23.  $32\pi a^3/105$  unidades al cubo

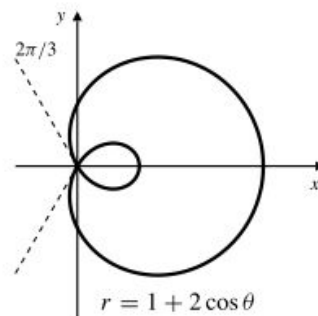
**Sección 8.5 (página 553)**

1.  $x = 3$ , recta vertical  
 3.  $3y - 4x = 5$ , recta  
 5.  $2xy = 1$ , hipérbola rectangular  
 7.  $y = x^2 - x$ , una parábola  
 9.  $y^2 = 1 + 2x$ , una parábola  
 11.  $x^2 - 3y^2 - 8y = 4$ , una hipérbola

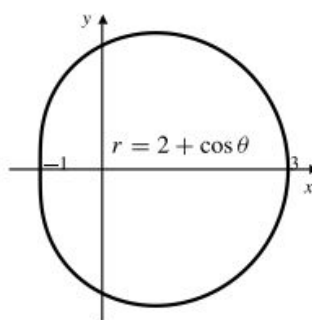
- 13.



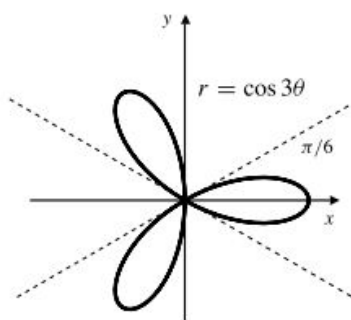
- 15.



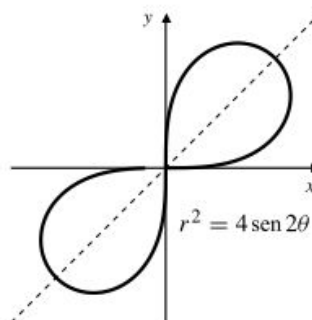
- 17.



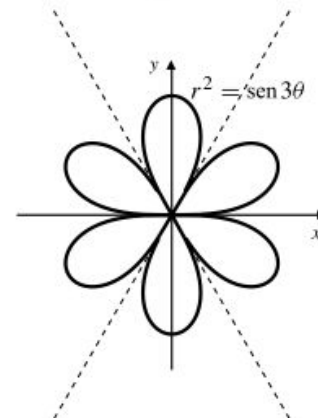
- 19.



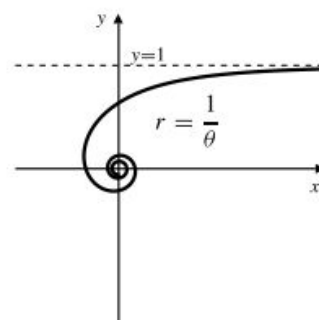
- 21.



23.  $r = \pm \sqrt{\text{sen } 2\theta}$



25. el origen y  $[\sqrt{3}/2, \pi/3]$   
 27. el origen y  $[3/2, \pm \pi/3]$   
 29. asíntota  $y = 1$ ,  $r = 1/(\theta - \alpha)$  tiene asíntota  $(\text{cos } \alpha)y - (\text{sen } \alpha)x = 1$

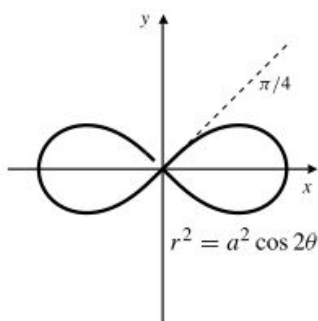
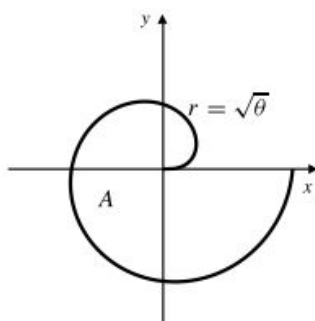


31.  $x = f(\theta) \cos \theta, \quad y = f(\theta) \operatorname{sen} \theta$

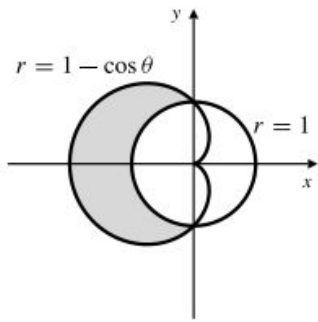
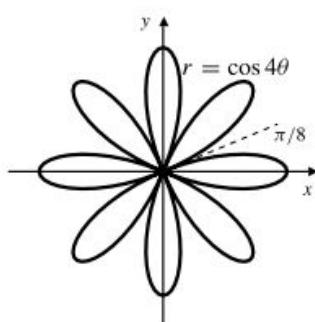
39.  $\ln \theta_1 = 1/\theta_1$ , punto  $(-0.108461, 0.556676)$ ;  $\ln \theta_2 = -1/(\theta_2 + \pi)$ , punto  $(-0.182488, -0.178606)$

**Sección 8.6 (página 558)**

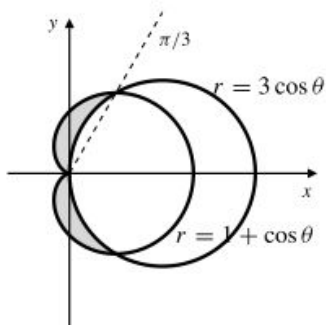
1.  $\pi^2$  unids. al cuad.      3.  $a^2$  unids. al cuad.



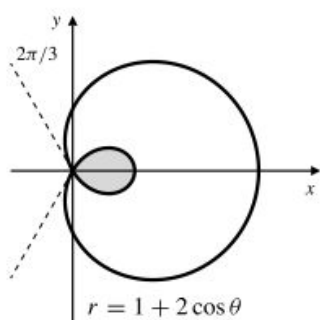
5.  $\pi/2$  unids. al cuad.      7.  $2 + (\pi/4)$  unids. al cuad.



9.  $\pi/4$  unidades al cuad.



11.  $\pi - \frac{3}{2} \sqrt{3}$  unidades al cuad.



13.  $\frac{\sqrt{1+a^2}}{a} (e^{a\pi} - e^{-a\pi})$  unidades

17.  $67.5^\circ, -22.5^\circ$

19.  $90^\circ$  en  $(0, 0)$ ,

$\pm 45^\circ$  en  $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{4}\right)$

$\pm 135^\circ$  en  $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{5\pi}{4}\right)$

21. horizontal en  $(\pm \frac{\pi}{4}, \sqrt{2})$ , vertical en  $(2, 0)$  y el origen

23. horizontal en  $(0, 0)$ ,  $(\frac{2}{3}\sqrt{2}, \pm \tan^{-1}\sqrt{2})$ ,  $(\frac{2}{3}\sqrt{2}, \pi \pm \tan^{-1}\sqrt{2})$ , vertical en  $(0, \frac{\pi}{2})$ ,  $(\frac{2}{3}\sqrt{2}, \pm \tan^{-1}(1/\sqrt{2}))$ ,  $(\frac{2}{3}\sqrt{2}, \pi \pm \tan^{-1}(1/\sqrt{2}))$

25. horizontal en  $(4, -\frac{\pi}{2})$ ,  $(1, \frac{\pi}{6})$ ,  $(1, \frac{5\pi}{6})$ , vertical en  $(3, -\frac{\pi}{6})$ ,  $(3, -\frac{5\pi}{6})$ , no tangente en  $(0, \frac{\pi}{2})$

**Ejercicios de repaso (página 559)**

1. elipse, focos  $(\pm 1, 0)$ , semieje mayor  $\sqrt{2}$ , semieje menor 1

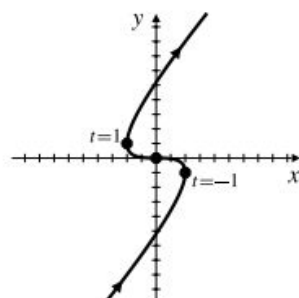
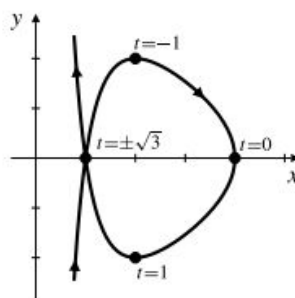
3. parábola, vértice  $(4, 1)$ , foco  $(15/4, 1)$

5. recta desde  $(0, 2)$  hasta  $(2, 0)$

7. la parábola  $y = x^2 - 1$  izquierda a derecha

9. parte del primer cuadrante de la elipse  $16x^2 + y^2 = 16$  desde  $(1, 0)$  hasta  $(0, 4)$

11. tangentes horizontales en  $(2, \pm 2)$  (i.e.  $t = \pm 1$ ), tangentes verticales en  $(4, 0)$  (i.e.  $t = 0$ )



13. tangente horizontal en  $(0, 0)$  (i.e.  $t = 0$ ), tangente vertical en  $(2, -1)$  y  $(-2, 1)$  (i.e.  $t = \pm 1$ )

15.  $1/2$  unids. al cuad.

17.  $1 + e^2$  unidades

15.  $\infty$

17. 0

19. 1

21.  $e^{-3}$

23. 0

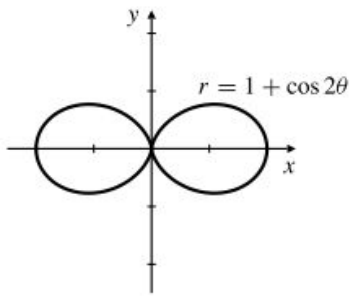
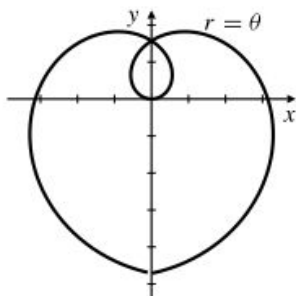
25.  $1/2$

27. 0

29. 0

31.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 5$

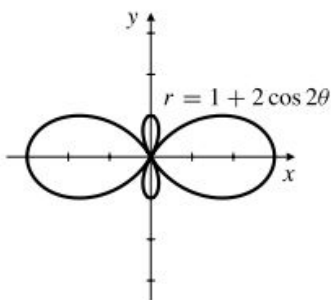
33. Si  $\{a_n\}$  es definitivamente decreciente, entonces o está acotada inferiormente, y es por lo tanto convergente, o no está acotada inferiormente y por lo tanto diverge a menos infinito.



19.  $r = \theta$

21.  $r = 1 + \cos 2\theta$

23.  $r = 1 + 2 \cos 2\theta$



25.  $\pi + (3\sqrt{3}/4)$  unidades al cuad.

27.  $(\pi - 3)/2$  unidades al cuad.

**Problemas avanzados (página 559)**

1.  $16\pi \sec \theta \text{ cm}^2$

5.  $40\pi/3 \text{ ft}^3$

7. aprox. 84.65 minutos

9.  $r^2 = \cos(2\theta)$  es la curva interna; el área entre las curvas es de  $1/3$  unidades al cuadrado

**Capítulo 9**

**Secuencias, series y series de potencias**

**Sección 9.1 (página 569)**

1. acotada, positiva, creciente, convergente a 2

3. acotada, positiva, convergente a 4

5. acotada por abajo, positiva, creciente, divergente a infinito

7. acotada por abajo, positiva, creciente, divergente a infinito

9. acotada, positiva, decreciente, convergente a 0

11. divergente

13. divergente

**Sección 9.2 (página 576)**

1.  $\frac{1}{2}$

3.  $\frac{1}{(2 + \pi)^8((2 + \pi)^2 - 1)}$

5.  $\frac{25}{4,416}$

7.  $\frac{8e^4}{e - 2}$

9. diverge a  $\infty$

11.  $\frac{3}{4}$

13.  $\frac{1}{3}$

15. diverge a  $\infty$

17. diverge a  $\infty$

19. diverge

21. 14 m

25. Si  $\{a_n\}$  es definitivamente decreciente, entonces la serie  $\sum a_n$  debe, o bien converger (si sus sumas parciales están acotadas inferiormente), o bien diverger a  $-\infty$  (si sus sumas parciales no están acotadas inferiormente).

27. falso, e.g.  $\sum \frac{(-1)^n}{2^n}$

29. verdadero

31. verdadero

**Sección 9.3 (página 586)**

1. converge

3. diverge a  $\infty$

5. converge

7. diverge a  $\infty$

9. converge

11. diverge a  $\infty$

13. diverge a  $\infty$

15. converge

17. converge

19. diverge a  $\infty$

21. converge

23. converge

25. converge

$$27. s_n + \frac{1}{3(n+1)^3} \leq s \leq s_n + \frac{1}{3n^3}; \quad n = 6$$

$$29. s_n + \frac{2}{\sqrt{n+1}} \leq s \leq s_n + \frac{2}{\sqrt{n}}; \quad n = 63$$

$$31. 0 < s - s_n \leq \frac{n+2}{2^n(n+1)!(2n+3)}; \quad n = 4$$

$$33. 0 < s - s_n \leq \frac{2^n(4n^2 + 6n + 2)}{(2n)!(4n^2 + 6n)}; \quad n = 4$$

39. converge,  $a_n^{1/n} \rightarrow (1/e) < 1$

41. no info del test de la razón, pero la serie diverge a infinito ya que todos los términos superan a 1.

$$43. (b) s \leq \frac{2}{k(1-k)}, \quad k = \frac{1}{2},$$

$$(c) 0 < s - s_n < \frac{(1+k)^{n+1}}{2^n k(1-k)}, \quad k = \frac{n+2 - \sqrt{n^2+8}}{2(n-1)}$$

para  $n \geq 2$

45. (a) 10, (b) 5, (c) 0.765

### Sección 9.4 (página 594)

1. conv. condicionalmente

3. conv. condicionalmente

5. diverge

7. conv. absolutamente

9. conv. condicionalmente

11. diverge

13. 999

15. 13

17. converge absolutamente si  $-1 < x < 1$ , condicionalmente si  $x = -1$ , diverge en el resto

19. converge absolutamente si  $0 < x < 2$ , condicionalmente si  $x = 2$ , diverge en el resto

21. converge absolutamente si  $-2 < x < 2$ , condicionalmente si  $x = -2$ , diverge en el resto

23. converge absolutamente si  $-\frac{7}{2} < x < \frac{1}{2}$ , condicionalmente si  $x = -\frac{7}{2}$ , diverge en el resto

25. AST no se aplica directamente, pero sí se aplica si eliminamos los términos 0; la serie converge condicionalmente.

$$27. (a) \text{ falso, e.g. } a_n = \frac{(-1)^n}{n},$$

(b) falso, e.g.  $a_n = \frac{\sin(n\pi/2)}{n}$ , (véase el Ejercicio 25),  
(c) verdadero

29. converge absolutamente para  $-1 < x < 1$ , condicionalmente si  $x = -1$ , diverge en el resto.

### Sección 9.5 (página 604)

1. centro 0, radio 1, intervalo  $(-1, 1)$

3. centro  $-2$ , radio 2, intervalo  $[-4, 0)$

5. centro  $\frac{3}{2}$ , radio  $\frac{1}{2}$ , intervalo  $(1, 2)$

7. centro 0, radio  $\infty$ , intervalo  $(-\infty, \infty)$

$$9. \frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n, \quad (-1 < x < 1)$$

$$11. \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n, \quad (-1 < x < 1)$$

$$13. \frac{1}{(2-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^{n+2}} x^n, \quad (-2 < x < 2)$$

$$15. \ln(2-x) = \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n}, \quad (-2 \leq x < 2)$$

$$17. \frac{1}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^{n+2}} (x+2)^n, \quad (-4 < x < 0)$$

$$19. \frac{x^3}{1-2x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{2n+3}, \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$21. \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right); \frac{1}{1+4x}$$

$$23. [-1, 1); \frac{1}{3} \text{ si } x = 0, \\ -\frac{1}{x^3} \ln(1-x) - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x} \text{ en el resto}$$

$$25. (-1, 1); \frac{2}{(1-x^2)^2} \quad 27. 3/4$$

$$29. \pi^2(\pi+1)/(\pi-1)^3 \quad 31. \ln(3/2)$$

### Sección 9.6 (página 614)

$$1. e^{3x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n e}{n!} x^n, \quad (\text{todo } x)$$

$$3. \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ -\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right], \text{ (todo } x)$$

5.  $x^2 \operatorname{sen} \left( \frac{x}{3} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{2n+1}(2n+1)!} x^{2n+3}, \text{ (todo } x)$

7.  $\operatorname{sen} x \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \text{ (todo } x)$

9.  $\frac{1+x^3}{1+x^2} = 1 - x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (x^{2n-1} + x^{2n}),$   
 $(-1 < x < 1)$

11.  $\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \text{ } (-1 < x < 1)$

13.  $\cosh x - \cos x = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!}, \text{ (todo } x)$

15.  $e^{-2x} = e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!} (x+1)^n, \text{ (todo } x)$

17.  $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} (x-\pi)^{2n}, \text{ (todo } x)$

19.  $\ln 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4^n n} (x-2)^n, \text{ } (-2 < x \leq 6)$

21.  $\operatorname{sen} x - \cos x = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left( x - \frac{\pi}{4} \right)^{2n+1},$   
 $(\text{todo } x)$

23.  $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} (x+2)^n, \text{ } (-4 < x < 0)$

25.  $(x-1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} (x-1)^n, \text{ } (0 \leq x \leq 2)$

27.  $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24}$       29.  $x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$

31.  $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$       33.  $e^{x^2}$  (todo  $x$ )

35.  $\frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \frac{\operatorname{senh} x}{x}$  si  $x \neq 0$ , 1 si  $x = 0$

37. (a)  $1 + x + x^2$ , (b)  $3 + 3(x-1) + (x-1)^2$

**Sección 9.7 (página 618)**

1.  $\frac{1}{720} (0.2)^7$       3. 1.22140

5. 3.32011      7. 0.99619

9. -0.10533      11. 0.42262

13. 1.54306

15.  $I(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!} x^{2n+1}, \text{ (todo } x)$

17.  $K(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} x^{n+1}, \text{ } (-1 \leq x \leq 1)$

19.  $M(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(4n+1)} x^{4n+1},$   
 $(-1 \leq x \leq 1)$

21. 0.946      23. 2

25. -3/25      27. 0

**Sección 9.8 (página 622)**

1.  $\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-3)}{2^n n!} x^n$   
 $|x| < 1$

3.  $\sqrt{4+x} = 2 + \frac{x}{4} + 2 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-3)}{2^{3n} n!} x^n,$   
 $(-4 < x \leq 4)$

5.  $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n, |x| < 1$

**Sección 9.9 (página 628)**

1.  $2\pi/3$       3.  $\pi$

5.  $2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (\operatorname{sen}(nt))/n$

7.  $\frac{1}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2 \cos((2n-1)\pi t)}{(2n-1)^2 \pi^2} + \frac{(-1)^n \operatorname{sen}(n\pi t)}{n\pi} \right)$

9. 1

11.  $2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi t)$

13.  $\pi^2/8$

**Ejercicios de repaso (página 630)**

1. conv. a 0      3. div. a  $\infty$

5.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{2}$       7.  $4\sqrt{2}/(\sqrt{2}-1)$

9. 2      11. converge

13. converge                              15. converge
17. conv. abs.                              19. conv. cond.
21. conv. abs. para  $x$  en  $(-1, 5)$ , cond. para  $x = -1$ ,  
div. en el resto
23. 1.202
25.  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/3^{n+1}, |x| < 3$
27.  $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n}/(ne^n), -\sqrt{e} < x \leq \sqrt{e}$
29.  $x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^{2n-1} x^{2n+1}/(2n)!,$  todo  $x$
31.  $(1/2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 1 \times 4 \times 7 \times \dots \times (3n-2)x^n}{2 \times 24^n n!},$   
 $-8 < x \leq 8$
33.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x - \pi)^n / \pi^{n+1}, 0 < x < 2\pi$
35.  $1 + 2x + 3x^2 + \frac{10}{3}x^3$                       37.  $1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4$
39.  $\begin{cases} \cos \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ \cosh \sqrt{|x|} & \text{si } x < 0 \end{cases}$                       41.  $\pi^2/(\pi - 1)^2$
43.  $\ln(e/(e - 1))$                               45.  $1/14$
47. 3, 0.49386                              49.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \sin(nt)$

### Problemas avanzados (página 631)

5. (c) 1.645
7. (a)  $\infty$ , (c)  $e^{-x^2}$ , (d)  $f(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$

## Capítulo 10

### Vectores y geometría de coordenadas en el espacio tridimensional

#### Sección 10.1 (página 640)

1. 3 unidades                              3.  $\sqrt{6}$  unidades
5.  $|z|$  unidades;  $\sqrt{y^2 + z^2}$  unidades
7.  $\cos^{-1}(-4/9) \approx 116.39^\circ$
9.  $\sqrt{3}/2$  unidades al cuadr.                      11.  $\sqrt{n-1}$  unidades

13. El semiespacio que contiene al origen y está limitado por el plano que pasa por  $(0, -1, 0)$  y es perpendicular al eje  $y$ .
15. El plano vertical (paralelo al eje  $z$ ) que pasa por  $(1, 0, 0)$  y  $(0, 1, 0)$ .
17. La esfera de radio 2 centrada en  $(1, -2, 3)$ .
19. El cilindro circular sólido de radio 2 con eje en el eje  $x$ .
21. El cilindro parabólico generado trasladando la parábola  $z = y^2$  en el plano  $yz$  en la dirección del eje  $x$ .
23. El plano que pasa por los puntos  $(6, 0, 0)$ ,  $(0, 3, 0)$  y  $(0, 0, 2)$ .
25. La recta que pasa por  $(1, 0, 0)$  y  $(1, 1, 1)$ .
27. La circunferencia en la que la esfera de radio 2 centrada en el origen corta a la esfera de radio 2 centrada en  $(2, 0, 0)$ .
29. La elipse en la que el plano  $z = x$  corta al cilindro circular de radio 1 y eje coincidente con el eje  $z$ .
31. La parte del cilindro sólido circular de radio 1 y eje el eje  $z$  que está por encima del plano  $z = y$ .
33. Frontera  $(0, 0)$  y  $x^2 + y^2 = 1$ ; interior =  $S$ ;  $S$  abierto.
35. La frontera de  $S$  es  $S$ ; interior vacío;  $S$  es cerrado.
37. Frontera: las esferas  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  y  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ; interior: puntos entre las esferas;  $S$  es cerrado.
39. La frontera de  $S$  es  $S$ , concretamente la recta  $x = y = z$ ; interior vacío;  $S$  es cerrado.

