

# LECTII DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

Dan Bărbosu și Andrei Bărbosu



# Cuprins

<b>1</b>	<b>Șiruri și serii numerice; șiruri și serii de funcții</b>	<b>7</b>
1.1	Șiruri numerice. Noțiuni și rezultate generale . . . . .	7
1.2	Șiruri fundamentale. Criteriul general al lui Cauchy . . . . .	12
1.3	Serii de numere reale. Noțiuni generale . . . . .	13
1.3.1	Serii remarcabile . . . . .	14
1.3.2	Exerciții rezolvate . . . . .	14
1.4	Criterii de convergență. Operații cu serii convergente . . . . .	15
1.5	Serii cu termeni pozitivi. Criterii de convergență . . . . .	18
1.6	Șiruri de funcții . . . . .	21
1.7	Serii de funcții . . . . .	24
1.8	Serii de puteri . . . . .	26
1.9	Derivarea și integrarea termen cu termen a seriilor de puteri .	28
1.10	Serii Taylor . . . . .	30
1.11	Serii Mac-Laurin . . . . .	31
1.12	Utilizarea dezvoltărilor în serie de puteri la calculul limitelor și la calculul aproximativ al integralelor definite . . . . .	34
<b>2</b>	<b>Spațiile <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>37</b>
2.1	Spațiul cu $n$ dimensiuni . . . . .	37
2.2	Structura de spațiu vectorial al lui $\mathbb{R}^n$ . . . . .	37
2.3	Produsul scalar în $\mathbb{R}^n$ . . . . .	38
2.4	Norma în $\mathbb{R}^n$ . . . . .	39
2.5	Distanța în $\mathbb{R}^n$ . . . . .	39
2.6	Vecinătățile unui punct din $\mathbb{R}^n$ . . . . .	40
2.7	Mulțimi deschise în $\mathbb{R}^n$ . . . . .	41
2.8	Mulțimi închise. Frontieră a unei mulțimi . . . . .	42
2.9	Puncte de acumulare . . . . .	42
2.10	Mulțimi mărginite. Mulțimi compacte. Mulțimi conexe . . .	43
2.11	Șiruri de puncte din spațiul $\mathbb{R}^n$ . . . . .	43

---

<b>3</b>	<b>Funcții definite pe mulțimi din <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>45</b>
3.1	Funcții reale de variabilă vectorială . . . . .	45
3.2	Limitele funcțiilor reale de variabilă vectorială . . . . .	46
3.3	Continuitatea funcțiilor reale de $n$ variabile reale . . . . .	50
3.4	Derivate parțiale . . . . .	52
3.5	Derivarea funcțiilor compuse . . . . .	57
3.6	Diferențiala unei funcții reale de două variabile reale . . . . .	62
3.7	Formula lui Taylor pentru funcții reale de două variabile reale . . . . .	65
3.8	Extremele funcțiilor reale de două variabile reale . . . . .	69
3.9	Extreme condiționate (legate) ale funcțiilor reale de două variabile reale . . . . .	71
3.10	Funcții implicite de o variabilă . . . . .	73
3.11	Funcții de mai multe variabile definite implicit . . . . .	75
3.12	Schimbări de variabilă în expresii ce conțin derivate . . . . .	81
3.13	Schimbări de variabile în expresii ce conțin derivate parțiale . . . . .	84
	<b>Bibliografie</b>	<b>89</b>

---

## PREFAȚĂ

Conținutul acestei cărți a fost elaborat în concordanță cu programa disciplinei de Analiză Matematică, semestrul I (28 ore curs, 14 ore seminar), din planul de învățământ pentru anul I ingineri, Facultatea de Resurse Minerale și Mediu, specializările CCIA și MTC din cadrul Universității de Nord din Baia Mare.

Materialul este structurat în trei capitole.

În primul capitol se prezintă: șiruri și serii numerice, șiruri și serii de funcții. Sunt prezentate principalele criterii de convergență pentru șiruri numerice: criteriul Weierstrass, criteriul cleștelui, criteriul Cesaro-Stolz, criteriul Cauchy-D'Alembert, criteriul raportului, criteriul general de convergență al lui Cauchy. Se prezintă apoi rezultate relative la seriile numerice: serie convergentă (divergentă), criteriul lui Cauchy, criteriul lui Leibniz, criteriul Dirichlet-Leibniz, serii cu termeni pozitivi (criteriul comparației, criteriul raportului, criteriul radicalului, criteriul Raabe-Duhamel). În continuare sunt prezentate rezultate principale asupra șirurilor și seriilor de funcții, insistându-se asupra seriilor de puteri și asupra dezvoltării funcțiilor elementare în serii de puteri. Se dau aplicații ale acestor dezvoltări la calculul limitelor de funcții și la calculul aproximativ al integralelor definite.

Capitolul al doilea e dedicat prezentării principalelor proprietăți algebrice și topologice ale spațiului  $\mathbb{R}^n$ .

Capitolul al treilea tratează funcții reale de  $n$  variabile reale. Se insistă în special asupra calculului diferențial al funcțiilor de mai multe variabile: derivate parțiale, diferențiale, extreme ale funcțiilor de mai multe variabile. O importanță deosebită se acordă schimbării de variabilă în expresii ce conțin derivate, și respectiv derivate parțiale, având în vedere rolul pe care acestea îl joacă în studiul unor discipline ingineresti (mecanică și rezistența materialelor).

Spre deosebire de alte cursuri de analiză matematică, unde un loc central îl ocupă demonstrarea rezultatelor teoretice, cel de față are un caracter aplicativ: prezentăm scurt rezultatele teoretice iar apoi le exemplificăm printr-un număr mare de aplicații.

Sperăm ca acest curs să contribuie la o bună înțelegere a noțiunilor prezentate prin modul de redactare și prin numeroasele exemple prezentate.

Mulțumim referenților, prof. univ. dr. Vasile Berinde și conf. univ. dr. Nicolae Pop, pentru sugestiile și observațiile făcute, care au contribuit la îmbunătățirea prezentării acestui material.

Baia Mare  
20 octombrie 2006

Autorii



# Capitolul 1

## Șiruri și serii numerice; șiruri și serii de funcții

### 1.1 Șiruri numerice. Noțiuni și rezultate generale

În acest paragraf se vor reaminti rezultate relative la șirurile de numere reale, cunoscute studenților de la studiul analizei matematice din liceu.

- se numește șir de numere reale orice funcție  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(n) = a_n$ ; notație prescurtată:  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sau  $(a_n)_{n \geq 0}$  sau  $(a_n)_{n \geq 1}$  etc;

- dacă  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este un șir de numere reale, termenul  $a_n$  se numește termen de rang  $n$  (termen general) al șirului;

- șirul  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  se numește:

- ▶ mărginit inferior, dacă  $(\exists) m \in \mathbb{R}$  a.î.  $a_n \geq m$ ,  $(\forall) n \in \mathbb{N}$ ;

- ▶ mărginit superior, dacă  $(\exists) M \in \mathbb{R}$  a.î.  $a_n \leq M$ ,  $(\forall) n \in \mathbb{N}$ ;

- ▶ mărginit, dacă este mărginit inferior și superior;

- șirul  $(a_n)$  se numește:

- ▶ crescător, dacă  $a_n \leq a_{n+1}$ ,  $(\forall) n \in \mathbb{N}$ ;

- ▶ descrescător, dacă  $a_n \geq a_{n+1}$ ,  $(\forall) n \in \mathbb{N}$ ;

- orice șir crescător este mărginit inferior de primul termen; orice șir descrescător este mărginit superior de primul termen;

- fie  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un șir dat iar  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  un șir strict crescător de numere naturale; șirul  $(a_{n_k})$  se numește subșir al șirului  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Exemplu.**  $n_k = 2k$ ,  $k \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{n_k} = a_{2k}$ ; subșirul  $(a_{2k})$  este subșirul termenilor de rang par.

- orice subșir al unui șir monoton (crescător sau descrescător) e monoton; orice subșir al unui șir mărginit e mărginit;

- fie  $a \in \mathbb{R}$ . Se numește vecinătate a lui  $a$  orice submulțime  $V \subset \mathbb{R}$  care conține un interval de forma  $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$  ( $\varepsilon > 0$  - dat); se notează prin  $\mathcal{V}(a)$

mulțimea tuturor vecinătăților lui  $a \in \mathbb{R}$ ; se demonstrează că dacă  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq b$ , există  $V \in \mathcal{V}(a)$ ,  $W \in \mathcal{V}(b)$  a.î.  $V \cap W = \emptyset$ .

- se numește vecinătate a lui  $+\infty$  orice interval de forma  $]a, +\infty[$  ( $a > 0$ ); se numește vecinătate a lui  $-\infty$  orice interval de forma  $] - \infty, -a[$  ( $a > 0$ );

- notăm:  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ; fie  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un șir dat iar  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow$  orice vecinătate a lui  $a$  conține o infinitate de termeni ai șirului.

- Se demonstrează următoarele:

- ▶  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow [(\forall) \varepsilon > 0 (\exists) N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ a.î. } (\forall) n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon]$ ;

- ▶  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow [(\forall) \varepsilon > 0 (\exists) N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ a.î. } (\forall) n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow a_n > \varepsilon]$ ;

- ▶  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow [(\forall) \varepsilon > 0 (\exists) N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ a.î. } (\forall) n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow a_n < -\varepsilon]$ .

- Un șir se numește convergent dacă are limită finită și divergent în caz contrar. Privitor la șirurile convergente reamintim:

- ▶ limita unui șir convergent este unică;

- ▶ dacă  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este convergent și  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , atunci orice subșir al său este convergent și are limita  $a$ ;

- ▶ dacă șirul  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  are două subșiruri cu limite diferite, atunci este divergent.

**Exemplu.** Șirul  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $a_n = (-1)^n$  este divergent căci subșirul termenilor de rang par și respectiv subșirul termenilor de rang impar au limite diferite.

- orice șir convergent e mărginit;

- orice șir mărginit are un subșir convergent.

Reamintim următoarele criterii suficiente de convergență ale unui șir de numere reale:

- orice șir monoton și mărginit e convergent (criteriul lui Weierstrass);

- dacă șirurile  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  au proprietățile:

- (i)  $a_n \leq b_n \leq c_n$ ,  $(\forall) n \geq n_0$  ( $n_0 \in \mathbb{N}$ -fixat)

- (ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = l \in \mathbb{R}$

atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l$  (criteriul cleștelui).

- dacă  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sunt șiruri care au limită și  $a_n \leq b_n$ ,  $(\forall) n \geq n_0$  ( $n_0 \in \mathbb{N}$  fixat), atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ ;

- dacă  $a_n \leq b_n$ ,  $(\forall) n \geq n_0$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$ .

Limite fundamentale:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e (\simeq 2,71828\dots)$ ; mai mult, șirul de termen general  $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  e crescător și  $2 < e_n < 3$ ,  $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$ ;



- dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e$ ;
- dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$ ;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{dacă } q \in ]-1, 1[; \\ 1, & \text{dacă } q = 1; \\ +\infty, & \text{dacă } q \in ]1, +\infty[; \\ \text{nu există,} & \text{dacă } q \in ]-\infty, -1]. \end{cases}$

**1.1.1 Teoremă. (Stolz – Cesaro)** Fie  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  șiruri cu proprietățile:

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty;$$

$$(ii) (\exists) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \alpha \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Atunci  $(\exists) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \alpha$ .

Prezentăm în continuare următoarele aplicații.

**A1.** Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{\ln n}$ .

**Soluție.** Notăm  $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ ,  $b_n = \ln n$ . Cum  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = +\infty$ , încercăm aplicarea criteriului Cesaro-Stolz.

Observăm că:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\ln(n+1) - \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1) \ln \frac{n+1}{n}}.$$

Dar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \ln \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \ln e = 1.$$

Prin urmare,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = 1$  și atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ , în baza criteriului Cesaro-Stolz.

**A2.** Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}^*$  iar

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}, \quad c_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}},$$

calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ .

**Soluție.** Pentru calculul lui  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  se aplică criteriul Cesaro-Stolz, obținându-se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{n+1 - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = a.$$

Se observă că  $\frac{1}{c_n} = \frac{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n}$  și aplicând criteriul Cesaro-Stolz se obține:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{a_{n+1}}}{n+1-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a}.$$

Deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$ .

**A3. (Cauchy-D'Alembert)** Dacă  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este un șir de numere reale strict pozitive cu proprietatea că  $(\exists) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ , atunci  $(\exists) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ .

**Soluție.** Fie  $b_n = \sqrt[n]{a_n} \Rightarrow \ln b_n = \frac{\ln a_n}{n} \Rightarrow b_n = e^{\frac{\ln a_n}{n}}$ . Prin urmare  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_n}{n}}$ . Calculăm limita exponentului folosind criteriul Cesaro-Stolz. Avem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_{n+1} - \ln a_n}{n+1-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ln l.$$

Atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = e^{\ln l} = l$ .

Propunem spre rezolvare următoarele probleme.

1. Să se afle limitele șirurilor de termen general:

$$\begin{aligned} (i) \quad a_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}; & (ii) \quad a_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}; \\ (iii) \quad a_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}; & (iv) \quad a_n &= \frac{1+2+\dots+n}{n^2+2}; \\ (v) \quad a_n &= \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3}; & (vi) \quad a_n &= \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right). \end{aligned}$$

R. (i)  $l = 1$ ; (ii)  $l = \frac{1}{3}$ ; (iii)  $l = \frac{1}{4}$ ; (iv)  $l = \frac{1}{2}$ ; (v)  $l = \frac{1}{3}$ ; (vi)  $l = \frac{1}{2}$ .

2. Să se calculeze:

$$\begin{aligned} (i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{3n+1}\right)^{2n+1}; & \quad (ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-4n+3}{-4n+1}\right)^{3n+2}; \\ (iii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+n-3}{2n^2+4n-1}\right)^{3n+1}. \end{aligned}$$

R. (i)  $e^{\frac{2}{3}}$ ; (ii)  $e^{-\frac{3}{2}}$ ; (iii)  $e^{-\frac{9}{2}}$ .

3. Calculați:

$$\begin{aligned} (i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n; & \quad (ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{5}\right)^n; \\ (iii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 2^n + 4 \cdot 3^n}{3 \cdot 2^n - 3^n}; & \quad (iv) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^n \frac{\pi}{2005}. \end{aligned}$$

**R.** (i) 0; (ii)  $\infty$ ; (iii)  $-4$ ; (iv) 0.

**4.** Folosind criteriul cleștelui calculați limita șirului de termen general:

$$(i) x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}; \quad (ii) x_n = \sqrt[n]{1^n + 2^n + \dots + 2006^n}$$

$$(iii) x_n = \sqrt[n]{1^n + 2^n + \dots + n^n}; \quad (iv) x_n = \frac{[a]+[2a]+\dots+[na]}{n^2}, a \in \mathbb{R}$$

$$(v) x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}.$$

**R.** (i) 1; (ii) 2006; (iii)  $+\infty$ ; (iv)  $\frac{a}{2}$ ; (v) 0.

**5.** Aplicând criteriul Stolz să se calculeze limita șirului de termen general:

$$(i) a_n = \frac{n}{2^n}; \quad (ii) b_n = \frac{1^2 + \dots + n^2}{n^3}; \quad (iii) x_n = \frac{\ln n}{n};$$

$$(iv) x_n = \frac{\ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln n}{n}; \quad (v) x_n = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1)}{n^3};$$

$$(vi) x_n = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}; \quad (vii) x_n = \frac{\sqrt{1+1^2} + \sqrt{1+2^2} + \dots + \sqrt{1+n^2}}{1+n^2}.$$

**R.** (i) 0; (ii)  $\frac{1}{3}$ ; (iii) 0; (iv)  $\frac{1}{e}$ ; (v)  $\infty$ ; (vi)  $\frac{1}{2}$ ; (vii)  $\frac{1}{3}$ .

**6.** Aplicând criteriul Cauchy-D'Alembert, calculați limita șirului de termen general:

$$(i) x_n = \sqrt[n]{n} \quad (n \geq 2); \quad (ii) x_n = \sqrt[n]{\ln n} \quad (n \geq 2);$$

$$(iii) x_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \quad (n \geq 2); \quad (iv) x_n = \sqrt[n]{n!} \quad (n \geq 2);$$

$$(v) x_n = \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n)!8^n}} \quad (n \geq 2).$$

**R.** (i) 1; (ii) 1; (iii)  $e$ ; (iv)  $\infty$ ; (v)  $\frac{1}{32}$ .

Un alt criteriu util în calculul limitelor de șiruri este prezentat în următoarea

**1.1.2 Teoremă. (Criteriul raportului pentru șiruri)** Fie  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un șir de numere reale strict pozitive cu proprietatea că există  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ .

Dacă  $l < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

Dacă  $l > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ .

Dacă  $l = 1$  nu se poate decide nimic privitor la valoarea  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

Prezentăm următoarea aplicație.

**A4.** Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$ .

**Soluție.** Notând  $a_n = \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$  este clar că  $a_n > 0$ ,

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n \cdot n!}$$

$$= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)n} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1.$$

Conform criteriului raportului,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

Propunem spre rezolvare

7. Aplicând criteriul raportului pentru șiruri, calculați limitele șirurilor de termen general:

$$(i) x_n = \frac{n^n}{(n!)^2}; \quad (ii) x_n = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}; \quad (iii) x_n = \frac{(2n)!}{n^n}.$$

R. (i) 0; (ii) 0; (iii)  $\infty$ .

## 1.2 Șiruri fundamentale. Criteriul general al lui Cauchy

**1.2.1 Definiție.** Șirul  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  se numește șir fundamental (sau șir Cauchy) dacă și numai dacă  $(\forall) \varepsilon > 0 (\exists) N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  a.î.  $(\forall) n \geq N, (\forall) p \in \mathbb{N}^* \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$ .

Privitor la șirurile fundamentale se demonstrează

**1.2.2 Teoremă. (Criteriul general de convergență a lui Cauchy)** Șirul  $(a_n)_{n \geq \mathbb{N}}$  este convergent dacă și numai dacă este fundamental.

Prezentăm în continuare câteva aplicații.

**A1.** Arătați că șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  de termen general  $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  nu e fundamental.

Deduceți că  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ .

**Soluție.** Presupunem că  $(a_n)_{n \geq 1}$  e fundamental  $\Rightarrow (\forall) \varepsilon > 0 (\exists) N = N(\varepsilon)$  a.î.  $(\forall) n \geq N, (\forall) p \in \mathbb{N}^*$  avem:

$$|a_{n+p} - a_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p} < \varepsilon. \quad (*)$$

În (\*) alegem  $p = n \geq 2 \Rightarrow (\forall) \varepsilon > 0 (\exists) N = N(\varepsilon)$  a.î.  $(\forall) n \geq N$  avem:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} < \varepsilon. \quad (**)$$

Să observăm că:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

ceea ce înseamnă că (\*\*) nu poate fi adevărată pentru  $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ .

Contradicția arată că șirul considerat nu e fundamental, deci nu e convergent.

Pe de altă parte  $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} > 0$ , deci  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e strict crescător, ceea ce înseamnă că  $(\exists) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Cum  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nu e convergent  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ .

**A2.** Arătați că șirul de termen general

$$a_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n}$$

este convergent.

**Soluție.**  $(\forall) p \in \mathbb{N}^*$  avem:

$$\begin{aligned} |a_{n+p} - a_n| &= \left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}} \right| & (*) \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}} |\sin(n+1)| + \frac{1}{2^{n+2}} |\sin(n+2)| + \cdots + \frac{1}{2^{n+p}} |\sin(n+p)| \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}} \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{p-1}} \right) = \frac{1}{2^n} \left( 1 - \frac{1}{2^p} \right) < \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

(am folosit inegalitatea  $|\sin x| \leq 1$ ,  $(\forall) x \in \mathbb{R}$ ).

Cum  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0 \Rightarrow (\forall) \varepsilon > 0 (\exists) N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  a.î.  $(\forall) n \geq N \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ .

Având în vedere (\*), rezultă că  $(\forall) \varepsilon > 0 (\exists) N = N(\varepsilon)$  a.î.  $(\forall) n \geq N$ ,  $(\forall) p \in \mathbb{N}^*$ ,  $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$ , deci  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e un șir fundamental.

Aplicând criteriul lui Cauchy, deducem că  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e convergent.

Similar se tratează și aplicația

**A3.** Arătați că șirul de termen general

$$a_n = \frac{\cos 1}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{\cos n}{n(n+1)}$$

este convergent.

## 1.3 Serii de numere reale. Noțiuni generale

**1.3.1 Definiție.** i) Se numește serie de termen general  $a_n$  o sumă de forma

$$\sum_{n \geq 0} a_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots$$

ii) Șirul  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , de termen general  $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$  se numește șirul sumelor parțiale ale seriei  $\sum_{n \geq 0} a_n$ .

iii) Seria  $\sum_{n \geq 0} a_n$  se numește convergentă dacă șirul  $(s_n)_{n \geq 0}$  al sumelor ei parțiale este convergent; în caz contrar seria se numește divergentă.

(iv) Dacă seria  $\sum_{n \geq 0} a_n$  e convergentă și  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ , numărul  $s \in \mathbb{R}$  se numește suma seriei considerate; se utilizează în acest caz notația  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ .

### 1.3.1 Serii remarcabile

(i) **Seria geometrică de rație  $q$**

- este seria  $\sum_{n \geq 0} q^n$  ( $q \in \mathbb{R}$ ) și are șirul sumelor parțiale  $(s_n)_{n \geq 0}$ , de termen general  $s_n = \sum_{k=1}^n q^k$ ;

- pentru termenul general  $s_n$  se obține

$$s_n = \begin{cases} n, & q = 1 \\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, & q \neq 1; \end{cases}$$

- rezultă că  $(s_n)_{n \geq 0}$  este convergent  $\Leftrightarrow q \in ]-1, 1[$ ; în acest caz  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{1-q}$ .

Deci seria geometrică  $\sum_{n \geq 0} q^n$  e convergentă  $\Leftrightarrow q \in ]-1, 1[$ ; în acest caz

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

(ii) **Seria armonică**

- este seria  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  și are șirul sumelor parțiale de termen general  $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ ;

- cum șirul  $(s_n)_{n \geq 1}$  e divergent, seria armonică e divergentă.

