I. DUDA STELIAN GRĂDINARU

LECȚII DE GEOMETRIE DIFERENȚIALĂ

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
DUDA, I.
Lecții de geometrie diferențială / I. Duda, Stelian Grădinaru – București: Editura Fundației *România de Mâine*, 2007
Bibliogr.
ISBN 978-973-725-896-0

I. Grădinaru, S.

514.7(075.8)

Redactor: Mihaela ŞTEFAN
Tehnoredactor: Stelian GRĂDINARU
Coperta: Cornelia PRODAN

Bun de tipar: 26.07.2007; Coli tipar: 12,5
Format: 16/70×100

Editura Fundației *România de Mâine*
Bulevardul Timişoara, nr.58, Bucureşti, Sector 6
Tel./Fax:021/444 20 91; www.spiruharet.ro
e-mail: contact@edituraromaniademaine.ro

UNIVERSITATEA *SPIRU HARET*
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

I. DUDA STELIAN GRĂDINARU

LECȚII DE GEOMETRIE DIFERENȚIALĂ

EDITURA FUNDAȚIEI *ROMÂNIA DE MÂINE*
BUCUREŞTI, 2007

CUPRINS

PREFAȚĂ

Cartea de față se adresează, în primul rând studenților facultăților de matematică şi informatică din anii I şi II, dar şi absolvenților de îinvățământ superior care se pregătesc pentru examenele de licență.

Datorită caracterului ei sintetic, lucrarea poate fi un breviar pentru studenții facultăților cu profil tehnic sau de arhitectură şi poate fi urmărită de toți iubitorii de geometrie diferențială, care doresc să îşi completeze cunoştințele de matematici superioare.

Aparatul matematic folosit nu depăşeşte cadrul analizei matematice studiate în anul I, însă cunoştințele de geometrie analitică sunt fundamentale.

Lucrarea Lecții de geometrie diferențială *nu este un tratat de specialitate, ea constituie un suport la cursul de Geometrie II, ținut de către autori la Facultatea de Matematică şi Informatică din cadrul Universității* Spiru Haret, *în semestrul al II-lea al primului an de studiu, după noua programă analitică.*

Conținul teoretic, succint prezentat şi însoțit de numeroase exemple, justificările date fiecărei proprietăți sau relații contribuie la consolidarea cunoştițelor de geometrie a viitorului matematician sau informatician.

Autorii mulțumesc pe această cale tuturor celor care vor susține cu observații pertinente mesajul acestei lucrări.

Autorii

INTRODUCERE

Geometria analitică studiază proprietățile curbelor şi suprafețelor, în particular, a dreptelor şi planelor, cu ajutorul calculului algebric.

Asociind fiecărui punct din plan sau din spațiu un sistem ordonat de două, respectiv, trei numere – *coordonatele punctului*, care îi fixează poziția față de un sistem de referință dat, rezultă că unei figuri (curbă sau suprafață) îi corespunde o anumită reprezentare analitică care pune în bijecție proprietățile figurii de cele ale reprezentării analitice respective.

Există şi unele proprietăți ale curbelor sau suprafețelor, pentru studiul cărora metodele de calcul algebrice sunt insuficiente, de aceea este necesară o nouă abordare analitică, de data aceasta, realizată cu ajutorul aparatului analizei matematice, în special a calculului diferențial.

Studiul diferențial al curbelor şi suprafețelor, precum şi altor entități geometrice, constituie obiectul *geometriei diferențiale*.

Începuturile geometriei diferențiale se împletesc cu cele ale analizei matematice, în a doua jumătate a secolului al XVII-lea şi în prima jumătate a secolului al XVIII-lea când a fost elaborată *teoria curbelor plane*.

Studiul suprafețelor a fost realizat ceva mai târziu, în a doua jumătate a secolului al XVIII-lea, *Euler* a studiat *curburile secțiunilor normale ale suprafețelor*, propietățile suprafețelor desfăşurabile şi unele proprietăți ale curbelor din spațiu. Prima carte de geometrie diferențială, *Application de l'analyse à la géométrie* a fost publicată în 1807 de *Monge*, creatorul şcolii franceze de geometrie diferențială.

Gauss a avut o contribuție deosebită în dezvoltarea geometriei diferențiale. În memoriul, *Disquitiones generales circa superficies curvas*, publicat în 1828, Gauss utilizează pentru prima dată *coordonatele curbilinii* şi introduce *prima* şi apoi, *a doua formă fundamentală* ale unei suprafeţe. Interesat de studiul geodeziei, defineşte *curbura totală* a suprafeţei cu ajutorul reprezentării sferice şi studiază *liniile geodezice*.

Creearea primei *geometrii neeuclidiene* de către *Lobacevski* (1826) şi introducerea de către *Riemann* a *spaţiilor* care îi poartă numele (1854), au contribuit la lărgirea orizontului geometriei diferenţiale.

La noi în ţară, primele lucrări de geometrie diferenţială aparţin lui *Bacaloglu* (1859) care a considerat o altă curbură a suprafeţei în afara curburii totale şi a curburii medii. Însă primul geometru român ale cărui lucrări au atras atenţia matematicienilor din lumea întreagă a fost *Ţiţeica.*

Acesta a introdus o clasă de curbe şi o clasă de suprafeţe care astăzi îi poartă numele.