#### Sección 10.2 (página 651)

1. (a)  $3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ , (b)  $-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ , (c)  $2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$ ,  
(d)  $-2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ , (e)  $-\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ , (f)  $4\mathbf{i} + \mathbf{j}$ ,  
(g)  $-7\mathbf{i} + 20\mathbf{j}$ , (h)  $2\mathbf{i} - (5/3)\mathbf{j}$
3. (a)  $6\mathbf{i} - 10\mathbf{k}$ ,  $8\mathbf{j}$ ,  $-3\mathbf{i} + 20\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$   
(b)  $5\sqrt{2}$ ,  $5\sqrt{2}$ , (c)  $\frac{3}{5\sqrt{2}}\mathbf{i} \pm \frac{4}{5\sqrt{2}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$   
(d) 18, (e)  $\cos^{-1}(9/25) \approx 68.9^\circ$ , (f)  $18/5\sqrt{2}$   
(g)  $(27/25)\mathbf{i} + (36/25)\mathbf{j} - (9/5)\mathbf{k}$
9. desde el sudoeste a  $50\sqrt{2}$  km/h.

11. La orientación a un ángulo  $\theta$  al este de  $AC$ , con 
$$\theta = \text{sen}^{-1} \frac{3}{2\sqrt{1+4k^2}}.$$

El viaje no es posible si  $k < \frac{1}{4}\sqrt{5}$ . Si  $k > \frac{1}{4}\sqrt{5}$  hay un segundo rumbo posible,  $\pi - \theta$ , pero el viaje será más largo.

13.  $t = 2$

15.  $\cos^{-1}(2/\sqrt{6}) \approx 35.26^\circ, 90^\circ$

17.  $(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})/\sqrt{3}$

19.  $\lambda = 1/2$ , punto medio,  $\lambda = 2/3$ ,  $2/3$  del trayecto desde  $P_1$  a  $P_2$ ,  $\lambda = -1$ ,  $P_1$  está a medio camino entre este punto y  $P_2$ .

21. plano que pasa por un punto con vector de posición  $(b/|\mathbf{a}|^2)\mathbf{a}$  perpendicular a  $\mathbf{a}$ .

23.  $\mathbf{x} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$

25.  $(|\mathbf{u}\mathbf{v} + \mathbf{v}\mathbf{u}|)/|\mathbf{u}\mathbf{v} + \mathbf{v}\mathbf{u}|$

31.  $\mathbf{u} = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{a}/|\mathbf{a}|^2)\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{w} - \mathbf{u}$

33.  $\mathbf{x} = (\mathbf{a} + K\hat{\mathbf{u}})/(2r)$ ,  $\mathbf{y} = (\mathbf{a} - K\hat{\mathbf{u}})/(2s)$ , con  $K = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 - 4rst}$  y  $\hat{\mathbf{u}}$  es cualquier vector unitario

35. aprox. 12.373 m

37. aprox. 19 m

13. planos que pasan por la recta  $x = 0, y + z = 1$  (excepto el propio plano  $y + z = 1$ ).

15.  $\mathbf{r} = (1 + 2t)\mathbf{i} + (2 - 3t)\mathbf{j} + (3 - 4t)\mathbf{k}$ ,  
 $(-\infty < t < \infty)$   $x = 1 + 2t, y = 2 - 3t,$   
 $z = 3 - 4t, (-\infty < t < \infty)$   
 $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-4}$

17.  $\mathbf{r} = t(7\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 5\mathbf{k}); x = 7t, y = -6t, z = -5t;$   
 $x/7 = -y/6 = -z/5$

19.  $\mathbf{r} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k} + t(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k});$   
 $x = 1 + t, y = 2 + t, z = -1 + t;$   
 $x - 1 = y - 2 = z = 1$

21.  $\frac{x-4}{-5} = \frac{y}{3}, z = 7$

25.  $\mathbf{r}_i \neq \mathbf{r}_j, (i, j = 1, \dots, 4, i \neq j),$   
 $\mathbf{v} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4) \neq 0, (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \cdot \mathbf{v} = 0.$

27.  $7\sqrt{2}/10$  unidades

29.  $18/\sqrt{69}$  unidades

31. todas las rectas paralelas al plano  $xy$  y pasan por  $(x_0, y_0, z_0)$ .

33.  $(x, y, z)$  satisface la cuadrática si  $A_1x + B_1y + C_1z = D_1$  o  $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$ .

**Sección 10.3 (página 660)**

1.  $5\mathbf{i} + 13\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$

3.  $\sqrt{6}$  unidades al cuad.

5.  $\pm \frac{1}{3}(2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k})$

15.  $4/3$  unidades al cubo

17.  $k = -6$

19.  $\lambda = \frac{\mathbf{x} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})}{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})}, \mu = \frac{\mathbf{x} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u})}{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})}, \nu = \frac{\mathbf{x} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})}{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})}$

21.  $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = -2\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 4\mathbf{k}, (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 9\mathbf{k};$  el primero está en el plano de  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$ , el segundo está en el plano de  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ .

**Sección 10.4 (página 668)**

1. (a)  $x^2 + y^2 + z^2 = z^2;$  (b)  $x + y + z = x + y + z;$   
 (c)  $x^2 + y^2 + z^2 = -1$

3.  $x - y + 2z = 0$

5.  $7x + 5y - z = 12$

7.  $x - 5y - 3z = -7$

9.  $x + 6y - 5z = 17$

11.  $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot [(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4)] = 0$

**Sección 10.5 (página 673)**

1. Elipsoide centrado en el origen con semiejes 6, 3 y 2 cuyos ejes son, respectivamente, los ejes  $x, y$  y  $z$ .

3. Esfera con centro  $(1, -2, 3)$  y radio  $1/\sqrt{2}$ .

5. Paraboloide elíptico con vértice en el origen, eje coincidente con el eje  $z$  y sección cruzada  $x^2 + 2y^2 = 1$  en el plano  $z = 1$ .

7. Hiperboloide de dos hojas con vértices  $(\pm 2, 0, 0)$  y secciones cruzadas circulares en planos  $x = c,$  ( $c^2 > 4$ ).

9. Paraboloide hiperbólico, el mismo que  $z = x^2 - y^2$  pero rotado  $45^\circ$  respecto al eje  $z$  (en sentido contrario al de las agujas del reloj visto desde arriba).

11. Cilindro hiperbólico paralelo al eje  $y$ , que corta al plano  $xz$  en la hipérbola  $(x^2/4) - z^2 = 1$ .

13. Cilindro parabólico paralelo al eje  $y$ .

15. Cono circular con vértice  $(2, 3, 1)$ , eje vertical, y semiángulo vertical de  $45^\circ$ .

17. Circunferencia en el plano  $x + y + z = 1$  con centro en  $(1/3, 1/3, 1/3)$  y radio  $\sqrt{11/3}$ .

19. Una parábola en el plano  $z = 1 + x$  con vértice en  $(-1/2, 0, 1/2)$  y eje coincidente con la recta  $z = 1 + x, y = 0$ .

21.  $\frac{y}{b} - \frac{z}{c} = \lambda \left(1 - \frac{x}{a}\right), \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{x}{a}\right);$   
 $\frac{y}{b} - \frac{z}{c} = \mu \left(1 + \frac{x}{a}\right), \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \frac{1}{\mu} \left(1 - \frac{x}{a}\right)$

23.  $\mathbf{a} = \mathbf{i} \pm \mathbf{k}$  (o cualquier múltiplo)

**Sección 10.6 (página 682)**

1.  $\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$       3.  $\begin{pmatrix} aw + by & ax + bz \\ cw + dy & cx + dz \end{pmatrix}$

5.  $\mathcal{A}\mathcal{A}^T = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$        $\mathcal{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. 36      15.  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

17.  $x = 1, y = 2, z = 3$

19.  $x_1 = x_2 = 2, x_3 = -1, x_4 = -2$

21. def. neg.      23. def. pos.

25. indefinida

**Sección 10.7 (página 693)**

1. 2 unidades

5. `sp := (U, V) -> DotProduct (U, Normalize(V, 2), conjugate=false)`

7. `ang := (u, v) -> evalf( (180/Pi) * VectorAngle(U, V))`

9. `VolT := (U, V, W) -> (1/6) * abs( DotProduct(U, (V &x W), conjugate=false))`

11.  $(u, v, x, y, z) = (1, 0, -1, 3, 2)$

13. -935

15.  $\begin{bmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{bmatrix}$

**Ejercicios de repaso (página 694)**

1. Plano paralelo al eje  $y$  que pasa por  $(3, 0, 0)$  y  $(0, 0, 1)$ .

3. Todos los puntos sobre o encima del plano que pasa por el origen con normal  $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ .

5. Paraboloide circular con vértice en  $(0, 1, 0)$  y eje coincidente con el eje  $y$ , abriéndose en la dirección de  $y$  creciente.

7. Paraboloide hiperbólico.

9. Puntos dentro del elipsoide de vértices  $(\pm 2, 0, 0), (0, \pm 2, 0)$  y  $(0, 0, \pm 1)$ .

11. Cono de eje el eje  $x$ , vértice en el origen, y sección cruzada elíptica perpendicular a su eje.

13. Cono circular oblicuo (cono elíptico). Las secciones cruzadas en planos horizontales  $z = k$  son circunferencias de radio 1 con centros en  $(k, 0, k)$ .

15. Recta horizontal que pasa por  $(0, 0, 3)$  y  $(2, -1, 3)$ .

17. Circunferencia de radio 1 centrada en  $(1, 1, 1)$  en un plano normal a  $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ .

19.  $2x - y + 3z = 0$       21.  $2x + 5y + 3z = 2$

23.  $7x + 4y - 8z = 6$

25.  $\mathbf{r} = (2 + 3t)\mathbf{i} + (1 + t)\mathbf{j} - (1 + 2t)\mathbf{k}$

27.  $x = 3t, y = -2t, z = 4t$

29.  $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) = \mathbf{0}$

31.  $(3/2) \sqrt{34}$  unidades al cuadrado.

33.  $\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

35. def. pos.

**Problemas avanzados (página 695)**

5. condición:  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ ,

$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2} + t\mathbf{a}$  (para todo escalar  $t$ )



**Capítulo 11**

**Funciones vectoriales y curvas**

**Sección 11.1 (página 704)**

1.  $\mathbf{v} = \mathbf{j}$ ,  $v = 1$ ,  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ , la trayectoria es la recta  $x = 1, z = 0$
3.  $\mathbf{v} = 2t\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ,  $v = \sqrt{4t^2 + 1}$ ,  $\mathbf{a} = 2\mathbf{j}$ , la trayectoria es la parábola  $y = z^2$ , en el plano  $yz$
5.  $\mathbf{v} = 2t\mathbf{i} - 2t\mathbf{j}$ ,  $v = 2\sqrt{2t}$ ,  $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ , la trayectoria es la semirrecta  $x + y = 0, z = 1, (x \geq 0)$
7.  $\mathbf{v} = -a \operatorname{sen} t\mathbf{i} + a \operatorname{cos} t\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ ,  $v = \sqrt{a^2 + c^2}$ ,  $\mathbf{a} = -a \operatorname{cos} t\mathbf{i} - a \operatorname{sen} t\mathbf{j}$ , la trayectoria es una hélice circular
9.  $\mathbf{v} = -3 \operatorname{sen} t\mathbf{i} - 4 \operatorname{sen} t\mathbf{j} + 5 \operatorname{cos} t\mathbf{k}$ ,  $v = 5$ ,  $\mathbf{a} = -\mathbf{r}$ , la trayectoria es la circunferencia intersección del plano  $4x = 3y$  con la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$
11.  $\mathbf{a} = \mathbf{v} = \mathbf{r}$ ,  $v = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} e^t$ , la trayectoria es la recta  $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$
13.  $\mathbf{v} = -(e^{-t} \operatorname{cos} e^t + \operatorname{sen} e^t)\mathbf{i} + (-e^{-t} \operatorname{sen} e^t + \operatorname{cos} e^t)\mathbf{j} - e^t\mathbf{k}$   
 $v = \sqrt{1 + e^{-2t} + e^{2t}}$   
 $\mathbf{a} = [(e^{-t} - e^t) \operatorname{cos} e^t + \operatorname{sen} e^t]\mathbf{i} + [(e^{-t} - e^t) \operatorname{sen} e^t - \operatorname{cos} e^t]\mathbf{j} - e^t\mathbf{k}$   
 La trayectoria es una espiral que está en la superficie  $z = -1/\sqrt{x^2 + y^2}$
15.  $\mathbf{a} = -3\pi^2\mathbf{i} - 4\pi^2\mathbf{j}$       17.  $\sqrt{3/2}(-\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k})$
19.  $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{a} = -\frac{8}{9}(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k})$
29.  $\frac{d}{dt}(\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{u} \times \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{w}\right) + \mathbf{u} \times \left(\mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{w}}{dt}\right)$
31.  $\mathbf{u}''' \bullet (\mathbf{u} \times \mathbf{u}')$
33.  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 e^{2t}$ ,  $\mathbf{a} = 4\mathbf{r}_0 e^{2t}$ ; la trayectoria es una recta que pasa por el origen y por el punto  $\mathbf{r}_0$
35.  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \frac{1 - e^{-ct}}{c} \mathbf{v}_0 - \frac{g}{c^2} (ct + e^{-ct} - 1)\mathbf{k}$

**Sección 11.2 (página 712)**

1.  $\frac{e-1}{e}, \frac{e^2-1}{e^2}$

3.  $\mathbf{r} = \operatorname{cos} t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ; la curva es una circunferencia de radio 1 en el plano  $z = 1$ .
5.  $4.76^\circ$  al oeste o al sur;  $\frac{\pi^2 R}{72}$  hacia el suelo, siendo  $R$  el radio de la tierra
7. (a) sólo tangencial,  $90^\circ$  en sentido contrario al de las agujas del reloj desde  $\mathbf{v}$ .  
 (b) sólo tangencial,  $90^\circ$  en el sentido de las agujas del reloj desde  $\mathbf{v}$ .  
 (c) sólo normal.
9. 16.0 horas,  $52.7^\circ$

**Sección 11.3 (página 719)**

1.  $x = \sqrt{a^2 - t^2}, y = t, 0 \leq t \leq a$
3.  $x = a \operatorname{sen} \theta, y = -a \operatorname{cos} \theta, \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$
5.  $\mathbf{r} = -2t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 4t^2\mathbf{k}$
7.  $\mathbf{r} = 3 \operatorname{cos} t\mathbf{i} + 3 \operatorname{sen} t\mathbf{j} + 3(\operatorname{cos} t + \operatorname{sen} t)\mathbf{k}$
9.  $\mathbf{r} = (1 + 2 \operatorname{cos} t)\mathbf{i} - 2(1 - \operatorname{sen} t)\mathbf{j} + (9 + 4 \operatorname{cos} t - 8 \operatorname{sen} t)\mathbf{k}$
11. La ecuación de (b) lleva a  $\mathbf{r} = \frac{t^2 - 1}{2}\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \frac{t^2 + 1}{2}\mathbf{k}$  que representa la parábola completa. Las opciones (a) y (c) llevan a parametrizaciones separadas de las mitades  $y \geq 0$  e  $y \leq 0$  de la parábola. Para (a) son  $\mathbf{r} = t\mathbf{i} \pm \sqrt{1 + 2t}\mathbf{j} + (1 + t)\mathbf{k}$ , ( $t \geq -1/2$ )
13.  $(17/\sqrt{17} - 16\sqrt{2})/27$  unidades
15.  $\int_1^T \frac{\sqrt{4a^2 t^4 + b^2 t^2 + c^2}}{t} dt$  unidades;  
 $a(T^2 - 1) + c \ln T$  unidades
17.  $\pi\sqrt{2 + 4\pi^2} + \ln(\sqrt{2\pi} + \sqrt{1 + 2\pi^2})$  unidades
19.  $\sqrt{2e^{4\pi} + 1} - \sqrt{3} + \frac{1}{2} \ln \frac{e^{4\pi} + 1 - \sqrt{2e^{4\pi} + 1}}{e^{4\pi}}$   
 $-\frac{1}{2} \ln(2 - \sqrt{3})$  unidades
21. segmentos rectos desde (0, 0) hasta (1, 1), después a (0, 2)
23.  $\mathbf{r} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}(A s\mathbf{i} + B s\mathbf{j} + C s\mathbf{k})$
25.  $\mathbf{r} = a \left(1 - \frac{s}{K}\right)^{3/2} \mathbf{i} + a \left(\frac{s}{K}\right)^{3/2} \mathbf{j} + b \left(1 - \frac{2s}{K}\right) \mathbf{k}$ ,  
 $0 \leq s \leq K, K = (\sqrt{9a^2 + 16b^2})/2$

**Sección 11.4 (página 728)**

$$1. \hat{\mathbf{T}} = \frac{1}{\sqrt{a + 16t^2 + 81t^4}}(\mathbf{i} - 4t\mathbf{j} + 9t^2\mathbf{k})$$

$$3. \hat{\mathbf{T}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 t}}(\cos 2t\mathbf{i} + \sin 2t\mathbf{j} - \sin t\mathbf{k})$$

**Sección 11.5 (página 736)**

$$1. 1/2, 27/2 \quad 3. 27/(4\sqrt{2})$$

$$5. \hat{\mathbf{T}} = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j})/\sqrt{5}, \hat{\mathbf{N}} = (-2\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{5}, \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{k}$$

$$7. \hat{\mathbf{T}} = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2 + t^4}}(\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}),$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \frac{1}{\sqrt{t^4 + 4t^2 + 1}}(t^2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + \mathbf{k}),$$

$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{-(t + 2t^3)\mathbf{i} + (1 - t^4)\mathbf{j} + (t^3 + 2t)\mathbf{k}}{\sqrt{t^4 + 4t^2 + 1}\sqrt{1 + t^2 + t^4}},$$

$$\kappa = \frac{\sqrt{t^4 + 4t^2 + 1}}{(t^4 + t^2 + 1)^{3/2}}, \quad \tau = \frac{2}{t^4 + 4t^2 + 1}$$

9.  $\kappa(t) = 1/\sqrt{2}$ ,  $\tau(t) = 0$ , la curva es una circunferencia en el plano  $y + z = 4$ , con centro  $(2, 1, 3)$  y radio  $\sqrt{2}$

11. (a)  $\hat{\mathbf{T}} = \mathbf{i}$ ,  $\hat{\mathbf{N}} = \frac{2\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{5}}$ ,  
 $\hat{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{5}}$ ,  $\kappa = \sqrt{5}$ ,  $\tau = 0$

(b)  $\hat{\mathbf{T}} = \frac{\sqrt{2}}{3}(\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k})$ ,  $\hat{\mathbf{B}} = \frac{1}{\sqrt{13}}(-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\sqrt{2}\mathbf{k})$ ,  
 $\hat{\mathbf{N}} = -\frac{1}{\sqrt{39}}(6\mathbf{i} + \mathbf{j} + \sqrt{2}\mathbf{k})$ ,  $\kappa = \frac{2\sqrt{39}}{9}$ ,  $\tau = -\frac{6\sqrt{2}}{13}$

13. máx.  $a/b^2$ , mín.  $b/a^2$

15.  $\kappa = \frac{e^x}{(1 + e^{2x})^{3/2}}$ ,  $\mathbf{r} = (x - 1 - e^{2x})\mathbf{i} + (2e^x + e^{-x})\mathbf{j}$

17.  $\frac{3}{2\sqrt{2ar}}$

21.  $\mathbf{r} = -4x^3\mathbf{i} + (3x^2 + \frac{1}{2})\mathbf{j}$

23.  $f(x) = \frac{1}{8}(15x - 10x^3 + 3x^5)$

**Sección 11.6 (página 746)**

3. velocidad:  $1/\sqrt{2}$ ,  $1/\sqrt{2}$ ; aceleración:  $-e^{-\theta}/2$ ,  $e^{-\theta}/2$ .