### 1.3.2 Exerciții rezolvate

Să se calculeze suma fiecăreia din seriile de mai jos:

(i)  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ ; (ii)  $\sum_{n \geq 1} \frac{3^n + 2^n}{6^n}$ ; (iii)  $\sum_{n \geq 1} \frac{n^2 + n - 3}{n!}$

(știind că  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ ).

**Soluție.** (i)  $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$ .

Cum  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$  (seria e convergentă și are suma  $s = 1$ ).

(ii)  $\sum_{n \geq 1} \frac{3^n + 2^n}{6^n} = \sum_{n \geq 1} \left( \left( \frac{3}{6} \right)^n + \left( \frac{2}{6} \right)^n \right) = \sum_{n \geq 1} \left( \left( \frac{1}{2} \right)^n + \left( \frac{1}{3} \right)^n \right) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left( \frac{1}{2} \right)^n}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left( \frac{1}{3} \right)^n}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$ .

(iii) Să observăm că:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n - 3}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} - 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Mai departe avem:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1+1}{(n-1)!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{(n-1)!}^{\infty} = e + e = 2e; \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = e; \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - 1 = e - 1. \end{aligned}$$

În concluzie, se obține

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n - 3}{n!} = 2e + e - 3(e - 1) = 3.$$

## 1.4 Criterii de convergență. Operații cu serii convergente

**1.4.1 Teoremă. (Criteriul general de convergență Cauchy)** *Seria*

$\sum_{n \geq 0} u_n$  *e convergentă*  $\Leftrightarrow [(\forall) \varepsilon > 0 (\exists) N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ a.î. } (\forall) n \geq N(\varepsilon),$

$(\forall) p \in \mathbb{N}^* \Rightarrow |u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon]$ .

**1.4.2 Consecință. (Condiția necesară de convergență)** Dacă seria

$\sum_{n \geq 1} u_n$  este convergentă  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .

**1.4.3 Aplicații. (Ale condiției necesare)**

Arătați că seriile de mai jos sunt divergente

$$\begin{aligned} (i) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}; & \quad (ii) \sum_{n \geq 1} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n; & \quad (iii) \sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}; \\ (iv) \sum_{n \geq 2} n \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right); & \quad (v) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}; & \quad (vi) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \operatorname{tg} \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

**Soluție.** (i)  $u_n = \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$ ;

$$(ii) u_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n; \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e} \neq 0;$$

$$(iii) u_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n}}; \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \neq 0;$$

$$(iv) u_n = n \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right); \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = e^{-1} \neq 0;$$

(v)  $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ . Nu putem trage nici o concluzie utilizând condiția necesară de convergență. Dar

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \sqrt{n+1} - 1.$$

Cum  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty \Rightarrow$  seria e divergentă.

$$(vi) u_n = \frac{1}{n} \operatorname{tg} \frac{1}{n}; \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0.$$

**1.4.4 Teoremă. (Criteriul lui Abel)** Dacă șirul de termeni pozitivi  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  e descrescător și  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ , seria  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$  este convergentă.

**1.4.5 Aplicații. (La criteriul lui Abel)** Arătați că seriile de mai jos sunt convergente:

$$(i) \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}; \quad (ii) \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)^3};$$

$$(iii) \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}; \quad (iv) \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{n^3}{2^n}.$$

**Soluție.** (i)  $u_n = \frac{1}{n}$ ;  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} < 1$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

Conform criteriului Abel seria e convergentă.

$$(ii) u_n = \frac{1}{(2n-1)^3}; \frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^3 < 1; \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n-1)^3} = 0.$$

Se aplică criteriul lui Abel.

$$(iii) u_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n}}; \frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt[n+1]{n} < 1; \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 0.$$

(iv)  $u_n = \frac{n^3}{2^n}$ ;  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 < 1$ , deci  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  este descrescător.

Pentru a calcula  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$  se aplică criteriul lui Stolz, obținându-se:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - n^3}{2^{n+1} - 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 3n + 1}{2^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(2n+1) + 3}{2^n} = 6 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2^n} = 6 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0. \end{aligned}$$

Conform criteriului Abel, seria e convergentă.



**1.4.6 Definiție.** (i) Seria  $\sum_{n \geq 0} u_n$  e absolut convergentă dacă seria  $\sum_{n \geq 0} |u_n|$  e convergentă.

(ii) Dacă seria  $\sum_{n \geq 0} u_n$  e convergentă fără să fie absolut convergentă, ea se numește semiconvergentă.

**1.4.7 Exemplu.** Seria armonică alternată  $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$  este semiconvergentă (exercițiu!).

**1.4.8 Teoremă.** *Orice serie absolut convergentă este convergentă.*

(Reciproca este în general falsă, vezi 1.4.7).

**1.4.9 Teoremă.** (i) Dacă  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = s_1$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} v_n = s_2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (u_n + v_n) = s_1 + s_2$ .

(ii) Dacă  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = s$  și  $\alpha \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \alpha u_n = \alpha s$ .

**1.4.10 Exemplu.** Vezi 1.3.3.

O generalizare a criteriului lui Abel e exprimată în

**1.4.11 Teoremă. (Dirichlet-Abel)** *Dacă:*

(i) Seria  $\sum_{n \geq 0} u_n$  are șirul sumelor parțiale mărginit;

(ii)  $(v_n)_{n \geq 0}$  e un șir descrescător de numere pozitive cu  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$ ,

atunci seria  $\sum_{n \geq 0} u_n v_n$  este convergentă.

## 1.5 Serii cu termeni pozitivi. Criterii de convergență

**1.5.1 Definiție.** Seria  $\sum_{n \geq 0} u_n$  e cu termeni pozitivi dacă  $u_n > 0$ ,  $(\forall) n \in \mathbb{N}$ .

**1.5.2 Teoremă. (Criteriul comparației)**

Fie  $\sum_{n \geq 0} u_n$ ,  $\sum_{n \geq 0} v_n$  serii cu termeni pozitivi.

(i) Dacă  $u_n \leq v_n$ ,  $(\forall) n \geq n_0$  ( $n_0 \in \mathbb{N}$  - fixat) și  $\sum_{n \geq 0} v_n$  e convergentă

$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n$  - convergentă;

(ii) Dacă  $u_n \leq v_n$ ,  $(\forall) n \geq n_0$  ( $n_0 \in \mathbb{N}$  - fixat) și  $\sum_{n \geq 0} u_n$  e divergentă

$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} v_n$  - divergentă;

(iii) Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l \in ]0, +\infty[$ , seriile  $\sum_{n \geq 0} u_n$ ,  $\sum_{n \geq 0} v_n$  au aceeași natură.

**1.5.3 Aplicații. (La criteriul comparației)**

(i) Studiați natura seriei  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ , unde  $\alpha \in \mathbb{R}$  (seria armonică generalizată).

**Soluție.** Distingem situațiile:

1°.  $\alpha = 1 \Rightarrow \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  - divergentă (seria armonică).

2°.  $\alpha < 1 \Rightarrow n^\alpha < n \Rightarrow \frac{1}{n^\alpha} > \frac{1}{n}$ ; cum seria  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  e divergentă  $\Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$

- divergentă (folosind criteriul comparației, (ii)).

3°.  $\alpha > 1 \Rightarrow 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots \leq 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{n\alpha}} + \dots + \frac{1}{(2^{n+1}-1)^\alpha}\right) + \dots \leq 1 + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{2^2}{2^{2\alpha}} + \dots + \frac{2^n}{2^{n\alpha}} + \dots$

Cum seria  $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n$  e convergentă, folosind criteriul convergenței (i), rezultă că seria  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  este convergentă.

În concluzie, seria armonică generalizată  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  este convergentă pentru  $\alpha > 1$  și divergentă pentru  $\alpha \leq 1$ .

(ii) Decideți natura seriilor:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}; \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4+5}};$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n}; \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5+n \cdot 2^n}.$$

**Soluție.** (a) Fie  $u_n = \frac{1+n}{1+n^2}$ ,  $v_n = \frac{1}{n}$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n}{1+n^2} = 1 \in ]0, +\infty[$ .

Cum seria  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  e divergentă, folosind criteriul comparației (iii), seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$

e divergență.

(b) Fie  $u_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^4+5}}$ ; atunci  $u_n \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}} = \frac{1}{n^{4/3}} = v_n$ .

Cum seria  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{4/3}}$  e convergentă (vezi exemplul (i)), seria  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4+5}}$  este convergentă, conform criteriului comparației.

(c) Fie  $u_n = \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n}$ ; atunci:

$$u_n = \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n} \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n^2} = v_n.$$

Seria  $\sum_{n \geq 1} v_n = \pi \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  e convergentă, deci seria dată e convergentă.

(d) Fie  $u_n = \frac{5}{2^n} + n \cdot 2^n$ ,  $v_n = \frac{1}{2^n}$ ; cum  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 \in ]0, +\infty[$  și seria  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n}$  e convergentă, seria  $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{5+n \cdot 2^4}$  este convergentă.

#### 1.5.4 Teoremă. (Criteriul raportului)

Fie  $\sum_{n \geq 0} u_n$  o serie cu termeni pozitivi. Dacă:

(i)  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q < 1$ , ( $\forall$ )  $n \geq n_0$  ( $n_0 \in \mathbb{N}$  - fixat)  $\Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n$  - convergentă;

(ii)  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ , ( $\forall$ )  $n \geq n_0$  ( $n_0 \in \mathbb{N}$  - fixat)  $\Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n$  - divergentă;

(iii) ( $\exists$ )  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ . Pentru  $l < 1$  seria e convergentă iar pentru  $l > 1$  seria e divergentă.

#### 1.5.5 Aplicații. (La criteriul raportului)

Decideți natura seriilor de mai jos:

(i)  $\sum_{n \geq 1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{3^n \cdot n!}$ ; (ii)  $\sum_{n \geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ ; (iii)  $\sum_{n \geq 1} \frac{a^n}{2^n + 5^n}$  ( $a > 0$ ).

**Soluție.** (i)  $u_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{3^n n!} > 0$ , ( $\forall$ )  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)(2n+1)}{3^{n+1}(n+1)!} \frac{3^n n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)} \\ &= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+1} = \frac{2}{3} < 1, \end{aligned}$$

deci seria e convergentă.

(ii)  $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} > 0$ , ( $\forall$ )  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{4} < 1,$$

deci seria e convergentă.

$$(iii) u_n = \frac{a^n}{2^n + 5^n} > 0, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n+1}}{2^{n+1}5^{n+1}} \cdot \frac{2^n + 5^n}{a^n} = a \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n \left[ \left(\frac{2}{5}\right)^n + 1 \right]}{5^n \left[ 2 \left(\frac{2}{5}\right)^n + 5 \right]} = \frac{a}{5}.$$

Dacă  $a < 5 \Rightarrow$  seria e convergentă, căci  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ .

Dacă  $a > 5 \Rightarrow$  seria e divergentă, căci  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ .

Dacă  $a = 5 \Rightarrow u_n = \frac{5^n}{2^n + 5^n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1 \neq 0$ , deci seria e divergentă fiindcă nu îndeplinește condiția necesară de convergență.

În concluzie, seria  $\sum_{n \geq 1} \frac{a^n}{2^n + 5^n}$  e convergentă  $\Leftrightarrow a < 5$ .

### 1.5.6 Teoremă. (Criteriul radicalului)

Fie  $\sum_{n \geq 0} u_n$  o serie cu termeni pozitivi. Dacă:

$$(i) \sqrt[n]{u_n} \leq q < 1 (\forall) n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2 \Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n - \text{convergentă};$$

$$(ii) \sqrt[n]{u_n} \geq 1, (\forall) n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2 \Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n - \text{divergentă};$$

(iii)  $(\exists) l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ . Pentru  $l < 1$  seria e convergentă iar pentru  $l > 1$  seria e divergentă.

### 1.5.7 Aplicații. (La criteriul radicalului)

Stabiliți natura seriilor:

$$(i) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\ln^n(n+1)}; \quad (ii) \sum_{n \geq 1} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n; \quad (iii) \sum_{n \geq 1} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}.$$

**Soluție.** (i)  $u_n = \frac{1}{\ln^n(n+1)} > 0, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0 < 1,$$

deci seria e convergentă.

$$(ii) u_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n > 0, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1,$$

deci seria e convergentă.

$$(iii) u_n = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}{3^n} > 0, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{3} = \frac{e}{3} < 1,$$

deci seria e convergentă.

**1.5.8 Teoremă. (Criteriul Raabe-Duhamel)**

Fie  $\sum_{n \geq 0} a_n$  o serie cu termeni pozitivi.

(i) Dacă  $(\exists) s > 1, (\exists) p \in \mathbb{N}^*$  astfel ca  $n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \geq s$  oricare ar fi  $n \geq p \Rightarrow \sum_{n \geq 0} a_n$  e convergentă;

(ii) Dacă  $(\exists) p \in \mathbb{N}^*$  astfel ca  $n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \leq 1$  oricare ar fi  $n \geq p \Rightarrow \sum_{n \geq 0} a_n$  e divergentă;

(iii) Presupunem că  $(\exists) l = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$ . Dacă  $l > 1$  seria e convergentă iar dacă  $l < 1$  seria e divergentă. Când  $l = 1$  nu se poate decide nimic relativ la convergența seriei.

**1.5.9 Aplicații. (La criteriul Raabe-Duhamel)**

Decideți natura seriilor:

$$(i) \sum_{n \geq 1} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \cdot \frac{1}{2n+1}; \quad (ii) \sum_{n \geq 1} a^{\ln n} \quad (a > 0, a \neq 1).$$

**Soluție.** E ușor de constatat că nu se aplică nici criteriul raportului nici criteriul radicalului.

(i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(6n+5)}{2(n+1)(2n+3)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} > 1 \Rightarrow$  seria e convergentă în baza criteriului Raabe-Duhamel.

(ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ a^{\ln \frac{n}{n+1}} - 1 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{a^{\ln \frac{n}{n+1}}}{\ln \frac{n}{n+1}} \cdot \ln \frac{n}{n+1} =$   
 $\ln a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \ln \frac{n}{n+1} = \ln a \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{\ln a}{e}.$

Dacă  $\frac{\ln a}{e} < 1$  ( $\Leftrightarrow a < e^e$ ) seria e divergentă.

Dacă  $\frac{\ln a}{e} > 1$  ( $\Leftrightarrow a > e^e$ ) seria e convergentă.

Dacă  $a = e^e \Rightarrow u_n = (e^e)^{\ln n} = e^{e \ln n} = e^{\ln n^e} = n^e.$

Cum  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^e = +\infty \neq 0 \Rightarrow \sum_{n \geq 1} a^{\ln n}$  e divergentă.

În concluzie, seria  $\sum_{n \geq 1} a^{\ln n}$  e convergentă  $\Leftrightarrow a > e^e.$

**1.6 Șiruri de funcții**

Fie  $D \subseteq \mathbb{R}$  iar  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un șir de funcții,  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R} \ (\forall) n \in \mathbb{N}$ . Pentru șirul considerat se introduc două tipuri de convergență, ce vor fi prezentate în cele ce urmează.

**1.6.1 Definiție. (Convergență punctuală)** Șirul  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplu (punctual) către funcția  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  pe mulțimea  $A \subseteq D$  dacă  $(\forall) x \in A$  avem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

adică:

$(\forall) \varepsilon > 0, (\forall) x \in A (\exists) N = N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$  a.î.  $(\forall) n \geq N$   
să avem

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

În cazul în care condiția precedentă este îndeplinită, se utilizează notația  $f_n \rightarrow f$  pe  $A$ .

**1.6.2 Definiție. (Convergență uniformă)** Șirul  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniform la funcția  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  pe mulțimea  $A \subseteq D$  dacă:

$(\forall) \varepsilon > 0 (\exists) N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  a.î.  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, (\forall) n \geq N, (\forall) x \in A$ .

În cazul în care condiția precedentă este îndeplinită se utilizează notația  $f_n \rightrightarrows f$ .

Legătura între cele două tipuri de convergență e exprimată în

**1.6.3 Teoremă.** Dacă  $f_n \rightrightarrows f$  pe  $D$ , atunci  $f_n \rightarrow f$  pe  $D$  (convergența uniformă implică convergența simplă).

Privitor la convergența uniformă, prezentăm (fără demonstrație) următoarele rezultate.

**1.6.4 Teoremă. (Cauchy)** Șirul de funcții  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, f_n : D \rightarrow \mathbb{R} (\forall) n \in \mathbb{N}$  converge uniform către  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  pe mulțimea  $D \Leftrightarrow [(\forall) \varepsilon > 0 (\exists) N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  a.î.  $|f_{n+p}(x) - f(x)| < \varepsilon, (\forall) n \geq N, (\forall) p \in \mathbb{N}^*, (\forall) x \in D]$ .

**1.6.5 Teoremă.** Fie  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, f_n : D \rightarrow \mathbb{R}, (\forall) n \in \mathbb{N}$  iar  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Dacă există un șir de numere pozitive  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent la zero, astfel ca  $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n (\forall) n \geq n_0 (n_0 \in \mathbb{N} - \text{fixat}), (\forall) x \in D$ , atunci  $f_n \rightrightarrows f$  pe  $D$ .

**1.6.6 Teoremă.** Fie  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un șir de funcții continue pe  $D$  astfel ca  $f_n \rightrightarrows f$  pe  $D$ . Atunci  $f$  este continuă pe  $D$ .

### 1.6.7 Aplicații. (La convergența șirurilor de funcții)

Stabiliți mulțimea de convergență, funcția limită și tipul convergenței pentru fiecare din șirurile de funcții de mai jos:

- (i)  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x^2 + n$ ;
- (ii)  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x}{n}$ ;
- (iii)  $f_n : [3, 4] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x}{x+n}$ ;
- (iv)  $f_n : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{1}{ne^{nx}}$ ;
- (v)  $f_n : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x^2}{n^2+x^2}$ .

**Soluție.** Notăm cu  $A$  mulțimea de convergență.

$$(i) (\forall) x \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x^2 + n) = +\infty \Rightarrow A = \emptyset.$$

$$(ii) (\forall) x \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} = 0 \Rightarrow A = \mathbb{R}.$$

Arătăm că  $f_n \rightarrow 0$  dar  $f_n \not\equiv 0$  pe  $\mathbb{R}$ .

Dacă  $f_n \equiv 0$  pe  $\mathbb{R}$  trebuie ca

$$(\forall) \varepsilon > 0 (\exists) N = N(\varepsilon) \text{ a. î. } \left| \frac{x}{n} \right| < \varepsilon, (\forall) n \geq N, (\forall) x \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

Alegând  $x = n$  și  $\varepsilon < 1$ , avem:

$$|f_n(n)| = \frac{n}{n} = 1 > \varepsilon, (\forall) \varepsilon < 1. \quad (**)$$

Relațiile (\*) și (\*\*) fiind contradictorii  $\Rightarrow f_n \rightarrow 0$ , dar  $f_n \not\equiv 0$  pe  $\mathbb{R}$ .

(iii)  $(\forall) x \in [3, 4] \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{x+n} = 0$ ; deci  $A = [3, 4]$ . Arătăm că  $f_n \equiv 0$  pe  $[3, 4]$ . Observăm că

$$|f_n(x) - 0| = \left| \frac{x}{x+n} \right| = \frac{x}{x+n} \leq \frac{4}{3+n}, \quad (\forall) x \in [3, 4].$$

Șirul  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de termen general  $a_n = \frac{4}{3+n}$  este un șir de numere reale pozitive cu proprietatea  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Aplicând Teorema 1.6.5 rezultă că  $f_n \equiv 0$  pe  $[3, 4]$ .

$$(iv) (\forall) x \in [0, +\infty[ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{ne^{nx}} = 0 \Rightarrow A = [0, +\infty[.$$

$(\forall) x \in [0, +\infty[ \Rightarrow |f_n(x) - 0| = \frac{1}{ne^{nx}} \leq \frac{1}{n} = a_n$ . Cum  $a_n > 0$ ,  $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , se aplică Teorema 1.6.5 și rezultă  $f_n \equiv 0$  pe  $[3, 4]$ .

$$(v) (\forall) x \in [1, +\infty[ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2+n^2} = 0 \Rightarrow A = [1, +\infty[.$$

Vom arăta că  $f_n \equiv 0$  pe  $[1, +\infty[$ . Se observă că

$$|f_n(x) - 0| \leq \frac{x^2}{x^2+n^2} \leq \frac{x^2}{2nx} = \frac{x}{2n}, \quad (\forall) x \in [1, +\infty[.$$

Este deci suficient să arătăm că

$$(\forall) \varepsilon > 0 (\exists) N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ a. î. } \frac{x}{2n} < \varepsilon, (\forall) n \geq N, (\forall) x \in [1, +\infty[. \quad (*)$$

Inegalitatea (\*) se scrie succesiv:

$$n > \frac{x}{2\varepsilon} \geq \frac{1}{2\varepsilon} \quad (\text{căci } x \in [1, +\infty[).$$

Alegând atunci  $N = N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{2\varepsilon} \right\rceil + 1$ , deducem că

$$(\forall) \varepsilon > 0 (\exists) N = N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{2\varepsilon} \right\rceil + 1 \text{ a. î. } \frac{x}{2n} < \varepsilon, (\forall) n \geq N, (\forall) x \in [1, +\infty[.$$

Rezumând cele de mai sus,  $(\forall) \varepsilon > 0 (\exists) N = N(\varepsilon) = \lceil \frac{1}{2\varepsilon} \rceil + 1 \in \mathbb{N}$  a. î.  $(\forall) n \geq N, |f_n(x) - 0| < \varepsilon$ , ceea ce arată că  $f_n \rightrightarrows 0$  pe  $[1, +\infty[$ .

Fără a exemplifica, menționăm alte două rezultate importante relative la șirurile de funcții.

**1.6.8 Teoremă. (De integrare)** Fie șirul de funcții continue  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $f_n \in C([a, b])$   $(\forall) n \in \mathbb{N}$ . Dacă  $f_n \rightrightarrows f$  pe  $[a, b]$ , atunci:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

**1.6.9 Teoremă. (De derivare)** Fie șirul de funcții derivabile, cu derivate de ordinul întâi continue pe  $[a, b]$   $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $f_n \in C^1([a, b])$ ,  $(\forall) n \in \mathbb{N}$ . Dacă:

- (i)  $f_n \rightarrow f$  pe  $[a, b]$ ;
- (ii)  $f'_n \rightrightarrows g$  pe  $[a, b]$ ,

atunci  $f$  e derivabilă pe  $[a, b]$  și are loc egalitatea  $f' = g$ , adică

$$\left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n \text{ pe } [a, b].$$

## 1.7 Serii de funcții

Fie  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un șir de funcții,  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$   $(\forall) n \in \mathbb{N}$  ( $D \subseteq \mathbb{R}$ ). Mai notăm prin  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  șirul de funcții de termen general  $S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$ ,  $(\forall) n \in \mathbb{N}$ .