O contribuţie importantă în ramurile geometriei diferenţiale moderne, a avut-o *Vrânceanu*, creatorul *teoriei spaţiilor neolonome*.

În cartea de faţă se studiază elementele principale care stau la baza geometriei diferenţiale a curbelor şi suprafeţelor. Notaţiile folosite sunt cele clasice, iar eventualele schimbări de la regulile de notaţie sunt semnalate pe parcursul aceste cărţi.

În Capitolul introductiv 1 sunt reaminitite pe scurt noţiunile generale asupra vectorilor şi operaţiilor cu vectori şi sunt date câteva din criteriile de diferenţiabilitate ale unor clase de funcţii vectoriale cu una şi, respectiv două argumente scalare.

În al doilea Capitol sunt studiate noţiunile fundamentale ale geometriei diferenţiale ale curbelor plane, iar pentru aprofundare facem trimitere la bibliografia de la sfârşitul acestei cărţi.

În Capitolul 3 sunt prezentate câteva din proprietăţile de bază ale geometriei curbelor strâmbe care decurg direct din cele studiate în capitolul precedent. De asemenea, sunt prezentate triedrul şi formulele lui Frenet asociate unui punct pe o curbă strâmbă.

Geometria diferenţială a suprafeţelor constituie nucleul lecţiilor prezentate în această lucrare, iar înţelegerea rezultatelor principale ale Capitolului 4 se bazează implicit pe cunoaşterea temeinică a noţiunilor prezentate în celelalte capitole.

Capitolul 1

ELEMENTE DE ANALIZĂ VECTORIALĂ

1.1. Vectori în spațiu. Operații cu vectori

Reamintim următoarele noțiuni studiate la cursul de geometrie analitică.

Norma sau *lungimea unui vector*

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

este scalarul real pozitiv definit prin

$$\left|\vec{v}\right| = \left\|\vec{v}\right\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Direcția sau *versorul* $\vec{e}$ al vectorului $\vec{v}$ este vectorul de lungime egală cu unitatea ale cărui componente sunt

$$\vec{e} = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}\vec{i} + \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}\vec{j} + \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}\vec{k}$$

Fie vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ definiți prin

$$\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k};\ \vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

Introducem următoarele operații:

1^0) *Suma* a doi vectori

$$\vec{u} + \vec{v} = \left(u_x + v_x\right)\vec{i} + \left(u_y + v_y\right)\vec{j} + \left(u_z + v_z\right)\vec{k}$$

2^0) *Produsul* unui vector cu *un scalar*

$$\alpha\,\vec{v} = \left(\alpha v_x\right)\vec{i} + \left(\alpha v_y\right)\vec{j} + \left(\alpha v_z\right)\vec{k};\ \alpha \in \mathbb{R}$$

3^0) *Produsul scalar* a doi vectori este prin definiție

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$$

iar expresia analitică este dată de relația

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

4^0) *Produsul vectorial* a doi vectori este prin definiție

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\end{vmatrix}.$$

Modulul produsului vectorial este

$$\left\|\vec{u}\times\vec{v}\right\|=\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|\sin\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right).$$

Dacă

$$\vec{w}=w_x\vec{i}+w_y\vec{j}+w_z\vec{k}$$

este un alt vector, atunci se defineşte

5^0) *Produsul mixt* a trei vectori prin

$$\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)\overset{Not}{=}\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)\cdot\vec{w}=\begin{vmatrix}u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\\ w_x & w_y & w_z\end{vmatrix}.$$

Cu aceste operații introduse să amintim câteva din consecințele mai importante ce decurg din definiții.

P_1) *Unghiul a doi vectori* se poate exprima cu ajutorul relației

$$\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|}=\frac{u_xv_x+u_yv_y+u_zv_z}{\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}}$$

P_2) Condiția ca doi vectori sa fie *ortogonali* este

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=0.$$

P_3) Condiția ca doi vectori să fie *coliniari* este

$$\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}.$$

P_4) Condiția ca trei vectori să fie *coplanari* este

$$\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)\cdot\vec{w}=0.$$

1.2. **Funcții vectoriale de un argument scalar**

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $M \in \mathbb{R}^3$ raportat la un sistem ortogonal $xOyz$.

Funcția vectorială $\vec{r} : I \to \mathbb{R}^3$ definită prin:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \qquad \forall t \in I \tag{1.1}$$

se numeşte *vectorul de poziție* al punctului M, unde $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ sunt versorii axelor de coordonate (*vezi figura* 1.1).

Pe componente relația se scrie:

$$(C):\ \begin{cases} x = (t) \\ y = y(t),\ (t \in I) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Când t variază în intervalul I, punctul M descrie curba (C) din spațiu.

Aşadar, *curba*(C) *este imaginea geometrică a funcției vectoriale* (1.1) *şi se numeşte* ***ecuația vectorială a curbei*** (*vezi figura 1.1*).

Dacă

$$\vec{r}(t) = \vec{r_0};\ t \in [a,b]$$

atunci spunem că vectorul este *constant* şi în acest caz $\vec{r}$ păstrează direcția şi modulul constante.