5.  $|a_r| = \frac{v_0^2}{5} \left( \frac{2}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right)$

7. 42,777 km, el plano ecuatorial

9.  $\frac{T}{4\sqrt{2}}$       13. 3/4

15.  $(1/2) - (\epsilon/\pi)$

19.  $r = A \sec \omega(\theta - \theta_0)$ ,  $\omega^2 = 1 - (k/h^2)$  si  $k < h^2$ ,  
 $r = 1/(A + B\theta)$  si  $k = h^2$ ,  $r = Ae^{\omega\theta} + Be^{-\omega\theta}$ ,  
 $\omega^2 = (k/h^2) - 1$ , si  $k > h^2$ ; no existen órbitas acotadas que no se aproximan al origen excepto en el caso  $k = h^2$  si  $B = 0$  cuando hay órbitas circulares. (¿No le parece ahora bien que la ley de la gravitación depende del inverso del cuadrado en vez del inverso del cubo?)

21. centro  $\left( \frac{\ell\epsilon}{\epsilon^2 - 1}, 0 \right)$ ;

asíntotas en direcciones  $\theta = \pm \cos^{-1} \left( -\frac{1}{\epsilon} \right)$ ;

eje semitransversal  $a = \frac{\ell}{\epsilon^2 - 1}$ ;

eje semiconjugado  $b = \frac{\ell}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}}$ ;

separación semifocal  $c = \frac{\ell\epsilon}{\epsilon^2 - 1}$ .

**Ejercicios de repaso (página 748)**

3.  $\mathbf{v} = 2(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$ ,  $\mathbf{a} = (8/3)(-2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k})$

5.  $\kappa = \tau = \sqrt{2}/(e^t + e^{-t})^2$

9.  $4a(1 - \cos(T/2))$  unidades

11.  $\mathbf{r}_C(t) = a(t - \sin t)\mathbf{i} + a(1 - \cos t)\mathbf{j}$

13.  $\hat{\mathbf{p}} = \sin \phi \cos \theta \mathbf{i} + \sin \phi \sin \theta \mathbf{j} + \cos \phi \mathbf{k}$  orientado a la derecha

$$\hat{\Phi} = \cos \phi \cos \theta \mathbf{i} + \cos \phi \sin \theta \mathbf{j} - \sin \phi \mathbf{k}$$

$$\hat{\Theta} = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}$$

**Problemas avanzados (página 749)**

1. (a)  $\Omega = \Omega \frac{\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{2}}$ ,  $\Omega \approx 7.272 \times 10^{-5}$ .

(b)  $\mathbf{a}_C = -\sqrt{2}\Omega v \mathbf{i}$ .

(c) aprox. 15.5 cm al oeste de P.

3. (c)  $\mathbf{v}(t) = (v_0 - (v_0 \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}) \cos(\omega t) + (v_0 \times \mathbf{k}) \sin(\omega t) + (v_0 \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}$ .

(d) Recta si  $\mathbf{v}_0$  es paralelo a  $\mathbf{k}$ , circunferencia si  $\mathbf{v}_0$  es perpendicular a  $\mathbf{k}$ .

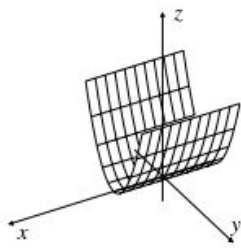
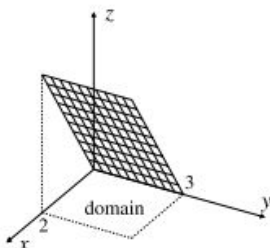
5. (a)  $y = (48 + 24x^2 - x^4)/64$

7. (a) Sí, tiempo  $\pi a/(v\sqrt{2})$ , (b)  $\phi = \frac{\pi}{2} - \frac{vt}{a\sqrt{2}}$ ,  
 $\theta = \ln \left[ \sec \left( \frac{vt}{a\sqrt{2}} \right) + \tan \left( \frac{vt}{a\sqrt{2}} \right) \right]$ .  
 (c) infinitamente a menudo

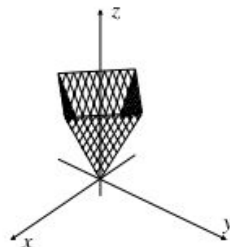
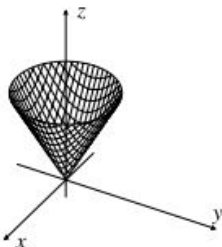
**Capítulo 12**  
**Diferenciación parcial**

**Sección 12.1 (página 761)**

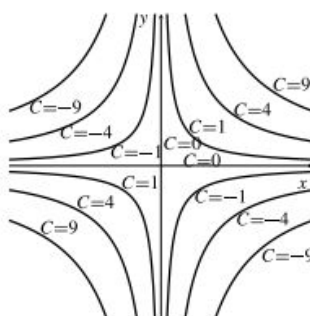
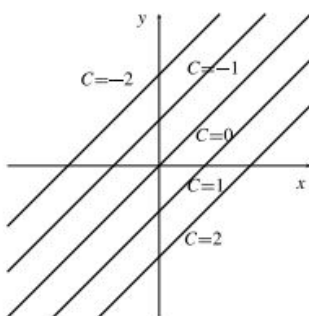
1. todo  $(x, y)$  con  $x \neq y$   
 3. todo  $(x, y)$  excepto  $(0, 0)$   
 5. todo  $(x, y)$  que cumpla  $4x^2 + 9y^2 \geq 36$   
 7. todo  $(x, y)$  con  $xy > -1$   
 9. todo  $(x, y, z)$  excepto  $(0, 0, 0)$   
 11.  $z = f(x, y) = x$       13.  $z = f(x, y) = y^2$



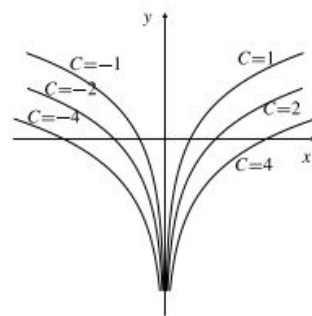
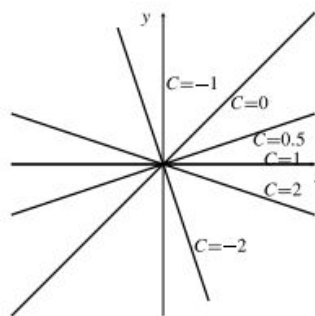
15.  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$       17.  $f(x, y) = |x| + |y|$



19.  $f(x, y) = x - y = C$       21.  $f(x, y) = xy = C$



23.  $f(x, y) = \frac{x - y}{x + y} = C$       25.  $f(x, y) = xe^{-y} = C$



27. En  $B$ , porque los contornos están más próximos allí.  
 29. Un plano que contiene al eje  $y$ , con pendiente ascendente en la dirección de  $x$ .  
 31. Un cono circular recto con base en el plano  $xy$  y vértice en el eje  $z$  a una altura de 5.  
 33. No, diferentes curvas de la familia no se deben cruzar en la región.  
 35. (a)  $\sqrt{x^2 + y^2}$ , (b)  $(x^2 + y^2)^{1/4}$   
 (c)  $x^2 + y^2$ , (d)  $e^{\sqrt{x^2 + y^2}}$   
 37. Esferas centradas en el origen  
 39. Cilindros circulares cuyo eje es el eje  $z$ .  
 41. Octaedros regulares con vértices en los ejes coordenados.

**Sección 12.2 (página 765)**

1. 2      3. no existe  
 5. -1      7. 0  
 9. no existe      11. 0  
 13.  $f(0, 0) = 1$   
 15. todo  $(x, y)$  tal que  $x \neq \pm y$ ; sí; sí,  $f(x, x) = \frac{1}{2x}$  hace que  $f$  sea continua en  $(x, x)$  para  $x \neq 0$ ; no,  $f$  no tiene extensión continua en la recta  $x + y = 0$   
 17. no, sí  
 19.  $a = c = 0$ ,  $b \neq 0$   
 23. Una superficie que no forma lágrimas, que corta sólo una vez a rectas verticales que pasan por puntos de la región.

**Sección 12.3 (página 773)**

1.  $f_1(x, y) = f_1(3, 2) = 1, f_2(x, y) = f_2(3, 2) = -1$

3.  $f_1 = 3x^2y^4z^5, f_2 = 4x^3y^3z^5, f_3 = 5x^3y^4z^4$   
 Las tres se anulan en  $(0, -1, -1)$ .

5.  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$

Si  $(-1, 1)$ :  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{2}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{2}$

7.  $f_1 = \sqrt{y} \cos(x\sqrt{y}), f_2 = \frac{x \cos(x\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}$

Si  $(\pi/3, 4)$ :  $f_1 = -1, f_2 = -\pi/24$

9.  $\frac{\partial w}{\partial x} = y \ln x^{(y \ln z - 1)}, \frac{\partial w}{\partial y} = \ln x \ln z^{y \ln z}$

$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{y \ln x}{z} x^{y \ln z}$

Si  $(e, 2, e)$ :  $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial z} = 2e, \frac{\partial w}{\partial y} = e^2$

11.  $f_1(0, 0) = 2, f_2(0, 0) = -1/3$

13.  $z = -4x - 2y - 3; \frac{x+2}{-4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{-1}$

15.  $z = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 - \frac{x - \pi}{4} + \frac{\pi}{16} (y - 4) \right);$

$\frac{x - \pi}{-1/4\sqrt{2}} = \frac{y - 4}{\pi/16\sqrt{2}} = \frac{z - 1/\sqrt{2}}{-1}$

17.  $z = \frac{2}{5} + \frac{3x}{25} - \frac{4y}{25}; \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-1/5}{-2/5}$

19.  $z = \ln 5 + \frac{2}{5}(x - 1) - \frac{4}{5}(y + 2);$

$\frac{x-1}{2/5} = \frac{y+2}{-4/5} = \frac{z-\ln 5}{-1}$

21.  $z = \frac{x+y}{2} - \frac{\pi}{4}; 2(x-1) = 2(y+1) = -z - \frac{\pi}{4}$

23.  $(0, 0), (1, 1), (-1, -1)$

33.  $w = f(a, b, c) + f_1(a, b, c)(x - a) + f_2(a, b, c)(y - b) + f_3(a, b, c)(z - c)$

35.  $\sqrt{7}/4$  unidades

37.  $f_1(0, 0) = 1, f_2(0, 0)$  no existe.

39.  $f$  es continua en  $(0, 0)$ ;  $f_1$  y  $f_2$  no.

**Sección 12.4 (página 779)**

1.  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2(1 + y^2), \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xy, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^2$

3.  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 6xy^3z^3, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 6x^3yz^3,$

$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 6x^3y^3z, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 9x^2y^2z^3,$

$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = 9x^2y^3z^2, \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = 9x^3y^2z^2$

5.  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -ye^x, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^y - e^x, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = xe^y$

7. 27, 10,  $x^2 e^{xy}(xz \operatorname{sen} xz - (3 + xy) \cos xz)$

19.  $u(x, y, z, t) = t^{-3/2} e^{-(x^2 + y^2 + z^2)/4t}$

**Sección 12.5 (página 789)**

1.  $\frac{\partial w}{\partial t} = f_1 g_2 + f_2 h_2 + f_3 k_2$

3.  $\frac{\partial z}{\partial u} = g_1 h_1 + g_2 f h_1$

5.  $\frac{dw}{dz} = f_1 g_1 h' + f_1 g_2 + f_2 h' + f_3,$

$\left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_x = f_2 h' + f_3,$

$\left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{x,y} = f_3$

7.  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-5y}{13x^2 - 2xy + 2y^2}$

9.  $2f_1(2x, 3y)$

11.  $2xf_2(y^2, x^2)$

13.  $dT/dt = e^{-t}(f'(t) - f(t)); dT/dt = 0$  si  $f(t) = e^t$ :  
 en este caso la disminución de  $T$  con el tiempo (a profundidad fija) se compensa exactamente por el aumento de  $T$  con la profundidad.

15.  $4f_{11} + 12f_{12} + 9f_{22}, 6f_{11} + 5f_{12} - 6f_{22},$   
 $9f_{11} - 12f_{12} + 4f_{22}$

17.  $f_1 \cos s - f_2 \operatorname{sen} s + f_{11} t \cos s \operatorname{sen} s +$   
 $+ f_{12} t(\cos^2 s - \operatorname{sen}^2 s) - f_{22} t \operatorname{sen} s \cos s$

19.  $f_2 + 2y^2 f_{12} + xy f_{22} - 4xy f_{31} - 2x^2 f_{32};$   
 todas las derivadas en  $(y^2, xy, -x^2)$

27.  $\sum_{i,j=1}^n x_i x_j f_{ij}(x_1, \dots, x_n) = k(k-1)f(x_1, \dots, x_n)$

31.  $u(x, y) = f(x + ct)$

**Sección 12.6 (página 798)**

1. 6.9

3. 0.0814

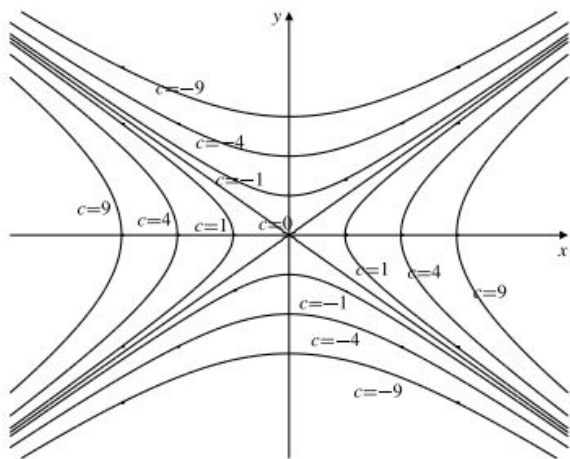
5. 2.967

7. (a) 3%, (b) 2%, (c) 1%

9.  $8.88 \text{ ft}^2$   
 11. 169 m, 24 m, más sensible al ángulo en B  
 13.  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -r \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$   
 15.  $\begin{pmatrix} 2x & z & y \\ -\ln z & 2y & -x/z \end{pmatrix}, (5.99, 3.98)$

**Sección 12.7 (página 809)**

1.  $4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}; z = 4x + 2y - 3; 2x + y = 3$   
 3.  $(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j})/25; 3x - 4y - 25z + 10 = 0; 3x - 4y + 5 = 0$   
 5.  $(2\mathbf{i} - 4\mathbf{j})/5; 2x - 4y - 5z = 10 - 5 \ln 5; x - 2y = 5$   
 7.  $x + y - 3z = -3$       9.  $\sqrt{3}y + z = \sqrt{3} + \pi/3$   
 11.  $\frac{4}{\sqrt{5}}$       13.  $1 - 2\sqrt{3}$   
 17. en direcciones que forman ángulos  $-30^\circ$  o  $-150^\circ$  son el eje  $x$  positivo; no;  $-\mathbf{j}$ .  
 19.  $7\mathbf{i} - \mathbf{j}$   
 21. a)



- b) en dirección  $-\mathbf{j} - \mathbf{j}$   
 c)  $4\sqrt{2k}$  grados/unidad de tiempo  
 d)  $12k/\sqrt{5}$  grados/unidad de tiempo  
 e)  $x^2y = -4$   
 23.  $3x^2 - 2y^2 = 10$       25.  $-4/3$   
 27.  $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$   
 33.  $D_v(D_v f) = v_1^2 f_{11} + v_2^2 f_{22} + v_3^2 f_{33} + 2v_1 v_2 f_{12} + 2v_1 v_3 f_{13} + 2v_2 v_3 f_{23}$

Es la segunda derivada de  $f$  medida por un observador que se mueve con velocidad  $\mathbf{v}$ .

35.  $\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + 2D_{\mathbf{v}(t)}\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) + D_{\mathbf{a}(t)}T + D_{\mathbf{v}(t)}(D_{\mathbf{v}(t)}T)$

**Sección 12.8 (página 819)**

1.  $-\frac{x^4 + 3xy^2}{y^3 + 4x^3y}, y \neq 0, y^2 \neq -4x^3$   
 3.  $\frac{3xy^4 + xz}{xy - 2y^2z}, y \neq 0, x \neq 2yz$   
 5.  $\frac{x - 2t^2w}{2xy^2 - w}, w \neq 2xy^2$       7.  $-\frac{\partial G/\partial x}{\partial G/\partial u}, \frac{\partial G}{\partial u} \neq 0$   
 9.  $-\frac{v^2 H_2 + w H_3}{u^2 H_1 + t H_3}, u^2 H_1 + t H_3 \neq 0,$   
 todas las derivadas en  $(u^2 w, v^2 t, wt)$   
 11.  $\frac{2w - 4y}{4x - w}, 4x \neq w$       13.  $\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}$   
 15.  $r$ ; todos los puntos excepto el origen  
 17.  $-3/2$   
 19.  $-\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(y, z, w)} \bigg/ \frac{\partial(F, G, H)}{\partial(x, z, w)}$   
 21. 15;  $-\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(x_2, x_3, x_5)} \bigg/ \frac{\partial(F, G, H)}{\partial(x_1, x_3, x_5)}$   
 23.  $2(u + v), -2, 0$

**Sección 12.9 (página 826)**

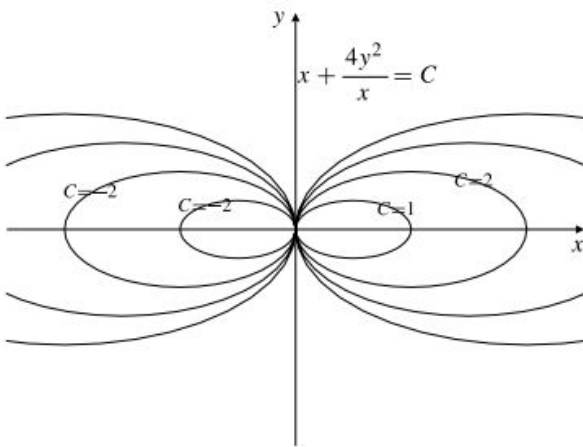
1.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n y^{2n}}{2^{n+1}}$   
 3.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1} (y+1)^{2n+1}}{2n+1}$   
 5.  $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} x^{2k} y^{2n-2k}$   
 7.  $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{2}(y-1) + \frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{1}{2}(x-2)(y-1) + \frac{1}{2}(y-1)^2 - \frac{1}{16}(x-2)^3 + \frac{3}{8}(x-2)^2(y-1) - \frac{3}{4}(x-2)(y-1)^2 + \frac{1}{2}(y-1)^3$   
 9.  $x + y^2 - \frac{x^3}{3}$   
 11.  $1 - (y-1) + (y-1)^2 - \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{2})^2$   
 13.  $-x - x^2 - (5/6)x^3$

15.  $-\frac{x}{3} - \frac{2y}{3} - \frac{2x^2}{27} - \frac{8xy}{27} - \frac{8y^2}{27}$

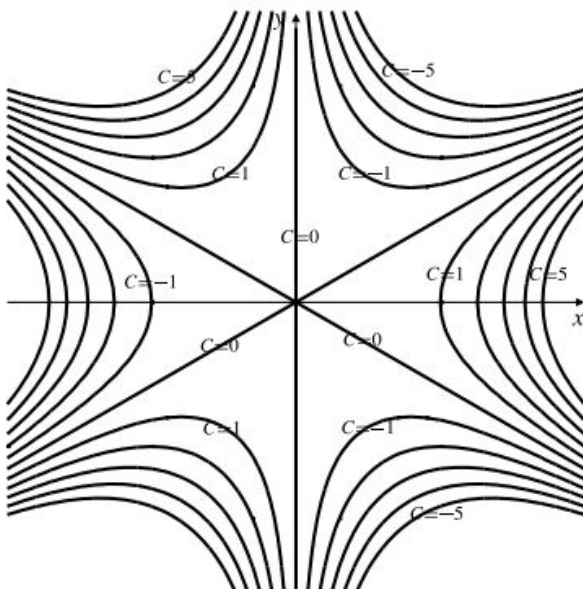
17.  $\frac{[(2n)!]^3}{(n!)^2}$

**Ejercicios de repaso (página 826)**

1.



3.



5. continua excepto en las rectas  $x = \pm y$ ; se puede extender a  $x=y$  excepto en el origen; si  $f(0, 0) = 0$  entonces  $f_1(0, 0) = f_2(0, 0) = 1$ .