**1.7.1 Definiție.** (i) Se numește serie de funcții o sumă de forma:

$$\sum_{k \geq 0} f_k = f_0 + f_1 + \dots + f_n + \dots ;$$

(ii) Șirul de funcții  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de termen general

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x), \quad (\forall) x \in D, (\forall) n \in \mathbb{N}$$

se numește șirul sumelor parțiale ale seriei  $\sum_{n \geq 0} f_k$ ;

(iii) Dacă  $A \subseteq D$  e mulțimea de convergență a șirului  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , atunci  $A$  e mulțimea de convergență a seriei de funcții  $\sum_{k \geq 0} f_k$ ; dacă  $\sum_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$

$(\forall) x \in A$ , atunci funcția  $S : A \rightarrow \mathbb{R}$  e suma seriei de funcții considerate; se utilizează în acest caz notația:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = S(x), \quad (\forall) x \in A;$$



(iv) Dacă  $S_n \rightarrow S$  pe  $A$ , seria  $\sum_{n \geq 0} f_n$  e punctual convergentă către  $S$  pe  $A$ ; dacă  $S_n \rightrightarrows S$  pe  $A$ , seria  $\sum_{n \geq 0} f_n$  e uniform convergentă către  $S$  pe  $A$ .

Relativ la seriile de funcții, prezentăm fără demonstrație următoarele rezultate.

**1.7.2 Teoremă. (Cauchy)** *Seria de funcții  $\sum_{n \geq 0} f_n$  este uniform convergentă pe  $D \subseteq \mathbb{R} \Leftrightarrow [(\forall) \varepsilon > 0 (\exists) N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ a. } \hat{i}. |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon, (\forall) n \geq N, (\forall) p \in \mathbb{N}^*, (\forall) x \in D]$ .*

**1.7.3 Teoremă. (Weierstrass)**

*Considerăm seria de funcții  $\sum_{n \geq 0} f_n, f_n : D \rightarrow \mathbb{R} (\forall) n \in \mathbb{N}$ .*

*Dacă  $(\exists)$  un șir de numere reale pozitive  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  cu proprietățile:*

- (i)  $|f_n(x)| \leq a_n, (\forall) n \geq n_0 \in \mathbb{N}, (\forall) x \in D;$
- (ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$

*atunci seria  $\sum_{n \geq 0} f_n$  e uniform convergentă pe  $D$  către o funcție  $S : D \rightarrow \mathbb{R}$ .*

**1.7.4 Teoremă.** *Fie  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  o serie de funcții,  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R} (\forall) n \geq 0$ , continue pe  $D$ . Dacă  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n = S$  uniform pe  $D$ , atunci funcția  $S : D \rightarrow \mathbb{R}$  e continuă pe  $D$ .*

**1.7.5 Teoremă. (De integrare termen cu termen)**

*Fie  $\sum_{n \geq 0} f_n$  o serie de fracții continue,  $f_n \in C([a, b]) (\forall) n \in \mathbb{N}$ . Dacă*

*$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = S(x)$  uniform pe  $[a, b]$ , atunci:*

$$\int_a^b \left( \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_a^b f_n(x) dx \right) = \int_a^b S(x) dx.$$

**1.7.6 Teoremă. (De derivare termen cu termen)**

*Fie  $\sum_{n \geq 0} f_n$  o serie de funcții  $f_n \in C^1([a, b])$ ,  $(\forall) n \in \mathbb{N}$ . Dacă:*

- (i)  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = S(x)$ , punctual pe  $[a, b];$
- (ii)  $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x) = G(x)$ , uniform pe  $[a, b],$

*atunci funcția  $S$  e derivabilă pe  $[a, b]$  și  $S' = G$ , adică*

$$\left[ \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right]' = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x), \quad (\forall) x \in [a, b].$$

Rezultatele prezentate vor fi exemplificate în cazul seriilor de puteri.

## 1.8 Serii de puteri

Se numește serie de puteri centrată în  $x_0 \in \mathbb{R}$  o serie de funcții de forma

$$\sum_{n \geq 0} a_n (x - x_0)^n \quad (a_n \in \mathbb{R}).$$

În continuare se vor considera serii de puteri centrate în  $x_0 = 0$ , deci de forma  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ .

Privitor la convergența seriilor de puteri precizăm rezultatele:

**1.8.1 Teoremă.** *Orice serie de puteri e convergentă în  $x_0 = 0$  (deci mulțimea de convergență e nevidă).*

**1.8.2 Teoremă. (Abel)** *Dacă seria de puteri  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  e convergentă în  $x_0 \neq 0$ , atunci seria e absolut și uniform convergentă pe orice interval  $[-r, r]$ , unde  $0 < r < |x_0|$ .*

O problemă importantă este aceea a determinării mulțimii de convergență a unei serii de puteri.

**1.8.3 Definiție.** Fie seria de puteri  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ . Se numește rază de convergență a seriei date numărul real  $R \geq 0$  definit prin:

$$R = \sup \left\{ x \geq 0 : x - \text{punct de convergență a sumei } \sum_{n \geq 0} a_n x^n \right\}.$$

Privitor la calculul razei de convergență a unei serii de puteri are loc

**1.8.4 Teoremă.** *Fie seria de puteri  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ , având raza de convergență  $R$ . Atunci:*

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

*Dacă  $\frac{1}{R} = 0 \Rightarrow R = +\infty$ ; dacă  $\frac{1}{R} = \infty \Rightarrow R = 0$ .*

*Dacă  $0 < R < +\infty$ , seria  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  e uniform convergentă pe  $] -R, R[$ .*

**1.8.5 Definiție.** Fie seria de puteri  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  cu raza de convergență  $R$ .

Intervalul

$$I_C = ] -R, R[$$

(pe care seria e uniform convergentă) se numește interval de convergență al seriei.

**1.8.6 Observație.** Mulțimea de convergență a seriei de puteri  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  cu raza de convergență  $R$  e unul din intervalele  $] -R, R[$ ,  $[-R, R[$ ,  $] -R, R]$  sau  $[-R, R]$ . Pentru mulțimea (domeniul) de convergență al unei serii de puteri se va folosi notația  $D_C$ .

**1.8.7 Aplicații. (Domeniul de convergență al unei serii de puteri)**

Determinați domeniile de convergență ale următoarelor serii de puteri:

$$(i) \sum_{n \geq 0} x^n; \quad (ii) \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+1}; \quad (iii) \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n+1}}{2n+1};$$

$$(iv) \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}; \quad (v) \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^n}; \quad (vi) \sum_{n \geq 0} \frac{(x-3)^{2n+1}}{2n+1}.$$

**Soluție.** (i)  $a_n = 1, (\forall) n \in \mathbb{N}; \frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1 \Rightarrow R = 1$ . Intervalul de convergență este  $I_C = ] -1, 1[$ .

Pentru  $x = -1$  obținem seria  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n$  care e divergentă  $\Rightarrow -1 \notin D_C$ .

Pentru  $x = 1$  obținem seria divergentă  $\sum_{n \geq 0} 1 \Rightarrow 1 \notin D_C$ .

Rezultă că  $D_C = I_C = ] -1, 1[$ .

(ii)  $a_n = \frac{1}{n+1}; \frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = 1 \Rightarrow R = 1 \Rightarrow I_C = ] -1, 1[$ .

$x = -1 \Rightarrow \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$  - convergentă (e seria armonică alternată)  $\Rightarrow -1 \in D_C$ .

$x = 1 \Rightarrow \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$  - divergentă (e seria armonică)  $\Rightarrow 1 \notin D_C$ .

Domeniul de convergență este deci  $D_C = [-1, 1[$ .

(iii) Procedând ca la punctele precedente se obține  $D_C = ] -1, 1[$ .

(iv)  $\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot 2^n}{(n+1)2^{n+1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow R = 2 \Rightarrow I_C = ] -2, 2[$ .

$x = -2 \Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{(-2)^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$  - convergentă  $\Rightarrow -2 \in D_C$ .

$x = 2 \Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{2^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  - divergentă  $\Rightarrow 2 \notin D_C$ . Deci  $D_C = [-2, 2[$ .

(v)  $\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow R = +\infty \Rightarrow I_C = \mathbb{R} = D_C$ .

(vi) Notând  $x - 3 = y$ , obținem seria  $\sum_{n \geq 0} \frac{y^{2n+1}}{2n+1}$  care e convergentă numai

pe domeniul  $y \in ] -1, 1[$ . Seria dată e deci convergentă dacă și numai dacă  $x - 3 \in ] -1, 1[$ . Prin urmare  $D_C = ]2, 4[$ .

**1.8.8 Probleme propuse. (Domenii de convergență)**

Aflați domeniul de convergență al fiecăreia din seriile:

$$\begin{aligned}
(i) \quad & \sum_{n \geq 0} (-1)^n (2n+1)^2 x^n; & (ii) \quad & \sum_{n \geq 1} n! x^n; \\
(iii) \quad & \sum_{n \geq 1} 3^{n^2} x^{n^2}; & (iv) \quad & \sum_{n \geq 1} n^n (n+3)^n; \\
(v) \quad & \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^{2n}}{2n}; & (vi) \quad & \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{(2n+1)\sqrt{2n+1}}.
\end{aligned}$$

**R.** (i)  $D_C = I_C = ]-1, 1[$ ; (ii)  $I_C = \{0\} = D_C$ ; (iii)  $D_C = I_C = ]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[$ ;  
(iv)  $D_C = I_C = \{-3\}$ ; (v)  $I_C = ]1, 3[$ ;  $D_C = [1, 3]$ ; (vi)  $I_C = ]2, 4[$ ;  
 $D_C = [2, 4]$ .

## 1.9 Derivarea și integrarea termen cu termen a seriilor de puteri

Prezentăm un rezultat teoretic iar apoi dăm mai multe aplicații ale lui.

**1.9.1 Teoremă.** Considerăm seria de puteri  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  cu raza de convergență  $R$  și notăm

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (\forall) x \in ]-R, R[.$$

Sunt adevărate afirmațiile de mai jos:

- (i)  $S$  este derivabilă pe  $] - R, R[$ ;  
(ii) Seria  $\sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$  are raza  $R$  și

$$S'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}, \quad (\forall) x \in ]-R, R[;$$

- (iii) Dacă  $[a, b] \subset ]-R, R[$  are loc:

$$\int_a^b S(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

### 1.9.2 Exerciții rezolvate. (Derivare și integrare termen cu termen)

Folosind derivarea sau integrarea termen cu termen, să se calculeze sumele următoarelor serii de puteri:

$$\begin{aligned}
(i) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} nx^n; & (ii) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{2^n}; \\
(iii) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (2n-1)x^{2n-2}; & (iv) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}; \\
(v) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}; & (vi) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1}; \\
(vii) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}; & (viii) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}; \\
(ix) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 2^n}.
\end{aligned}$$

**Soluție.** (i)  $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$ ,  $(\forall) x \in ]-1, 1[ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$ ,  $(\forall) x \in ]-1, 1[$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = \left( \frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad (\forall) x \in ]-1, 1[.$$

$$(ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x}{2} \right)^{n-1} = \frac{2}{2-x}, \quad (\forall) x \in ]-2, 2[ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x}{2} \right)^n = \frac{x}{2-x}, \quad (\forall) x \in ]-2, 2[.$$

Folosind derivarea termen cu termen se obține:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left( \frac{x}{2} \right)^{n-1} = \frac{2}{(2-x)^2}, \quad (\forall) x \in ]-2, 2[ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{2^n} = \frac{x}{(2-x)^2}, \quad (\forall) x \in ]-2, 2[.$$

$$(iii) \quad \text{Fie } S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (2n-1)x^{2n-2} \Rightarrow \int S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-1}.$$

E ușor de observat că  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-1} = \frac{x}{1+x^2}$ ,  $(\forall) x \in ]-1, 1[$ .

Folosind derivarea termen cu termen se obține:

$$S(x) = \left( \frac{x}{1+x^2} \right)' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}, \quad (\forall) x \in ]-1, 1[.$$

$$(iv) \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}, \quad (\forall) x \in ]-1, 1[ \Rightarrow \int_0^x \left( \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} \right) dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = \ln \frac{1}{1-x},$$

$$(\forall) x \in ]-1, 1[ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x), \quad (\forall) x \in ]-1, 1[.$$

$$(v) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = \frac{1}{1+x}, \quad (\forall) x \in ]-1, 1[ \Rightarrow \int_0^x \left( \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} t^{n-1} \right) dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+x), \quad (\forall) x \in ]-1, 1[ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \ln(1+x), \quad (\forall) x \in ]-1, 1[.$$

(vi) Pornind de la  $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$ ,  $(\forall) x \in ]-1, 1[$  și aplicând de două ori derivarea termen cu termen, se obține:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n = \frac{2x(1-x)^2 + 2(1-x)x^2}{(1-x)^4}$$

iar de aici:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^3}.$$

(vii) Este evidentă identitatea:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} t^{2n-2} = \frac{1}{1+t^2}, \quad (\forall) t \in ]-1, 1[.$$

Folosind integrarea termen cu termen, rezultă:

$$\int_0^x \left( \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} t^{2n-2} \right) dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} x, \quad (\forall) x \in ]-1, 1[.$$

Prin urmare:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \operatorname{arctg} x, \quad (\forall) x \in ]-1, 1[.$$

(viii) Se pornește de la identitatea

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = \frac{1}{1+x}, \quad (\forall) x \in ]-1, 1[$$

și aplicând de două ori integrarea termen cu termen se găsește:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = (x+1) \ln(x+1) - x, \quad (\forall) x \in ]-1, 1[.$$

(ix) Se notează  $\frac{x-3}{2} = y$ ; aplicând apoi integrarea termen cu termen se găsește:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 2^n} = -\ln \frac{5-x}{2}, \quad (\forall) x \in ]1, 5[.$$

## 1.10 Serii Taylor

**1.10.1 Definiție.** Fie  $I \subseteq \mathbb{R}$  un interval deschis,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție e admite derivate de orice ordin în  $x_0 \in I$ . Se numește serie Taylor atașată funcției  $f$  în punctul  $x_0$  următoarea serie:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Are loc următorul rezultat:

**1.10.2 Teoremă.** Fie  $I \subseteq \mathbb{R}$  interval deschis,  $x_0 \in I$  iar  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Dacă:

(i)  $f$  are derivate de orice ordin în  $x_0$ ;

(ii)  $(\exists) M > 0$  a. î.  $|f^{(n+1)}(x)| < M$ ,  $(\forall) x \in V \cap I$  ( $V \in \mathcal{V}(x_0)$ ), atunci  $(\forall) x \in V \cap I$  are loc egalitatea:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

**1.10.3 Aplicații. (La serii Taylor)**

Să se dezvolte în serie Taylor într-o vecinătate a punctului  $x_0 = -4$  funcțiile date prin:

$$(i) \quad f(x) = \frac{1}{x^2}; \quad (ii) \quad f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}.$$

**Soluție.** (i) Se demonstrează (inducție după  $n$ ) că:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}, \quad (\forall) x \in \mathbb{R}^*, (\forall) n \in \mathbb{N}$$

de unde rezultă:

$$f^{(n)}(-4) = \frac{(n+1)!}{4^{n+2}}, \quad (\forall) n \geq 0, n \in \mathbb{N}.$$

E ușor de văzut că  $(\exists) V \in \mathcal{V}(-4)$  pe care  $f^{(n+1)}$  e mărginită. Are deci loc egalitatea

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{4^{n+2}} (x+4)^n = \frac{1}{x^2}, \quad (\forall) x \in V \cap \mathbb{R}^*$$

(rămâne în seama cititorului determinarea lui  $V$ ).

$$(ii) \quad \frac{1}{x^2 + 3x + 2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{6^{n+1}} (n+4)^n, \quad (\forall) x \in V \cap (\mathbb{R} \setminus \{-2, -1\})$$

(determinarea lui  $V$  rămâne în seama cititorului).

## 1.11 Serii Mac-Laurin

**1.11.1 Definiție.** Fie  $I \subseteq \mathbb{R}$  un interval deschis cu proprietatea că  $x_0 = 0 \in I$  iar  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție ce admite derivate de orice ordin în  $x_0 = 0$ . Seria Taylor atașată funcției  $f$  în punctul  $x_0 = 0$ , adică seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

se numește serie Mac-Laurin a funcției  $f$ .

**1.11.2 Teoremă.** În ipotezele definiției 1.11.1 are loc egalitatea:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(x), \quad (\forall) x \in A,$$

unde  $A \subseteq I$  e mulțimea de convergență a seriei Mac Laurin.

**1.11.3 Aplicații. (Dezvoltarea în serie de puteri a unor funcții elementare)**

1°.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x$ ,  $(\forall) x \in \mathbb{R}$

• e ușor de văzut că  $f^{(n)}(x) = e^x$ ,  $(\forall) x \in \mathbb{R}$ ,  $(\forall) n \in \mathbb{N} \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1$ ,  $(\forall) n \in \mathbb{N}$ ;

• seria Mac-Laurin este  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ , deci o serie de puteri cu coeficienții  $a_n = \frac{1}{n!}$ ,  $(\forall) n \in \mathbb{N}$  și raza de convergență  $R = +\infty$ ;

• domeniul de convergență este  $D_C = \mathbb{R}$ ;

• prin urmare,  $(\forall) x \in \mathbb{R}$  are loc egalitatea:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

• substituind  $x := -x$ , se obține:

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots$$

2°.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin x$ ,  $(\forall) x \in \mathbb{R}$

• se demonstrează (inducție după  $n$ ) că:

$$f^{(n)}(x) = \sin \left( x + n \frac{\pi}{2} \right), \quad (\forall) x \in \mathbb{R}, (\forall) n \in \mathbb{N};$$

• prin urmare

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ (-1)^k, & n = 2k + 1 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N});$$

• seria Mac-Laurin căutată este  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$  și are raza de convergență  $R = +\infty$ ; prin urmare  $D_C = \mathbb{R} \Rightarrow \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ ,  $(\forall) x \in \mathbb{R}$ .

3°.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \cos x$ ,  $(\forall) x \in \mathbb{R}$



- se demonstrează (inducție după  $n$ ) că:

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \quad (\forall) x \in \mathbb{R}, (\forall) n \in \mathbb{N};$$

- prin urmare

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^k, & n = 2k; \\ 0, & n = 2k + 1 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N});$$

- seria Mac-Laurin căutată este  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$  și are raza de convergență

$$R = +\infty; \text{ prin urmare } D_C = \mathbb{R} \Rightarrow \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad (\forall) x \in \mathbb{R}.$$

4°.  $f : ]-1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (1+x)^\alpha$ ,  $(\forall) x \in \mathbb{R}$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ )

- se demonstrează (inducție după  $n$ ) că:

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, \quad (\forall) x \in \mathbb{R}, (\forall) n \in \mathbb{N}$$

și deci

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1), \quad (\forall) n \in \mathbb{N}^*$$

- seria Mac-Laurin căutată este

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

- raza ei de convergență este  $R = 1$  iar domeniul de convergență  $D_C = ]-1, 1[$ ; prin urmare are loc egalitatea:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad (\forall) x \in ]-1, 1[$$

- pentru  $\alpha = -1$  se obține identitatea:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad (\forall) x \in ]-1, 1[$$

- folosind integrarea termen cu termen, din egalitatea precedentă rezultă:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad (\forall) x \in ]-1, 1[.$$

**1.11.4 Exerciții propuse. (Devoltare în serie de puteri)**

Să se devolte în serie de puteri funcțiile date prin legile de mai jos:

- (i)  $f(x) = shx \left( = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)$ ; (ii)  $f(x) = chx \left( = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)$ ;  
 (iii)  $f(x) = \sin^2 x$ ; (iv)  $f(x) = \cos^2 x$ ; (v)  $f(x) = \frac{3}{(1-x)(1+2x)}$ .

**R.** (i)  $shx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ,  $(\forall) x \in \mathbb{R}$ ;

(ii)  $chx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ ,  $(\forall) x \in \mathbb{R}$ ;

(iii)  $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ ; folosind apoi dezvoltarea în serie de puteri a funcției  $\cos$  se obține:

$$\sin^2 x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}, \quad (\forall) x \in \mathbb{R}.$$

(iv)  $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ ; se procedează apoi ca la (iii), obținându-se

$$\cos^2 x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}, \quad (\forall) x \in \mathbb{R}.$$

(v)  $\frac{3}{(1-x)(1+2x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \{1 + (-1)^{n+1} 2^n\} x^n$ ,  $(\forall) x \in ]-1, 1[ \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$ .

## 1.12 Utilizarea dezvoltărilor în serie de puteri la calculul limitelor și la calculul aproximativ al integralelor definite

Prezentăm unele aplicații ale dezvoltării în serie de puteri.

**A1.** Să se calculeze  $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \arctg x}{x^3}$ .

**Soluție.** Se știe că  $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ . Vom deduce mai întâi dezvoltarea în serie de puteri a funcției  $\arctg x$ .

Pornim de la identitatea cunoscută

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \dots + (-1)^n t^n + \dots \quad (\forall) t \in ]-1, 1[$$

din care deducem

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots + (-1)^n t^{2n} + \dots, \quad (\forall) t \in ]-1, 1[.$$

Folosind teorema de integrare termen cu termen, putem integra identitatea precedentă pe intervalul  $[0, x] \subset ]-1, 1[$  și obținem:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \quad (\forall) x \in ]-1, 1[.$$

Din cele de mai sus obținem:

$$\sin x - \operatorname{arctg} x = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3!}\right)x^3 + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5!}\right)x^5 + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{7!}\right)x^7 + \dots$$

Limita căutată devine:

$$l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3!}\right)x^3 + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5!}\right)x^5 + \dots}{x^3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}.$$

**A2.** Să se calculeze  $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \sin x}$ .

**Soluție.** Folosind dezvoltările cunoscute avem:

$$\begin{aligned} 2e^x - 2 - 2x - x^2 &= 2 \left( 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right) - 2 - 2x - x^2 \\ &= 2 \left( \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right) \end{aligned}$$

$$x - \sin x = x - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \dots$$

Limita căutată devine

$$l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \left( \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right)}{\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} - \dots} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \left( \frac{1}{3!} + \frac{x^2}{5!} + \dots \right)}{x^3 \left( \frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \dots \right)} = 2.$$

**A3.** Să se calculeze  $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$ .

**Soluție.** Se folosește dezvoltarea în serie de puteri a funcției  $\operatorname{arctg} x$ , obținându-se  $l = \frac{1}{3}$ .