Presupunând că funcțiile scalare $x(t),\ y(t),\ z(t)$ sunt *derivabile* pe I, funcția vectorială (1.1) este derivabilă pe I, iar *derivata* sa este prin definiție

$$\vec{r}'(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\mathrm{r}}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}, \tag{1.2}$$

unde Δt este o creştere arbitrară a argumentului astfel încât $t + \Delta t \in I$.

Relația (3) scrisă pe componente devine

$$x'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t},\ y'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t},$$
$$z'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} \tag{1.3}$$

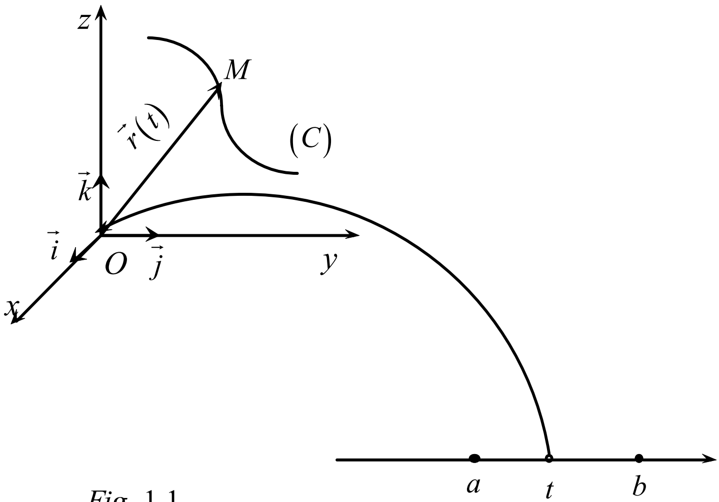


Fig. 1.1

Mai departe, rezultă că într-un punct $t \in I$, derivata unei funcții vectoriale se obține derivând componentele scalare ale funcției:

$$\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k} \tag{1.4}$$

Dacă funcția vectorială (1.1) *admite derivate până la ordinul k* $(k \geq 1)$ *şi sunt continue*, *atunci spunem că funcția* $\vec{r}(\cdot)$ *este de clasă* $C^k[a,b]$.

Interpretarea geometrică a derivatei $\vec{r}'(t)$

Fie punctele M, $M' \in (C)$ de vectori de poziție, respectiv

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM};\ \vec{r}(t+\Delta t) = \overrightarrow{OM}' \tag{1.5}$$

Atunci vectorul (*vezi figura 1.2*)

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) \tag{1.6}$$

este situat pe coarda MM', iar vectorul $\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ are acelaşi suport cu $\Delta\vec{r}$.

Pentru $\Delta t \to 0$, punctul $M \to M'$, iar secanta MM' devine tangenta MT.

Prin urmare, *vectorul* $\vec{r}'(t)$ *are direcția tangentei în M la curba* (C). *Sensul pozitiv corespunde sensului de creştere al argumentului* t.

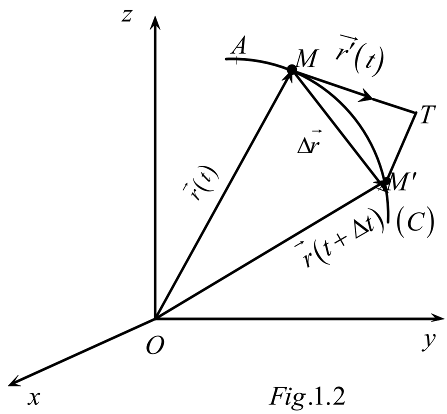


Fig.1.2

Fixăm un punct $A \in (C)$ şi alegem un sens de creştere al argumentului *t*, prin introducerea funcției $s : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},$ definită prin

$$s = s(t) = \widehat{AM}, \quad \forall M \in (C) \tag{1.7}$$

În acest caz

$$\widehat{MM'} = \widehat{AM'} - \widehat{AM} = s(t+\Delta t) - s(t) = \Delta s > 0 \tag{1.8}$$

Observăm că

$$\left|\Delta\vec{r}\right| = \left|\overrightarrow{MM'}\right| = MM'. \tag{1.9}$$

Trecând la normă în relația (1.2) şi ținând cont de (1.9)

$$\left|\vec{r}'(t)\right| = \lim_{\Delta t \to 0}\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\left|\Delta\vec{r}\right|}{\Delta s}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\left|\overrightarrow{MM'}\right|}{\Delta s}\frac{\Delta s}{\Delta t} = 1 \cdot \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1.10}$$

Presupunând că arcul $\widehat{AM'}$ este *rectificabil* avem

$$\lim_{\Delta s \to 0}\frac{\widehat{MM'}}{\Delta s} = 1, \tag{1.11}$$

iar din (1.10) deducem că

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \geq 0. \tag{1.12}$$

Astfel, *modulul derivatei,* $\left|\vec{r}'(t)\right|$ *într-un punct* $t \in I$ *este egal cu derivata funcției* $s = s(t)$ *ce determină lungimea arcului curbei* $\widehat{AM} \subset (C)$ *măsurat de la un punct fix A până la punctul curent M corespunzător valorii t a argumentului.*