7. (a)  $ax + by + 4cz = 16$ ,  
 (b) la circunferencia  $z = 1, x^2 + y^2 = 12$ ,  
 (c)  $\pm(2, 2, \sqrt{2})$

9.  $7500 \text{ m}^2, 7.213\%$

11. (a)  $-1/\sqrt{2}$ , (b) dir. de  $\pm(\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k})$ , (c) dir. de  $7\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

15. (a)  $\partial u/\partial x = -5, \partial u/\partial y = 1$ , (b)  $-1.13$

**Capítulo 13**

**Aplicaciones de las derivadas parciales**

**Sección 13.1 (página 837)**

1.  $(2, -1)$ , mín. loc. (abs.).
3.  $(0, 0)$ , pto. ensilladura;  $(1, 1)$ , mín. loc.
5.  $(-4, 2)$ , máx. loc.
7.  $(0, n\pi), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , todos puntos ensilladura
9.  $(0, a), (a > 0)$ , mín. loc.;  $(0, a), (a < 0)$ , máx. loc.;  $(0, 0)$  pto. ensilladura;  $(\pm 1, 1/\sqrt{2})$ , máx. loc. (abs.);  $(\pm 1, -1/\sqrt{2})$ , mín. loc. (abs.).
11.  $(3^{-1/3}, 0)$ , punto ensilladura
13. máx. en  $(x, x)$ , mín. en  $(x, -x), x \neq 0$
15.  $(-1, -1), (1, -1), (-1, 1)$ , pto. ensilladura;  $(-3, -3)$ , mín. loc.
17.  $(1, 1, \frac{1}{2})$ , ptos. ensilladura
19.  $(0, 0)$ , ptos. ensilladura;  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ , máx. loc. (abs.);  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ , mín. loc. (abs.).
21. máx.  $e^{-3/2}/2\sqrt{2}$ , mín.  $-e^{-3/2}/2\sqrt{2}$ ;  $f$  es continua en todas partes, y  $f(x, y, z) \rightarrow 0$  cuando  $x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty$ .
23.  $L^3/108$  unidades al cubo
25.  $8abc/(3\sqrt{3})$  unidades al cubo
27. PC son  $(\sqrt{\ln 3}, -\sqrt{\ln 3})$  y  $(-\sqrt{\ln 3}, \sqrt{\ln 3})$ .
29.  $f$  no tiene un mínimo local en  $(0, 0)$ , el test de la segunda derivada no permite concluir ( $B^2 = AC$ ).

**Sección 13.2 (página 844)**

1. máx.  $5/4$ , mín.  $-2$
3. máx.  $(\sqrt{2} - 1)/2$ , mín.  $-(\sqrt{2} + 1)/2$ .

5. máx.  $2/3\sqrt{3}$ , mín. 0      7. máx. 1, mín. -1  
 9. máx.  $1/\sqrt{e}$ , mín.  $-1/\sqrt{e}$   
 11. máx.  $4/9$ , mín.  $-4/9$   
 13. no límite; sí, máx.  $f = e^{-1}$  (en todos los puntos de la curva  $xy = 1$ )  
 15. 625 000 €, 733 333 €  
 17. máx.  $37/2$  en  $(7/4, 5)$   
 19. 6667 kg de lujo, 6667 kg estándar

**Sección 13.3 (página 853)**

1. 84 375      3. 1 unidad  
 5. máx. 4 unidades, mín. 2 unidades  
 7.  $a = \pm\sqrt{3}$ ,  $b = \pm 2\sqrt{3}$ ,  $c = \pm\sqrt{3}$   
 9. máx. 8, mín. -8      11. máx. 2, mín. -2  
 13. máx. 7, mín. -1      15.  $\frac{2\sqrt{6}}{3}$  unidades  
 17.  $\pm\sqrt{\frac{3n(n+1)}{2(2n+1)}}$       19.  $\frac{1}{6} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}$   
 21. anchura =  $\left(\frac{2V}{15}\right)^{1/3}$ , profundidad =  $3 \times$  anchura,  
 altura =  $\frac{5}{2} \times$  anchura  
 23. máx. 1, mín.  $-\frac{1}{2}$   
 27. el método no fallará si  $\nabla f = \mathbf{0}$  en un punto extremo, pero  $\lambda = 0$ .

**Sección 13.4 (página 861)**

1. en  $(\bar{x}, \bar{y})$  siendo  $\bar{x} = (\sum_{i=1}^n x_i)/n$ ,  $\bar{y} = (\sum_{i=1}^n y_i)/n$   
 3.  $a = (\sum_{i=1}^n y_i e^{x_i}) / (\sum_{i=1}^n e^{2x_i})$   
 5. Si  $A = \sum x_i^2$ ,  $B = \sum x_i y_i$ ,  $C = \sum x_i$ ,  $D = \sum y_i^2$ ,  
 $E = \sum y_i$ ,  $F = \sum x_i z_i$ ,  $G = \sum y_i z_i$ , y  $H = \sum z_i^2$ ,  
 siendo
- $$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & C \\ B & D & E \\ C & E & n \end{vmatrix}, \quad a = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} F & B & C \\ G & D & E \\ H & E & n \end{vmatrix},$$
- $$b = \frac{1}{A} \begin{vmatrix} A & F & C \\ B & G & E \\ C & H & n \end{vmatrix}, \quad c = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} A & B & F \\ B & D & G \\ C & E & H \end{vmatrix}$$

7. Utilizamos regresión lineal con el fin de ajustar  $\eta = a + bx$  a los datos  $(x_i, \ln y_i)$ . Seguidamente  $p = e^a$ ,  $q = b$ . Éstos no son los mismos valores que se obtendrían minimizando la expresión  $\sum (y_i - pe^{qx_i})^2$ .  
 9. Utilizamos regresión lineal con el fin de ajustar  $\eta = a + b\xi$  a los datos  $\left(x_i, \frac{y_i}{x_i}\right)$ . Seguidamente  $p = a$ ,  $q = b$ . No es lo mismo que minimizar  $\sum (y_i - px_i - qx_i^2)^2$ .  
 11. Utilizamos regresión lineal con el fin de ajustar  $\eta = a + b\xi$  a los datos  $\left(e^{-2x_i}, \frac{y_i}{e^{x_i}}\right)$ . Entonces  $p = a$ ,  $q = b$ . No es lo mismo que minimizar  $\sum (y_i - pe^{x_i} - qe^{-x_i})^2$ . Hay otras respuestas posibles.  
 13. Si  $A = \sum x_i^2$ ,  $B = \sum x_i^3$ ,  $C = \sum x_i^4$ ,  $D = \sum x_i$ ,  
 $H = \sum x_i^2 y_i$ ,  $I = \sum x_i y_i$ , y  $J = \sum y_i$ , entonces
- $$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & C \\ B & C & D \\ C & D & n \end{vmatrix}, \quad a = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} H & B & C \\ I & C & D \\ J & D & n \end{vmatrix},$$
- $$b = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} A & H & C \\ B & I & D \\ C & J & n \end{vmatrix}, \quad c = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} A & B & H \\ B & C & I \\ C & D & J \end{vmatrix},$$
15.  $a = 5/6$ ,  $I = 1/252$   
 17.  $a = 15/16$ ,  $b = -1/16$ ,  $I = 1/448$   
 19.  $a = \frac{20}{\pi^2} (\pi^2 - 16)$ ,  $b = \frac{12}{\pi^4} (20 - \pi^2)$   
 21.  $a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos kx \, dx$ , ( $k = 0, 1, 2, \dots$ )  
 23.  $\pi - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^\infty \frac{\cos((2k+1)\pi x)}{(2k+1)^2}$ ;  $-x$

**Sección 13.5 (página 870)**

1.  $\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$       3.  $2\sqrt{\pi}(\sqrt{y} - \sqrt{x})$   
 5.  $\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ ;  $\frac{(6x^2-2)}{(1+x^2)^3}$   
 7.  $\frac{\pi}{2x}$ , supongamos  $x > 0$ ;  $\frac{\pi}{4x^3}$ ;  $\frac{3\pi}{16x^5}$   
 9.  $n!$       11.  $f(x) = \int_0^x e^{-t^2/2} dt$   
 13.  $y = x^2$       15.  $x^2 + y^2 = 1$   
 17.  $y = x - \frac{1}{4}$       19. no  
 21. no; una recta de puntos singulares  
 23.  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$$25. y = x - \epsilon \sin(\pi x) + \frac{\pi \epsilon^2}{2} \sin(2\pi x) + \dots$$

$$27. y = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} \epsilon x - \frac{16}{125} \epsilon^2 x^2 + \dots$$

$$29. x \approx 1 - \frac{1}{100\epsilon} - \frac{1}{30\,000\epsilon^2}, y \approx 1 - \frac{1}{30\,000\epsilon^2}$$

### Sección 13.6 (página 874)

1. (0.797105, 2.219107)

3. ( $\pm 0.2500305$ ,  $\pm 3.9995115$ ),  
( $\pm 1.9920783$ ,  $\pm 0.5019883$ )

5. (0.3727730, 0.3641994),  
(-1.4141606, -0.9877577)

$$7. x = x_0 - \frac{\Delta_1}{\Delta}, y = y_0 - \frac{\Delta_2}{\Delta}, z = z_0 - \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

$$\text{con } \Delta = \frac{\partial(f, g, h)}{\partial(x, y, z)} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} \text{ y } \Delta_i$$

es  $\Delta$  con la  $i$ -ésima columna sustituida con  $g$   
 $h$

9. 18 iteraciones cerca de (0, 0), 4 iteraciones cerca de (1, 1); las dos curvas son tangentes en (0, 0), pero no en (1, 1).

### Sección 13.7 (página 880)

1. ( $\pm 0.45304$ , 0.81204,  $\pm 0.36789$ ), ( $\pm 0.96897$ , 0.17751,  $\pm 0.17200$ )

3. máx. local y absoluto 0.81042 en (-0.33853, -0.52062);  
mín. local y absoluto -0.66572 en (0.13319, 0.53682)

5. -4.5937

### Ejercicios de repaso (página 880)

1. (0, 0) pto. ensilladura, (1, -1) mín. loc.

3. (2/3, 4/3) mín. loc.; (2, -4) y (-1, 2) pto. ensilladura

5. sí, 2, en la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

7. máx.  $1/(4e)$ , mín.  $-1/(4e)$

9. (a)  $L^2/48 \text{ cm}^2$ , (b)  $L^2/16 \text{ cm}^2$

11.  $4\pi$  unidades al cuad.

13.  $16\pi$  unidades al cubo

15. 1,688 productos a 2.00 euros cada uno

17.  $y \approx -2x - \epsilon x e^{-2x} + \epsilon^2 x^2 e^{-4x}$

### Problemas avanzados (página 881)

3.  $\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \tan^{-1} x$

## Capítulo 14

### Integración múltiple

#### Sección 14.1 (página 890)

1. 15

3. 21

5. 15

7. 96

9. 80

11. 36.6258

13. 20

15. 0

17.  $5\pi$

19.  $\frac{\pi a^3}{3}$

21.  $\frac{1}{6}$

#### Sección 14.2 (página 898)

1.  $5/24$

3. 4

5.  $\frac{ab(a^2+b^2)}{3}$

7.  $\pi$

9.  $\frac{3}{56}$

11.  $\frac{33}{8} \ln 2 - \frac{45}{16}$

13.  $\frac{e^{-2}}{2}$

15.  $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right)$ ; la región es un triángulo de vértices (0, 0), (1, 0) y (1, 1)

17.  $\frac{\pi}{4\lambda}$ ; la región es un triángulo de vértices (0, 0), (0, 1) y (1, 1)

19. 1/4 unidades al cubo

21. 1/3 unidades al cubo

23.  $\ln 2$  unidades al cubo

25.  $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$  unidades al cubo

27.  $\frac{16a^3}{3}$  unidades al cubo

#### Sección 14.3 (página 905)

1. converge a 1

3. converge a  $\pi/2$

5. diverge a  $\infty$

7. converge a 4

9. converge a  $1 - \frac{1}{e}$

11. diverge a  $\infty$

13. converge a  $2 \ln 2$

15.  $k > a - 1$



17.  $k < -1 - a$

19.  $k > -\frac{1+a}{1+b}$  (suponiendo que  $b > -1$ )

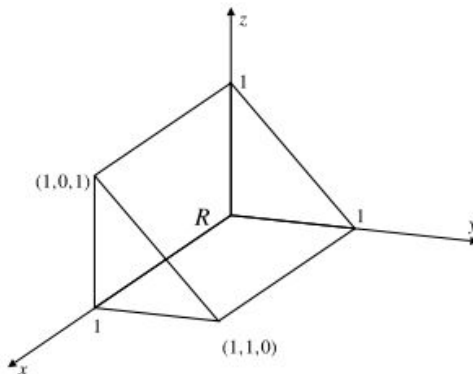
21.  $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$  (son posibles diferentes soluciones porque la *integral doble* no existe)

23.  $\frac{a^2}{3}$

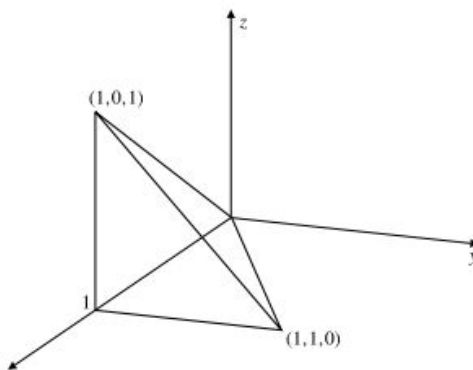
25.  $\frac{4\sqrt{2}a}{3\pi}$

27. sí,  $1/(2\pi)$

17.  $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{1-y} f(x, y, z) dz$



19.  $\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{x-y} f(x, y, z) dz$



27.  $(e - 1)/3$

29.  $\bar{f} = \frac{1}{\text{vol}(R)} \iiint_R f dV; 1$

**Sección 14.6 (página 931)**

1. Cartesianas:  $(-\sqrt{3}, 3, 2)$ ; cilíndricas:  $[2\sqrt{3}, 2\pi/3, 2]$
3. Cartesianas:  $(\sqrt{3}, 1, -2)$ ; esféricas:  $[2\sqrt{2}, 3\pi/4, \pi/6]$
5. el semiplano  $x = 0, y > 0$
7. el plano  $xy$
9. el cilindro circular de radio 4 cuyo eje es el eje  $z$
11. el plano  $xy$
13. esfera de radio 1 con centro  $(0, 0, 1)$
15.  $\frac{2}{3} \pi a^3 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  unidades al cubo
17.  $24\pi$  unidades al cubo

**Sección 14.4 (página 916)**

- |                              |                                   |
|------------------------------|-----------------------------------|
| 1. $\pi a^4/2$               | 3. $2\pi a$                       |
| 5. $\pi a^4/4$               | 7. $a^3/3$                        |
| 9. $\pi(e^{a^2} - 1)/4$      | 11. $\frac{(\sqrt{3} + 1)a^3}{6}$ |
| 13. $\frac{1}{3}$            | 15. $\frac{2a}{3}$                |
| 17. $k < 1; \frac{\pi}{1-k}$ | 19. $\frac{a^4}{16}$              |
21.  $\frac{2\pi}{3}$  unidades al cubo
23.  $\frac{4\pi(2\sqrt{2}-1)a^3}{3}$  unidades al cubo
25.  $16[1 - (1/\sqrt{2})]a^3$  unidades al cubo
27.  $1 - \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}$  unidades
29.  $\frac{4}{3} \pi abc$  unidades al cubo
31.  $2a \operatorname{senh} a$
33.  $\frac{3 \ln 2}{2}$  unidades al cuad.
35.  $\frac{1}{4} (e - e^{-1})$

**Sección 14.5 (página 922)**

- |                                |                          |
|--------------------------------|--------------------------|
| 1. $8abc$                      | 3. $16\pi$               |
| 5. $2/3$                       | 7. $1/15$                |
| 9. $2/(3\pi)$                  | 11. $\frac{3}{16} \ln 2$ |
| 13. $\pi \sqrt{\frac{\pi}{6}}$ | 15. $1/8$                |

19.  $\left(2\pi - \frac{32}{9}\right)a^3$  unidades al cubo

21.  $\frac{abc}{3} \tan^{-1} \frac{a}{b}$  unidades al cubo

23.  $\frac{\pi ab}{2}$  unidades al cubo

25.  $\frac{8\pi a^5}{15}$       27.  $\frac{2\pi a^5}{5} \left(1 - \frac{c}{\sqrt{c^2 + 1}}\right)$

29.  $\frac{7\pi}{12}$       31.  $\frac{ha^3}{12}, \frac{\pi a^2 h^2}{48}$

**Sección 14.7 (página 940)**

1.  $3\pi$  unidades al cuadr.

3.  $2\pi a^2$  unidades al cuadr.

5.  $24\pi/\sqrt{3}$  unidades al cuadr.

7.  $(5\sqrt{5} - 1)/12$  unidades al cuadr.

9. 4 unidades al cuadr.      11. 5.123

13.  $4\pi A \left[ a - \sqrt{B} \tan^{-1} \left( \frac{a}{\sqrt{B}} \right) \right]$  unidades

15.  $2\pi km\delta(h + \sqrt{a^2 + (b-h)^2} - \sqrt{a^2 + b^2})$

17.  $2\pi km\delta(h + \sqrt{a^2 + (b-h)^2} - \sqrt{a^2 + b^2})$

19.  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$       21.  $(\frac{3a}{8}, \frac{3a}{8}, \frac{3a}{8})$

23. El modelo todavía incluye aceleración angular que gira la bola; no sólo cae. Parte de la energía gravitatoria produce este giro incluso en el caso límite.

25.  $I = \pi\delta a^2 h \left(\frac{h^2}{3} + \frac{a^2}{4}\right), \bar{D} = \left(\frac{h^2}{3} + \frac{a^2}{4}\right)^{1/2}$

27.  $I = \frac{\pi\delta a^2 h}{3} \left(\frac{2h^2 + 3a^2}{20}\right), \bar{D} = \left(\frac{2h^2 + 3a^2}{20}\right)^{1/2}$

29.  $I = \frac{5a^5\delta}{12}, \bar{D} = \sqrt{\frac{5}{12}}a$

31.  $I = \frac{8}{3} \delta abc(a^2 + b^2), \bar{D} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{3}}$

33.  $m = \frac{4\pi}{3} \delta (a^2 - b^2)^{3/2}, I = \frac{1}{5} m(2a^2 + 3b^2)$

35.  $\frac{5a^2 g \sin \alpha}{7a^2 + 3b^2}$

39. El momento de inercia respecto a la recta  $\mathbf{r}(t) = At\mathbf{i} + Bt\mathbf{j} + Ct\mathbf{k}$  es

$$\frac{1}{A^2 + B^2 + C^2} \left( (B^2 + C^2)P_{xx} + (A^2 + C^2)P_{yy} + (A^2 + B^2)P_{zz} - 2ABP_{xy} - 2ACP_{xz} - 2BCP_{yz} \right)$$

**Ejercicios de repaso (página 942)**

1.  $3/10$

3.  $\ln 2$

5.  $k = 1/\sqrt{3}$

7.  $\int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_y^1 f(x, y, z) dz$

9.  $(1 - e^{-a^2})/(2a)$

11.  $\frac{8\pi}{15} (18\sqrt{6} - 41)a^5$

13.  $\text{vol} = 7/12, \bar{z} = 11/28$       15.  $17/24$

17.  $\frac{1}{6} \int_0^{\pi/2} [(1 + 16 \cos^2 \theta)^{3/2} - 1] d\theta \approx 7.904$  unidades al cuadr.