**A4.** Să se calculeze o valoare aproximativă a integralei

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x} dx.$$

**Soluție.** Folosind dezvoltarea în serie de puteri a funcției  $\sin x$  deducem:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

Luând primii trei termeni ai dezvoltării precedente obținem:

$$\begin{aligned} I &\simeq \int_0^{\frac{1}{2}} \left( 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{120} \right) dx = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{9600} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{9600 - 800 + 1}{9600} = \frac{8801}{19200}. \end{aligned}$$

**A5.** Să se calculeze o valoare aproximativă a integralei

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx.$$

**Soluție.** Folosind dezvoltarea în serie de puteri a funcției  $\cos x$ , se obține:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} - \dots \\ \Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx &\simeq \int_0^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{3 \cdot 4! 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 6! 2^5} = \dots \end{aligned}$$

## Capitolul 2

# Spațiile $\mathbb{R}^n$

### 2.1 Spațiul cu $n$ dimensiuni

Notăm  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, (\forall) i = \overline{1, n}\}$ .

În cazul  $n = 1$ , mulțimea  $\mathbb{R}^1$  este dreapta reală  $\mathbb{R}$ .

În cazul  $n = 2$ , mulțimea  $\mathbb{R}^2$  este mulțimea perechilor de numere reale  $(x_1, x_2)$  (sau mulțimea punctelor din plan de abscisă  $x_1$  și ordonată  $x_2$ ). Punctele lui  $\mathbb{R}^2$  vor fi notate adesea  $(x, y)$  în loc de  $(x_1, x_2)$ .

În cazul  $n = 3$ , mulțimea  $\mathbb{R}^3$  este mulțimea tripletelor de numere reale  $(x_1, x_2, x_3)$  sau mulțimea punctelor din spațiu. Punctele din spațiu vor fi notate adesea  $(x, y, z)$  în loc de  $(x_1, x_2, x_3)$ .

Prin analogie,  $\mathbb{R}^n$  se numește spațiul cu  $n$  dimensiuni iar elementele sale se numesc puncte.

Dacă  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  se numesc coordonatele (proiecțiile) punctului  $x$ .

### 2.2 Structura de spațiu vectorial al lui $\mathbb{R}^n$

Operația de adunare  $+$  :  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  se definește prin:

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), (\forall) x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, (\forall) y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Se verifică ușor:

**2.2.1 Teoremă.**  $(\mathbb{R}^n, +)$  este un grup abelian cu elementul neutru  $0 = (0, 0, \dots, 0)$  și opusul fiecărui element  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  elementul  $-x = (-x_1, \dots, -x_n) \in \mathbb{R}^n$ .

Operația de înmulțire a elementelor din  $\mathbb{R}^n$  cu numere reale  $\cdot$  :  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  se definește prin:

$$\alpha \cdot x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n), (\forall) \alpha \in \mathbb{R}, (\forall) x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

**2.2.2 Teoremă.** *Au loc egalitățile:*

- (i)  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ ,  $(\forall) \alpha \in \mathbb{R}$ ,  $(\forall) x, y \in \mathbb{R}^n$ ;
- (ii)  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ ,  $(\forall) \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $(\forall) x \in \mathbb{R}^n$ ;
- (iii)  $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ ,  $(\forall) \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $(\forall) x \in \mathbb{R}^n$ ;
- (iv)  $1 \cdot x = x$ ,  $(\forall) x \in \mathbb{R}^n$ .

Teoremele 2.2.1 și 2.2.2 asigură faptul că  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$  este un spațiu vectorial real. De aceea elementele  $x \in \mathbb{R}^n$  se mai numesc și vectori, iar coordonatele  $x_1, \dots, x_n$  se numesc componentele vectorului  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

## 2.3 Produsul scalar în $\mathbb{R}^n$

**2.3.1 Definiție.** Funcția  $\langle, \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i, \quad (\forall) x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad (\forall) y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

se numește produs scalar în  $\mathbb{R}^n$ .

Din Definiția 2.3.1 se obțin proprietățile produsului scalar, exprimate în

**2.3.2 Teoremă.** *Produsul scalar în  $\mathbb{R}^n$  are proprietățile:*

- (i)  $\langle x, x \rangle \geq 0$ ,  $(\forall) x \in \mathbb{R}^n$ ;  $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ;
- (ii)  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ ,  $(\forall) x, y \in \mathbb{R}^n$ ;
- (iii)  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ ,  $(\forall) x, y, z \in \mathbb{R}^n$ ;
- (iv)  $\langle \alpha x, y \rangle = \langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ ,  $(\forall) \alpha \in \mathbb{R}$ ,  $(\forall) x, y \in \mathbb{R}^n$ .

Din proprietatea (iii) rezultă egalitatea  $\langle 0, x \rangle = \langle x, 0 \rangle = 0$ .

Un rezultat important este

**2.3.3 Teoremă. (Inegalitatea lui Schwarz)**

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle, \quad (\forall) x, y \in \mathbb{R}^n.$$

**Demonstrație.**  $(\forall) x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $(\forall) y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$   
inegalitatea enunțului revine la

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right). \quad (*)$$

Definim  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(t) = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) t^2 - 2 \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right) t + \sum_{i=1}^n y_i^2$ .

Cum  $f(t) = \sum_{i=1}^n (tx_i - y_i)^2 \geq 0$ ,  $(\forall) t \in \mathbb{R}$  și  $\sum_{i=1}^n x_i^2 > 0 \Rightarrow \Delta_f \leq 0 \Rightarrow$

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right). \text{ Egalitatea are loc } \Leftrightarrow \frac{x_i}{y_i} = t, \quad (\forall) i = \overline{1, n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \dots = \frac{x_n}{y_n}.$$

## 2.4 Norma în $\mathbb{R}^n$

Pe dreapta reală  $\mathbb{R}$  s-a definit distanța între punctele  $x, y$  cu ajutorul modulului  $|x - y|$ .

În  $\mathbb{R}^n$  se va defini norma unui vector  $x$ , notată  $\|x\|$  iar cu ajutorul ei se va exprima distanța între 2 puncte  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

**2.4.1 Definiție.** Norma vectorului  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  este numărul real nenegativ  $\|x\|$  definit prin:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Proprietățile normei, asemănătoare cu cele ale modulului sunt exprimate în

**2.4.2 Teoremă.**

- (i)  $\|x\| \geq 0$ ,  $(\forall) x \in \mathbb{R}^n$ ;  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ;
- (ii)  $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ ,  $(\forall) \alpha \in \mathbb{R}$ ,  $(\forall) x \in \mathbb{R}^n$ ;
- (iii)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ,  $(\forall) x, y \in \mathbb{R}^n$  (*inegalitatea triunghiului*);
- (iv)  $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ ,  $(\forall) x, y \in \mathbb{R}^n$  (*inegalitatea lui Schwarz transcrisă în limbajul normei*).

**2.4.3 Observații.**

(i) În  $\mathbb{R}^1$ ,  $\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x^2} = |x|$  și geometric reprezintă distanța de la originea  $O$  la punctul de abscisă  $x$ .

(ii) În  $\mathbb{R}^2$ , dacă  $x = (x_1, x_2) \Rightarrow \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ , cu aceeași semnificație geometrică de la (i).

(iii) În  $\mathbb{R}^3$ , dacă  $x = (x_1, x_2, x_3) \Rightarrow \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ .

## 2.5 Distanța în $\mathbb{R}^n$

Cu ajutorul normei se poate introduce distanța între două puncte din  $\mathbb{R}^n$  așa cum în  $\mathbb{R}$  s-a introdus distanța între 2 puncte cu ajutorul modulului.

**2.5.1 Definiție.** Fie  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Atunci distanța între  $x, y$  se exprimă prin:

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

**2.5.2 Observații.**

(i) În  $\mathbb{R}^1$ ,  $d(x, y) = |x - y|$ .

(ii) În  $\mathbb{R}^2$ , distanța între  $x(x_1, x_2)$ ,  $y(y_1, y_2)$  se exprimă prin:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

(iii) În  $\mathbb{R}^3$ , distanța între  $x(x_1, x_2, x_3)$ ,  $y(y_1, y_2, y_3)$  se exprimă prin:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

Distanța în  $\mathbb{R}^n$  are proprietățile din

**2.5.3 Teoremă.**  $(\forall) x, y, z \in \mathbb{R}^n$  au loc:

(i)  $d(x, y) \geq 0$ ;  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ;

(ii)  $d(x, y) = d(y, x)$ ;

(iii)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  (*inegalitatea triunghiului*).

## 2.6 Vecinătățile unui punct din $\mathbb{R}^n$

**2.6.1 Definiție.** Fie  $n$  intervale pe o dreaptă  $I_1, I_2, \dots, I_n$ . Produsul lor cartezian  $I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$  se numește interval  $n$ -dimensional:

$$I = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1 \in I_1, x_2 \in I_2, \dots, x_n \in I_n\}.$$

Intervalele  $I_1, I_2, \dots, I_n$  se numesc laturile intervalului  $n$ -dimensional  $I$ .

### 2.6.2 Observații.

(i) Laturile unui interval  $n$ -dimensional pot fi închise la un capăt sau la ambele capete, mărginite sau nemărginite.

(ii) În planul  $\mathbb{R}^2$  un interval bidimensional cu laturile mărginite e un dreptunghi.

(iii) În spațiul  $\mathbb{R}^3$  un interval tridimensional cu laturile mărginite este un paralelipiped.

(iv) Dacă toate intervalele  $I_1, I_2, \dots, I_n$  sunt deschise, atunci  $I$  se numește interval  $n$ -dimensional deschis; dacă laturile intervalului  $n$ -dimensional sunt închise, intervalul se numește închis; dacă toate laturile sunt intervale mărginite, intervalul se numește mărginit.

(v) În continuare, prin interval  $n$ -dimensional se va înțelege interval  $n$ -dimensional deschis și mărginit, afară de cazul când se va specifica în mod expres contrarul.

**2.6.3 Definiție.** Fie  $a \in \mathbb{R}^n$  și  $r > 0$ ; se numește sferă (deschisă) de centru  $a$  și rază  $r$ , mulțimea:

$$V_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\}.$$



**2.6.4 Observații.**

(i) În spațiul  $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ ,  $V_r(a) = ]a - r, a + r[ = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\}$ .

(ii) În spațiul  $\mathbb{R}^2$ ,  $V_r(a) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \|x - a\| < r\} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} < r\} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2\}$ , adică interiorul cercului de centru  $a(a_1, a_2)$  și rază  $r$ .

(iii) Analog, în  $\mathbb{R}^3$ ,  $V_r(a) = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 < r^2\}$ , deci interiorul sferei de centru  $a(a_1, a_2, a_3)$  și rază  $r$ .

**2.6.5 Definiție.** Mulțimea  $W_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq r\}$  se numește sferă închisă de centru  $a$  și rază  $r$ .

În continuare se vor face referiri la sfere deschise. Se demonstrează:

**2.6.6 Teoremă.** *Orice sferă de centru  $a$  conține un interval  $n$ -dimensional care conține  $a$ ; reciproc, orice astfel de interval conține o sferă de centru  $a$ .*

**2.6.7 Definiție.** Se numește vecinătate a lui  $a \in \mathbb{R}^n$  orice mulțime care conține o sferă  $V_r(a)$  de centru  $a$ .

Se demonstrează:

**2.6.8 Teoremă.** *O mulțime  $V$  este o vecinătate a unui punct  $a \in \mathbb{R}^n$  dacă și numai dacă există un interval  $n$ -dimensional  $I$ , astfel ca  $a \in I \subset V$ .*

**2.7 Mulțimi deschise în  $\mathbb{R}^n$** 

**2.7.1 Definiție.** Fie  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  și  $a \in A$ . Punctul  $a$  este un punct interior al mulțimii  $A$  dacă există o vecinătate  $V$  a lui  $a$  conținută în  $A$ ,

$$a \in V \subset A,$$

adică mulțimea  $A$  este ea însăși o vecinătate a lui  $a$ .

**2.7.2 Observație.** Mulțimea tuturor punctelor interioare lui  $A$  se numește interiorul mulțimii  $A$  și se notează  $\text{Int } A$ ; este evidentă incluziunea  $\text{Int } A \subset A$ .

**2.7.3 Definiție.** Mulțimea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  este deschisă  $\Leftrightarrow A = \text{Int } A$  ( $\Leftrightarrow A$  este o vecinătate al fiecărui punct al său).

Se demonstrează:

**2.7.4 Teoremă.**

(i) *Reuniunea unei familii oarecare de mulțimi deschise este o mulțime deschisă.*

(ii) *Intersecția unei familii finite de mulțimi deschise este o mulțime deschisă.*

## 2.8 Mulțimi închise. Frontieră a unei mulțimi

**2.8.1 Definiție.** Punctul  $a \in \mathbb{R}^n$  este aderent mulțimii  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  dacă orice vecinătate  $V$  a lui  $a$  conține cel puțin un punct  $x \in A$ , adică:

$$V \cap A \neq \emptyset$$

oricare ar fi vecinătatea  $V$  a lui  $a$ .

### 2.8.2 Observații.

(i) Dacă  $a \in A$ , atunci  $a$  este un punct aderent al lui  $A$ ; pot exista puncte aderente ale lui  $A$  care să nu aparțină lui  $A$ .

(ii) Mulțimea punctelor aderente lui  $A$  se numește aderența (închiderea) lui  $A$  și se notează  $\overline{A}$ ; evident  $A \subset \overline{A}$ .

**2.8.3 Definiție.** O mulțime  $A \subset \mathbb{R}^n$  este închisă dacă este egală cu închiderea sa,  $A = \overline{A}$ .

Se demonstrează:

### 2.8.4 Teoremă.

(i) *Mulțimea  $A \subset \mathbb{R}^n$  este închisă  $\Leftrightarrow$  complementara sa  $CA$  este închisă.*

(ii) *Reuniunea unei familii finite de mulțimi închise este o mulțime închisă.*

(iii) *Intersecția unei familii oarecare de mulțimi închise este o mulțime închisă.*

**2.8.5 Definiție.** Fie  $A \subset \mathbb{R}^n$ ; punctul  $a \in \mathbb{R}^n$  este punct frontieră a lui  $A$  dacă  $a$  este punct aderent atât pentru  $A$  cât și pentru  $CA$ , adică oricare ar fi  $V$  o vecinătate a lui  $a$ ,

$$V \cap A \neq \emptyset, V \cap CA \neq \emptyset.$$

Mulțimea punctelor frontieră ale lui  $A$  se numește frontiera lui  $A$  și se notează  $\text{Fr } A$ . Avem  $\text{Fr } A = \text{Fr } CA$  și  $\text{Fr } A = \overline{A} \setminus \text{Int } A$ .

## 2.9 Puncte de acumulare

**2.9.1 Definiție.** Fie  $A \subset \mathbb{R}^n$  și  $a \in \mathbb{R}^n$ . Punctul  $a$  este un punct de acumulare al lui  $A$  dacă orice vecinătate  $V$  a lui  $a$  conține cel puțin un punct  $x \neq a$  din  $A$  ( $\Leftrightarrow (\forall) V$  - vecinătate a lui  $A$ ,  $(V \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$ ).

**2.9.2 Observații.**

(i) Orice punct de acumulare al lui  $A$  este punct aderent al lui  $A$ , deci mulțimea punctelor de acumulare e conținută în închiderea  $\overline{A}$  a lui  $A$ .

(ii) Un punct aderent  $a \in \overline{A}$  care nu aparține lui  $A$  este în mod necesar punct de acumulare al lui  $A$ .

(iii) Punctele lui  $A$  nu sunt în mod necesar puncte de acumulare ale lui  $A$ .

(iv) Punctul  $b \in A$  e izolat dacă nu e punct de acumulare.

Se demonstrează:

**2.9.3 Teoremă.**  $A \subset \mathbb{R}^n$  este închisă  $\Leftrightarrow A$  își conține toate punctele de acumulare.

**2.10 Mulțimi mărginite. Mulțimi compacte. Mulțimi conexe**

**2.10.1 Definiție.** Mulțimea  $A \subset \mathbb{R}^n$  e mărginită dacă există o sferă cu centrul în origine care conține mulțimea  $A$ , adică:

$$(\exists) M > 0 \text{ a. î. } \|x\| \leq M, (\forall) x \in A.$$

**2.10.2 Definiție.** Mulțimea  $A \subset \mathbb{R}^n$  e compactă dacă e mărginită și închisă.

**2.10.3 Definiție.** Mulțimea  $A \subset \mathbb{R}^n$  este conexă dacă nu există nici o pereche de mulțimi deschise  $G_1$  și  $G_2$  astfel ca:

$$A \subset G_1 \cup G_2, A \cap G_1 \neq \emptyset, A \cap G_2 \neq \emptyset \text{ și } (A \cap G_1) \cap (A \cap G_2) = \emptyset.$$

**2.11 Șiruri de puncte din spațiul  $\mathbb{R}^n$** 

**2.11.1 Definiție.** O funcție  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$  se numește șir de puncte din spațiul  $\mathbb{R}^n$ . Se va nota prescurtat  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ .

**2.11.2 Definiție.** Punctul  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  este limita șirului  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  din  $\mathbb{R}^n$  dacă în afara oricărei vecinătăți a lui  $x_0$  se găsesc cel mult un număr finit de termeni ai șirului. Se utilizează notația  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$ .

**2.11.3 Observație.** Dacă  $V_\varepsilon(x_0)$  e o vecinătate a lui  $x_0$ , atunci  $x_k \in V_\varepsilon(x_0) \Leftrightarrow \|x_k - x_0\| < \varepsilon$ .

Se demonstrează următoarele rezultate:

**2.11.4 Teoremă.**  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0 \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow (\forall) \varepsilon > 0 (\exists) N = N(\varepsilon) \text{ a. } \hat{i}.$   
 $(\forall) n \geq N, \|x_k - x_0\| < \varepsilon.$

**2.11.5 Teoremă.** *Limita unui șir convergent e unică (un șir din  $\mathbb{R}^n$  se numește convergent dacă are limită).*

**2.11.6 Teoremă.** *Fie  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$  un șir de numere reale cu proprietatea  $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0.$  Dacă  $\|x_k - x_0\| \leq \alpha_k, (\forall) k \in \mathbb{N}, k \geq k_0,$  atunci  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0.$*

**2.11.7 Teoremă.** *Dacă  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| = \|x_0\|.$*

**2.11.8 Teoremă.** *Orice șir convergent  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  din  $\mathbb{R}^n$  este mărginit, adică  $(\exists) M > 0 \text{ a. } \hat{i}. \|x_k\| \leq M, (\forall) k \in \mathbb{N}.$*

**2.11.9 Definiție.** Șirul  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$  este fundamental (Cauchy)  $\Leftrightarrow (\forall) \varepsilon > 0 (\exists) N = N(\varepsilon) \text{ a. } \hat{i}. (\forall) p \geq N, (\forall) q \geq N$

$$\|x_p - x_q\| < \varepsilon.$$

**2.11.10 Teoremă. (Criteriul Cauchy)** *Șirul  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$  este convergent  $\Leftrightarrow (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  este fundamental.*

**2.11.11 Teoremă.** *Un șir  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$  are limita  $a \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow$  pentru fiecare  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  șirul coordonatelor  $(x_{i,k})_{k \in \mathbb{N}}$  are limita  $a_i = pr_i a.$*

**2.11.12 Exemple.**

$$(i) (x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0) \Leftrightarrow \begin{cases} x_n \rightarrow x_0 \\ y_n \rightarrow y_0. \end{cases}$$

$$(ii) (x_n, y_n, z_n) \rightarrow (x_0, y_0, z_0) \Leftrightarrow \begin{cases} x_n \rightarrow x_0 \\ y_n \rightarrow y_0 \\ z_n \rightarrow z_0. \end{cases}$$

## Capitolul 3

# Funcții definite pe mulțimi din $\mathbb{R}^n$

### 3.1 Funcții reale de variabilă vectorială

**3.1.1 Definiție.** Fie  $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $D_f \neq \emptyset$ . O funcție  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x_1, \dots, x_n) \in D_f \rightarrow f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$$

se numește reală de variabila vectorială  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .

#### 3.1.2 Observații.

- (i) Mulțimea  $D_f$  se numește domeniul maxim de definiție al funcției  $f$ .
- (ii) O primă problemă (importantă!) care se pune în legătură cu funcțiile reale de variabilă vectorială este aceea a determinării domeniului maxim de definiție.

**3.1.3 Exemple.** (De determinare a domeniului maxim de definiție).

Aflați domeniile maxime de definiție ale funcțiilor definite prin legile de mai jos:

(i)  $f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1}$ ;

(ii)  $f(x, y) = \ln(1 - |x| - |y|)$ ;

(iii)  $f(x, y, z) = \frac{2x+3y+z}{\sqrt{4-x^2-y^2-z^2}}$ ;

(iv)  $f(x, y) = \frac{xy}{x-y}$ ;

(v)  $f(x, y) = \arccos \frac{x}{x+y}$ ;

(vi)  $f(x, y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}$ ;

(vii)  $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2+y^2-z}$ .

**Soluție.** (i)  $D_f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 \geq 0 \right\}$  – exteriorul și frontiera elipsei de ecuație ( $E$ ):  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0$ .

(ii)  $D_f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - |x| - |y| > 0 \right\} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1 \right\}$  – interiorul pătratului de vârfuri  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(-1, -1)$ .

(iii)  $D_f = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4 - x^2 - y^2 - z^2 > 0 \right\} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 4 \right\}$  – interiorul sferei de centru  $(0, 0, 0)$  și rază  $r = 2$ .

(iv)  $D_f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \neq 0 \right\} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y \right\}$  – punctele planului  $\mathbb{R}^2$  nesituate pe prima bisectoare.