Observație

Pentru un vector de modul constant, $\vec{r}(t)$ *şi* $\vec{r}'(t)$ *sunt ortogonali.*

Într-adevăr, dacă $\vec{r}(t) = constant$, atunci

$$\left\|\vec{r}(t)\right\|^2 = \vec{r}(t)\cdot\vec{r}(t) = const.$$

astfel că prin derivare se obține

$$\vec{r}(t)\cdot\vec{r}'(t) = 0 \Leftrightarrow \vec{r}(t)\perp\vec{r}'(t) \quad \blacksquare \tag{1.13}$$

În notațiile uzuale, *diferențiala funcției vectoriale de o variabilă scalară*, $\vec{r} = \vec{r}(t)$, pentru $t \in I$, dacă există, este vectorul:

$$\mathrm{d}\vec{r} = \vec{r}'(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.14}$$

Astfel, dacă funcția vectorială $\vec{r} = \vec{r}(t)$ este diferențiabile pe *I*, atunci şi componentele ei scalare, $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$ sunt funcții diferențiabile pe *I* şi în plus,

$$\mathrm{d}\vec{r} = \vec{i}\,\mathrm{d}x + \vec{j}\,\mathrm{d}y + \vec{k}\,\mathrm{d}z \tag{1.15}$$

În sfârşit, să remarcăm că pentru cazul unei curbe (*C*) de clasă $C^{n+1}(I)$ dată de (1.1), are loc *formula lui Taylor*:

$$\begin{aligned}\vec{r}(t+\Delta t) &= \vec{r}(t) + \frac{\Delta t}{1'}\vec{r}'(t) + \frac{(\Delta t)^2}{2'}\vec{r}''(t) + \dots \\ &+ \frac{(\Delta t)^n}{n!}\overrightarrow{r^{(n)}}(t) + \frac{(\Delta t)^{n+1}}{(n+1)!}\left(\overrightarrow{r^{(n+1)}}(t) + \bar{\varepsilon}\right)\end{aligned} \tag{1.16}$$

unde $\bar{\varepsilon} \to 0$ când $\Delta t \to 0$, iar pentru $t = 0$ şi $\Delta t = t$ obținem formula lui $Mac - Laurin$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \frac{t}{1!}\vec{r}(0) + \frac{t^2}{2!}\vec{r}''(0) + \dots + \frac{t^n}{n!}\overrightarrow{r^{(n)}}(0) + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\left(\overrightarrow{r^{(n)}}(0) + \bar{\varepsilon}\right) \tag{1.17}$$

1.3. **Funcții vectoriale de două argumente scalare**

Fie $I, J \subseteq \mathbb{R}$, două intervale, $D = I \times J$, iar $\vec{r} : D \to \mathbb{R}^3$ o funcție vectorială de două argumente scalare definită prin:

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}, \quad (u,v) \in D \tag{1.18}$$

Fie $M \in \mathbb{R}^3$ având coordonatele $x, y, z.$ Atunci, evident:

$$(S): \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v), \qquad (u,v) \in D \\ z = z(u,v) \end{cases} \tag{1.19}$$

Suprafața (S) *este imaginea geometrică a funcției vectoriale* (1.18) *şi se*

numeşte ecuația ***vectorială a suprafeței*** (S). Ecuațiile (1.19) ne dau reprezentările parametrice ale lui (S) (*vezi figura 1.3*).

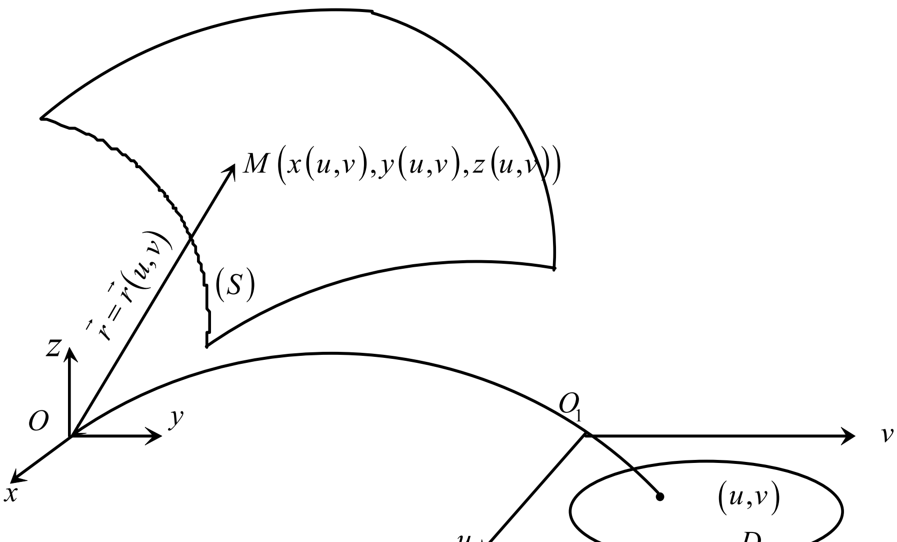


Fig. 1.3

Când $u =$ const. şi v este variabil, extremitățile vectorului $\vec{r}$ vor descrie o curbă pe această suprafață ce depinde de un singur parametru v.