**Problemas avanzados (página 943)**

1.  $\pi abc \left( \frac{2}{3} - \frac{8}{9\sqrt{3}} \right)$  unidades al cubo

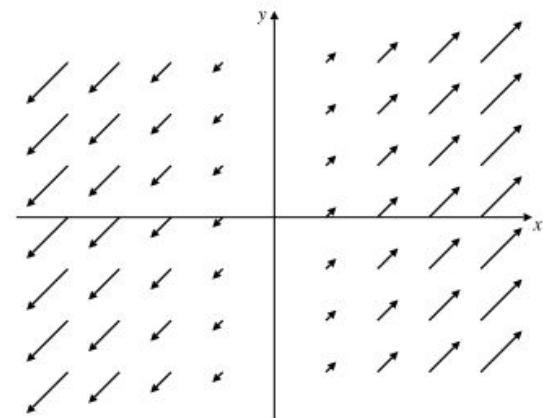
3. (b) (i)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} 1/n^2$ , (ii)  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3$ , (iii)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} 1/n^3$

5.  $4 - \tan^{-1}(\sqrt{2}) + \frac{32}{3} \tan^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right) - \frac{4}{3}(7\pi + 2\sqrt{2}) \approx 18.9348$  unidades al cubo

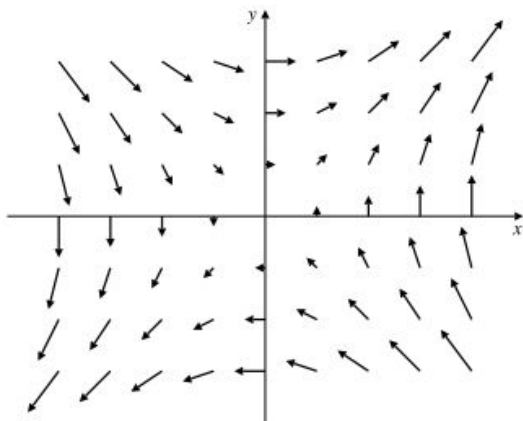
7.  $a^3/210$  unidades al cubo

**Capítulo 15**
**Campos vectoriales**
**Sección 15.1 (página 950)**

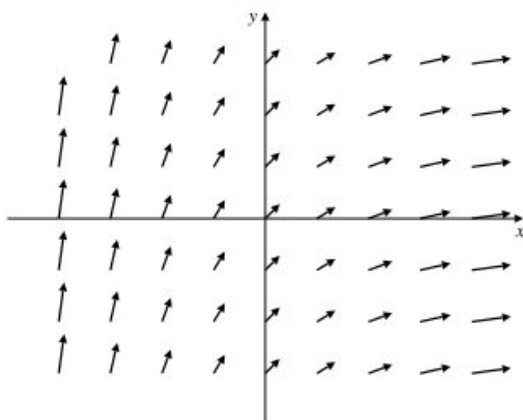
1. líneas de campo:  $y = x + C$



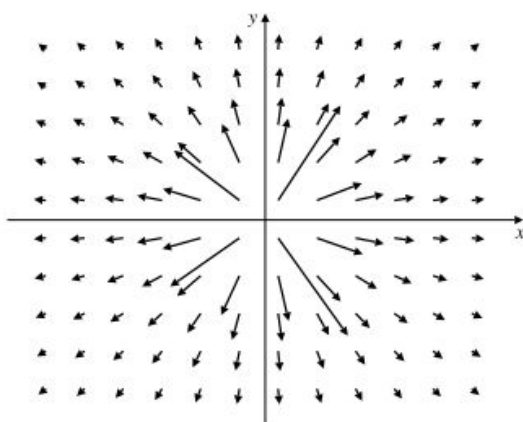
3. líneas de campo:  $y^2 = x^2 + C$



5. líneas de campo:  $y = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$



7. líneas de campo:  $y = Cx$



9. las líneas de corriente son rectas paralelas a  $\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$

11. líneas de corriente:  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $x = a \sin(z - b)$  (espirales)

13.  $y = C_1x$ ,  $2x = z^2 + C_2$

15.  $y = Ce^{1/x}$

17.  $r = \theta + C$

19.  $r = C\theta^2$

**Sección 15.2 (página 959)**

1. conservativo;  $\frac{x^2}{2} - y^2 + \frac{3z^2}{2}$

3. no conservativo

5. conservativo;  $x^2y + y^2z - z^2x$

7.  $-2 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^4}$

9.  $(x^2 + y^2)/z$ ; las superficies equipotenciales son paraboloides  $z = C(x^2 + y^2)$ ; las líneas de campo son elipses  $x^2 + y^2 + 2z^2 = A$ ,  $y = Bx$  en planos verticales por el origen

11.  $\mathbf{v} = \frac{m(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z - \ell)\mathbf{k})}{[x^2 + y^2 + (z - \ell)^2]^{3/2}} + \frac{m(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z + \ell)\mathbf{k})}{[x^2 + y^2 + (z + \ell)^2]^{3/2}}$ ,  
 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  sólo en el origen;  $\mathbf{v}(x, y, 0) = \frac{2m(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})}{(x^2 + y^2 + \ell^2)^{3/2}}$ ;  
 velocidad máxima en la circunferencia  $x^2 + y^2 = \ell^2/2$ ,  $z = 0$

15.  $\phi = -\frac{\mu y}{r^2}$ ,  $\mathbf{F} = \frac{\mu(2xy\mathbf{i} + (y^2 - x^2)\mathbf{j})}{r^4}$ , ( $r^2 = x^2 + y^2$ )

21.  $\phi = \frac{1}{2} r^2 \sin 2\theta$

**Sección 15.3 (página 964)**

1.  $\frac{a^2}{2} (\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$

3. 8 gm

5.  $\frac{\delta}{6} ((2e^{4\pi} + 1)^{3/2} - 3^{3/2})$

7.  $3\sqrt{14}$

9.  $m = 2\sqrt{2}\pi^2$ ,  $(0, -1/\pi, 4\pi/3)$

11.  $(e^6 + 3e^4 - 3e^2 - 1)/(3e^3)$

13.  $(\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1))a^2/2$

15.  $\pi/\sqrt{2}$

17.  $4\sqrt{b^2 + c^2} E\left(\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{b^2 + c^2}}\right)$ ;  
 $\sqrt{b^2 + c^2} E\left(\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{b^2 + c^2}}, T\right)$

**Sección 15.4 (página 973)**

1.  $-1/4$

3.  $1/2$

5. 0

7.  $19/2$

9.  $e^{1+(\pi/4)}$

11.  $A = 2, B = 3; 4 \ln 2 - \frac{1}{2}$   
 13.  $-13/2$       15. a)  $\pi a^2$ , b)  $-\pi a^2$   
 17. a)  $\frac{\pi a^2}{2}$ , b)  $-\frac{\pi a^2}{2}$       19. a)  $ab/2$ , b)  $-ab/2$   
 23. El plano con el origen eliminado no es simplemente conexo.

### Sección 15.5 (página 985)

1.  $dS = ds dz = \sqrt{(g(\theta))^2 + (g'(\theta))^2} d\theta dz$   
 3.  $\frac{\pi ab \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{|C|}$  unidades al cuadr. ( $C \neq 0$ )  
 5. (a)  $dS = |\nabla F/F_2| dx dz$ , (b)  $dS = |\nabla F/F_1| dy dz$   
 7.  $\frac{\pi}{8}$       9.  $16a^2$  unidades al cuadr.  
 13.  $2\pi$       15.  $1/96$   
 17.  $\pi(3e + e^3 - 4)/3$   
 19.  $2\pi a^2 + \frac{2\pi ac^2}{\sqrt{a^2 - c^2}} \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - c^2}}{c}\right)$  unidades al cuadr.  
 21.  $2\pi \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}/|D|$   
 23. un tercio del camino de la base al vértice sobre el eje.  
 25.  $2\pi k \sigma m a \left( \frac{1}{\sqrt{a^2 + (b-h)^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$   
 27.  $I = \frac{8}{3} \pi \sigma a^4; \bar{D} = \sqrt{\frac{2}{3}} a$   
 29.  $\frac{3}{5} g \sin \alpha$

### Sección 15.6 (página 992)

1. 6      3.  $3abc$   
 5.  $\pi(3a^2 - 4ab + b^2)/2$       7.  $4\pi$   
 9.  $2\sqrt{2}\pi$       11.  $4\pi/3$   
 13.  $4\pi m$       15. a)  $2\pi a^2$ , b) 8

### Ejercicios de repaso (página 993)

1.  $(3e/2) - (3/(2e))$       3.  $8\sqrt{2}/15$   
 5. 1  
 7. (a)  $6\pi mgb$ , (b)  $6\pi R\sqrt{a^2 + b^2}$   
 9. (b)  $e^2$       11.  $(xi - yj)/\sqrt{x^2 + y^2}$

### Problemas avanzados (página 994)

1. centroide  $(0, 0, 2/\pi)$ ; mitad superior de la superficie del toro obtenido rotando la circunferencia  $(x-2)^2 + z^2 = 1, y = 0$ , alrededor del eje  $z$

## Capítulo 16

### Cálculo vectorial

#### Sección 16.1 (página 1004)

1.  $\text{div } \mathbf{F} = 2, \text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$   
 3.  $\text{div } \mathbf{F} = 0, \text{rot } \mathbf{F} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$   
 5.  $\text{div } \mathbf{F} = 1, \text{rot } \mathbf{F} = -\mathbf{j}$   
 7.  $\text{div } \mathbf{F} = f'(x) + g'(y) + h'(z), \text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$   
 9.  $\text{div } \mathbf{F} = \cos \theta \left( 1 + \frac{1}{r} \cos \theta \right);$   
 $\text{rot } \mathbf{F} = -\sin \theta \left( 1 + \frac{1}{r} \cos \theta \right) \mathbf{k}$   
 11.  $\text{div } \mathbf{F} = 0; \text{rot } \mathbf{F} = (1/r)\mathbf{k}$

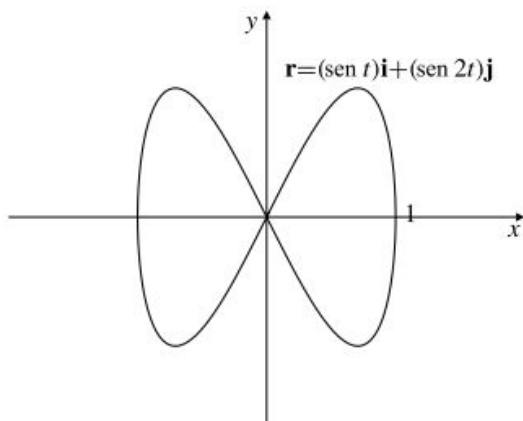
#### Sección 16.2 (página 1012)

7.  $\text{div } \mathbf{F}$  puede tener cualquier valor,  $\text{rot } \mathbf{F}$  debe ser normal a  $\mathbf{F}$   
 9.  $f(r) = Cr^{-3}$   
 15. Si  $\mathbf{F} = \nabla \phi$  y  $\mathbf{G} = \nabla \psi$  entonces  $\nabla \times (\phi \nabla \psi) = \mathbf{F} \times \mathbf{G}$ .  
 17.  $\mathbf{G} = ye^{2z}\mathbf{i} + xye^{2z}\mathbf{k}$  es un posible vector potencial

#### Sección 16.3 (página 1017)

1.  $\pi a^2 - 4a^3$       3. 9  
 5.  $\frac{3\pi ab}{8}$  unidades al cuadr.

7. 0



**Sección 16.4 (página 1023)**

- 1.  $4\pi a^3$
- 3.  $(4/3)\pi a^3$
- 5.  $360\pi$
- 7.  $81/4$
- 11.  $\frac{2}{3}\pi a^2 b + \frac{3}{10}\pi a^4 b + \pi a^2$
- 13. (a)  $12\sqrt{3}\pi a^3$ , (b)  $-4\sqrt{3}\pi a^3$ , (c)  $16\sqrt{3}\pi a^3$
- 15.  $(6 + 2\bar{x} + 4\bar{y} - 2\bar{z})V$
- 17.  $9\pi a^2$

**Sección 16.5 (página 1029)**

- 1.  $1/2$
- 3.  $-3\pi a^2$
- 7.  $9\pi$
- 9.  $\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = -3, I = -\frac{3}{8}\pi$
- 11. sí,  $\phi \nabla \psi$

**Sección 16.6 (página 1037)**

(ninguno)

**Sección 16.7 (página 1048)**

- 1.  $\nabla f = \theta z \hat{r} + z \hat{\theta} + r \theta \mathbf{k}$
- 3.  $\text{div } \mathbf{F} = 2, \text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$
- 5.  $\text{div } \mathbf{F} = \frac{2 \text{sen } \phi}{\rho}, \text{rot } \mathbf{F} = -\frac{\cos \phi}{\rho} \hat{\theta}$
- 7.  $\text{div } \mathbf{F} = 0, \text{rot } \mathbf{F} = \cot \phi \hat{\rho} - 2 \hat{\phi}$
- 9. factores de escala:  $h_u = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right|, h_v = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|$   
 base local:  $\hat{u} = \frac{1}{h_u} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \hat{v} = \frac{1}{h_v} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$   
 elementos de área:  $dA = h_u h_v du dv$

$$11. \nabla f(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(r, \theta) = \frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{1}{r} F_r + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}$$

$$\nabla \times \mathbf{F}(r, \theta) = \left( \frac{\partial F_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} F_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{k}$$

- 13. superficies  $u$ : cilindros verticales elípticos con ejes focales en  $x = \pm a, y = 0$   
 superficies  $v$ : cilindros verticales hiperbólicos con eje focal en  $x = \pm a, y = 0$   
 superficies  $z$ : planos horizontales  
 curvas  $u$ : hipérbolas horizontales con focos  $x = \pm a, y = 0$   
 curvas  $v$ : elipses horizontales con focos  $x = \pm a, y = 0$   
 curvas  $z$ : rectas verticales

$$15. \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

$$+ \frac{\cot \phi}{\rho^2} \frac{\partial f}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho^2 \text{sen}^2 \phi} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

**Ejercicios de repaso (página 1049)**

- 1.  $128\pi$
- 3.  $-6$
- 5.  $3/4$
- 7.  $\lambda = -3$ , no
- 11. el elipsoide  $x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$  con normal hacia fuera

**Problemas avanzados (página 1050)**

- 1.  $\text{div } \mathbf{v} = 3C$

**Capítulo 17**

**Ecuaciones diferenciales ordinarias**

**Sección 17.1 (página 1057)**

- 1. 1, lineal, homogénea
- 3. 1, no lineal
- 5. 2, lineal, homogénea
- 7. 3, lineal, no homogénea
- 9. 4, lineal, homogénea
- 11. (a) y (b) con soluciones, (c) no
- 13.  $y_2 = \text{sen}(kx), y = -3(\cos(kx) + (3/k)\text{sen}(kx))$

15.  $y = \sqrt{2}(\cos x + 2 \operatorname{sen} x)$

17.  $y = x + \operatorname{sen} x + (\pi - 1) \cos x$

**Sección 17.2 (página 1062)**

1.  $2 \tan^{-1}(y/x) = \ln(x^2 + y^2) + C$

3.  $y = x \tan(\ln|x| + C)$       5.  $y = x \tan^{-1}(\ln|Cx|)$

7.  $y^3 + 3y - 3x^2 = 24$       11.  $2xy + x^2y^2 = C$

13.  $xe^{xy} = C$       15.  $\ln|x| - \frac{y}{x^2} = C$

17.  $\frac{1}{M} \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$  debe depender sólo de  $y$ .

19.  $\frac{1}{M} \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$  debe depender sólo de  $y$ .  
 $x - y^2e^y = Cy^2$

21.  $\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dx} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{xM - yN}$  debe depender sólo de  $xy$ ;  
 $\frac{\operatorname{sen} x}{y} - \frac{y}{x} = C$

**Sección 17.3 (página 1070)**

1. (a) 1.97664, (b) 2.187485, (c) 2.306595

3. (a) 2.436502, (b) 2.436559, (c) 2.436563

5. (a) 1.097897, (b) 1.098401

7. (a) 0.89441, (b) 0.87996, (c) 0.872831

9. (a) 0.865766, (b) 0.865769, (c) 0.865769

11. (a) 0.898914, (b) 0.903122, (c) 0.904174

13.  $y = 2/(3 - 2x)$

17. (b)  $u = 1/(1 - x)$ ,  $v = \tan(x + \frac{\pi}{4})$ .  $y(x)$  está definida al menos en  $[0, \pi/4)$  y cumple  $1/(\frac{1}{1-x} - x) \leq y(x) \leq \tan(x + \frac{\pi}{4})$  allí.

**Sección 17.4 (página 1074)**

1.  $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$       3.  $y = C_1x + \frac{C_2}{x^2}$

5.  $y = C_1x + C_2xe^x$

**Sección 17.5 (página 1078)**

1.  $y = C_1 + C_2e^t + C_3e^{3t}$

3.  $y = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t + C_3 t \cos t + C_4 t \operatorname{sen} t$

5.  $y = C_1e^{2t} + C_2e^{-t} \cos t + C_3e^{-t} \operatorname{sen} t$

7.  $y = Ax + Bx \ln x$       9.  $y = Ax + \frac{B}{x}$

11.  $y = A + B \ln x$

13.  $y = C_1x + C_2x \ln x + C_3x(\ln x)^2$

**Sección 17.6 (página 1084)**

1.  $y = -\frac{1}{2} + C_1e^x + C_2e^{-2x}$

3.  $y = -\frac{1}{2}e^{-x} + C_1e^x + C_2e^{-2x}$

5.  $y = -\frac{2}{125} - \frac{4x}{25} + \frac{x^2}{5} + C_1e^{-x} \cos(2x) + C_2e^{-x} \operatorname{sen}(2x)$

7.  $y = -\frac{1}{5}xe^{-2x} + C_1e^{-2x} + C_2e^{3x}$

9.  $y = \frac{1}{8}e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) + e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x)$

11.  $y = 2x + x^2 - xe^{-x} + C_1 + C_2e^{-x}$

15.  $y_p = \frac{x^2}{3}$ ,  $y = \frac{x^2}{3} + C_1x + \frac{C_2}{x}$

17.  $y = \frac{1}{2}x \ln x + C_1x + \frac{C_2}{x}$

19.  $y = -x^2 + C_1x + C_2xe^x$

**Sección 17.7 (página 1088)**

1.  $y = a_0 \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{4k}}{4(k!)(3)(7) \cdots (4k-1)} \right) + a_1 \left( x-1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{4k+1}}{4(k!)(5)(9) \cdots (4k+1)} \right)$

3.  $y = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ \frac{2^n n!}{(2n)!} x^{2n} + \frac{1}{2^{n-1} n!} x^{2n+1} \right]$

5.  $y = 1 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \dots$

7.  $y_1 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{(k!)(2)(5)(8) \cdots (3k-1)}$

$$y_2 = x^{1/3} \left( 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{(k!)(4)(7) \cdots (3k+1)} \right)$$

**Ejercicios de repaso (página 1089)**

- 1.  $y = Ce^{x^2}$
- 3.  $y = Ce^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$
- 5.  $x^2 + 2xy - y^2 = C$
- 7.  $y = C_1 - \ln|t + C_2|$
- 9.  $y = e^{x/2}(C_2 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x)$
- 11.  $y = C_1 t \cos(2 \ln|t|) + C_2 t \operatorname{sen}(2 \ln|t|)$
- 13.  $y = \frac{1}{2} e^x + xe^{3x} + C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$
- 15.  $y = x^2 - 4x + 6 + C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$
- 17.  $y = (x^3 - 7)^{1/3}$
- 19.  $y = e^{x^2/2y^2}$
- 21.  $y = 4e^{-t} - 3e^{-2t}$
- 23.  $y = (5t - 4)e^{-5t}$
- 25.  $y = e^{2t} - 2 \operatorname{sen}(2t)$
- 27.  $A = 1, B = -1, x(e^x \operatorname{sen} y + \cos y) = C$
- 29.  $y = C_1 x + C_2 x \cos x$

**Apéndice I**

**Números complejos**

(página 1102)

- 1.  $\Re(z) = -5, \Im(z) = 2$
- 3.  $\Re(z) = 0, \Im(z) = -\pi$
- 5.  $|z| = \sqrt{2}, \theta = 3\pi/4$
- 7.  $|z| = 3, \theta = \pi/2$
- 9.  $|z| = \sqrt{5}, \theta = \tan^{-1} 2$
- 11.  $|z| = 5, \theta = -\pi + \tan^{-1}(4/3)$
- 13.  $|z| = 2, \theta = -\pi/6$
- 15.  $|z| = 3, \theta = 4\pi/5$
- 17.  $11\pi/12$
- 19.  $4 + 3i$
- 21.  $\frac{\pi\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{2}i$
- 23.  $\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$
- 25.  $-3 + 5i$
- 27.  $2 + i$
- 29. disco cerrado, radio 2, centro 0
- 31. disco cerrado, radio 5, centro  $3 - 4i$
- 33. sector plano por debajo de  $y = 0$  y a la izquierda de  $y = -x$
- 35. 4
- 37.  $5 - i$
- 39.  $2 + 11i$
- 41.  $-\frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$

43. 1

47.  $zw = -3 - 3i, \frac{z}{w} = \frac{1+i}{3}$

49. (a) circunferencia  $|z| = \sqrt{2}$ , (b) sin soluciones

51.  $-1, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

53.  $2^{1/6}(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$  donde  $\theta = \pi/4, 11\pi/12, 19\pi/12$

55.  $\pm 2^{1/4} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right), \pm 2^{1/4} \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$

**Apéndice II**

**Funciones complejas**

(página 1113)

- 1.  $0 \leq \Re(w) \leq 1, -2 \leq \Im(w) \leq 0$
- 3.  $1 \leq |w| \leq 4, \pi \leq \arg w \leq \frac{3\pi}{2}$
- 5.  $\frac{1}{2} \leq |w| < \infty, -\frac{\pi}{2} \leq \arg w \leq 0$
- 7.  $\arg(w) = 5\pi/6$
- 9. parábola  $v^2 = 4u + 4$
- 11.  $u \geq 0, v \geq u$
- 13.  $f'(z) = 2z$
- 15.  $f'(z) = -1/z^2$
- 19.  $\frac{d}{dz} \operatorname{senh} z = \cosh z, \frac{d}{dz} \cosh z = \operatorname{senh} z$
- 21.  $z = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$
- 23. ceros de  $\cosh z: z = i \left( \frac{\pi}{2} + k\pi \right) (k \in \mathbb{Z})$   
ceros de  $\operatorname{senh} z: z = k\pi i (k \in \mathbb{Z})$
- 25.  $\Re(\operatorname{senh} z) = \operatorname{senh} x \cos y, \Im(\operatorname{senh} z) = \cosh x \operatorname{sen} y$
- 27.  $z = 0, -2i$
- 29.  $z = -1 \pm 2i$
- 31.  $z = 0, i, 2i$
- 33.  $z = \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}, z = \frac{-1 \pm i}{\sqrt{2}}$   
 $z^4 + 1 = (z^2 + \sqrt{2}z + 1)(z^2 - \sqrt{2}z + 1)$
- 35.  $z = -1, -1, -1, i, -i$

# Índice alfabético

## A

Aceleración, 165, 183, 699  
centrípeta, 700, 709, 731  
componentes polares de, 741  
coriolis, 709  
de una bola que rueda, 938  
normal, 730, 731  
tangencial, 730

Acotado  
conjunto, 831  
función, 1123  
región, 403

Afelio, 744

Álgebra lineal, 673

Algoritmo de División, 47

Amplitud, 244

Ángulo  
complementario, 56  
entre vectores, 649  
sólido, 1050  
suplementario, 56

Anticiclón, 711

Aproximación  
con polinomios de Taylor, 311, 824  
de funciones utilizando series, 615  
de integrales definidas utilizando series, 616  
de integrales impropias, 425  
de pequeños cambios, 159  
gaussiana, 430  
lineal, 301  
mediante plano tangente, 792