(v)  $D_f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left| \frac{x}{x+y} \right| \leq 1 \right\}$  (rămâne în seama cititorului explicarea (precizarea) geometrică a lui  $D_f$ ).

(vi)  $D_f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x^2 \geq 0 \wedge 1 - y^2 \geq 0 \right\} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1] \wedge y \in [-1, 1] \right\} = [-1, 1] \times [-1, 1]$ .

(vii)  $D_f = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z \neq 0 \right\}$ .

**3.1.4 Definiție.** Funcția  $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e mărginită dacă și numai dacă  $(\exists) M \geq 0$  a. î.  $|f(x)| \leq M$ ,  $(\forall) x = (x_1, \dots, x_n) \in D_f$ .

## 3.2 Limitele funcțiilor reale de variabilă vectorială

**3.2.1 Definiție.** Fie  $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  punct de acumulare al lui  $D_f$  și  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ . Numărul  $l \in \overline{\mathbb{R}}$  este limita funcției  $f$  în punctul  $x_0$  dacă și numai dacă pentru orice vecinătate  $U$  a lui  $l$  (în  $\overline{\mathbb{R}}$ ) există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$  (în  $\mathbb{R}^n$ ) astfel ca  $(\forall) x \in V \cap D_f$ ,  $x \neq x_0$  să avem  $f(x) \in U$ .

În caz afirmativ se utilizează notația  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ .

Teoremele de mai jos dau definiții echivalente pentru limita unei funcții într-un punct.

### 3.2.2 Teoremă. (De caracterizare cu ajutorul șirurilor)

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow$  [pentru orice șir  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset D_f \setminus \{x_0\}$  convergent cu

$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = l$ ].

### 3.2.3 Teoremă. (De caracterizare "ε, δ")

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow$  [( $\forall$ )  $\varepsilon > 0$  ( $\exists$ )  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  a. î. ( $\forall$ )  $x \in D_f$ ,  $x \neq x_0$  cu  $\|x - x_0\| < \delta$  să avem  $|f(x) - l| < \varepsilon$ ].

În continuare vom face referiri la funcțiile reale de două și respectiv trei variabile reale, acestea fiind funcțiile ce intervin cel mai des în științele ingineresti.

**3.2.4 Definiție.** Fie  $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  un punct de acumulare al lui  $D_f$  iar  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ . Se numesc limite parțiale ale funcției  $f$  în punctul  $(x_0, y_0)$  următoarele funcții reale de o variabilă reală:

$$\varphi(x) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y), \quad \psi(y) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y).$$

Se numesc limite iterate ale funcției  $f$  în punctul  $(x_0, y_0)$  următoarele limite:

$$l_{12} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right), \quad l_{21} = \lim_{y \rightarrow y_0} \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \right).$$

**3.2.5 Observație.** Considerații analoge se pot face pentru funcțiile reale de  $n$  variabile reale ( $n \geq 3$ ).

Se demonstrează:

**3.2.6 Teoremă.** Fie  $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  punct de acumulare al lui  $D_f$  iar  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ . Dacă există  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = l$  și există una din limitele  $l_{12}$  sau  $l_{21}$ , atunci  $l = l_{12} = l_{21}$ .

**3.2.7 Observații.**

(i) Dacă există numai una din limitele:

$$l = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y), \quad l_{12} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right), \quad l_{21} = \lim_{y \rightarrow y_0} \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \right)$$

nu rezultă că există și celelalte două.

(ii) Dacă nu există  $l = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$ , este posibil să existe ambele limite iterate; în acest caz  $l_{12} \neq l_{21}$ .

(iii) Este posibil ca, deși  $(x_0, y_0)$  e punct de acumulare al lui  $D_f$ , mulțimea  $\{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in D_f\}$  să nu-l aibă pe  $x_0$  ca punct de acumulare, oricare ar fi  $y$ . În acest caz nu are sens  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$  oricare ar fi  $y$ .

**3.2.8 Observație. (Metodă practică)**

Presupunem că  $(0, 0)$  este punct de acumulare al lui  $D_f$ ,  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  și avem de calculat  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ .

Parcurgem etapele următorului algoritm:

1°. Se face schimbarea de variabilă  $y = mx$ ;

2°. Se determină  $f(x, mx)$ ;

3°. Se calculează  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx)$ ; sunt posibile situațiile:

(i)  $(\exists) \lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx)$  și aceasta este independentă de  $m$ ; în acest caz

$$(\exists) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx).$$

- (ii)  $(\exists) \lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx)$  dar valoarea ei depinde de  $m$ ; în acest caz  
 $(\cancel{A}) \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$ .  
 (iii)  $(\cancel{A}) \lim_{x \rightarrow 0} f(x, mn)$ ; în acest caz  $(\cancel{A}) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ .

Algoritmul prezentat se numește ”metoda dreptei variabile”. Poate fi aplicat și pentru calculul limitelor de forma  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$ . În acest caz se folosește schimbarea de variabilă  $y = y_0 + m(x - x_0)$ .

### 3.2.9 Aplicații. (La metoda dreptei variabile)

Calculați limitele de mai jos:

- (i)  $l_1 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ ;                      (ii)  $l_2 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3xy^6}{x^2 + y^{12}}$ ;  
 (iii)  $l_3 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-y}{x+y}$ ;                      (iv)  $l_4 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x+y}$ ;  
 (v)  $l_5 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2}$ ;                      (vi)  $l_6 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+2y}{x-3y}$ ;  
 (vii)  $l_7 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$ ;  
 (viii)  $l_8 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ ;                      (ix)  $l_9 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ .

#### Soluție.

(i) Nedeterminarea e de formă  $\frac{0}{0}$ ; folosim metoda dreptei variabile și punând  $y = mx$  găsim:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1 - m^2)}{x^2(1 + m^2)} = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}.$$

Cum rezultatul depinde de  $m \Rightarrow (\cancel{A}) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ .

(ii) Analog cu (i), avem (punând  $y^6 = m$ )

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3xy^6}{x^2 + y^{12}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3mx^2}{x^2(1 + m^2)} = \frac{3m}{1 + m^2} \Rightarrow (\cancel{A}) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3xy^6}{x^2 + y^{12}}.$$

$$(iii) l_3 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-y}{x+y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1-m)}{x(1+m)} = \frac{1-m}{1+m} \Rightarrow (\cancel{A}) l_3.$$

$$(iv) l_4 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x+y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{x(1+m)} = 0 \Rightarrow (\exists) l_4 \text{ și } l_4 = 0.$$

$$(v) l_5 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^5}{x^2(1+m^2)} = 0 \Rightarrow (\exists) l_5 \text{ și } l_5 = 0.$$

$$(vi) l_6 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+2y}{x-3y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1+2m)}{x(1-3m)} = \frac{1+2m}{1-3m} \Rightarrow (\cancel{A}) l_6.$$



$$(vii) \quad l_7 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2(1 + m^2) \sin \frac{1}{x^2(1+m^2)} =$$

$$(1 + m^2) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x^2(1+m^2)}. \text{ Cum } \left| \sin \frac{1}{x^2(1+m^2)} \right| \leq 1 \Rightarrow l_7 = 0.$$

$$(viii) \quad l_8 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m x^3}{x^2(1+m^2)} = 0.$$

$$(ix) \quad l_9 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3(1+m^3)}{x^2(1+m^2)} = 0.$$

### 3.2.10 Observații.

(i) "Metoda dreptei variabile" se aplică în general în cazul calculului limitelor funcțiilor raționale, pentru eliminarea nedeterminărilor de forma  $\frac{0}{0}$ .

(ii) În cazul funcțiilor reale de trei variabile reale, se aplică "metoda curbelor variabile", pe care o vom exemplifica mai jos.

### 3.2.11 Aplicații. (La metoda curbelor variabile)

Să se calculeze limitele de mai jos:

$$(i) \quad l_1 = \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{2x+y-z}{3x+2y+4z};$$

$$(ii) \quad l_2 = \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{2x+3y^2+4z^3}{5x+4y^4+z^2};$$

$$(iii) \quad l_3 = \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} x \frac{y-z}{y+z}.$$

**Soluție.** Descriem pe scurt metoda:

- se fac schimbările:  $x = at$ ,  $y = bt$ ,  $z = ct$ ; atunci  $t \rightarrow 0 \Leftrightarrow (x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)$ ;

- în caz că valoarea limitei funcției în  $t$  este independentă de  $a, b, c$ , aceasta este limita funcției în  $(0, 0, 0)$ ; în caz contrar, limita nu există.

$$(i) \quad x = at, \quad y = bt, \quad z = ct \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l_1 = \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{2x + y - z}{3x + 2y + 4z} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(2a + b - c)}{t(3a + 2b + 4c)} = \frac{2a + b - c}{3a + 2b + 4c}.$$

$$\text{Cum } l_1 \text{ depinde de } a, b, c \Rightarrow (\cancel{A}) \quad \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{2x+y-z}{3x+2y+4z}.$$

$$(ii) \quad x = at, \quad y = bt, \quad z = ct \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l_2 = \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{2x + 3y^2 + 4z^3}{5x + 4y^4 + z^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(2a + 3b^2t^2 + 4c^3t^2)}{t(5a + 4b^4t^3 + c^2t)} = \frac{2a}{5a} = \frac{2}{5}.$$

$$\text{Cum } l_2 \text{ este independent de } a, b, c \Rightarrow l_2 = \frac{2}{5} = \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{2x+3y^2+4z^3}{5x+4y^4+z^2}.$$

(iii)  $x = at, y = bt, z = ct \Rightarrow$

$$\Rightarrow l_3 = \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} x \frac{y-z}{y+z} = \lim_{t \rightarrow 0} at \frac{t(b-c)}{t(b+c)} = 0.$$

### 3.2.12 Observații.

(i) Pentru operațiile cu limite de funcții reale de  $n$  variabile reale se păstrează regulile de calcul din cazul funcțiilor reale de o variabilă reală.

(ii) Nedeterminările în cazul operațiilor cu funcții reale de  $n$  variabile reale sunt aceleași ca în cazul funcțiilor reale de o variabilă reală.

## 3.3 Continuitatea funcțiilor reale de $n$ variabile reale

**3.3.1 Definiție.** Fie  $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$  și  $x_0 \in D_f$ . Funcția  $f$  este continuă în  $x_0$  dacă și numai dacă pentru orice vecinătate  $U$  a lui  $f(x_0)$  există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$  astfel ca  $(\forall) x \in V \cap D_f$  să avem  $f(x) \in U$ .

### 3.3.2 Observații.

(i) Dacă  $x_0 \in D_f$  e un punct izolat al lui  $D_f$ , atunci  $f$  e continuă în  $x_0$ .

(ii) Dacă  $x_0 \in D_f$  e un punct de acumulare al lui  $D_f$ , atunci  $f$  e continuă în  $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  (în sensul definiției limitei unei funcții reale de  $n$  variabile reale).

(iii) Dacă  $f$  e continuă în fiecare punct al lui  $D_f$ , funcția  $f$  se numește continuă pe  $D_f$ .

(iv) Funcțiile elementare de  $n$  variabile reale sunt continue pe domeniul maxim de definiție.

### 3.3.3 Aplicații. (Determinarea domeniului de continuitate)

Pentru fiecare din funcțiile de mai jos, să se determine domeniul de continuitate  $D_C$ :

$$(i) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 2, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(ii) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(iii) f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(iv) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{1 + x^2 + y^2} - 1}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 2, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(v) f(u, v) = \begin{cases} \frac{u^2v}{u^2+v^2}, & (u, v) \neq (0, 0) \\ 0, & (u, v) = (0, 0) \end{cases}$$

**Soluție.**

(i) Pe  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,  $f$  e continuă (elementară). Cum  $(0, 0)$  e punct de acumulare al lui  $\mathbb{R}^2$ ,  $f$  - continuă în  $(0, 0) \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0, 0) = 2$ .

Pentru a calcula  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  aplicăm metoda drepteii variabile. Deci facem schimbarea de variabilă  $y = mx$  și

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1 - m^2)}{x^2(1 + m^2)} = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}.$$

Prin urmare,  $(\nexists) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ . Domeniul de continuitate al funcției date este deci  $D_C = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

(ii) Sunt valabile considerațiile de la (i). Rămâne de văzut dacă  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ . Avem:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 x^2 (1 + m^2)}{|t|x(1 + m)} = 0 = f(0, 0).$$

Prin urmare  $f$  e continuă și în  $(0, 0)$  și deci  $D_C = \mathbb{R}^2$ .

(iii) Analog cu punctele precedente, avem:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) &= \lim_{x \rightarrow 0} x^2(1 + m^2) \sin \frac{1}{mx^2} = (1 + m^2) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{mx^2} = \\ &= (1 + m^2)0 = 0 \neq 2 = f(0, 0). \end{aligned}$$

Deci  $f$  nu e continuă în  $(0, 0)$  și ca atare  $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

(iv) Analog cu punctele precedente se obține  $D_f = \mathbb{R}^2$ .

**3.3.4 Definiție.** Die  $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Funcția  $f$  este uniform continuă pe  $D_f \Leftrightarrow [(\forall) \varepsilon > 0 (\exists) \delta = \delta(\varepsilon)$  a. î.  $(\forall) x', x'' \in D_f$  cu proprietatea  $\|x' - x''\| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon]$ .

**3.3.5 Observații.**

(i) Dacă  $n = 1 \Rightarrow D_f \subset \mathbb{R}$ . Funcția  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  e uniform continuă pe  $D_f \Leftrightarrow [(\forall) \varepsilon > 0 (\exists) \delta = \delta(\varepsilon) > 0$  a. î.  $(\forall) x', x'' \in D_f$  cu proprietatea  $|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon]$ .

(ii) Dacă  $n = 2 \Rightarrow D_f \in \mathbb{R}^2$ . Funcția  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  e uniform continuă pe  $D_f \Leftrightarrow [(\forall) \varepsilon > 0 (\exists) \delta = \delta(\varepsilon)$  a. î.  $(\forall) x' = (x'_1, x'_2), (\forall) x'' = (x''_1, x''_2) \in D_f$  cu proprietatea  $\|x' - x''\| = \sqrt{(x'_1 - x''_1)^2 + (x'_2 - x''_2)^2} < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon]$ .

(iii) Considerații analoge celor de la (i) și (ii) se fac pentru  $n \geq 3$ .

Menționăm următoarea legătură între funcțiile continue și uniform continue de  $n$  variabile reale.

**3.3.6 Teoremă.** Fie  $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$  și  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ . Sunt adevărate afirmațiile de mai jos:

(i) Dacă  $f$  e uniform continuă pe  $D_f \Rightarrow f$  - continuă pe  $D_f$ .

(ii) Dacă  $D_f$  e compactă, atunci  $f$  - uniform continuă pe  $D_f \Leftrightarrow f$  - continuă pe  $D_f$ .

Proprietăți importante ale funcțiilor continue pe o mulțime compactă  $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$  sunt conținute în:

**3.3.7 Teoremă.** Fie  $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$  compactă iar  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ . Dacă  $f$  este continuă pe  $D_f$ , atunci  $f$  e mărginită și își atinge marginile pe  $D_f$ .

## 3.4 Derivate parțiale

Pentru fixarea ideilor ne referim la funcții reale de două variabile reale, situația numărului de variabile  $n > 2$  tratându-se analog.

**3.4.1 Definiție.** Fie  $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $(x_0, y_0) \in D_f$  punct de acumulare iar  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ . Funcția  $f$  e derivabilă parțial în raport cu  $x$  în  $(x_0, y_0)$  dacă limita de mai jos există și este finită:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

În caz afirmativ, valoarea limitei precedente se numește derivata parțială de ordinul întâi a lui  $f$  în raport cu  $x$  în punctul  $(x_0, y_0)$  și se notează prin  $f'_x \rightarrow (x_0, y_0)$  sau  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ .

Analog se definește derivata parțială de ordinul întâi în raport cu  $y$  în punctul  $(x_0, y_0)$ . Ea se notează prin  $f'_y(x_0, y_0)$  sau  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ .

### 3.4.2 Observații.

(i) Dacă  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  e derivabilă parțial în raport cu  $x$  în fiecare punct  $(x, y) \in D_f$ , se spune că  $f$  e derivabilă parțial în raport cu  $x$  pe  $D_f$ . Derivata parțială de ordinul întâi în raport cu  $x$  într-un punct  $(x, y) \in D_f$  se notează  $f'_x(x, y)$  sau  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ .

(ii) Analog cu (i),  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  e derivabilă parțial în raport cu  $y$  pe  $D_f$  dacă e derivabilă parțial în raport cu  $y$  în fiecare punct  $(x, y) \in D_f$ . Derivata parțială de ordinul întâi în raport cu  $y$  în  $(x, y) \in D_f$  se notează cu  $f'_y(x, y)$  sau  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ .

(iii) Pentru calculul derivatelor parțiale se păstrează regulile de calcul din cazul funcțiilor de o variabilă, cu observația că se consideră variabila numai aceea în raport cu care se efectuează derivarea ( $x$ , când se calculează  $f'_x$ , respectiv  $y$  când se calculează  $f'_y$ ).

(iv) Funcțiile elementare sunt derivabile parțial pe interiorul domeniului maxim de definiție.

### 3.4.3 Exemple. (De calcul a derivatelor parțiale de ordinul I)

(i) Folosind definiția să se calculeze  $f'_x, f'_y$  în punctele indicate:

(a)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x^2 + x^2y + y^2$  în punctul  $(1, 2)$ ;

(b)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2+1}$  în punctul  $(0, -1)$ .

**Soluție.**

$$(a) \quad f'_x(1, 2) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x, 2) - f(1, 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{x - 1} = 6$$

$$f'_y(1, 2) = \lim_{y \rightarrow 2} \frac{f(1, y) - f(1, 2)}{y - 2} = \lim_{y \rightarrow 2} \frac{y^2 + y - 6}{y - 2} = 5.$$

(b) Analog cu (a), se obțin:  $f'_x(0, -1) = 0$ ;  $f'_y(0, -1) = 0$ .

(ii) Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcțiilor de mai jos într-un punct arbitrar al domeniului de definiție:

(a)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = (x^2 + xy)e^{-x^2y}$ ;

(b)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$ ;

(c)  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = \arctg \frac{y}{x}$ ;

(d)  $f : ]0, +\infty[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = y \ln x$ ;

(e)  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : x = 0 \text{ sau } y = 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x^2y + \frac{x}{y} + \frac{y^2}{x}$ .

**Soluție.**

$$(a) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (x^2 + xy)'_x e^{-x^2y} + (x^2 + xy)(e^{-x^2y})'_x =$$

$$= (2x + y)e^{-x^2y} - 2xy(x^2 + xy)e^{-x^2y} =$$

$$= (2x + y - 2x^3y - 2x^2y^2)e^{-x^2y} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) =$$

$$= (x^2 + xy)'_y e^{-x^2y} + (x^2 + xy)(e^{-x^2y})'_y =$$

$$= xe^{-x^2y} - x^2(x^2 + xy)e^{-x^2y} = x(1 - x^3 - x^2y)e^{-x^2y}$$

$$\begin{aligned}
\text{(b)} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{2x}{x^2+y^2+1}, \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2x}{x^2+y^2+1}. \\
\text{(c)} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \left(\frac{y}{x}\right)'_x = \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{-y}{x^2} = -\frac{y}{x^2+y^2}; \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}; \\
\text{(d)} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{y}{x}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{x}; \\
\text{(e)} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2xy + \frac{1}{y} - \frac{y^2}{x^2} = \frac{2x^3+x^2-y^3}{x^2y} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x^2 - \frac{x}{y^2} + \frac{2y}{x} = \frac{x^3y^2-x^3+2y^3}{xy^2}.
\end{aligned}$$

**3.4.4 Definiție.** (i) Presupunem că  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  ( $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ ) e derivabilă parțial în raport cu  $x$  pe  $D_f$ , deci  $f'_x : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ . Dacă  $f'_x$  este la rândul ei derivabilă în raport cu  $x$  pe  $D_f$ , se spune că  $f$  este de două ori derivabilă parțial pe  $D_f$  în raport cu  $x$ . Derivata parțială a lui  $f'_x$  în raport cu  $x$  se numește derivata parțială de ordinul doi a lui  $f$  în raport cu  $x$  și se notează prin  $f''_{xx}$  sau  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ . Deci:

$$f''_{xx}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right].$$

(ii) Presupunem că  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  e derivabilă parțial în raport cu  $x$  pe  $D_f$ ,  $f'_x : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ . Dacă  $f'_x$  e derivabilă parțial în raport cu  $y$  pe  $D_f$ , funcția  $f$  e de două ori derivabilă parțial pe  $D_f$ , în raport cu  $x$  și  $y$ . Derivata parțială  $(f'_x)_y$  se numește derivata parțială de ordinul doi a lui  $f$  în raport cu  $x$  și  $y$ ; se notează prin  $f''_{xy}$  sau  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ . Deci

$$f''_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right].$$

(iii) Presupunem că  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  e derivabilă parțial în raport cu  $y$  pe  $D_f$ ,  $f'_y : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ . Dacă  $f'_y$  e derivabilă parțial în raport cu  $y$  pe  $D_f$ , atunci  $f$  e de două ori derivabilă parțial în raport cu  $y$  pe  $D_f$ . Derivata parțială a lui  $f'_y$  în raport cu  $y$  se numește derivata parțială de ordinul doi a lui  $f$  în raport cu  $y$  și se notează prin  $f''_{yy}$  sau  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ . Deci

$$f''_{yy}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right].$$

(iv) Presupunem că  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  e derivabilă parțial în raport cu  $y$  pe  $D_f$ ,  $f'_y : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ . Dacă  $f'_y$  e derivabilă în raport cu  $x$  pe  $D_f$ , atunci  $f$  e de două ori derivabilă pe  $D_f$  în raport cu  $y$  și  $x$ . Derivata parțială a lui  $f'_y$  în

raport cu  $x$  se numește derivata parțială de ordinul doi a lui  $f$  în raport cu  $y$  și  $x$ ; se notează prin  $f''_{yx}$  sau  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ . Deci

$$f''_{yx}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right].$$

**3.4.5 Observații.** (i) Derivatele parțiale  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  se numesc derivate parțiale mixte de ordinul doi ale funcției  $f$ .

(ii) Se poate întâmpla ca într-un punct  $(x, y) \in D_f$  să existe  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  dar  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  să nu existe (sau invers). Chiar dacă  $(\exists) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$  și  $(\exists) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$ , în general  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$ .