Notăm (γ_v) această curbă (*vezi figura* 1.4). Prin urmare, derivata lui $\vec{r}$ în raport cu variabila v va fi conform (1.4)

$$\overrightarrow{r'_v} = x'_v \vec{i} + y' \vec{j}_v + z'_v \vec{k} \tag{1.20}$$

unde

$$x'_v = \frac{\partial x}{\partial v} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{x(v+\Delta v) - x(v)}{\Delta v}; \quad y'_v = \frac{\partial y}{\partial v} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{y(v+\Delta v) - y(v)}{\Delta v};$$
$$z'_v = \frac{\partial z}{\partial v} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{z(v+\Delta v) - z(v)}{\Delta v}. \tag{1.21}$$

În mod analog, pentru $v = const.$ şi *u* variabil, se poate defini curba (γ_u) depinzând de parametrul *u*, iar vectorul tangent la curba (γ_u) în punctul *M*, notat $\overrightarrow{r'_u}$ este:

$$\overrightarrow{r'_u} = x'_u \vec{i} + y' \vec{j}_u + z'_u \vec{k} \tag{1.22}$$

unde:

$$x'_u = \frac{\partial x}{\partial u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{x(u+\Delta u) - x(u)}{\Delta u}, \quad y'_u = \frac{\partial x}{\partial u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{y(u+\Delta u) - y(u)}{\Delta u},$$
$$z'_u = \frac{\partial z}{\partial u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{z(v+\Delta u) - z(u)}{\Delta u} \tag{1.23}$$

Presupunând că funcțiile scalare $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ sunt *diferențiabile* pe *D*, urmează mai departe

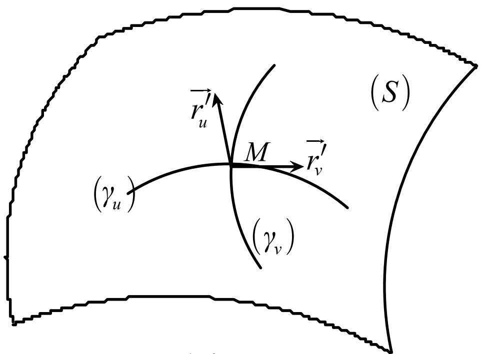


Fig. 1.4

$$\mathrm{d}x = x'_u\,\mathrm{d}u + x'_v\,\mathrm{d}v,\ \mathrm{d}y = y'_u\,\mathrm{d}u + y'_v\,\mathrm{d}v,\ \mathrm{d}z = z'_u\,\mathrm{d}u + z'_v\,\mathrm{d}v \tag{1.24}$$

Considerăm că funcția vectorială $\vec{r}$ este derivabilă în raport cu variabilele independente $x, y, z,$ astfel încât:

$$\mathrm{d}\vec{r} = \vec{i}\,\mathrm{d}x + \vec{j}\,\mathrm{d}y + \vec{k}\,\mathrm{d}z \tag{1.25}$$

iar din relațiile (1.24) şi (1.25) avem:

$$\mathrm{d}\vec{r} = \vec{i}\left(x'_u\,\mathrm{d}u + x'_v\,\mathrm{d}v\right) + \vec{j}\left(y'_u\,\mathrm{d}u + y'_v\,\mathrm{d}v\right) + \vec{k}\left(z'_u\,\mathrm{d}u + z'_v\,\mathrm{d}v\right) \tag{1.26}$$

sau grupând după $\mathrm{d}u$ şi $\mathrm{d}v$ se obține:

$$\mathrm{d}\vec{r} = \left(x'_u\vec{i} + y'_u\vec{j} + z'_u\vec{k}\right)\mathrm{d}u + \left(x'_v\vec{i} + y'_v\vec{j} + z'_v\vec{k}\right)\mathrm{d}v = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\mathrm{d}v \tag{1.27}$$

Astfel *diferențiala totală* a funcției vectoriale $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ în punctul curent pe suprafață va avea expresia:

$$\mathrm{d}\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\mathrm{d}v \tag{1.28}$$

Formula (1.28) ne dă *descompunerea vectorului* $\mathrm{d}\vec{r}$ după două direcții, una tangentă la curba (γ_u), iar cealaltă tangentă la curba (γ_v).

Dacă funcția vectorială (1.18) admite derivate parțiale până la ordinul k $(k \geq 1)$ *şi sunt continue, atunci spunem că* $\vec{r}$ *este de clasă* $C^k(D)$.