Arccos, 231

Arccot, 234

Arccsc, 234

Arco  
suave, 960

Arcsec, 233

Arcsen, 225

Arctan, 229

Área  
de superficie, 540  
de un círculo, 70  
de un sector circular, 54  
de un toro, 459  
de una esfera, 457  
de una región en polares, 556, 908  
de una región plana, 333, 367

de una superficie cónica, 459  
de una superficie de revolución, 456  
en coordenadas polares, 555  
entre dos curvas, 368  
limitada por una curva paramétrica, 541  
limitada por una curva simple cerrada, 1014

Asíntota, 86, 275  
compleja, 1095  
de una hipérbola, 27, 521  
horizontal, 86, 276  
oblícu, 277  
vertical, 275

Asociativa, 675

Astroide, 534

Atan y atan2, 231

Atracción de un disco, 934

Atracción gravitatoria  
de una bola, 985  
de una cáscara esférica, 983

Autoinversa, 197

Autovalor, 581

Autovector, 681

Axioma de completitud, 1118

## B

Base, 200, 643  
local, 1041  
ortonormal, 652

Base estándar, 643, 644  
en el espacio  $n$ -dimensional, 650

Binormal unitaria, 725

Bola  
abierta, 639  
volumen de, 439  
volumen  $n$ -dimensional, 509

Braquistócrona, 532

Bruja de Agnesi, 534

## C

Cables que cuelgan, 646

Cambio de variables  
en una integral doble, 914  
en una integral triple, 924

Cambio porcentual, 159

Cambio relativo, 158

Cambio tan ( $\theta/2$ ), 389



- Campo  
 conservativo, 951  
 de pendientes, 1062  
 de velocidades, 946  
 eléctrico, 1032  
 electrostático, 946  
 escalar, 946  
 gradiente, 946  
 gravitatorio de una masa puntual, 946  
 líneas de, 947  
 magnético, 1032  
 normal unitario, 987  
 vectorial, 946
- Campo conservativo, 951, 1008, 1059  
 condiciones necesarias, 953
- Campo vectorial, 946  
 conservativo, 1007  
 en coordenadas polares, 949  
 irrotacional, 1007  
 solenooidal, 1007  
 suave, 946
- Cardioide, 548
- Cáscara  
 cilíndrica, 441  
 esférica, 460
- Catenaria, 646
- Celsius, 19
- Centroide, 467, 936  
 de un triángulo, 468
- Centro  
 de convergencia, 595  
 de curvatura, 724  
 de gravedad, 936  
 de masa, 463, 935  
 de una circunferencia, 19  
 de una elipse, 518  
 de una hipérbola, 521
- Cero de una función, 294, 871
- Cicloide, 531, 748  
 prolado, 534
- Ciclón, 711
- Cilindro, 436, 670  
 circular recto, 436
- Cinta de Möbius, 988
- Circulación, 966  
 por una curva en movimiento, 1050
- Circunferencia, 19  
 osculante, 724
- Clotoide, 748
- Cociente de diferencias, 114
- Cociente de Newton, 116
- Cociente de números complejos, 1098
- Coefficientes binomiales, 622
- Coefficientes de un polinomio, 47
- Coefficientes indeterminados  
 método de, 1079
- Cola de una serie, 575
- Colatitud, 928
- Combinación lineal, 643
- Complejo conjugado, 1095
- Complemento de un conjunto, 639
- Completar el cuadrado, 386
- Completitud, 1117  
 de los números reales, 3, 567
- Componente  
 de un producto vectorial, 652  
 de un vector, 644  
 radial, 740  
 transversal, 740
- Composición de funciones, 41
- Concavidad, 269  
 de una curva paramétrica, 537
- Condición de Kuhn Tucker, 853
- Cónica, 514  
 clasificación de, 523  
 en coordenadas polares, 551
- Conjugado  
 de un número complejo, 1095  
 eje, 521  
 hipérbola, 521
- Conjunto  
 abierto, 639  
 acotado, 831  
 convexo, 842
- Conmutativa, 675
- Cono circular recto, 514  
 eje, 514  
 semiángulo vertical, 514  
 semiconos, 514  
 vértice, 514
- Cono, 446, 670
- Cono de Mach, 868
- Conservación  
 de la energía, 479, 745  
 de la masa, 1030
- Constante  
 de Hubble, 1050  
 de integración, 176
- Continua  
 extensión, 97  
 función, 95, 1117  
 variable aleatoria, 490
- Continuidad  
 de una función diferenciable, 129  
 en un extremo, 94  
 en un intervalo, 1116

en un punto, 765, 1116  
 en un punto interior, 94  
 por la izquierda y por la derecha, 94  
 uniforme, 1126  
 Contorno, 756  
 Convenio  
   del dominio, 31, 754  
   para los ángulos, 54  
 Convergencia  
   absoluta, 588  
   condicional, 589  
   de integrales impropias, 404  
   de secuencias, 564  
   de series de Fourier, 626  
   de una serie, 571  
   mejora de, 588, 631  
 Coordenadas  
   cartesianas, 11  
   cilíndricas, 924, 1039  
   curvilíneas ortogonales, 1039, 1040  
   de un punto en el espacio tridimensional, 634  
   esféricas, 927, 1039  
   polares, 545  
 Cosecante, 63  
 Coseno, 55  
   director, 651  
 Cosh, 237  
 Cota  
   de una secuencia, 563  
   de series alternantes, 590  
   geométrica para series, 585  
   inferior, 563, 1117  
   superior de una secuencia, 563, 1117  
 Cota de error  
   Regla de Simpson, 423  
   Regla del Punto Medio y del Trapecio, 417  
 Cotangente, 63  
 Crecimiento  
   de exponenciales y logaritmos, 216  
   logístico, 222, 482  
   y decaimiento exponencial, 217  
 Csch, 238  
 Cuadrante, 11  
 Curva, 697, 713  
   cerrada, 714  
   cerrada simple, 714, 968  
   conexa, 101  
   coordenada, 1040  
   de nivel, 756  
   dibujo, 279  
   en trébol, 976  
   equipotencial, 953  
   integral, 947

paramétrica, 527  
 paramétrica pendiente de una, 536  
 paramétrica suave, 535  
 por un tubo, 976  
 que no se corta consigo misma, 714  
 rectificable, 451, 716  
 simple cerrada, 714  
 solución de una ecuación diferencial, 1059  
 suave, 451, 713  
 suave por tramos, 718, 961  
 tractora, 510  
 Curvatura, 721, 723  
   de un campo vectorial, 965

## D

Definida  
   negativa, 681  
   positiva, 681  
 Densidad, 459  
 Dependencia lineal, 676  
 Derivada  
   de funciones trigonométricas, 148  
   de la función valor absoluto, 124  
   de la inversa, 134  
   de orden superior, 165  
   de segundo orden y de órdenes superiores, 165  
   de un cociente, 136  
   de un producto, 132  
   de una función, 120  
   de una función compleja, 138, 1107  
   de una función inversa, 198  
   de una transformación, 796  
   del coseno, 146  
   del seno, 146  
   direccional, 801  
   por la izquierda y por la derecha, 120  
 Derivada parcial  
   igualdad de las mixtas, 775  
   mixta, 774  
   orden superior, 774, 786  
   primer orden, 766  
   pura, 774  
 Desigualdad triangular, 8, 652, 888  
   para la integral definida, 346  
 Desplazamiento, 14, 25  
   de fase, 244  
   temporal, 244  
 Desviación estándar, 488, 492  
 Determinante, 655, 675  
   jacobiano, 815, 912  
   propiedades de, 657  
 Diagonal principal, 677

Diagrama de Argand, 1093  
 Dibujo de gráficas, 279  
 Diferenciable  
     función, 120, 121  
     función de variable compleja, 1107  
     función de varias variables, 792  
     función vectorial, 698  
 Diferenciación, 120  
     de series de potencias, 599  
     gráfica, 120  
     implícita, 169  
     logarítmica, 213  
     mediante una integral, 862  
     siguiendo al movimiento, 805  
 Diferencial, 342  
     de una variable, 127  
     de varias variables, 794  
 Dinámica de fluidos, 1030  
 Dipolo, 957  
     momento de, 958  
 Directriz  
     de una elipse, 519  
     de una parábola, 22, 515  
 Disco  
     abierto, 21, 639  
     cerrado, 21  
 Discontinuidad evitable, 98  
 Discriminante, 241  
     de una ecuación de segundo grado, 50  
 Diseño de pista, 732  
 Distancia  
     desde un punto a un plano, 666  
     desde un punto a una curva, 191  
     desde un punto a una recta, 667  
     desde un punto a una superficie, 772  
     en el espacio  $n$ -dimensional, 638  
     en el espacio tridimensional, 634  
     entre dos rectas, 668  
     entre puntos, 13  
 Distribución, 1000  
     de Dirac, 1002  
     exponencial, 491  
     normal estándar, 494  
     normal general, 496  
     uniforme, 490  
 Divergencia, 996, 1005  
     como densidad de flujo, 1046  
     de una secuencia, 564  
     de una serie, 571  
     en coordenadas cilíndricas, 1046  
     en coordenadas curvilíneas, 1046  
     en coordenadas esféricas, 565  
 División de funciones, 39

Dominio, 754, 968  
     conexo, 968  
     de integración, 889  
     de una función, 29  
     regular, 891, 1017  
     simple en  $x$ , 891, 1017  
     simple en  $y$ , 891, 1017  
     simple en  $z$ , 1017  
     simplemente conexo, 969  
     tipo estrella, 1008  
 Duplicación del tiempo, 219

## E

Ecuación  
     auxiliar, 241, 1075, 1077  
     de Bessel, 1085  
     de continuidad, 1031  
     de difusión, 780  
     de Euler, 1077  
     de Laplace en coordenadas esféricas, 828  
     de Laplace en coordenadas polares, 777, 788  
     de movimiento de un fluido, 1032  
     de segundo grado, 293  
     de un plano, 662  
     de una circunferencia, 19  
     del calor, 780, 1038  
     equidimensional, 1077  
     indicial, 1081  
     lineal, 293, 678, 691  
     logística, 222  
     punto-pendiente, 16  
     separable, 499, 1057  
 Ecuación diferencial, 178  
     de Euler, 1077  
     de segundo orden, 1071  
     del crecimiento logístico, 222  
     del crecimiento o decaimiento exponencial, 218  
     del movimiento armónico simple, 166, 243  
     diferencial exacta, 1059  
     en derivadas parciales, 764, 777, 1054  
     equidimensional, 1077  
     exacta, 1059  
     homogénea, 1058  
     lineal, 240, 1054  
     lineal de coeficientes constantes, 240, 1075  
     lineal de primer orden, 503, 1061  
     lineal de segundo orden, 1073  
     lineal homogénea, 1055  
     lineal no homogénea, 1055, 1079  
     orden de, 179  
     ordinaria (EDO), 1054  
     reducible, 1071

- separable, 499, 1058
  - solución general, 178
  - solución mediante series, 1085
  - solución particular, 179
  - Ecuaciones
    - de Cauchy-Riemann, 779, 1108
    - de Maxwell, 1037
    - paramétricas de, 528
    - paramétricas de una recta, 527, 528, 665
  - ED
    - con coeficientes constantes, 1075
    - lineal de primer orden, 503
  - Efecto Coriolis, 712
  - Eje
    - coordenado de una elipse, 11, 26
    - de un dipolo, 954
    - de una parábola, 22, 515
    - imaginario, 1093
    - mayor, 26, 518
    - menor, 26, 518
    - polar, 545
    - real, 1093
    - semiconjugado, 521
    - transversal, 521
  - Elasticidad, 163
  - Electrostática, 1032
  - Elemento
    - de área, 368
    - de área de superficie, 933
    - de área de una superficie de revolución, 456
    - de área en coordenadas polares, 906
    - de área para coordenadas transformadas, 918
    - de área sobre una superficie, 456, 979
    - de área sobre una superficie coordenada, 1043
    - de longitud de arco, 451, 539, 557, 717
    - de masa, 460, 932
    - de momento, 462
    - de trabajo, 965
    - de volumen, 438, 1043, 1044
    - de volumen en coordenadas cilíndricas, 925
    - de volumen en coordenadas esféricas, 928
    - diferencial, 438
  - Elevación, 14
  - Elipse, 26, 517
    - circunferencia de, 455
    - en coordenadas polares, 738
  - Elipsoide, 671
    - aproximación al área de superficie, 510
    - volumen de, 450
  - Energía
    - cinética, 478, 938
    - conservación de, 479
    - potencial, 478, 939
  - Entero, 3, 1091
  - Envolvente, 191, 865
  - Epicicloide, 535
  - Error en aproximación lineal, 303
  - Escalado, 24
  - Escalar
    - campo, 946
    - multiplicación, 642
    - potencial, 951
    - producto, 648
    - producto triple, 658
    - proyección, 649
  - Esfera, 670
    - área de, 457
  - Esferoide, 459, 986
    - oblado, 459, 986
    - prolado, 459, 986
  - Espacio
    - euclídeo  $n$ -dimensional, 509, 638
    - muestral, 485
  - Esperanza, 488, 492
  - Estabilidad de un objeto flotante, 573
  - Estereoradian, 1050
  - Evoluta, 731
  - Excentricidad de una elipse, 518
  - Exponencial general, 211
  - Exponente, 200
    - leyes, 201
  - Extensión de una función, 96
  - Extrapolación de Richardson, 427
  - Extremo, 4, 94
- F**
- Factor de integración, 1060
  - Factores de escala, 1041
  - Factorial, 166
  - Fahrenheit, 19
  - Fase
    - de un número complejo, 1093
    - principal, 1094
  - Figura de Lisajous, 538
  - Fluido incompresible, 1031
  - Flujo, 988
    - a través de una superficie en movimiento, 1051
  - Foco
    - de una elipse, 519
    - de una hipérbola, 520
    - de una parábola, 22, 515
  - Folio de Descartes, 534
  - Forma cuadrática, 681
    - definida, 681
    - indefinida, 681

## 1190 ÍNDICE ALFABÉTICO

- Forma indeterminada, 315
  - cálculo de límites utilizando series, 617
- Fórmula
  - de la ecuación de segundo grado, 111
  - de reducción, 380
  - de Stirling, 615
  - de Taylor, 309
  - de Taylor aproximación de integrales con, 425
  - de Taylor aproximación mediante funciones implícitas, 824
- Fórmulas
  - de Frenet-Serret, 727
  - de suma, 60, 330
  - del ángulo doble, 61
  - del ángulo mitad, 61
- Fourier
  - coeficientes, 624
  - convergencia de la serie, 626
  - serie de, 624, 859, 860
  - serie de cosenos, 628, 860
  - serie de senos, 628, 860
- Fraciones simples
  - descomposición en, 393, 397
  - método de descomposición en, 393
- Frecuencia circular, 245
- Frontera, 4
  - de una superficie paramétrica, 974
- Fuente, 957
- Fuerza
  - central, 741
  - centrífuga, 710
  - conservativa, 479
  - de coriolis, 710
  - sobre una presa, 475
- Función, 29
  - acotada, 1123
  - algebraica, 193
  - analítica, 607, 708, 1107
  - arccos, inversa del coseno, 231
  - arccot, inversa de la cotangente, 234
  - arcsc, inversa de la cosecante, 234
  - arcsec, inversa de la secante, 233
  - arcsin, 225
  - arctan, 229
  - armónica, 778, 1109
  - atan y atan2, 231
  - autoinversa, 197
  - beta, 917
  - biarmónica, 780
  - compleja, 1105, 1106
  - compleja derivada de, 1107
  - compleja diferenciable, 1107
  - compleja exponencial, 1109
  - complementaria, 1079
  - composición, 41
  - compuesta, 41
  - cóncava o convexa, 269
  - continua, 94, 95, 1117
  - continua por la derecha, 94, 95
  - continua por la izquierda, 94, 95
  - continua por tramos integral definida de, 349
  - convenio del dominio, 31
  - cosecante, 63
  - coseno, 55
  - cosh, 235
  - cosh, coseno hiperbólico, 235
  - cotangente, 63
  - creciente y decreciente, 154
  - de distribución acumulada, 495
  - de error, 917
  - de Heaviside, 43, 94
  - de un espacio  $n$ -dimensional en un espacio  $m$ -dimensional, 796
  - de varias variables, 754
  - decreciente, 154
  - definida por tramos, 43
  - delta, 1002
  - delta de Dirac, 1002
  - densidad de probabilidad, 490
  - discontinua, 94
  - exponencial, 200, 209
  - exponencial compleja, 1110
  - exponencial general, 211
  - exponencial tasa de crecimiento, 216
  - gamma, 411, 917
  - generalizada, 1001
  - gráfica de, 32, 754
  - hiperbólica, 235, 237
  - hiperbólica inversa, 238
  - identidad, 195, 196
  - impar, 35
  - implícita, 811
  - integrable, 341, 342, 887, 977, 1125
  - inversa, 195
  - lagrangiana, 846
  - lineal, 842
  - logaritmo natural, 205
  - máximo entero menor, 45, 93
  - mínimo entero mayor, 45
  - no decreciente, 154
  - objetivo, 843, 848
  - par, 35
  - periódica, 56, 623
  - positivamente homogénea, 786
  - potencial, 200
  - probabilidad, 486

racional, 47, 278, 391  
 raíz cuadrada, 31  
 secante, 63  
 senh, 235  
 senh, seno hiperbólico, 235  
 seno, 55  
 seno inverso, 225  
 signo, 43, 44  
 tangente, 63  
 tangente inversa, 229  
 trascendente, 193  
 trigonométrica, 53, 63  
 trigonométrica primaria, 63  
 trigonométrica secundaria, 63  
 uniformemente continua, 1126  
 uno a uno, 194  
 vectorial, 698

## G

Grad, 997  
 Gradiente, 799, 996, 1005  
   en coordenadas cilíndricas, 1045  
   en coordenadas curvilíneas, 1045  
   en coordenadas esféricas, 1046  
   en dimensiones superiores, 806  
   propiedades geométricas, 803  
 Grado de un polinomio, 47, 391  
 Gráfica  
   de una función, 32, 754, 758  
   desplazamiento, 25  
   en polares de una función, 547  
   escalado, 24

## H

Haz de planos, 664  
 Hélice, 717, 726  
   circular, 717, 726  
 Hipérbola, 27, 520  
   conjugada, 521  
   rectangular, 27, 521  
 Hiperboloide, 672  
 Hipercicloide, 534, 535  
 Hipersuperficie, 754, 758  
 Hipocicloide, 535  
 Homogénea  
   ecuación diferencial, 240, 1055, 1058  
   función, 786

## I

Identidad  
   de cancelación, 195  
   de Pitágoras, 56

Inclinación de una recta, 15  
 Incremento, 12  
 Independencia  
   de la parametrización, 962  
   del camino, 969  
 Índice de suma, 328  
 Inducción matemática, 131  
 Inercia  
   momento de, 801  
 Infinito, 87  
 Integración  
   de Romberg, 427  
   de series de potencias, 599  
   límites de, 342  
   mediante tablas, 401  
   numérica, 412  
   numérica aproximación gaussiana, 430  
   numérica método de Romberg, 427  
   numérica por la regla de Simpson, 422  
   numérica por la regla del punto medio, 415  
   numérica por la regla del trapecio, 413  
   por partes, 376  
 Integral  
   cálculo con Maple, 399  
   cotas para series, 579  
   curvas, 947  
   de Riemann, 1125  
   de superficie, 977  
   definida, 341, 342  
   doble, 885, 886  
   doble propiedades de, 888  
   doble sobre un dominio acotado, 887  
   ecuación, 357, 501, 865  
   elíptica, 456, 965  
   elíptica completa, 456  
   en volúmenes en movimiento, 1051  
   función, 1059  
   impropia, 899  
   impropia convergente, 404  
   impropia divergente, 404  
   impropia doble, 887  
   impropia tipo I, 404  
   impropia tipo II, 405  
   indefinida, 176  
   iterada, 893  
    $p$ , 408  
   por una curva, 960  
   propia, 403  
   resto, 613  
   signo, 176, 342  
   sobre una curva, 960  
   superficie, 977  
   test, 577

triple, 917  
 Integrando, 342  
 Interés, 220  
     compuesto, 220  
     tasas efectiva y nominal, 222  
 Intersección de intervalos, 6  
 Intervalo, 4  
     abierto o cerrado, 4  
     de convergencia, 596  
     semiabierto, 4  
 Inversa  
     cambio por el seno, 383  
     cambio por la secante, 385  
     cambio por la tangente, 384  
     cosecante, 234  
     coseno, 232  
     cotangente, 234  
     función, 194, 196  
     función hiperbólica, 238  
     matriz, 677  
     secante, 233  
     seno, 225  
     tangente, 229  
 Inverso de un número complejo, 1099  
 Involuta de una circunferencia, 532  
 Irracionalidad  
     de  $e$ , 631  
     de  $\pi$ , 631  
 Iteración  
     de Picard, 1064  
     de una integral doble, 892  
     en coordenadas polares, 906