Situația în care derivatele parțiale mixte sunt egale e precizată în

**3.4.6 Teoremă. (Schwarz)**

Dacă  $(x_0, y_0) \in D_f$  e un punct de acumulare, iar  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  are proprietățile:

(i)  $(\exists) f''_{xy}, f''_{yx}$  pe  $D_f$ ;

(ii)  $f''_{xy}, f''_{yx}$  sunt continue într-o vecinătate a lui  $(x_0, y_0)$ .

Atunci  $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$ .

**3.4.7 Exemple. (De calcul a derivatelor parțiale de ordinul doi)**

Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul doi ale funcțiilor:

(i)  $f : \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$   $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ ;

(ii)  $f : \mathbb{R} \times ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$   $f(x, y) = x \ln y$ .

**Soluție.**

$$\begin{aligned} (i) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{2x}{x^2 + y^2}; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \left( \frac{2x}{x^2 + y^2} \right)'_x = 2 \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = 2 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \left( \frac{2x}{x^2 + y^2} \right)'_y = 2x \frac{-2y}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{2y}{x^2 + y^2}; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= \left( \frac{2y}{x^2 + y^2} \right)'_x = 2y \frac{-2x}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \left( \frac{2y}{x^2 + y^2} \right)'_y = 2 \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 2 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Se observă că  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$ ,  $(\forall) (x, y) \in D_f$ .

$$(ii) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \ln y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = (\ln y)'_y = \frac{1}{y}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{y}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \left(\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \left(\frac{x}{y}\right)'_y = -\frac{x}{y^2}.$$

Se observă că și în acest caz  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$ ,  $(\forall) (x, y) \in D_f$ .

### 3.4.8 Exemple. (Identități cu derivate parțiale).

Arătați că funcțiile de mai jos satisfac respectiv relațiile indicate:

$$(i) f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = e^x \cos y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0, \quad (\forall) (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

$$(ii) f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \ln(x^2 + xy + y^2)$$

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2, \quad (\forall) (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

$$(iii) f : D_f \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = xy + x \cdot e^{\frac{y}{x}}$$

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy + f(x, y), \quad (\forall) (x, y) \in D_f, \text{ unde}$$

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}.$$

**Soluție.** (i)  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^x \cos y$ ;  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = e^x \cos y$ ;

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -e^x \sin y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -e^x \cos y. \text{ Deci}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = e^x \cos y - e^x \cos y = 0, \quad (\forall) (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

$$(ii) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x+y}{x^2+y^2+xy}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x+2y}{x^2+y^2+xy}. \text{ Prin urmare}$$

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x(2x+y) + y(x+2y)}{x^2+y^2+xy} = \frac{2(x^2+y^2+xy)}{x^2+y^2+xy} = 2,$$

$$(\forall) (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

$$(iii) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y + e^{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x} e^{\frac{y}{x}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + e^{\frac{y}{x}}. \text{ Deci}$$

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xy + x e^{\frac{y}{x}} - y e^{\frac{y}{x}} + xy + y e^{\frac{y}{x}} = 2xy + x e^{\frac{y}{x}} =$$

$$= 2xy + f(x, y), \quad (\forall) (x, y) \in D_f.$$



**3.4.9 Observații.** (i) Derivatele parțiale de ordin superior se definesc prin relația de recurență  $\partial^n = \partial(\partial^{n-1})$ .

(ii) Derivatele parțiale ale funcțiilor reale de  $n$  variabile reale se definesc analog cu derivatele parțiale ale funcțiilor reale de 2 variabile reale.

### 3.5 Derivarea funcțiilor compuse

Acest paragraf este dedicat abordării unor probleme simple din punct de vedere teoretic, dar care au o mare importanță în studiul unor discipline ingineresti (mecanică, rezistența materialelor).

**3.5.1 Teoremă.** Dacă  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  și

(i)  $u, v : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  au derivate continue pe  $]a, b[$ ;

(ii)  $(u(x), v(x)) \in D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $(\forall) x \in ]a, b[$ ;

(iii)  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  are derivate parțiale de ordinul întâi continue pe  $D_f$ ,

atunci  $F : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = f(u(x), v(x))$  e derivabilă pe  $]a, b[$  și are loc egalitatea

$$F'(x) = \frac{\partial f}{\partial u}(u(x), v(x))u'(x) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(x), v(x))v'(x), \quad (\forall) x \in ]a, b[.$$

**3.5.2 Aplicații. (Ale teoremei 3.5.1)**

1°. Fie  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \sqrt{u^2(x) + v^2(x)}$  unde  $u, v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$  sunt funcții de două ori derivabile pe  $\mathbb{R}$ . Să se calculeze  $F'(x)$  și  $F''(x)$ .

**Soluție.** După teorema 3.5.1 avem:

$$\begin{aligned} F'_x &= \left( \sqrt{u^2(x) + v^2(x)} \right)'_u u'(x) + \left( \sqrt{u^2(x) + v^2(x)} \right)'_v v'(x) = \\ &= \frac{u(x)}{\sqrt{u^2(x) + v^2(x)}} u'(x) + \frac{v(x)}{\sqrt{u^2(x) + v^2(x)}} v'(x). \end{aligned}$$

Aplicând din nou teorema 3.5.1 găsim (pentru simplificarea notației punem  $u'(x) = u'$ ,  $v'(x) = v'$ ):

$$\begin{aligned} F''(x) &= \left( \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right)'_u u' + \left( \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right)'_v u' + \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} u'' + \\ &+ \left( \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right)'_u v' + \left( \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right)'_v v' + \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} v'' = \\ &= \frac{u' \sqrt{u^2 + v^2} - u \frac{2uu'}{2\sqrt{u^2 + v^2}}}{u^2 + v^2} u' - \frac{u \frac{2v}{2\sqrt{u^2 + v^2}} v'}{u^2 + v^2} u' + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} u'' - \frac{v \frac{2u}{2\sqrt{u^2+v^2}} u'}{u^2+v^2} v' + \frac{v' \sqrt{u^2+v^2} - v \frac{2vv'}{2\sqrt{u^2+v^2}}}{u^2+v^2} + \\
& + \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} v'' = \frac{u^2+v^2-u^2}{(u^2+v^2)\sqrt{u^2+v^2}} (u')^2 - \frac{2uv}{(u^2+v^2)\sqrt{u^2+v^2}} u'v' + \\
& + \frac{u^2+v^2-v^2}{(u^2+v^2)\sqrt{u^2+v^2}} (v') + \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} u'' + \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} v'' = \\
& = \frac{v^2}{(u^2+v^2)\sqrt{u^2+v^2}} (u')^2 - \frac{2uv}{(u^2+v^2)\sqrt{u^2+v^2}} u'v' + \\
& + \frac{u^2}{(u^2+v^2)\sqrt{u^2+v^2}} (v')^2 + \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} u'' + \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} v'' = \\
& = \frac{1}{(u^2+v^2)^{3/2}} (u'v - uv')^2 + \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}} (uu'' + vv'').
\end{aligned}$$

Deci:

$$\begin{aligned}
F''(x) &= \frac{1}{(u^2(u) + v^2(v))^{3/2}} [u'(x)v(x) - u(x)v'(x)]^2 + \\
&+ \frac{1}{\sqrt{u^2(x) + v^2(x)}} [u(x)u''(x) + v(x)v''(x)], \quad (\forall) x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

2°. Fie  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = f(u(x), v(x))$  unde  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  
 $f(u, v) = \begin{cases} \frac{u^2v}{u^2+v^2}, & (u, v) \neq (0, 0) \\ 0, & (u, v) = (0, 0), \end{cases}$  iar  $u, v : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  au derivate continue  
pe  $]a, b[$ . Să se calculeze  $\frac{\partial f}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial v}$  și să se studieze continuitatea lor în  $(0, 0)$ .  
Să se precizeze dacă are loc formula:

$$F'(x) = \frac{\partial f}{\partial u}(u(x), v(x))u'(x) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(x), v(x))v'(x).$$

**Soluție.**  $(\forall) (u, v) \neq (0, 0) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) = v \frac{2u(u^2+v^2) - 2vu^2}{(u^2+v^2)^2} = 2uv \frac{u^2+v^2-uv}{(u^2+v^2)^2}$ .

E clar că:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0, 0) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u, 0) - f(0, 0)}{u} = 0.$$

Studiem dacă  $\frac{\partial f}{\partial u}$  e continuă în  $(0, 0)$  calculând  $\lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial u}(u, v)$ . Folosim metoda dreptei variabile și avem

$$\begin{aligned}
\lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) &= 2 \lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} vu \frac{u^2+v^2-uv}{(u^2+v^2)^2} = \\
&= 2 \lim_{n \rightarrow 0} mu^3 \frac{u^2(1+m^2-m)}{u^4(1+m^2)^2} = 2m \frac{(1+m^2-m)}{(1+m^2)^2}.
\end{aligned}$$

Relația precedentă arată că  $(\nexists) \lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial u}(u,v)$ , adică  $\frac{\partial f}{\partial u}$  nu e continuă în  $(0,0)$ .

Analog,  $(\forall) (u,v) \neq (0,0)$  avem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) &= \frac{u^2(u^2+v^2) - 2u^2v^2}{(u^2+v^2)^2} = \frac{u^2(u^2-v^2)}{(u^2+v^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) &= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{f(0,v) - f(0,0)}{v} = 0. \end{aligned}$$

Ca la prima parte,

$$\begin{aligned} \lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) &= \lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{u^2(u^2-v^2)}{(u^2+v^2)^2} = \\ &= \lim_{v \rightarrow 0} m^2 v^2 \frac{v^2(m^2-1)}{v^4(m^2+1)^2} = \frac{m^2(m^2-1)}{(m^2+1)^2}, \end{aligned}$$

adică  $(\nexists) \lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)$ . Deci  $\frac{\partial f}{\partial v}$  nu e continuă în  $(0,0)$ .

Condițiile teoremei 3.5.1 nefiind îndeplinite, egalitatea nu are loc.

**3.5.3 Teoremă.** Dacă  $D_1, D \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $u, v : D_1 \rightarrow D$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F = f(u, v)$  astfel încât:

(i)  $u, v$  au derivate parțiale de ordinul întâi continue pe  $D_1$ ;

(ii)  $f$  are derivate parțiale de ordinul întâi continue pe  $D$ , atunci funcția  $F : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$  are derivate parțiale pe  $D_1$  și:

$$\begin{aligned} F'_x(x, y) &= f'_u(u, v)u'_x(x, y) + f'_v(u, v)v'_x(x, y); \\ F'_y(x, y) &= f'_u(u, v)u'_y(x, y) + f'_v(u, v)v'_y(x, y). \end{aligned}$$

### 3.5.4 Aplicații. (La teorema 3.5.3)

1°. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f = f(u)$  o funcție derivabilă iar  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x, y) = f(2x + 3y)$ ,  $(\forall) (x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Calculați  $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ ,  $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y)$ ,  $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y)$  și  $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y)$ .

**Soluție.** Avem  $u(x, y) = 2x + 3y$ ,  $F(x, y) = f(u(x, y))$ ,  $(\forall) (x, y) \in \mathbb{R}^2$ . După teorema 3.5.3 avem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= f'(u(x, y)) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 2f'(u) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= f'(u(x, y)) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 3f'(u) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}(2f'(u)) = 2f''(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 4f''(u) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(2f'(u)) = 2f''(u) \frac{\partial u}{\partial y} = 6f''(u)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(3f'(u)) = 3f''(u) \frac{\partial u}{\partial y} = 9f''(u).$$

2°. Fie  $F(x, y) = f(x + y, x^2 + y^2)$  unde  $f = f(u, v)$  are derivate parțiale continue.

Să se calculeze  $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ ,  $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y)$ ,  $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y)$  și  $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y)$ .

**Soluție.** Avem  $u(x, y) = x + y$ ,  $v(x, y) = x^2 + y^2$ . După teorema 3.5.3, avem:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + 2x \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} + 2y \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial f}{\partial u} + 2x \frac{\partial f}{\partial v} \right] = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \\ &+ 2 \frac{\partial f}{\partial v} + 2x \left( \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 2 \frac{\partial f}{\partial v} + 2x \left( \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + (2x + 1) \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 2x \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial f}{\partial v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial f}{\partial u} + 2x \frac{\partial f}{\partial v} \right] = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \\ &+ 2x \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right] = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 2x \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + 2x \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + (2x + 1) \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 2x \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial f}{\partial u} + 2y \frac{\partial f}{\partial v} \right] = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \\ &+ 2 \frac{\partial f}{\partial v} + 2y \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 2 \frac{\partial f}{\partial v} + 2y \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 2y \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + (2y + 1) \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 2y \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial f}{\partial v}.
\end{aligned}$$

Peste tot s-a aplicat teorema lui Schwarz, ale cărei ipoteze sunt îndeplinite în baza condițiilor enunțului.

3°. Fie  $F(x, y, z) = f(x, xy, xyz)$ , unde  $f = f(\alpha, \beta, \gamma)$  e o funcție ce are derivate parțiale de ordinul întâi și doi continue. Să se calculeze  $\frac{\partial F}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$ ,  $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}$  și  $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}$ .

**Soluție.** Punem  $\alpha(x, y, z) = x$ ,  $\beta(x, y, z) = xy$ ,  $\gamma(x, y, z) = xyz$ , după care aplicăm teorema 3.5.3 (în varianta pentru funcții de trei variabile). Avem:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \alpha} + y \frac{\partial f}{\partial \beta} + yz \frac{\partial f}{\partial \gamma} \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial y} = x \frac{\partial f}{\partial \beta} + xz \frac{\partial f}{\partial \gamma} \\
\frac{\partial F}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial z} = xy \frac{\partial f}{\partial \gamma}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) = \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right) + y \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial \beta} \right) + yz \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial \gamma} \right) = \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \\
&+ y \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \beta \partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \beta \partial \gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) + \\
&+ yz \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \gamma} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \beta \partial \gamma} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \gamma^2} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) = \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} + y^2 z^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \gamma^2} + 2y \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} + 2yz \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \gamma} + 2y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \beta \partial \gamma}.
\end{aligned}$$

Analog se calculează celelalte derivate parțiale cerute de enunț.

4°. Fie  $F(x, y, z) = f(xy, x^2 + y^2 - z^2, x + y + z, xy + yz)$  unde  $f = f(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  are derivate parțiale de ordinul întâi și doi continue. Să se calculeze  $\frac{\partial F}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial z}$  și  $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ .

**Soluție.** Fie  $\alpha(x, y, z) = xy$ ,  $\beta(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ ,  $\gamma(x, y, z) = x + y + z$ ,  $\delta(x, y, z) = xy + yz$ . Atunci:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \delta} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial x} = \\ &= y \frac{\partial f}{\partial \alpha} + 2x \frac{\partial f}{\partial \beta} + \frac{\partial f}{\partial \gamma} + y \frac{\partial f}{\partial \delta} \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= x \frac{\partial f}{\partial \alpha} + 2y \frac{\partial f}{\partial \beta} + \frac{\partial f}{\partial \gamma} + (x + z) \frac{\partial f}{\partial \delta} \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= -2z \frac{\partial f}{\partial \beta} + \frac{\partial f}{\partial \gamma} + y \frac{\partial f}{\partial \delta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= y \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \delta} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial x} \right] + \\ &+ 2 \frac{\partial f}{\partial \beta} + 2x \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \beta \partial \gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \beta \partial \delta} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial x} \right] + \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial \gamma \partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \gamma \partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \gamma^2} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \gamma \partial \delta} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial x} + \\ &+ y \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \delta \partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \delta \partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \delta \partial \gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \delta^2} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial x} \right).\end{aligned}$$

Ținând seama că  $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = y$ ,  $\frac{\partial \alpha}{\partial y} = x$ ,  $\frac{\partial \beta}{\partial x} = 2x$ ,  $\frac{\partial \beta}{\partial y} = 2y$ ,  $\frac{\partial \beta}{\partial z} = -2z$ ,  $\frac{\partial \gamma}{\partial x} = 1$ ,  $\frac{\partial \gamma}{\partial y} = 1$ ,  $\frac{\partial \gamma}{\partial z} = 1$ ,  $\frac{\partial \delta}{\partial x} = y$ ,  $\frac{\partial \delta}{\partial y} = x + z$ ,  $\frac{\partial \delta}{\partial z} = y$ , expresia lui  $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$  poate fi adusă la o formă mai simplă.

### 3.6 Diferențiala unei funcții reale de două variabile reale

**3.6.1 Definiție.** Fie  $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $(x_0, y_0) \in \text{Int } D_f$ ,  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ . Funcția  $f$  e diferențiabilă în  $(x_0, y_0)$  dacă există două numere reale  $\lambda$  și  $\mu$  și o funcție  $\omega : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ , continuă în  $(x_0, y_0)$  și nulă în acest punct:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \omega(x, y) = \omega(x_0, y_0) = 0$$

astfel încât  $(\forall) (x, y) \in D_f$  să aibă loc egalitatea

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \lambda(x - x_0) + \mu(y - y_0) + \omega(x, y) \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

Dacă  $D_f$  este deschisă și  $f$  e diferențiabilă în fiecare punct din  $D_f$ , se spune că  $f$  e diferențiabilă pe  $D_f$ .

Se demonstrează

**3.6.2 Teoremă.** În ipotezele definiției 3.6.1, dacă funcția  $f$  e diferentiabilă în  $(x_0, y_0)$ , atunci  $f$  are derivate parțiale de ordinul întâi în  $(x_0, y_0)$  și au loc egalitățile:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lambda, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \mu.$$

**3.6.3 Definiție.** În ipotezele definiției 3.6.1, funcția liniară de două variabile  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$  se numește diferențiala funcției  $f$  în  $(x_0, y_0)$  și se notează prin

$$df(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

**3.6.4 Observații.** i) Alegând  $f(x, y) = x$  în definiția 3.6.3  $\Rightarrow dx = x - x_0$ ; alegând  $f(x, y) = y$  în definiția 3.6.3  $\Rightarrow dy = y - y_0 \Rightarrow$

$$df(x_0, y_0)(dx, dy) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy.$$

ii) Dacă  $f$  e diferentiabilă în fiecare punct  $(x, y) \in D_f$ , atunci

$$df(x, y)(dx, dy) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy.$$

iii) Dacă  $f$  are derivate parțiale de ordinul doi continue pe  $D_f$ , diferențiala de ordinul doi a funcției  $f$  este

$$d^2 f(x, y)(dx, dy) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)dy^2,$$

unde  $dx^2 = dx dx$ ,  $dy^2 = dy dy$ .

Formal, egalitatea precedentă se scrie în forma:

$$d^2 f(x, y)(dx, dy) = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^{(2)} f(x, y).$$

iv) Diferențiala de ordinul  $n$  se definește ca diferențiala diferențialei de ordinul  $(n - 1)$ ; formal:

$$d^n f(x, y)(dx, dy) = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^{(n)} f(x, y).$$

De exemplu:

$$\begin{aligned} d^3 f(x, y)(dx, dy) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x, y)dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x, y)dx^2 dy + \\ &+ 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x, y)dx dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, y)dy^3. \end{aligned}$$

**3.6.5 Aplicații. (De calcul a diferențialei unei funcții într-un punct)**

1°. Să se calculeze  $df(1, 2)(dx, dy)$ ,  $d^2f(1, 2)(dx, dy)$ ,  $df(x, y)(dx, dy)$  pentru funcția  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 10 \ln y$ .

**Soluție.**  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y - \frac{4}{x}$ ;  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + 2y - \frac{10}{y}$

$$df(x, y)(dx, dy) = \left(2x + y - \frac{4}{x}\right) dx + \left(x + 2y - \frac{10}{y}\right) dy$$

$$df(1, 2)(dx, dy) = (2 + 1 - 4)dx + (1 + 4 - 5)dy = -dx$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 + \frac{4}{x^2};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \left(2x + y - \frac{4}{x}\right)'_y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \left(x + 2y - \frac{10}{y}\right)'_x = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2 + \frac{10}{y^2}.$$

Derivatele parțiale mixte de ordinul doi fiind egale,  $f$  e de două ori diferențiabilă și:

$$\begin{aligned} (d^2f)(x, y)(dx, dy) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)dy^2 = \\ &= \left(2 + \frac{4}{x^2}\right) dx^2 + 2dx dy + \left(2 + \frac{10}{y^2}\right) dy^2 \end{aligned}$$

$$d^2f(1, 2)(dx, dy) = 6dx^2 + 2dx dy + \frac{9}{2}dy^2.$$

2°. Să se calculeze  $df(x, y, z)(dx, dy, dz)$  și  $d^2f(x, y, z)(dx, dy, dz)$  pentru funcția  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 + 2x - y + 3z$ .

**Soluție.** Pentru funcțiile de 3 variabile, diferențiala se definește analog ca pentru funcțiile de două variabile:

$$df(x, y, z)(dx, dy, dz) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)dz;$$

$$d^2f(x, y, z)(dx, dy, dz) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz\right)^{(2)} f(x, y, z).$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2x + 2; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2y - 1; \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -2z + 3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) = 2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) = 0;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z) = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) = 2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) = 0;$$



$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, z) = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, z) = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) = -2.$$

Având în vedere cele de mai sus, avem:

$$\begin{aligned} df(x, y, z)(dx, dy, dz) &= (2x + 2)dx + (2y - 1)dy + (3 - 2z)dz \\ d^2 f(x, y, z)(dx, dy, dz) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z)dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z)dy^2 + \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z)dz^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z)dx dy + \\ &+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z)dx dz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z)dy dz = \\ &= 2dx^2 + 2dy^2 - 2dz^2. \end{aligned}$$

3°. Să se calculeze diferențialele de ordinul I și II ale funcției  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = \ln \frac{y}{x}$  unde  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y}{x} > 0\}$ .

**Soluție.**  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{1}{x}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y};$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{1}{x^2};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 0;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -\frac{1}{y^2}.$$

Prin urmare:

$$df(x, y)(dx, dy) = -\frac{1}{x} dx + \frac{1}{y} dy;$$

$$d^2 f(x, y)(dx, dy) = \frac{1}{x^2} dx^2 - \frac{1}{y^2} dy^2.$$

### 3.7 Formula lui Taylor pentru funcții reale de două variabile reale

**3.7.1 Definiție.** O mulțime  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  deschisă și conexă se numește domeniu.