Aplicând procedeul cunoscut din analiza scalară se obțin *diferențialele totale de ordinul n* pentru funcția $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$:

$$\mathrm{d}^n\vec{r} = \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\mathrm{d}v\right)^{(n)} \tag{1.29}$$

De exemplu, pentru $n = 2$ se poate scrie:

$$\mathrm{d}^2\vec{r} = \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\mathrm{d}v\right)^{(2)} = \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial u^2}\mathrm{d}u^2 + 2\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial u\partial v}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial v^2}\mathrm{d}v^2 \tag{1.30}$$

Capitolul 2

GEOMETRIA DIFERENȚIALĂ A CURBELOR PLANE

2.1. Reprezentarea analitică a curbelor plane

O curbă plană (C) raportată la un sistem de axe ortogonale xOy poate fi reprezentată de una din următoarele tipuri de ecuații

(I) $\quad (C): y = f(x),\ x \in (a,b)$

(*ecuația explicită*)

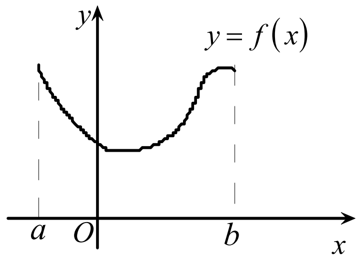


Fig. 2.1

(II) $\quad (C): F(x,y) = 0,\ (x,y) \in D \subseteq R^2,$

$D = (a,b) \times (c,d)$

(*ecuația implicită*)

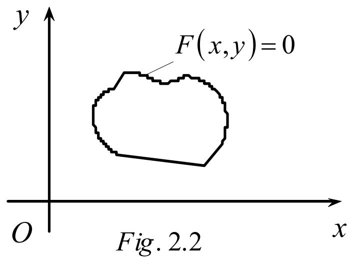
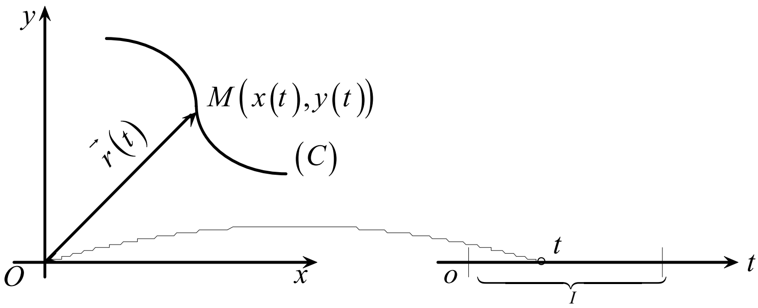


Fig. 2.2

(III) $\quad (C): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in I \subset \mathbb{R}$ (*ecuațiile parametrice*)

(IV) $\quad (C): \ \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\vec{k} = (x(t), y(t), z(t))$

(*ecuația vectorială*)



$Fig.\,2.3$

unde $\vec{r}$ este *vectorul de poziție al punctului* $M \in (C)$, curba (C) fiind *imaginea geometrică a funcției vectoriale* $\vec{r} = \vec{r}(t)$ (*vezi figura* 2.3).

(V) $\quad (C):\ \rho = \rho(\alpha),\ \ \alpha \in (\theta, \varphi)$ $\quad$ (*ecuațiile în coordonate polare*)

unde (ρ, α) sunt *coordonatele polare* ale punctului curent pe curbă.

Dacă se alege drept parametru pe curbă arcul $s = \overset{\frown}{AM}$, unde A este un punct fix pe curba (C), iar M este punctul curent, atunci obținem reprezentarea parametrică

(VI) $\quad (C):\ \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases},\quad s \in (\alpha, \beta)$ $\quad$ (*ecuațiile intrinseci*)

Scalarul s *se numeşte parametru natural al curbei* (C).

Legătura dintre reprezentările $(I)-(V)$.

$(I) \to (II)$. Din (2.1) se poate scrie

$$y = f(x) \Leftrightarrow F(x,y) \equiv y - f(x) = 0$$

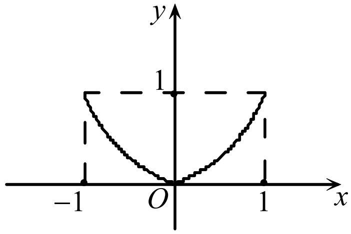


Fig. 2.4

Exemplu

2.1. Curba $y = x^2,\ x \in [-1,1]$ dată în reprezentare explicită (*vezi figura* 2.4) se poate scrie cartezian implicit sub forma

$$y - x^2 = 0,\ \ (x,y) \in [-1,1] \times [0,1] \ \blacksquare$$

$(II) \to (I)$. Dacă se poate rezolva ecuația

$$(C):\ F(x,y) = 0$$

în raport cu una din variabilele x sau y, atunci se obține exprimarea cartezian explicită respectiv implicită a lui (C).

Exemplu

2.2. Curba

$$x^2y - x + y - 2 = 0,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

reprezentată cartezian implicit, admite reprezentarea (I) sub forma

$$y = \frac{x^2+2}{x^2+1},\ x \in \mathbb{R}\ \blacksquare \tag{2.1}$$

$(I)-(III)$. Alegem în (I), abscisa x drept parametru, rezultă reprentarea (III)

$$y = f(x),\ x \in [a,b] \Leftrightarrow x = t,\ y = f(t),\ t \in [a,b]$$

Pentru exemplificare, din (2.1) se obține

$$x = t,\ y = \frac{t^2+2}{t^2+1},\ t \in \mathbb{R}$$

$(III)-(II)$. Dacă se poate elimina t între ecuațiile parametrice

$$x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [a,b]$$

atunci se găseşte reprezentarea cartezian implicită (II) sau explicită (I).