## K

Kepler, 737

## L

Latus rectum, 526  
 Lemniscata, 550  
 Ley circuital de Ampère, 1035  
 Ley de Biot-Savart, 1034  
 Ley de Coulomb, 1032  
 Ley de enfriamiento de Newton, 219  
 Ley de Gauss, 1037  
 Ley de Hooke, 244, 476  
 Ley de Poiseuille, 164  
 Ley de Snell, 292  
 Ley de Torricelli, 325  
 Leyes de Kepler, 737  
 Límite, 73  
     complejo, 1106

de integración, 342  
 de suma, 328  
 de una función compleja, 1106  
 de una función de dos variables, 762  
 de una secuencia, 564, 1118  
 definición formal, 106, 1115  
 definición informal, 78  
 en el infinito, 86, 108  
 infinito, 89, 109  
 por la derecha y por la izquierda, 80, 108  
 reglas para el cálculo, 82  
 unilateral, 80

## Línea

de corriente, 947  
 de flujo, 947  
 de fuerza, 947

## Linealización, 301

en varias variables, 792

## Logaritmo, 202

general, 211  
 leyes, 203  
 natural, propiedades, 205, 207  
 velocidad de crecimiento, 216

## Longitud, 928,

una curva, 716  
 de un vector, 641

## Longitud de arco, 451

de una circunferencia, 54  
 de una curva coordenada, 1043  
 de una curva en polares, 557  
 de una curva paramétrica, 539

## M

Magnetostática, 1034

Mapa topográfico, 756

Maple, 1129

cálculo de derivadas con, 141  
 cálculo de integrales, 399  
 cálculos de la regla de la cadena, 788  
 derivadas parciales en, 775  
 fsolve, 875  
 funciones gráficas, 37  
 funciones trigonométricas, 64  
 gradiente, 808  
 gráficas tridimensionales, 759  
 integrales iteradas, 897  
 lista de temas, 1130  
 manejo de matrices, 689  
 matriz jacobiana, 798  
 paquete LinearAlgebra, 683  
 paquete VectorCalculus, 688  
 polinomios de Taylor, 824

solución de EDs y PVI, 1084  
 solución de sistemas lineales, 691  
 uso de diferenciación implícita, 173  
 vectores, 684  
**Marginal**, 162  
**Masa**, 459  
**Matriz**, 674  
   hessiana, 834  
   identidad, 677  
   inversa, 677  
   invertible, 676  
   jacobiana, 796  
   multiplicación, 674  
   representación, 678  
   simétrica, 674  
   simétrica de cálculo de raíces con Maple, 875  
   simétrica de ecuaciones, 813  
   singular, 676  
**Máxima cota inferior**, 1117  
**Máximo**, 260  
   absoluto, 98, 260, 830  
   global, 830  
   local, 261, 830  
   relativo, 830  
**Media**, 492, 855  
   de una variable aleatoria, 488  
**Método**  
   de descomposición en fracciones simples, 393  
   de Euler, 1065  
   de Euler mejorado, 1068  
   de la bisección, 102  
   de los mínimos cuadrados, 855  
   de los multiplicadores de Lagrange, 848  
   de mínimos cuadrados, 855  
   de Runge-Kutta, 1069  
   de sustitución, 360  
   numérico para resolver EDs, 1065  
**Método de Newton**, 294  
   fórmula de, 295  
   límites de error, 297  
   para sistemas, 871  
   uso de una hoja de cálculo, 873  
**Mínima cota superior**, 1117  
**Mínimo**, 260  
   absoluto, 98, 260, 830  
   global, 830  
   local, 261, 830  
   relativo, 830  
**Módulo**, 7  
   de un número complejo, 1094  
   de un vector, 641  
**Momento**, 467, 705, 935  
   angular, 707

  de inercia, 938  
   elemento, 463  
**Movimiento armónico amortiguado**, 246  
**Movimiento armónico simple**, 166, 243  
   ecuación diferencial del, 244  
**Movimiento planetario**, 737  
**Multiplicación**  
   de funciones, 40  
   de matrices, 674  
   de vectores por escalares, 642  
**Multiplicador de Lagrange**, 848  
**Multiplicidad de una raíz**, 49  
**Mutuamente perpendiculares**, 634

## N

**Nabla**, 997  
**No homogénea**  
   ecuación diferencial, 1079  
   ecuación diferencial lineal, 1054  
**Norma de una partición**, 339  
**Normal**  
   principal unitaria, 722  
   recta, 118, 770  
   unitaria, 722  
   vector, 662, 770  
   vector normal a una superficie, 933, 978  
   vector unitario, 722  
**Notación**  
   de Leibniz, 126  
    $O$ , 312  
   sigma, 328  
**Número**  
   complejo, 1092  
   de vueltas, 974  
   natural, 3, 1091, 1092  
   racional, 3, 1091  
   real, 2, 1091, 1092  
   real, completitud, 3  
   trascendente, 209

## O

**Octante**, 635  
**Onda**  
   ecuación de, 778  
   expansión esférica, 858  
**Operador**  
   diferencial, 1056  
   Laplaciana, 1005  
**Orden de una ecuación diferencial**, 178, 1054  
**Ordenada y abscisa en el origen**, 17



Orientación inducida, 987  
 Origen de coordenadas, 11, 634

**P**

Parábola, 22, 515  
 Paraboloide, 671  
 Paralelepípedo, 658  
 Parametrización, 530  
     de la intersección de dos superficies, 963  
     de una curva, 715  
     intrínseca, 718  
     longitud de arco, 718

Parámetro, 527

Parte

    imaginaria, 1092  
     real, 1092

Partición, 339, 884, 1124

Pendiente

    campo de, 1067  
     de una curva, 118  
     de una curva en polares, 554  
     de una curva paramétrica, 536

Peralte de una curva, 731

Perihelio, 744

Periodo, 244

    fundamental, 623

Perturbación, 869

Pirámide, 446

Plano

    cartesiano, 11  
     complejo, 1093  
     coordenado, 635  
     curva plana, 530  
     ecuación de, 662  
     en el espacio tridimensional, 662  
     osculante, 724  
     tangente, 770  
     tangente, aproximación mediante, 791  
     tangente, ecuación de, 771

Polígono, 334

Polinomio, 47, 391

    complejo, 1111  
     de Maclaurin, 307  
     de Taylor, 307  
     de Taylor en varias variables, 822  
     trigonométrico, 859

Polo, 545

Potencial

    de un campo conservativo, 951  
     energía, 478, 939  
     vector, 1007

Presión, 474

Primitiva, 175

Principio

    de Arquímedes, 1037  
     de Cavalieri, 450  
     de Pascal, 474

Prisma, 436

Probabilidad, 485

    función, 486  
     función densidad de, 490

Problema

    de áreas básico, 334  
     de Dirichlet, 1024  
     de la aguja de Bouffon, 510  
     de Neumann, 1024  
     de Steiner, 881  
     de valor inicial, 179  
     estándar de volumen, 884  
     max-min, 284

Producto

    de Cauchy, 598  
     de inercia, 941  
     de números complejos, 1097  
     de Wallis, 382  
     escalar, 648  
     escalar de vectores, 649  
     triple escalar, 657  
     triple vectorial, 662  
     vectorial, 653  
     vectorial como un determinante, 657  
     vectorial propiedades de, 654

Programación

    lineal, 842  
     no lineal, 852

Promedio, 855

Propiedad del valor medio, 100

    de una derivada, 127

Propiedad focal

    de una elipse, 519  
     de una hipérbola, 522  
     de una parábola, 517

Propiedad última de una secuencia, 564

Proximidades, 639

Proyección de un vector, 649

Proyectil, 700

Punto

    aislado, 762  
     crítico, 156, 160, 831  
     de ensilladura, 832  
     de inflexión, 269  
     exterior, 640  
     fijo, 297  
     fijo, método de la iteración, 296  
     fijo, teorema, 299

frontera, 639, 831  
 interior, 94, 640  
 ordinario de una ED lineal, 1085  
 singular, 120, 831  
 singular de una ED, 1077, 1087  
 singular regular, 1087

## R

Radian, 53

Radio

de convergencia, 596  
 de curvatura, 722  
 de giro, 938  
 de una circunferencia, 19

Raíz

cuadrada principal, 1100  
 de un polinomio, 48  
 de una ecuación, 101, 294  
 $n$ -ésima de un número complejo, 1101  
 principal  $n$ -ésima, 1101  
 test para series, 585

Ramas de una hipérbola, 27

Rango de una función, 29, 754

Razón común, 571

Recta, 14

de regresión empírica, 857  
 ecuación ordenada en el origen, 17  
 ecuación ordenada y abscisa en el origen, 19  
 ecuación punto-pendiente, 16  
 ecuaciones paramétricas de la, 528  
 en el espacio tridimensional, 664  
 normal, 770  
 secante, 74, 114  
 tangente, 74  
 tangente a una curva paramétrica, 537  
 tangente aproximación mediante, 301  
 tangente no vertical, 115  
 tangente vertical, 117

Refinamiento de una partición, 341, 1124

Reflexión

por una elipse, 519  
 por una hipérbola, 522  
 por una recta, 36, 516  
 por una parábola, 23, 517

Regla CPST, 63

Regla de Cramer, 680

Regla de la cadena, 139, 780

como multiplicación de matrices, 797  
 demostración de, 142  
 demostración para varias variables, 794

Regla de la inversa, 134

Regla de la raíz cuadrada, 138

Regla de Leibniz, 622

Regla de Simpson, 422

Regla del cociente, 136

Regla del producto, 132

Regla del punto medio, 415

estimación del error, 417

Regla del Trapecio, 412

estimación del error, 417

Regla general de la potencia, 123, 174

Reglas de diferenciación, 129

para funciones vectoriales, 702

Reglas de l'Hôpital, 317

Reglas para inecuaciones, 2

Regresión, 857

lineal, 851

recta de, 857

Relación de recurrencia, 1086, 1087

Reordenación de una serie, 592

Representación

de una función mediante una serie, 605  
 polar de un número complejo, 1095

Resonancia, 1082

Resta de funciones, 39

Resto de Lagrange, 309, 613

Restricción, 837

ecuación, 845

inecuación, 845

lineal, 842

Rodajas, 436

cálculo volúmenes mediante, 446

Rotacional, 996, 1005

como densidad de circulación, 1003

en coordenadas cilíndricas, 1047

en coordenadas curvilíneas, 1047

en coordenadas esféricas, 1048

Rutinas «Solve», 299

## S

Salida y puesta de sol, 712

Sector de un círculo, 54

Secuencia, 562

acotada, 563

alternante, 563

convergente, 564

creciente, 563

de Fibonacci, 562

de sumas parciales, 571

decreciente, 563

divergente, 565

infinita, 562

monótona, 563

Sech, 237

- Segunda derivada, 165
  - Semiconos, 514
  - Semidefinida
    - positiva o negativa, 681
  - Semieje
    - mayor, 518
    - menor, 518
    - transversal, 521
  - Semi-latus rectum, 526
  - Semivida, 219
  - Seno, 55
  - Sensibilidad, 161
  - Separación semifocal
    - de una elipse, 517
    - de una hipérbola, 521
  - Serie, 570
    - armónica, 573
    - asintótica, 632
    - binomial, 620
    - de Fourier, 624, 859
    - de Maclaurin, 600, 606
    - de potencias, 594
    - de Taylor, 606
    - geométrica, 571
    - infinita, 329, 570
    - $p$ , 578
    - positiva, 577
    - representación de una función, 605
    - soluciones de una ED, 1085
    - telescópica, 573, 574
  - Serie de potencias, 594
    - continuidad de, 601
    - diferenciación de, 599
    - integración de, 599
    - operaciones sobre, 597
  - Serie de Taylor, 606
    - en varias variables, 822
  - Símbolo de evaluación, 125, 353
  - Sistema
    - de coordenadas cartesianas, 634
    - de coordenadas en rotación, 708
    - de referencia de Frenet, 725
    - de referencia en rotación, 708
  - Software gráfico MG, 756
  - Solución
    - de una ecuación diferencial, 178
    - general de una ED, 178
    - particular de una ED, 179, 1079
  - Spline, 509
  - Suave
    - arco, 960
    - curva, 117, 451, 713
    - curva paramétrica, 535
    - superficie, 977
  - Subespacio, 677
  - Suma
    - de funciones, 39
    - de una serie, 571
    - de vectores, 641
    - parcial de una serie, 570
    - por partes, 631
  - Suma de Riemann, 340, 1123
    - general, 343
    - inferior y superior, 340, 1124
    - para una integral doble, 885
  - Sumidero, 957
  - Superficie, 754
    - cerrada, 972, 975
    - compuesta, 976
    - coordenada, 1040
    - cuadrática, 670
    - de nivel, 758
    - de revolución, 456
    - elemento de área, 456, 933
    - equipotencial, 953
    - graduada, 672
    - orientable, 987
    - orientada, 987
    - paramétrica, 974
    - paramétrica frontera de, 975
    - suave, 977
    - vector elemento de área, 988
  - Sustitución
    - en una integral definida, 361
    - método de, 360
- ## T
- Tangente
    - cambio, 63
    - doble, 374
    - vector unitario, 720
    - vertical, 117
  - Tanh, 237
  - Tasa
    - de descuento, 481
    - relacionada, 253
  - Tautócrona, 532
  - Teorema binomial, 619, 622
  - Teorema de Abel, 601
  - Teorema de de Moivre, 1099
  - Teorema de Euler, 786
  - Teorema de existencia, 103
  - Teorema de Gauss, 1017
  - Teorema de Hamilton, 743
  - Teorema de la acotación, 1119
  - Teorema de la Divergencia, 1000, 1017
    - en el plano, 1016
    - variantes de, 1022
  - Teorema de la función implícita, 172, 679, 816

Teorema de Pappus, 471  
 Teorema de Rolle, 156  
 Teorema de Stokes, 1024  
 Teorema de Taylor, 309  
     resto de Lagrange, 309, 613  
     resto integral, 613  
 Teorema del coseno, 64  
 Teorema del Sándwich, 83  
 Teorema del seno, 66  
 Teorema del Valor Medio, 103, 152, 793, 1120  
     generalizado, 158  
     para integrales, 348  
     para integrales dobles, 903  
 Teorema Fundamental de los Espacios Curvos, 727  
 Teorema Fundamental del Álgebra, 1111  
 Teorema Fundamental del Cálculo, 352  
 Teorema max-min, 98, 1120  
 Test de comparación  
     forma límite, 582  
     para integrales impropias, 408  
     para series, 580  
 Test de la primera derivada, 263  
 Test de la razón, 583, 631  
 Test de la segunda derivada, 272, 834  
 Test de series alternantes, 589  
 Tetraedro, 661  
 Topología, 639  
 Toro, 442  
 Torque, 707  
 Torsión, 725  
 Trabajo, 476, 965  
     elemento de, 965  
 Transformación, 796, 924  
     de coordenadas en el plano, 911  
     inversa, 911  
     lineal, 678  
 Trapecio, 413  
 Traspuesta, 674  
 Trayectoria ortogonal, 954  
 Trigonometría, 65

## U

Unidad imaginaria, 1092  
 Unión, 6  
 Universo en expansión, 1050

## V

Valor absoluto, 7  
 Valor extremo, 260  
     problema, 285  
     problema con restricciones, 837  
 Valor medio de una función, 349, 904  
 Valor presente, 481

## Variable

aleatoria continua, 486, 490  
 aleatoria discreta, 486  
 auxiliar, 342  
 de integración, 342  
 de una función, 29  
     dependiente, 29  
     independiente, 29  
 Variación de parámetros  
     método de, 1082  
 Varianza, 488, 492  
 Vector, 641  
     cálculos con Maple, 683  
     cero, 642  
     columna, 674  
     de posición, 642, 698  
     director, 665  
     elemento de área, 988  
     en el espacio  $n$ -dimensional, 650  
     fila o columna, 674  
     identidades diferenciales, 1006  
     normal, 770  
     posición, 642  
     potencial, 1007  
     producto escalar, 648  
     producto triple, 662  
     producto vectorial, 653  
     proyección, 649  
     suma, 642  
     tangente unitario, 720  
     velocidad angular, 706  
 Velocidad, 165, 182, 187, 698  
     angular, 706, 938  
     campo de, 948  
     componentes en polares de, 740  
     de cambio, 160  
     de cambio instantánea, 160  
     de cambio media, 160  
     de cambio vista por un observador en movimiento, 805  
     de escape, 479  
     instantánea, 72  
     instantánea de cambio, 160  
     media, 72, 182, 698  
     media de cambio, 160  
 Vértice, 117  
     de una hipérbola, 521  
     de una parábola, 22, 515  
 Volumen  
     de un cono, 439  
     de un cono general, 1020  
     de un elipsoide, 450  
     de un toro, 442  
     de una bola, 439  
     elemento de, 438  
     mediante secciones, 436, 446



## DIFERENCIACIÓN DE LAS NORMAS

---

$$\frac{d}{dx} (f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$$

$$\frac{d}{dx} (cf(x)) = cf'(x)$$

$$\frac{d}{dx} (f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{f(x)} \right) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

## DERIVADAS PRIMARIAS

---

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{d}{dx} x^r = rx^{r-1}$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a \quad (a > 0)$$

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sen} x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\operatorname{sen} x$$

$$\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sen}^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx} |x| = \operatorname{sgn} x = \frac{x}{|x|}$$

## IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

---

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

$$\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x$$

$$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x$$

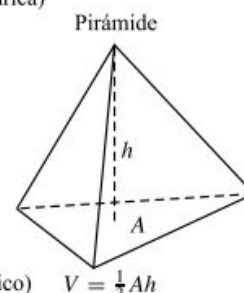
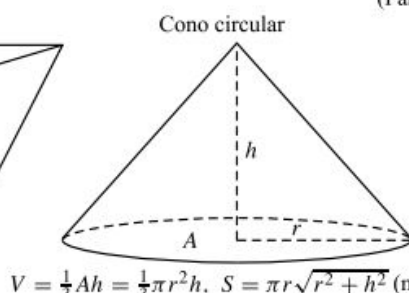
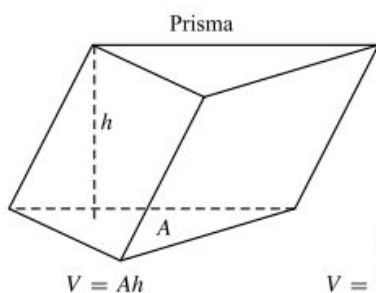
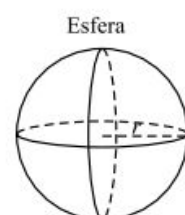
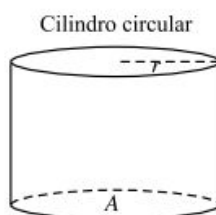
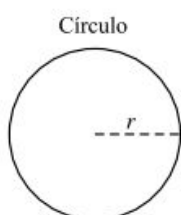
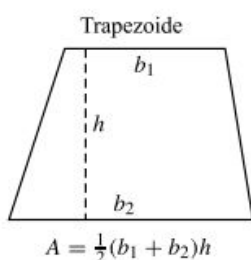
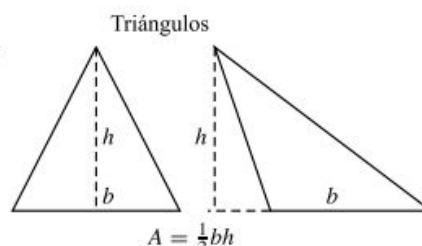
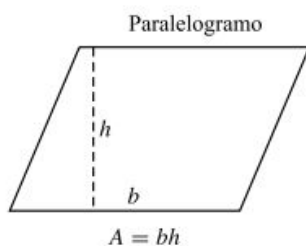
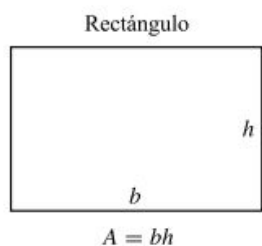
## FÓRMULA CUADRÁTICA

---

$$\text{Si } Ax^2 + Bx + C = 0, \text{ siendo } x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

## FÓRMULAS GEOMÉTRICAS

$A$  = área,  
 $b$  = base,  
 $h$  = altura,  
 $C$  = circunferencia,  
 $V$  = volumen,  
 $S$  = superficie



## IDENTIDAD DE VECTORES

Si  $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$  siendo (producto escalar)  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$

$\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$   
 $\mathbf{w} = w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k}$

(producto vectorial)  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}$

longitud de  $\mathbf{u} = |\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$  ángulo entre  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v} = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}\right)$

identidades de productos triples

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \quad \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$$

## IDENTIDADES CON GRADIENTE, DIVERGENCIA, ROT Y LAPLACIANA

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \text{ (operador «del» o «nabla»)}$$

$$\nabla \phi(x, y, z) = \mathbf{grad} \phi(x, y, z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\mathbf{k}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{div} \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{rot} \mathbf{F}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$$

$$\nabla \cdot (\phi\mathbf{F}) = (\nabla\phi) \cdot \mathbf{F} + \phi(\nabla \cdot \mathbf{F})$$

$$\nabla \times (\phi\mathbf{F}) = (\nabla\phi) \times \mathbf{F} + \phi(\nabla \times \mathbf{F})$$

$$\nabla \times (\nabla\phi) = \mathbf{0} \quad (\text{rot grad} = \mathbf{0})$$

$$\nabla^2\phi(x, y, z) = \nabla \cdot \nabla\phi(x, y, z) = \text{div grad } \phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G})$$