**3.7.2 Teoremă. (Taylor)** Fie  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  un domeniu iar  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ . Dacă  $f$  este continuă împreună cu primele ei  $n$  derivate parțiale și există derivatele parțiale de ordin  $(n + 1)$ , atunci,  $(\forall) (x, y) \in D, (\forall) (x_0, y_0) \in D$  are loc:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \right\} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2!} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \right. \\
& + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (x_0, y_0)(y - y_0)^2 \right\} + \dots + \frac{1}{n!} \left\{ \frac{\partial^n f}{\partial x^n} (x_0, y_0)(x - x_0)^n + \right. \\
& + \binom{n}{1} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y} (x_0, y_0)(x - x_0)^{n-1}(y - y_0) + \dots \\
& + \left. \binom{n}{n-1} \frac{\partial^n f}{\partial x \partial y^{n-1}} (x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0)^{n-1} + \frac{\partial^n f}{\partial y^n} (x_0, y_0)(y - y_0)^n \right\} + \\
& + R_n(x, y)
\end{aligned}$$

unde:

$$\begin{aligned}
R_n(x, y) = & \frac{1}{(n+1)!} \left\{ \frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}} f(\xi, \eta)(x - x_0)^{n+1} + \right. \\
& + \binom{n+1}{1} \frac{\partial^{n+1}}{\partial x^n \partial y} f(\xi, \eta)(x - x_0)(y - y_0) + \\
& + \left. \binom{n+1}{n} \frac{\partial^{n+1}}{\partial x \partial y^n} f(\xi, \eta)(x - x_0)(y - y_0)^n + \frac{\partial^{n+1}}{\partial y^{n+1}} f(\xi, \eta)(y - y_0)^{n+1} \right\}
\end{aligned}$$

$$\xi = x_0 + \theta_1(x - x_0), \quad 0 < \theta_1 < 1.$$

$$\eta = y_0 + \theta_2(y - y_0), \quad 0 < \theta_2 < 1.$$

**3.7.3 Observații.** (i) Formula precedentă se numește formula lui Taylor pentru funcții de două variabile.

(ii) Dacă  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ , formula lui Taylor devine formula Mac Laurin.

(iii) Dacă  $n = 0$ , se obține formula creșterilor finite (Lagrange) pentru funcții de două variabile:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, \eta) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(\xi, \eta),$$

unde:  $\xi = x_0 + \theta_1(x - x_0)$ ,  $\eta = y_0 + \theta_2(y - y_0)$ ,  $0 < \theta_1 < 1$ ,  $0 < \theta_2 < 1$ .

### 3.7.4 Aplicații. (La formula lui Taylor)

1°. Să se scrie formula lui Taylor de ordin 2 pentru funcția  $f(x, y) = y^x$  în vecinătatea punctului  $(1, 1)$ .

**Soluție.** După teorema 3.7.2 avem:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(1, 1) + \frac{1}{1!} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)(y-1) \right\} + \\ &+ \frac{1}{2!} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1)(x-1)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1)(x-1)(y-1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1)(y-1)^2 \right\} + \\ &+ R_2(x, y). \end{aligned}$$

Calculăm acum elementele ce intervin în relația precedentă.

$$\begin{aligned} f(1, 1) &= 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= y^x \ln y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 1 \cdot \ln 1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x \cdot y^{x-1} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= y^x (\ln y)^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= y^x (\ln y)^2 + y^{x-1} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1) = 1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= x(x-1)y^{x-2} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1) = 0. \end{aligned}$$

Deci

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 1 + \frac{1}{1!}(y-1) + \frac{1}{2!}2(x-1)(y-1) + R_2(x, y) = \\ &= y + (x-1)(y-1) + R_2(x, y). \end{aligned}$$

Restul formulei are exprimarea:

$$\begin{aligned} R_2(x, y) &= \frac{1}{3!} \left\{ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\xi, \eta)(x-1)^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(\xi, \eta)(x-1)^2(y-1) + \right. \\ &\left. + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(\xi, \eta)(x-1)(y-1)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\xi, \eta)(y-1)^3 \right\} \end{aligned}$$

unde  $\xi = 1 + \theta_1(x-1)$ ,  $\eta = 1 + \theta_2(y-1)$ ,  $0 < \theta_1 < 1$ ,  $0 < \theta_2 < 1$ .

2°. Să se scrie formula Mac Laurin de ordinul doi pentru funcția  $f(x, y, z) = \cos(x + y + z)$ .

**Soluție.** Pentru funcții de trei variabile, formula lui Mac Laurin are formă asemănătoare celei pentru funcții de două variabile. În cazul nostru:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f(0, 0, 0) + \frac{1}{1!} \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0, 0)y + \frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 0)z \right] + \\ &+ \frac{1}{2!} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0, 0)x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0, 0)y^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(0, 0, 0)z^2 + \right. \\ &+ \left. 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0, 0, 0)xy + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(0, 0, 0)xz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(0, 0, 0)yz \right] + \\ &+ R_2(x, y, z), \end{aligned}$$

expresia restului conținând derivatele parțiale de ordinul trei ale funcției într-un punct  $(\xi, \eta, \tau)$ ,  $\xi = \theta_1 x$ ,  $\eta = \theta_2 y$ ,  $\tau = \theta_3 z$ ,  $0 < \theta_1 < 1$ ,  $0 < \theta_2 < 1$ ,  $0 < \theta_3 < 1$ .

$$f(0, 0, 0) = \cos 0 = 1;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = -\sin(x + y + z); \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0) = 0 \text{ și analog}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0, 0) = \frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 0) = 0;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial y}(x, y, z) = -\cos(x + y + z); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial y}(0, 0, 0) = -1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial z}(0, 0, 0) = -1;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) = -\cos(x + y + z); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0, 0) = -1; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2 \partial z}(0, 0, 0) = -1;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) = -\cos(x + y + z); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(0, 0, 0) = -1.$$

Prin urmare:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= 1 - \frac{1}{2!}(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz) + R_2(x, y, z) = \\ &= 1 - \frac{1}{2!}(x + y + z)^2 + R_2(x, y, z). \end{aligned}$$

## 3.8 Extremele funcțiilor reale de două variabile reale

**3.8.1 Definiție.** Fie  $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $(x_0, y_0) \in D_f$  și  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ . Punctul  $(x_0, y_0)$  se numește:

(i) punct de maxim local al lui  $f$ , dacă există o vecinătate  $V$  a lui  $(x_0, y_0)$  astfel ca  $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ ,  $(\forall) (x, y) \in V \cap D_f$ ;

(ii) punct de minim local al lui  $f$ , dacă există o vecinătate  $V$  a lui  $(x_0, y_0)$  astfel ca  $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ ,  $(\forall) (x, y) \in V \cap D_f$ .

Un punct de minim local sau maxim local se numește punct de extrem local.

În cele ce urmează se vor prezenta caracterizări ale punctelor de extrem local cu ajutorul derivatelor parțiale.

**3.8.2 Teoremă.** Dacă  $(x_0, y_0) \in \text{Int } D_f$  este un punct de extrem local pentru  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  iar  $f$  are derivate parțiale de ordinul I în  $(x_0, y_0)$ , atunci:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

**3.8.3 Observații.** (i) Un punct în care se anulează derivatele parțiale de ordinul I se numește punct staționar al funcției  $f$ ; deci orice punct de extrem local al lui  $f$  este punct staționar al lui  $f$ .

(ii) Punctele staționare ale funcției  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  au ca și coordonate soluțiile sistemului: 
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0. \end{cases}$$

**3.8.4 Teoremă.** Presupunem că  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  are derivate parțiale de ordinul doi continue pe  $\text{Int } D$  iar  $(x_0, y_0) \in \text{Int } D$  e un punct staționar al lui  $f$ . Dacă:

(i)  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$  și  $\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0$ , atunci  $(x_0, y_0)$  e un punct de minim local al lui  $f$ .

(ii)  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$  și  $\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0$ , atunci  $(x_0, y_0)$  e un punct de maxim local al lui  $f$ .

(iii)  $\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{vmatrix} < 0$ , atunci  $(x_0, y_0)$  nu e un punct de extrem;  $(x_0, y_0)$  se numește punct șa al lui  $f$ .

**3.8.5 Aplicații. (De determinare a punctelor de extrem)**

1°. Aflați punctele de extrem ale funcției  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .

**Soluție.** Aflăm punctele staționare ale lui  $f$ , rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 2 > 0.$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0.$$

Deci  $(0, 0)$  e punct de minim (unic) al lui  $f$ ;  $f_{\min} = f(0, 0) = 0$ .

2°. Aflați extremele funcției  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   $f(x, y) = x^2 - y^2$ .

**Soluție.** Aflăm punctele staționare.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 2 > 0.$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0.$$

Prin urmare,  $f$  nu are puncte de extrem; punctul  $(0, 0)$  e un punct șa al funcției  $f$ .

3°. Aflați extremele funcției  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ .

**Soluție.** Aflăm punctele staționare, rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ xy = 2. \end{cases}$$

Obținem punctele staționare  $M_1(2, 1)$ ,  $M_2(1, 2)$ ,  $M_3(-2, -1)$ ,  $M_4(-1, -2)$ . Aplicând teorema 3.8.4 se constată că  $M_1$  e punct de minim local,  $M_2$  e punct șa,  $M_3$  e maxim local iar  $M_4$  e punct șa.

4°. Găsiți extremele funcției  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = 4x^2 - 2xy + y^2 + 4x - y - 5$ .

**Soluție.**  $M\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$  e minim local. Este unicul punct de extrem.

5°. Găsiți extremele funcției  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3y^2 - 3y - 3x - 3$ .

**Soluție.** Punctele staționare sunt  $M_1(1, 1)$  și  $M_2(-1, -3)$ . Se constată că  $M_1$  e un punct de minim local iar  $M_2$  e maxim local.

6°. Găsiți extremele funcției  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = xy^2e^{x-y}$ .

**Soluție.** Punctele staționare sunt  $M_a(a, 0)$  ( $a \in \mathbb{R}$ ) și  $P(-1, 2)$ . Se constată că  $P$  e un punct de minim local.

7°. Găsiți punctele de extrem ale funcției  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = \frac{1+x+y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ .

**Soluție.**  $M(1, 1)$  e punct de maxim local.

### 3.9 Extreme condiționate (legate) ale funcțiilor reale de două variabile reale

**3.9.1 Definiție.** Fie  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  deschisă,  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E = \{(x, y) \in D : g(x, y) = 0\}$ . Punctul  $(x_0, y_0) \in E$  este un punct de maxim condiționat (legat) al funcției  $f$  dacă există o vecinătate  $V \subset E$  a lui  $(x_0, y_0)$  astfel ca  $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$  pentru orice  $(x, y) \in V$ . Analog se definește punctul de minim legat.

**3.9.2 Observații.** (i) Condiția  $g(x, y) = 0$  se numește legătură.

(ii) În cazul în care din condiția de legătură poate fi explicitată una din variabile în funcție de cealaltă, problema determinării extremelor funcției de două variabile se reduce la determinarea extremelor unei funcții de o singură variabilă. Această metodă de determinare a extremelor condiționate se numește metoda directă.

**3.9.3 Exemplu. (De determinare a extremelor condiționate prin metoda directă)**

Să se determine extremele funcției  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = 80x - 2x^2 - xy - 3y^2 + 100y$  știind că  $x + y = 12$ .

**Soluție.** Din condiția de legătură  $x + y = 12 \Rightarrow y = 12 - x$  și atunci  $f(x, y) = f(x, 12 - x) = -4x^2 + 40x + 768$ . Fără nici o dificultate se obține că  $f$  are un unic punct de maxim, de coordonate  $x_0 = 5$ ,  $y_0 = 7$ . Valoarea maximă a lui  $f$  este  $f_{\max} = f(5, 7) = 868$ .

**3.9.4 Observație.** În cazul în care condiția de legătură nu permite explicarea uneia dintre variabile în funcție de cealaltă, problemele de extrem condiționat se rezolvă prin metoda multiplicatorilor Lagrange, care constă în parcurgerea etapelor următorului algoritm:

(i) Se construiește funcția lui Lagrange

$$G : E \rightarrow \mathbb{R}, \quad G(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

(aici  $\lambda$  se numește multiplicator Lagrange).

(ii) Se găsesc punctele staționare ale lui  $G$  rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0. \end{cases}$$

(iii) Se aleg punctele de extrem ale lui  $G$ , care sunt punctele de extrem condiționat ale lui  $f$ .

**3.9.5 Exemplu. (De aplicare a metodei multiplicatorilor Lagrange)**

Determinați extremele funcției  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = 80x - 2x^2 - xy - 3y^2 + 100y$  știind că  $x + y = 12$ .

**Soluție.** Funcția lui Lagrange este:

$$G(x, y) = 80x - 2x^2 - xy - 3y^2 + 100y + \lambda(x + y - 12).$$

Găsim punctele staționare ale lui  $G$  și valoarea lui  $\lambda$  rezolvând:

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) = 0 \\ x + y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 7 \\ \lambda = -53. \end{cases}$$

Pentru  $\lambda = -53$  funcția lui Lagrange are expresia

$$G(x, y) = 27x - xy - 2x^2 = 3y^2 + 47y + 636.$$

Se constată ușor că

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(5, 7) = -4 < 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(5, 7) & \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}(5, 7) \\ \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}(5, 7) & \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}(5, 7) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} = 23 > 0,$$

deci  $(5, 7)$  e un punct de maxim pentru  $G$ , deci și pentru  $f$ . Valoarea maximă a lui  $f$  în acest punct este  $f_{\max} = f(5, 7) = 868$ .



**3.9.6 Aplicații. (La determinarea extremelor cu legături)**

Aflați extremele cu legături ale funcțiilor de mai jos:

- (i)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = 6x^2 + 10y^2 + xy + 30$ ,  $x - y = 34$ ;
- (ii)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $2x - y = 3$ ;
- (iii)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = 2x - 3y$ ,  $4x^2 + y^2 = 10$ ;
- (iv)  $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = 3(x^2 + y^2) - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{55}{12}$ ,  $x + y = -\frac{1}{3}$ ;
- (v)  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = \cos^2 x + \cos^2 y$ ,  $x + y = \frac{\pi}{4}$ ,  $D = ]0, \frac{\pi}{2}[$ .

**Soluție.** (i) Se pot aplica ambele metode; se obține punctul de minim  $(21, -13)$ ;  $f_{\min} = f(21, -13) = 4093$ .

(ii) Se pot aplica ambele metode;  $\left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right)$  e punct de minim și  $f_{\min} = f\left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right) = \frac{9}{5}$ .

(iii) Se aplică metoda multiplicatorilor Lagrange; se obține punctul de minim  $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$  și punctul de maxim  $\left(\frac{1}{2}, -3\right)$ .

(iv) Se pot aplica ambele metode;  $\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)$  și  $\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)$  sunt punctele de extrem.

**3.10 Funcții implicite de o variabilă**

**3.10.1 Definiție.** Fie  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $F : D \rightarrow \mathbb{R}$  iar  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  astfel ca  $A \times B \subseteq D$ . Se numește funcție implicită definită de ecuația  $F(x, y) = 0$  o funcție  $f : A \rightarrow B$  care verifică ecuația  $F(x, f(x)) = 0$ ,  $(\forall) x \in A$ .

**3.10.2 Teoremă.** Fie  $A, B \subseteq \mathbb{R}$ ,  $\text{Int } A \neq \emptyset$ ,  $\text{Int } B \neq \emptyset$ ,  $x_0 \in \text{Int } A$ ,  $y_0 \in \text{Int } B$  iar  $F : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ . Dacă:

- (i)  $F(x_0, y_0) = 0$ ;
- (ii) Există o vecinătate  $U$  a lui  $x_0$ ,  $U \subseteq A$  și există o vecinătate  $V$  a lui  $y_0$ ,  $V \subseteq B$  astfel că  $F$  are derivate parțiale de ordinul întâi continue pe  $U \times V$ ;

$$(iii) \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0,$$

atunci

(a) Există o vecinătate  $U_0$  a lui  $x_0$ ,  $U_0 \subseteq U$  și există o vecinătate  $V_0$  a lui  $y_0$ ,  $V_0 \subseteq V$  precum și o funcție  $f : U_0 \rightarrow V_0$  cu proprietățile  $f(x_0) = y_0$  și  $F(x, f(x)) = 0$ ,  $(\forall) x \in U_0$ .

(b) Funcția  $f$  are derivată de ordinul întâi continuă pe  $U_0$ , care se exprimă prin relația:

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}, \quad (\forall) x \in U_0.$$

Dacă  $F$  are derivate parțiale de ordinul  $k$  continue pe  $U \times V$ , atunci  $f$  are derivată de ordinul  $k$  continuă pe  $U_0$ .

### 3.10.3 Aplicații. (La teorema de existență a funcțiilor implicite de o variabilă)

1°. Să se arate că ecuația  $x^3 + y^3 - x + y - 2 = 0$  definește o funcție implicită  $y$  pe o vecinătate a punctului  $(1, 1)$ . Să se calculeze  $y'(x)$  și  $y''(x)$ .

**Soluție.** Fie  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x, y) = x^3 + y^3 - x + y - 2$ . Ecuația enunțului se scrie în forma  $F(x, y) = 0$ . Verificăm ipotezele teoremei 3.10.2.

$$(i) F(1, 1) = 1 + 1 - 1 + 1 - 2 = 0.$$

$$(ii) \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 1 - \text{continuu pe orice vecinătate a lui } (1, 1);$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 3y^2 + 1 - \text{continuu pe orice vecinătate a lui } (1, 1);$$

$$(iii) \frac{\partial F}{\partial y}(1, 1) = 3 \cdot 1^2 + 1 = 4 \neq 0.$$

Conform teoremei 3.10.2, există o vecinătate  $U_0 \in \mathcal{V}(1)$ , există o vecinătate  $V_0 \in \mathcal{V}(1)$  și o funcție  $y : U_0 \rightarrow V_0$  astfel ca  $F(x, y(x)) = 0$ ,  $(\forall) x \in U_0$ .

În plus:

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))} = -\frac{3x^2 - 1}{3y^2 + 1};$$

$$y''(x) = -\frac{6x(3y^2 + 1) - 6y \cdot y'(3x^2 - 1)}{(3y^2 + 1)^2} = -6 \frac{x(3y^2 + 1)^2 + y(3x^2 - 1)^2}{(3y^2 + 1)^2}.$$

2°. Să se calculeze  $y'(x)$  și  $y''(x)$  pentru funcția implicită  $y = y(x)$  definită de ecuația:

$$(x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + y^2) + 1 = 0.$$

**Soluție.**  $F(x, y) = (x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + y^2) + 1$ .

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 6x(x^2 + y^2)^2 - 6x = 6x(x^2 + y^2 + 1)(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 6y(x^2 + y^2)^2 - 6y = 6y(x^2 + y^2 + 1)(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\Rightarrow y'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)} = -\frac{x}{y}$$

$$y''(x) = -\frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{y^2 + x}{y^3}.$$

3°. Să se calculeze  $y'(x)$  și  $y''(x)$  pentru funcția implicită definită de ecuația:

$$y^4 - 4x^4 - 6xy = 0.$$

**Soluție.**  $F(x, y) = y^4 - 4x^4 - 6xy$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= -16x^3 - 6y; \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 16y^3 - 6x \\ y'(x) &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)} = \frac{16x^3 + 6y}{16y^3 - 6x} = \frac{8x^3 + 3y}{8y^3 - 3x} \\ y''(x) &= \frac{(24x + 3y')(8y^3 - 3x) - (24y \cdot y' - 3)(8x^3 + 3y)}{(8y^3 - 3x)^2}. \end{aligned}$$

Se înlocuiește apoi  $y'(x)$  în expresia lui  $y''(x)$ .

4°. Să se calculeze  $y'(x)$  și  $y''(x)$  pentru funcția implicită definită de ecuația:

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 0.$$

**Soluție.**  $F(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= \frac{x + y}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \frac{y - x}{x^2 + y^2}; \\ y'(x) &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)} = \frac{x + y}{x - y} \\ y''(x) &= \frac{(1 + y')(x - y) - (1 - y')(x + y)}{(x - y)^2} = \frac{2(x^2 + y^2)}{(x - y)^2}. \end{aligned}$$

### 3.11 Funcții de mai multe variabile definite implicit

**3.11.1 Definiție.** Fie  $E \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  iar  $F : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Presupunem că există  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $B \subseteq \mathbb{R}$  astfel ca  $A \times B \subseteq E$ . Se numește funcție implicită definită de ecuația  $F(x_1, \dots, x_n, y) = 0$  o funcție  $f : A \rightarrow B$  cu proprietatea  $F(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) = 0$ .

**3.11.2 Teoremă.** Fie  $F : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $B \subseteq \mathbb{R}$ ,  $\operatorname{Int} A \neq \emptyset$ ,  $\operatorname{Int} B \neq \emptyset$  iar  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \operatorname{Int} A$ ,  $b \in \operatorname{Int} B$ .

Dacă:

$$(i) \quad F(a_1, \dots, a_n, b) \neq 0;$$

(ii) Există o vecinătate  $U$  a lui  $a$ ,  $U \subseteq A$ , și există o vecinătate  $V$  a lui  $b$ ,  $V \subseteq B$ , astfel încât  $F$  are derivate parțiale de ordinul întâi continue pe  $U \times V$ ;

$$(iii) \frac{\partial F}{\partial y}(a_1, a_2, \dots, a_n, b) \neq 0,$$

atunci:

(a) Există o vecinătate  $U_0$  a lui  $a$ , o vecinătate  $V_0$  a lui  $b$  și o funcție  $y : U_0 \rightarrow V_0$  astfel ca:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, y(x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0, \quad (\forall) x = (x_1, \dots, x_n) \in U_0.$$

(b) Funcția  $y$  are derivate parțiale de ordinul întâi continue pe  $U_0$ , exprimate prin egalitățile:

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n, y(x_1, \dots, x_n))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, \dots, x_n, y(x_1, \dots, x_n))}.$$

Dacă  $F$  are derivate parțiale de ordinul  $k$  continue pe  $U \times V$ , atunci  $y$  are derivate parțiale de ordin  $k$  continue pe  $U_0$ .

Teorema 3.11.2 este teorema de existență a funcțiilor implicite de mai multe variabile.