De exemplu, se poate elimina t în ecuațiile parametrice ale curbei

$$x = \frac{3at}{1+t^2};\ y = \frac{3at^2}{1+t^2};\ t \in \mathbb{R},\ (a>0).$$

Astfel, dacă se împart cele două ecuații, termen cu termen, rezultă

$$y = tx,$$

apoi înlocuind $t = \frac{y}{x}$ în prima ecuație obținem reprezentarea

$$x^2 + y^2 - 3xy = 0\ \blacksquare$$

$(III)-(IV)$. Evident, ecuațiile scalare

$$x = x(t),\ y = y(t)$$

se pot restrânge sub forma unei ecuații vectoriale

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\vec{k}.$$

$(I)-(IV)$. Evident, putem scrie

$$\vec{r} = t\,\vec{i} + f(t)\vec{j},\ \ t \in [a,b].$$

$(II)-(V)$. Se scrie la coordonate polare în ecuația implicită,

$$x = \rho\cos\alpha,\ y = \rho\sin\alpha,\ \alpha \in [0,2\pi], \tag{2.2}$$

unde $M(\rho,\alpha) \in (C)$ este punctul curent pe curbă. Dacă ecuația

$$F(\rho\cos\alpha,\ \rho\sin\alpha) = 0$$

poate fi rezolvată în raport cu una din variabila independente, spre exemplu, ρ, atunci se ajunge la ecuația în coordonate polare (V)

$$\rho = \rho(\alpha)$$

Alte exemple

2.3. Curba definită explicit de funcția

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3$$

are reprezentarea grafică în *figura* 2.5.

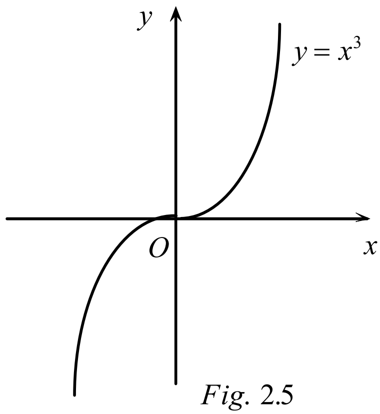


Fig. 2.5

Parametrizarea se poate realiza alegând

$$(III): \begin{cases} x = t \\ y = t^3 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

iar ecuația implicită a acestei curbe este

$$(I):\ y - x^3 = 0\ \ \blacksquare$$

2.4. Fie cercul de rază *r* centrat în origine definit cartezian prin

$$x^2 + y^2 = r^2$$

având reprezentarea în *figura* 2.6.

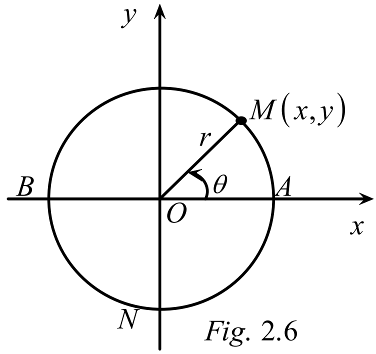


Fig. 2.6

Arcul de curbă $\overset{\frown}{AMB}$ are ecuația explicită

$$\overset{\frown}{AMB}: \ y = \sqrt{r^2 - x^2}, \ \ x \in [-r, r],$$

iar parametrizarea se poate face, fie alegând

$$\overset{\frown}{AMB}: \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{r^2 - t^2} \end{cases}, \ \ t \in [-r, r],$$

fie cu

$$\overset{\frown}{AMB}: \begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}, \ t \in [0, \pi].$$

Analog, pentru arcul $\overset{\frown}{ANB}$ se raționează similar, obținând ecuația cartezian explicită

$$\overset{\frown}{ANB}: \ y = -\sqrt{r^2 - x^2}, \ x \in [-r, r]$$

sau parametrizând alegând una din parametrizările

$$\overset{\frown}{ANB}: \begin{cases} x = t \\ y = -\sqrt{r^2 - t^2} \end{cases}, \ \ t \in [-r, r]$$

$$\overset{\frown}{ANB}: \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\cos t, \end{cases} \ t \in [\pi, 2\pi].$$

Pentru a găsi ecuațiile în coordonate polare corespunzătoare arcului $\overset{\frown}{AMB}$, se înlocuiesc

$$x = \rho\cos\alpha, \ y = \rho\sin\alpha, \ \ \alpha \in [0, 2\pi] \qquad (2.3)$$

în ecuația implicită, de unde rezultă

$$\rho = r \quad \blacksquare$$

2.5. Elipsa de semiaxe *a* şi *b* are ecuația

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

reprezentată în *figura* 2.7 şi admite următoarele reprezentări

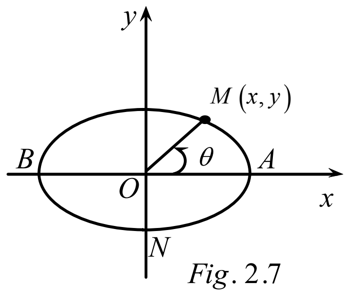


Fig. 2.7

$$(I) \qquad \begin{aligned} &\overset{\frown}{AMB}: \ y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \ x \in [-1,1] \\ &\overset{\frown}{ANB}: y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \ x \in [-1,1] \end{aligned}$$

$$(III) \qquad \overset{\frown}{AMB}: \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \ t \in [0, \pi]$$

Ecuațiile în coordonate polare se găsesc analog înlocuind relațiile (2.7) în ecuația implicită, astfel

$$\overset{\frown}{AMB}: \ \rho = \frac{ab}{a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha}, \ \alpha \in [0, \pi]$$

$$\overset{\frown}{ANB}: \ \rho = \frac{-ab}{a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha}, \ \alpha \in [\pi, 2\pi] \quad \blacksquare$$

2.2. **Elementul de arc şi lungimea unui arc de curbă plană**

2.2.1. *Arc de curbă regulat*

(i) Fie (C) o curbă plană definită parametric de ecuațiile (III) şi M un punct situat pe curbă.