$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F}(\nabla \cdot \mathbf{G}) - \mathbf{G}(\nabla \cdot \mathbf{F}) - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F}$$

$$\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) + (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0 \quad (\text{div rot} = 0)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2\mathbf{F} \quad (\text{rot rot} = \text{grad div} - \text{laplaciana})$$

## VERSIONES DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a) \quad (\text{Teorema Fundamental de una dimensión})$$

$$\int_C \text{grad } \phi \cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{r}(b)) - \phi(\mathbf{r}(a)) \quad \text{si } C \text{ es la curva } \mathbf{r} = \mathbf{r}(t), (a \leq t \leq b).$$

$$\iint_R \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy \quad \text{siendo } C \text{ la frontera orientada positivamente de } R \quad (\text{Teorema de Green})$$

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C F_1^1(x, y, z) dx + F_2(x, y, z) dy + F_3(x, y, z) dz \quad \text{siendo } C \text{ la frontera orientada de } S \quad (\text{Teorema de Stoke})$$

Versiones tridimensionales:  $S$  es la frontera cerrada de  $D$ , con normal hacia afuera  $\hat{\mathbf{N}}$

$$\iiint_D \text{div } \mathbf{F} dV = \oint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS \quad \text{Teorema de la Divergencia} \quad \iiint_D \text{rot } \mathbf{F} dV = - \oint_S \mathbf{F} \times \hat{\mathbf{N}} dS$$

$$\iiint_D \text{grad } \phi dV = \oint_S \phi \hat{\mathbf{N}} dS$$

## FÓRMULAS RELATIVAS A CURVAS EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL

Curva:  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$

Vector velocidad:  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v\hat{\mathbf{T}}$

Velocidad:  $v = |\mathbf{v}| = \frac{ds}{dt}$

Longitud de arco:  $s = \int_{t_0}^t v dt$

Aceleración:  $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$

Componentes tangencial y normal:  $\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\hat{\mathbf{T}} + v^2\kappa\hat{\mathbf{N}}$

Tangente unitaria:  $\hat{\mathbf{T}} = \frac{\mathbf{v}}{v}$

Binormal:  $\hat{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{a}}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}$

Normal:  $\hat{\mathbf{N}} = \hat{\mathbf{B}} \times \hat{\mathbf{T}} = \frac{d\hat{\mathbf{T}}/dt}{|d\hat{\mathbf{T}}/dt|}$

Curvatura:  $\kappa = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{v^3}$

Radio de curvatura:  $\rho = \frac{1}{\kappa}$

Torsión:  $\tau = \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \cdot (d\mathbf{a}/dt)}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|^2}$

Fórmulas de Frente-Serret:  $\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} = \kappa\hat{\mathbf{N}}, \quad \frac{d\hat{\mathbf{N}}}{ds} = -\kappa\hat{\mathbf{T}} + \tau\hat{\mathbf{B}}, \quad \frac{d\hat{\mathbf{B}}}{ds} = -\tau\hat{\mathbf{N}}$

## COORDENADAS CURVILÍNEAS ORTOGONALES

transformación:  $x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w)$

vector de posición:  $\mathbf{r} = x(u, v, w)\mathbf{i} + y(u, v, w)\mathbf{j} + z(u, v, w)\mathbf{k}$

factores de escala:  $h_u = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right|, h_v = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|, h_w = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \right|$

base local:  $\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{h_u} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{h_v} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \hat{\mathbf{w}} = \frac{1}{h_w} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}$

elemento de volumen:  $dV = h_u h_v h_w du dv dw$

campo vectorial:  $\mathbf{F}(u, v, w) = F_u(u, v, w)\hat{\mathbf{u}} + F_v(u, v, w)\hat{\mathbf{v}} + F_w(u, v, w)\hat{\mathbf{w}}$

gradiente:  $\nabla f = \frac{1}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u} \hat{\mathbf{u}} + \frac{1}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v} \hat{\mathbf{v}} + \frac{1}{h_w} \frac{\partial f}{\partial w} \hat{\mathbf{w}}$

divergencia:  $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[ \frac{\partial}{\partial u} (h_u h_v F_u) + \frac{\partial}{\partial v} (h_u h_w F_v) + \frac{\partial}{\partial w} (h_u h_v F_w) \right]$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{h_u h_w}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{h_u h_w}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{h_u h_v}{h_w} \frac{\partial f}{\partial w} \right) \right]$$

$$\text{rot: } \nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \begin{vmatrix} h_u \hat{\mathbf{u}} & h_v \hat{\mathbf{v}} & h_w \hat{\mathbf{w}} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ F_u h_u & F_v h_v & F_w h_w \end{vmatrix}$$



## COORDENADAS POLARES DEL PLANO

transformación:  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$

factores de escala:  $h_r = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \right| = 1$ ,  $h_\theta = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right| = r$

elemento del área:  $dA = r dr d\theta$

campo escalar:  $f(r, \theta)$

gradiente:  $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}}$

laplaciana:  $\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$

vector de posición:  $\mathbf{r} = r \cos \theta \mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j}$

base local:  $\hat{\mathbf{r}} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}$

campo vectorial:  $\mathbf{F}(r, \theta) = F_r(r, \theta) \hat{\mathbf{r}} + F_\theta(r, \theta) \hat{\boldsymbol{\theta}}$

divergencia:  $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{1}{r} F_r + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}$

rot:  $\nabla \times \mathbf{F} = \left[ \frac{\partial F_\theta}{\partial r} + \frac{F_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{k}$

## COORDENADAS CILÍNDRICAS

transformación:  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ,  $z = z$

factores de escala:  $h_r = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \right| = 1$ ,  $h_\theta = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right| = r$ ,  $h_z = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \right| = 1$

elemento de volumen:  $dV = r dr d\theta dz$

campo escalar:  $f(r, \theta, z)$

gradiente:  $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$

laplaciana:  $\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

vector de posición:  $\mathbf{r} = r \cos \theta \mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j} + z \mathbf{k}$

base local:  $\hat{\mathbf{r}} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}$ ,  $\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{k}$

elemento de área de superficie (en  $r = a$ ):  $dS = a d\theta dz$

campo vectorial:  $\mathbf{F}(r, \theta, z) = F_r(r, \theta, z) \hat{\mathbf{r}} + F_\theta(r, \theta, z) \hat{\boldsymbol{\theta}} + F_z(r, \theta, z) \mathbf{k}$

divergencia:  $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{1}{r} F_r + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$

rot:  $\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & r\hat{\boldsymbol{\theta}} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_r & rF_\theta & F_z \end{vmatrix}$

## COORDENADAS ESFÉRICAS

transformación:  $x = \rho \sin \phi \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \phi \sin \theta$ ,  $z = \rho \cos \phi$

vector de posición:  $\mathbf{r} = \rho \sin \phi \cos \theta \mathbf{i} + \rho \sin \phi \sin \theta \mathbf{j} + \rho \cos \phi \mathbf{k}$

factores de escala:  $h_\rho = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \right| = 1$ ,  $h_\phi = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right| = \rho$ ,  $h_\theta = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right| = \rho \sin \phi$

base local:  $\hat{\boldsymbol{\rho}} = \sin \phi \cos \theta \mathbf{i} + \sin \phi \sin \theta \mathbf{j} + \cos \phi \mathbf{k}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\phi}} = \cos \phi \cos \theta \mathbf{i} + \cos \phi \sin \theta \mathbf{j} - \sin \phi \mathbf{k}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}$

elemento de volumen:  $dV = \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$

elemento de área de superficie (en  $\rho = a$ ):  $dS = a^2 \sin \phi d\theta d\phi$

campo escalar:  $f(\rho, \phi, \theta)$

campo vectorial:  $\mathbf{F}(\rho, \phi, \theta) = F_\rho(\rho, \phi, \theta) \hat{\boldsymbol{\rho}} + F_\phi(\rho, \phi, \theta) \hat{\boldsymbol{\phi}} + F_\theta(\rho, \phi, \theta) \hat{\boldsymbol{\theta}}$

gradiente:  $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{\rho \sin \phi} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}}$

divergencia:  $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_\rho}{\partial \rho} + \frac{2}{\rho} F_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\cot \phi}{\rho} F_\phi + \frac{1}{\rho \sin \phi} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}$

laplaciana:  $\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\cot \phi}{\rho^2} \frac{\partial f}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$

rot:  $\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{\rho^2 \sin \phi} \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\rho}} & \rho \hat{\boldsymbol{\phi}} & \rho \sin \phi \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial \theta} \\ F_\rho & \rho F_\phi & \rho \sin \phi F_\theta \end{vmatrix}$

## REGLAS DE INTEGRACIÓN

$$\int (Af(x) + Bg(x)) dx = A \int f(x) dx + B \int g(x) dx$$

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

$$\int f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x)) + C$$

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

$$\int U(x) dV(x) = U(x)V(x) - \int V(x) dU(x)$$

## INTEGRALES ELEMENTALES

$$\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C \text{ si } r \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$$

$$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$$

$$\int \tan x dx = \ln|\sec x| + C$$

$$\int \cot x dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C$$

$$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{a} + C \quad (a > 0, |x| < a)$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C \quad (a > 0)$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \left| \frac{x}{a} \right| + C \quad (a > 0, |x| > a)$$

## INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS

$$\int \operatorname{sen}^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + C$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + C$$

$$\int \tan^2 x dx = \tan x - x + C$$

$$\int \cot^2 x dx = -\cot x - x + C$$

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \csc^3 x dx = -\frac{1}{2} \csc x \cot x + \frac{1}{2} \ln|\csc x - \cot x| + C$$

$$\int \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx dx = \frac{\operatorname{sen}(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}(a+b)x}{2(a+b)} + C \text{ si } a^2 \neq b^2$$

$$\int \cos ax \cos bx dx = \frac{\operatorname{sen}(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}(a+b)x}{2(a+b)} + C \text{ si } a^2 \neq b^2$$

$$\int \operatorname{sen} ax \cos bx dx = -\frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} + C \text{ si } a^2 \neq b^2$$

$$\int \operatorname{sen}^n x dx = -\frac{1}{n} \operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x dx$$

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$$

$$\int \tan^n x dx = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x dx \text{ si } n \neq 1$$

$$\int \cot^n x dx = \frac{-1}{n-1} \cot^{n-1} x - \int \cot^{n-2} x dx \text{ si } n \neq 1$$

$$\int \sec^n x dx = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} x \tan x + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x dx \text{ si } n \neq 1$$

$$\int \csc^n x dx = \frac{-1}{n-1} \csc^{n-2} x \cot x + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} x dx \text{ si } n \neq 1$$

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x dx = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} x \cos^{m+1} x}{n+m} + \frac{n-1}{n+m} \int \operatorname{sen}^{n-2} x \cos^m x dx \text{ si } n \neq -m$$

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x dx = \frac{\operatorname{sen}^{n+1} x \cos^{m-1} x}{n+m} + \frac{m-1}{n+m} \int \operatorname{sen}^n x \cos^{m-2} x dx \text{ si } m \neq -n$$

$$\int x \operatorname{sen} x dx = \operatorname{sen} x - x \cos x + C$$

$$\int x \cos x dx = \cos x + x \operatorname{sen} x + C$$

$$\int x^n \operatorname{sen} x dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x dx$$

$$\int x^n \cos x dx = x^n \operatorname{sen} x - n \int x^{n-1} \operatorname{sen} x dx$$

## INTEGRALES EN LAS QUE INTERVIENE

$$\sqrt{x^2 \pm a^2} \quad (a > 0)$$

(Si  $\sqrt{x^2 - a^2}$ , supóngase que  $x > a > 0$ ).

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2 + a^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} \right| + C$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2 - a^2} - a \tan^{-1} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} + C$$

$$\int x^2 \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{8} (2x^2 \pm a^2) \sqrt{x^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8} \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \mp \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x} + \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 \pm a^2}} = \mp \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{a^2 x} + C$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 \pm a^2)^{3/2}} = \frac{\pm x}{a^2 \sqrt{x^2 \pm a^2}} + C$$

$$\int (x^2 \pm a^2)^{3/2} dx = \frac{x}{8} (2x^2 \pm 5a^2) \sqrt{x^2 \pm a^2} + \frac{3a^4}{8} \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

## INTEGRALES EN LAS QUE INTERVIENE

$$\sqrt{a^2 - x^2} \quad (a > 0, |x| < a)$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx = \sqrt{a^2 - x^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right| + C$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$$

$$\int x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{8} (2x^2 - a^2) \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^4}{8} \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 x} + C$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 - x^2}} + C$$

$$\int (a^2 - x^2)^{3/2} dx = \frac{x}{8} (5a^2 - 2x^2) \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{3a^4}{8} \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$$

## INTEGRALES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

$$\int \sin^{-1} x dx = x \sin^{-1} x + \sqrt{1 - x^2} + C$$

$$\int \tan^{-1} x dx = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C$$

$$\int \sec^{-1} x dx = x \sec^{-1} x - \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}| + C \quad (x > 1)$$

$$\int x \sin^{-1} x dx = \frac{1}{4} (2x^2 - 1) \sin^{-1} x + \frac{x}{4} \sqrt{1 - x^2} + C$$

$$\int x \tan^{-1} x dx = \frac{1}{2} (x^2 + 1) \tan^{-1} x - \frac{x}{2} + C$$

$$\int x \sec^{-1} x dx = \frac{x^2}{2} \sec^{-1} x - \frac{1}{2} \sqrt{x^2 - 1} + C \quad (x > 1)$$

$$\int x^n \sin^{-1} x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \sin^{-1} x - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1-x^2}} dx + C \quad \text{si } n \neq -1$$

$$\int x^n \tan^{-1} x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \tan^{-1} x - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{1+x^2} dx + C \quad \text{si } n \neq -1$$

$$\int x^n \sec^{-1} x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \sec^{-1} x - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^n}{\sqrt{x^2-1}} dx + C \quad (n \neq -1, x)$$

## INTEGRALES EXPONENCIALES Y LOGARÍMICAS

$$\int x e^x dx = (x - 1)e^x + C$$

$$\int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C$$

$$\int x^n \ln x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C, \quad (n \neq -1)$$

$$\int x^n (\ln x)^m dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} (\ln x)^m - \frac{m}{n+1} \int x^n (\ln x)^{m-1} dx \quad (n \neq -1)$$

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C$$

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + C$$

## INTEGRALES DE FUNCIONES HIPERBÓLICAS

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + C$$

$$\int \tanh x dx = \ln(\cosh x) + C$$

$$\int \coth x dx = \ln|\sinh x| + C$$

$$\int \operatorname{sech} x dx = 2 \tan^{-1}(e^x) + C$$

$$\int \operatorname{csch} x dx = \ln \left| \tanh \frac{x}{2} \right| + C$$

$$\int \operatorname{senh}^2 x dx = \frac{1}{4} \operatorname{senh} 2x + \frac{x}{2} + C$$

$$\int \operatorname{cosh}^2 x dx = \frac{1}{4} \operatorname{senh} 2x + \frac{x}{2} + C$$

$$\int \tanh^2 x dx = x - \tanh x + C$$

$$\int \operatorname{coth}^2 x dx = x - \operatorname{coth} x + C$$

$$\int \operatorname{sech}^2 x dx = \tanh x + C$$

$$\int \operatorname{csch}^2 x dx = -\operatorname{coth} x + C$$

$$\int \operatorname{sech} x \tanh x dx = -\operatorname{sech} x + C$$

$$\int \operatorname{csch} x \operatorname{coth} x dx = -\operatorname{csch} x + C$$

## DIVERSAS INTEGRALES ALGEBRAICAS

---

$$\int x(ax+b)^{-1} dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \ln |ax+b| + C$$

$$\int x(ax+b)^{-2} dx = \frac{1}{a^2} \left[ \ln |ax+b| + \frac{b}{ax+b} \right] + C$$

$$\int x(ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a^2} \left( \frac{ax+b}{n+2} - \frac{b}{n+1} \right) + C \text{ si } n \neq -1, -2$$

$$\int \frac{dx}{(a^2 \pm x^2)^n} = \frac{1}{2a^2(n-1)} \left( \frac{x}{(a^2 \pm x^2)^{n-1}} + (2n-3) \int \frac{dx}{(a^2 \pm x^2)^{n-1}} \right) \text{ si } n \neq 1$$

$$\int x\sqrt{ax+b} dx = \frac{2}{15a^2} (3ax-2b)(ax+b)^{3/2} + C$$

$$\int x^n \sqrt{ax+b} dx = \frac{2}{a(2n+3)} \left( x^n(ax+b)^{3/2} - nb \int x^{n-1} \sqrt{ax+b} dx \right)$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{3a^2} (ax-2b)\sqrt{ax+b} + C$$

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a(2n+1)} \left( x^n \sqrt{ax+b} - nb \int \frac{x^{n-1}}{\sqrt{ax+b}} dx \right)$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \ln \left| \frac{\sqrt{ax+b} - \sqrt{b}}{\sqrt{ax+b} + \sqrt{b}} \right| + C \text{ si } b > 0$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{\sqrt{-b}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{ax+b}{-b}} + C \text{ si } b < 0$$

$$\int \frac{dx}{x^n \sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{b(n-1)x^{n-1}} - \frac{(2n-3)a}{(2n-2)b} \int \frac{dx}{x^{n-1} \sqrt{ax+b}} \text{ si } n \neq 1$$

$$\int \sqrt{2ax-x^2} dx = \frac{x-a}{2} \sqrt{2ax-x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{sen}^{-1} \frac{x-a}{a} + C \text{ (} a > 0 \text{)}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \operatorname{sen}^{-1} \frac{x-a}{a} + C \text{ (} a > 0 \text{)}$$

$$\int x^n \sqrt{2ax-x^2} dx = \frac{x^{n-1}(2ax-x^2)^{3/2}}{n+2} + \frac{(2n+1)a}{n+2} \int x^{n-1} \sqrt{2ax-x^2} dx$$

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = -\frac{x^{n-1}}{n} \sqrt{2ax-x^2} + \frac{(2n-1)}{a^n} \int \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$$

$$\int \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{x} dx = \sqrt{2ax - x^2} + a \operatorname{sen}^{-1} \frac{x-a}{a} + C \quad (a > 0)$$

$$\int \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{x^n} dx = \frac{(2ax - x^2)^{3/2}}{(3-2n)ax^n} + \frac{n-3}{(2n-3)a} \int \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{x^{n-1}} dx$$

$$\int \frac{dx}{x^n \sqrt{2ax - x^2}} = \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{a(1-2n)x^n} + \frac{n-1}{(2n-1)a} \int \frac{dx}{x^{n-1} \sqrt{2ax - x^2}}$$

$$\int (\sqrt{2ax - x^2})^n dx = \frac{x-a}{n+1} (\sqrt{2ax - x^2})^n + \frac{na^2}{n+1} \int (\sqrt{2ax - x^2})^{n-2} dx \quad \text{si } n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{(\sqrt{2ax - x^2})^n} = \frac{x-a}{(n-2)a^2} (\sqrt{2ax - x^2})^{2-n} + \frac{n-3}{(n-2)a^2} \int \frac{dx}{(\sqrt{2ax - x^2})^{n-2}} \quad \text{si } n \neq 2$$

## INTEGRALES DEFINIDAS

---

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n! \quad (n \geq 0)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad a > 0$$

$$\int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a} \quad \text{si } a > 0$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax^2} dx = \frac{n-1}{2a} \int_0^{\infty} x^{n-2} e^{-ax^2} dx \quad \text{si } a > 0, n \geq 2$$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots n} \frac{\pi}{2} & \text{si } n \text{ es un entero par y } n \geq 2 \\ \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (n-1)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots n} & \text{si } n \text{ es un entero impar y } n \geq 3 \end{cases}$$



Este libro de texto está concebido para cursos de Cálculo general, especialmente para los estudiantes de Ciencias e Ingeniería.

El objetivo de este manual es presentar el cálculo de una forma clara, coherente y legible, y sobre todo de manera que sus lectores lo encuentren interesante. La mejor forma de profundizar en nuestra comprensión del cálculo es resolver ejercicios, y convencernos de que lo hemos entendido. Este libro contiene numerosos ejercicios, algunos de ellos son directos, que nos ayudarán a desarrollar nuestras propias destrezas en cálculo. Otros ejercicios están diseñados para ampliar la teoría desarrollada en el texto y mejorar, por tanto, nuestra comprensión de los conceptos del cálculo.

Novedades de esta edición:

- Los problemas y ejercicios están graduados por nivel de dificultad.
- Contiene un capítulo completo dedicado a ecuaciones diferenciales.
- Se presentan problemas que requieren el uso de un ordenador utilizando un software de matemáticas (como *Maple* o *Mathematica*), o bien una de hoja de cálculo (por ejemplo, *Lotus 123*, *Excel de Microsoft* o *Quattro Pro*).

## Otros libros de interés

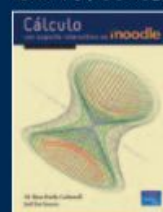
*Estela Carbonell, M. Rosa*

*Saà Seoane, Joel*

Cálculo con soporte interactivo en Moodle

PEARSON PRENTICE HALL

ISBN 9788483224809



*Estela Carbonell, M. Rosa*

*Serra Tort, Anna M.*

Cálculo. Ejercicios resueltos

PEARSON PRENTICE HALL

ISBN 9788483224816