### 3.11.3 Aplicații. (Funcții implicite de mai multe variabile)

1°. Arătați că ecuația  $x^2 + y^2 - z^2 - xy = 0$  definește o funcție implicită  $z = z(x, y)$  într-o vecinătate a punctului  $(-1, 0, 1)$ . Calculați  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ .

**Soluție.**  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - xy$ .

$$F(-1, 0, 1) = 1 + 0 - 1 - 0 = 0.$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 2x - y; \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 2y - x; \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = -2z.$$

În baza teoremei 3.11.2 obținem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)} = \frac{y - 2x}{2z}; & \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)} = \frac{2y - x}{2z}; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{-4z^2 + (2x - y)^2}{4z^3}; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{2z^2 + (2x - y)(2y - x)}{4z^3}; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{4z^2 - (2y - x)^2}{4z^3}. \end{aligned}$$

2°. Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul I și II pentru funcția implicită  $z = z(x, y)$  definită de ecuația:

$$x^2 + 2y^2 + z^2 - 4z - 8 = 0.$$

**Soluție.**  $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 4z - 8$ .

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)} = -\frac{x}{z-2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)} = -\frac{2y}{z-2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{(z-2)^2 + x^2}{(z-2)^3}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{2xy}{(z-2)^3}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2\frac{(z-2)^2 + 2y^2}{(z-2)^3}$$

3°. Fie funcția  $z = z(x, y)$  definită de ecuația

$$x^2 + y^2 + z^2 - f(x + y + z) = 0,$$

unde  $f = f(u)$  e o funcție derivabilă. Arătați că:

$$(y-z)\frac{\partial z}{\partial x} + (z-x)\frac{\partial z}{\partial y} = x-y.$$

**Soluție.**  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - f(x + y + z)$ . Notăm  $x + y + z = u$  și atunci  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - f(u)$ . Conform teoremei 3.11.2 avem:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2x - f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}}{2z - f'(u)\frac{\partial u}{\partial z}} = -\frac{2x - f'(u)}{2z - f'(u)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2y - f'(u)\frac{\partial u}{\partial y}}{2z - f'(u)\frac{\partial u}{\partial z}} = -\frac{2y - f'(u)}{2z - f'(u)}.$$

Atunci:

$$\begin{aligned} (y-z)\frac{\partial z}{\partial x} + (z-x)\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{-(2x - f'(u))(y-z) - (2y - f'(u))(z-x)}{2z - f'(u)} = \\ &= \frac{2z(x-y) - f'(u)(x-y)}{2z - f'(u)} = x-y. \end{aligned}$$

4°. Funcția  $z = z(x, y)$  e definită de ecuația:

$$f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$$

unde  $f = f(u, v)$  are derivate parțiale de ordinul întâi continue. Arătați că:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

**Soluție.** Fie  $F(x, y, z) = f(u, v)$  unde  $u = \frac{x}{z}$ ,  $v = \frac{y}{z}$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial f}{\partial u}; & \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}; \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{x}{z^2} - \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{y}{z^2}. \end{aligned}$$

Atunci:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{z \frac{\partial f}{\partial u}}{x \frac{\partial f}{\partial u} + y \frac{\partial f}{\partial v}}; \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{z \frac{\partial f}{\partial v}}{x \frac{\partial f}{\partial u} + y \frac{\partial f}{\partial v}}. \end{aligned}$$

Prin urmare:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x \frac{\partial f}{\partial u} + y \frac{\partial f}{\partial v}} \left( zx \frac{\partial f}{\partial u} + zy \frac{\partial f}{\partial v} \right) = z.$$

5°. Calculați  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  pentru funcția implicită  $z = z(x, y)$  definită de ecuația:

$$x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0.$$

**Soluție.**  $F(x, y, z) = x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3$ .

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - yz; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 6y^2 - 3xz - 2; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - 3xy.$$

După teorema 3.11.2 avem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{3(x^2 - yz)}{3(z^2 - xy)} = -\frac{x^2 - yz}{z^2 - xy} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{6y^2 - 3xz - 2}{3(z^2 - xy)}. \end{aligned}$$

6°. Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul I și II pentru funcția implicită  $z = z(x, y)$  definită de ecuația:

$$4x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 1 = 0.$$

**Soluție.**  $F(x, y, z) = 4x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 1$ .

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 8x; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 18y; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 32z.$$

După teorema 3.11.2 avem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{x}{4z}; & \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{9y}{16z} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{z} \right) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{z - x \frac{\partial z}{\partial x}}{z^2} = -\frac{4z^2 + x^2}{16z^3}. \end{aligned}$$

Analog:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{9xy}{64z^3}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{9}{256} \cdot \frac{16z^2 + 9y^2}{z^3}.$$

7°. Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul I și II relativ la  $x = 2$ ,  $y = 0$ ,  $z = 1$  pentru funcția  $z = z(x, y)$  definită de ecuația:

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 8 = 0.$$

**Soluție.**  $F(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 8$ .

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4x - 8z; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 4y; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z - 8x - 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{4x - 8z}{8x - 2z + 1} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(2, 0, 1) = \frac{8 - 8}{16 - 2 + 1} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{4y}{8x - 2z + 1} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(2, 0, 1) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{4x - 8z}{8x - 2z + 1} \right) = \frac{(4 - 8 \frac{\partial z}{\partial x})(8x - 2z + 1) - (8 - 2 \frac{\partial z}{\partial x})(4x - 8z)}{(8x - z + 1)^2} \\ &\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(2, 0, 1) = \frac{15}{64}. \end{aligned}$$

Analog se calculează  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(2, 0, 1)$  și  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(2, 0, 1)$ .

8°. Funcția  $z = z(x, y)$  e definită de ecuația  $f(x - 2z, y - 3z) = 0$  unde  $f = f(u, v)$  e o funcție cu derivate parțiale de ordinul I continue. Arătați că:

$$2 \frac{\partial z}{\partial x} + 3 \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

**Soluție.**  $f(x, y, z) = f(u, v)$ ,  $u = x - 2z$ ,  $v = y - 3z$ .

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = -2 \frac{\partial f}{\partial u} - 3 \frac{\partial f}{\partial v}.\end{aligned}$$

Atunci:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial u}}{2 \frac{\partial f}{\partial u} + 3 \frac{\partial f}{\partial v}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{\partial f}{\partial v}}{2 \frac{\partial f}{\partial u} + 3 \frac{\partial f}{\partial v}}.$$

Prin urmare:

$$2 \frac{\partial z}{\partial x} + 3 \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2 \frac{\partial f}{\partial u} + 3 \frac{\partial f}{\partial v}}{2 \frac{\partial f}{\partial u} + 3 \frac{\partial f}{\partial v}} = 1.$$

9°. Funcția  $z = z(x, y)$  e definită de ecuația:

$$f\left(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}\right) = 0,$$

unde  $f = f(u, v)$  are derivate parțiale de ordinul întâi continue. Arătați că:

$$z \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy.$$

**Soluție.**  $F(x, y, z) = f(u, v)$ ,  $u = x + \frac{z}{y}$ ,  $v = y + \frac{z}{x}$ .

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{z}{x^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{z}{y^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}.\end{aligned}$$

După teorema 3.11.2, avem:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{z}{x^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}}{\frac{1}{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{\frac{z}{y^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}}{\frac{1}{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}}.\end{aligned}$$



Deci:

$$\begin{aligned} z \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{-x \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{z}{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{z}{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} - y \frac{\partial f}{\partial v}}{\frac{1}{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}} = \\ &= \frac{(z - xy) \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + (z - xy) \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}}{\frac{1}{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}} = z - xy. \end{aligned}$$

### 3.12 Schimbări de variabilă în expresii ce conțin derivate

Presupunem că  $y = y(x)$  este derivabilă și notăm  $y'(x) = dy$ . Facem schimbarea de variabilă  $x = \varphi(t)$  cu  $\varphi$  derivabilă și suntem interesați de legătura ce există între  $\frac{dy}{dx}$  și  $\frac{dy}{dt}$

$$x = \varphi(t) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \varphi'(t) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Am obținut deci operatorul de derivare:

$$\frac{d}{dx} (\cdot) = \frac{1}{\varphi'(t)} \cdot \frac{d}{dt} (\cdot).$$

#### 3.12.1 Aplicații. (La schimbări de variabile în expresii ce conțin derivate)

1°. Să se transforme ecuația:

$$x^2 y''(x) + 2xy'(x) + \frac{y(x)}{x^2} = 0$$

făcând schimbarea de variabilă  $x = \frac{1}{t}$ .

**Soluție.**  $x = \varphi(t) = \frac{1}{t}$ .

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t^2} \cdot \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -t^2 \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Avem deci operatorul de derivare:

$$\frac{d}{dx} (\cdot) = -t^2 \frac{d}{dt} (\cdot). \quad (*)$$

Prin urmare:

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left[ \frac{dy}{dx} \right] = -t^2 \frac{d}{dt} \left[ \frac{dy}{dx} \right] = -t^2 \frac{d}{dt} \left[ -t^2 \frac{dy}{dt} \right] = \\ &= t^2 \left( 2t \frac{dy}{dt} + t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = t^3 \left( 2 \frac{dy}{dt} + t \frac{d^2 y}{dt^2} \right). \end{aligned}$$

Înlocuind în ecuația dată, obținem:

$$t \left( 2 \frac{dy}{dt} + t \frac{d^2y}{dt^2} \right) - 2t \frac{dy}{dt} + t^2 y = 0,$$

adică:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0.$$

2°. Să se transforme ecuația:

$$(4 + x^2) \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} = 0$$

prin schimbarea de variabilă  $x = 2sht$ .

**Soluție.**  $x = \varphi(t) = e^t - e^{-t}$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx} (e^t + e^{-t}) = \frac{dy}{dx} 2cht \Rightarrow y' = \frac{1}{2cht} \cdot \frac{dy}{dt} \\ y'' &= \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{2cht} \cdot \frac{dy}{dt} \right] = \frac{1}{2cht} \cdot \frac{d}{dt} \left[ \frac{dy}{dx} \right] = \\ &= \frac{1}{2cht} \cdot \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2cht} \cdot \frac{dy}{dt} \right] = \frac{1}{2cht} \left[ \frac{-sht}{2ch^2t} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{1}{2cht} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} \right] = \\ &= \frac{1}{4ch^2t} \left[ -tht \frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} \right], \end{aligned}$$

unde  $tht = \frac{sht}{cht}$ .

Ecuația devine:

$$(1 + sh^2t) \frac{1}{ch^2t} \left[ \frac{d^2y}{dt^2} - tht \frac{dy}{dt} \right] + tht \frac{dy}{dt} = 0.$$

Dar  $1 + sh^2t = ch^2t$  și ecuația se reduce la  $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$ .

3°. Să se transforme ecuația

$$x^2 y''(x) + 4xy'(x) + (2 - x^2)y(x) = 4x$$

prin schimbarea de funcție  $y = \frac{z}{x^2}$ .

**Soluție.**  $y' = \frac{z'}{x^2} - \frac{2z}{x^3}$ ;  $y'' = \frac{z''}{x^2} - 4\frac{z'}{x^3} + 6\frac{z}{x^4}$ . Ecuația se transformă în:

$$z'' - z = 4x.$$

4°. Să se transforme ecuația

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + x \frac{dy}{dx} - y = 0$$

facând schimbarea de variabilă  $x = e^t$ .

**Soluție.**  $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx} e^t \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = e^{-t} \frac{dy}{dt}$ . Se calculează apoi celelalte derivate folosind operatorul de derivare:

$$\frac{d}{dx} (\cdot) = e^{-t} \frac{d}{dt} (\cdot). \quad (*)$$

Prin urmare:

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) \stackrel{(*)}{=} e^{-t} \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \\ &= e^{-t} \frac{d}{dt} (e^{-t} y'(t)) = e^{-t} (-e^{-t} y'(t) + e^{-t} y''(t)) = \\ &= e^{-2t} (-y'(t) + y''(t)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'''(x) &= \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d}{dx} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right) \stackrel{(*)}{=} e^{-t} \frac{d}{dt} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \\ &= e^{-t} \frac{d}{dt} (y''(t)) = e^{-t} \frac{d}{dt} [e^{-2t} (-y'(t) + y''(t))] = \\ &= e^{-t} [-2e^{-2t} (-y'(t) + y''(t)) + e^{-2t} (y''(t) + y'''(t))] = \\ &= e^{-3t} [y'''(t) - 3y''(t) + 2y'(t)]. \end{aligned}$$

Ecuția devine:  $y'''(t) - y''(t) + y'(t) + y(t) = 0$ .

5°. Să se transforme ecuația:

$$(x^2 - 1)y'' + xy' - y = 0$$

prin schimbarea de variabilă  $x = cht$ .

**Soluție.**  $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx} sht \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{sht} \cdot \frac{dy}{dt}$ .

Avem deci operatorul de derivare:

$$\frac{d}{dx} (\cdot) = \frac{1}{sht} \cdot \frac{d}{dt} (\cdot) \quad (*)$$

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{sht} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \\ &= \frac{1}{sht} \cdot \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{sht} y'(t) \right] = \frac{1}{sht} \left[ -\frac{cht}{sh^2 t} y'(t) + \frac{1}{sht} y''(t) \right] = \\ &= -\frac{cht}{sh^3 t} y'(t) + \frac{1}{sh^2 t} y''(t). \end{aligned}$$

Ecuția devine:

$$y''(t) - y(t) = 0.$$

6°. Să se transforme ecuația:

$$(1 + x^2)^2 y'' + 2x(1 + x^2)y' + y = 0$$

prin schimbarea  $x = \operatorname{tg} t$ .

**Soluție.**  $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos^2 t} \cdot \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos^2 t \frac{dy}{dt}$ .

Avem deci operatorul de derivare:

$$\frac{d}{dx}(\cdot) = \cos^2 t \frac{d}{dt}(\cdot) \quad (*)$$

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) \stackrel{(*)}{=} \cos^2 t \frac{d}{dt} (y'(x)) = \cos^2 t \frac{d}{dt} [y'(t) \cos^2 t] = \\ &= \cos^2 t [y''(t) \cos^2 t - 2 \sin t \cos t y'(t)] = \cos^3 t [y''(t) \cos t - 2y'(t) \sin t]. \end{aligned}$$

Ecuția devine:  $y''(t) + y(t) = 0$ .

7°. Să se transforme ecuația  $(1 - x^2)y''(x) - xy'(x) + 3y(x) = 0$  prin schimbarea de variabilă  $x = \sin t$ .

**Soluție.**  $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx} \cos t \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos t} \cdot \frac{dy}{dt}$ .

Avem deci operatorul de derivare:

$$\frac{d}{dx}(\cdot) = \frac{1}{\cos t} \cdot \frac{d}{dt}(\cdot). \quad (*)$$

Utilizând (\*), se găsește:

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{\cos^2 t} \left[ \frac{dy}{dt} \operatorname{tg} t + \frac{d^2 y}{dt^2} \right].$$

Ecuția devine:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 3y = 0.$$

### 3.13 Schimbări de variabile în expresii ce conțin derivate parțiale

Aceste schimbări prezintă importanță la transformarea ecuațiilor cu derivate parțiale într-o formă mai simplă.

Ca și în cazul schimbării de variabile în expresii ce conțin derivate (ordinare), se vor stabili expresiile operatorilor de derivare parțială (exprimarea derivatelor parțiale în raport cu "vechile variabile" în funcție de derivatele parțiale în raport cu "noile variabile").

### 3.13.1 Aplicații. (Schimbări de variabile în expresii ce conțin derivate parțiale)

1°. Să se transforme ecuația

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - z = 0$$

dacă  $x = u$ ,  $y = uv$ .

**Soluție.** Avem  $z = z(x, y)$ ,  $x(u, v) = u$ ,  $y(u, v) = uv$ . Atunci:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} + v \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = u \frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned}$$

Din sistemul  $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} + v \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \\ u \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial v} \end{cases}$  exprimăm  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  în funcție de  $\frac{\partial z}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial v}$

(derivatele parțiale în raport cu "vechile" variabile  $x, y$  în funcție de derivatele

parțiale în raport cu "noile" variabile  $u, v$ ). Obținem  $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{v}{u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} \end{cases}$ .

Operatorii de derivare parțială sunt deci dați de sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} (\cdot) = \frac{1}{u} \cdot \frac{\partial}{\partial v} (\cdot) \\ \frac{\partial}{\partial x} (\cdot) = \frac{\partial}{\partial u} (\cdot) - \frac{v}{u} \cdot \frac{\partial}{\partial v} (\cdot) \end{cases} \quad (*)$$

Ecuația devine:

$$u \left[ \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{v}{u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} \right] + uv \frac{1}{u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} - z(u, v) = 0$$

adică

$$u \frac{\partial z}{\partial u} - z(u, v) = 0.$$

2°. Să se transforme ecuația:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

punând  $u = 3x + y$ ,  $v = x + y$ .

**Soluție.**  $z = z(x, y) = z(u(x, y), v(x, y))$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 3 \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}.\end{aligned}$$

Operatorii de derivare parțială sunt deci definiți prin:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\cdot) = 3 \frac{\partial}{\partial u} (\cdot) + \frac{\partial}{\partial v} (\cdot) \quad (*)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (\cdot) = \frac{\partial}{\partial u} (\cdot) + \frac{\partial}{\partial v} (\cdot) \quad (**)$$

Cu ajutorul operatorilor (\*) și (\*\*) se vor calcula derivatele parțiale de ordin superior ce intervin în ecuație. Avem:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) \stackrel{(\dagger)}{=} \underset{(*)}{3} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \\ &= \underset{(\dagger)}{3} \frac{\partial}{\partial u} \left[ 3 \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \right] + \frac{\partial}{\partial v} \left[ 3 \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \right] = \\ &= 9 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 6 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) \stackrel{(*)}{=} 3 \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \\ &= \underset{(**)}{3} \frac{\partial}{\partial u} \left[ \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \right] + \frac{\partial}{\partial v} \left[ \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \right] = \\ &= 3 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 4 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial z}{\partial y} \right] \stackrel{(\dagger)}{=} \underset{(**)}{\frac{\partial}{\partial u}} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) \stackrel{(**)}{=} \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \left[ \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \right] + \frac{\partial}{\partial v} \left[ \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \right] = \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.\end{aligned}$$

Cu aceste transformări, ecuația dată se reduce la forma:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0.$$

3°. Să se transforme ecuația  $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$  prin schimbarea de variabile  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ .

**Soluție.**  $z = z(x, y) = z(x(u, v), y(u, v))$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos v + \frac{\partial z}{\partial y} \sin v \\ \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{\partial z}{\partial x} u \sin v + \frac{\partial z}{\partial y} u \cos v \end{cases}$$

Aflăm  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  în funcție de  $\frac{\partial z}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial v}$  rezolvând sistemul precedent. Obținem:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{u} \left[ u \cos v \frac{\partial z}{\partial u} - \sin v \frac{\partial z}{\partial v} \right] \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{u} \left[ \cos v \frac{\partial z}{\partial v} + u \sin v \frac{\partial z}{\partial u} \right]. \end{cases}$$

Înlocuind expresiile precedente în ecuația dată, găsim:

$$u \sin v \frac{1}{u} \left[ u \cos v \frac{\partial z}{\partial u} - \sin v \frac{\partial z}{\partial v} \right] - u \cos v \frac{1}{u} \left[ \cos v \frac{\partial z}{\partial v} + u \sin v \frac{\partial z}{\partial u} \right] = 0,$$

adică:  $\frac{\partial z}{\partial v} = 0$ .

4°. Să se transforme ecuația  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - z = 0$  dacă  $u = x$ ,  $v = \frac{y}{x}$ .

**Soluție.**  $\begin{cases} u = x \\ v = \frac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u \\ y = xv = uv \end{cases} \Rightarrow z = z(x, y) = z(x(u, v), y(u, v)).$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} + v \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = u \frac{\partial z}{\partial y} \end{cases}$$

Din sistemul precedent obținem:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{v}{u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} \end{cases}$$

Cu aceste transformări ecuația devine:

$$u \left( \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{v}{u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} \right) + uv \frac{\partial z}{\partial v} - z = 0,$$

adică:  $u \frac{\partial z}{\partial u} - z = 0$ .

5°. Să se transforme ecuația cu derivate parțiale

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

dacă  $\frac{x}{y} = u$ ,  $x \cdot y = v$ .

**Soluție.**

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} + y \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} + x \frac{\partial z}{\partial v} \end{aligned}$$

Avem așadar operatorii de derivare parțială:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\cdot) = \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial}{\partial u} (\cdot) + y \frac{\partial}{\partial v} (\cdot) \quad (*)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (\cdot) = -\frac{x}{y^2} \cdot \frac{\partial}{\partial u} (\cdot) + x \frac{\partial}{\partial v} (\cdot) \quad (**)$$

cu ajutorul cărora vom exprima derivatele parțiale de ordinul doi ce intervin în ecuație.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) + y \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \\ &= \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \left[ \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} + y \frac{\partial z}{\partial v} \right] + y \frac{\partial}{\partial v} \left[ \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} + y \frac{\partial z}{\partial v} \right] = \\ &= \frac{1}{y^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}. \end{aligned}$$

Analog:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^2}{y^4} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2 \frac{x^2}{y^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

Înlocuind în ecuație, aceasta devine:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0.$$



# Bibliografie

- [1] Bărbosu, D., Pop, O. T., Voicu, C., *Matematici Superioare prin exerciții și probleme*, Ed. Risoprint, Cluj-Napoca, 2004
- [2] Bărbosu, D., Horvat-Marc, A., Pop, O. T., Bărbosu, A., *Matematici pentru inginerii chimiști prin exerciții și probleme*, Ed. Risoprint, Cluj-Napoca, 2005
- [3] Flondor, D., Donciu, N., *Algebră și analiză matematică. Culegere de probleme*, **II**, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1979
- [4] Mureșan, V., *Analiză Matematică*, Casa de editură Transilvania Press, Cluj-Napoca, 2000
- [5] Nicolescu, M., Dinculescu, N., Marcus, S., *Analiză Matematică*, Ediția a patra, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1981
- [6] Roșculeț, M., *Analiză Matematică*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1966
- [7] Sirețchi, Gh., *Calcul diferențial și integral*, **1, 2**, Ed. Științifică și Enciclopedică, București, 1985