Prin definiție, *punctul* $M(x_0, y_0)$ *se numeşte* ***punct regulat*** (***ordinar***) al curbei, dacă

$$x'^2(t_0) + y'^2(t_0) \neq 0.$$

unde t_0 este parametrul care corespunde bijectiv coordonatelor carteziene.

(ii) Dacă curba (C) este definită cartezian explicit, atunci condiția ca punctul $M(x_0, y_0)$ să fie punct regulat al curbei este

$$1 + y'^2(x_0) \neq 0.$$

(iii) Pentru o curbă definită implicit prin ecuația (II) condiția ca M să fie punct regulat se scrie

$$F_x'^2 + F_y'^2 \neq 0$$

unde expresia din membrul stâng se calculează în punctul (x_0, y_0).

(iv) În sfârşit, dacă curba este dată în coordonate polare, atunci coordonatelor carteziene (x_0, y_0) le corespund bijectiv coordonatele polare (ρ, α) iar condiția devine

$$\rho^2 + \rho'^2 \neq 0.$$

Prin definiție, *un arc de curbă se numeşte* ***regulat*** *dacă toate punctele arcului sunt regulate*.

2.2.2. *Elementul de arc pe o curbă*

Fie $A \in (C)$ fixat, iar $M \in (C)$ un punct curent regulat. Dacă lungimea arcului $\overset{\frown}{AM}$ măsurat în sensul de parcurgere al arcului este (*vezi figura* 2.6)

$$s = s(t), \tag{2.4}$$

atunci, ***elementul de arc*** $\widehat{AB}$ *este*, prin definiție, *diferențiala funcției* (2.4).

Însă, din (1.6)

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \left\| \vec{r}'(t) \right\| \tag{2.5}$$

(i) De aici rezultă expresia analitică a elementului de arc pe o curbă plană reprezentată prin ecuația vectorială (IV)

$$\mathrm{d}s = \left\| \vec{r}'(t) \right\| \mathrm{d}t, \tag{2.6}$$

(ii) Ținând seama de relațiile

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j};$$
$$\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}$$

se obține expresia elementului de arc pentru o curbă având reprezentarea parametrică (III):

$$\mathrm{d}s = \sqrt{x'^2 + y'^2}\,\mathrm{d}t. \tag{2.7}$$

(iii) Mai departe, dacă se consideră drept parametru pe curbă abscisa x a punctului curent $M(x, y)$, rezultă că pentru o curbă definită cartezian explicit de (I) are loc relația

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x. \tag{2.8}$$

(iv) Fie acum o curbă (C) dată în coordonate polare. Folosind formulele de trecere la coordonate polare (2.3) rezultă

$$\begin{aligned} x' &= \rho' \cos\alpha - \rho \sin\alpha; \\ y' &= \rho' \sin\alpha + \rho \cos\alpha, \end{aligned} \tag{2.9}$$

iar mai departe,

$$x'^2 + y'^2 = \rho^2 + \rho'^2 \tag{2.10}$$

de unde dacă ținem seama de (2.7)

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,\mathrm{d}\theta, \tag{2.11}$$

(v) Fie curba (C) dată prin ecuația implicită (II). Presupunând că y depinde implicit de variabila independentă x, prin relația $y = y(x)$ şi ținând seama de condițiile de regularitate, din teorema funcțiilor implicite rezultă

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y}, \tag{2.12}$$

unde prin F'_x, s-a notat derivata parțială a funcției $F(x,y)$ în raport cu variabila independentă x. Din (2.8) şi (2.12) rezultă expresia analitică pentru acest caz

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + \left(\frac{F'_x}{F'_y}\right)^2}\,\mathrm{d}x. \tag{2.13}$$

Exemple

2.6. Elementul de arc al *cicloidei* este

$$(C): \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi] \tag{2.14}$$

este

$$\mathrm{d}s = 2a \sin\frac{t}{2} \tag{2.15}$$

Într-adevăr, curba fiind reprezentată parametric, elementul de arc se exprimă cu ajutorul relației (2.7)

$$\mathrm{d}s = \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt =$$

$$= a\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t - 2\cos t}\,\mathrm{d}t = a\sqrt{2(1-\cos t)}\,\mathrm{d}t =$$

$$= a\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t = 2a\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t \quad \blacksquare$$

2.7. Elementul de arc al *lănțişorului*

$$(C): \ y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right); \ \ x \in [0, b]$$

este

$$\mathrm{d}s = \mathrm{sh}\frac{x}{a}\,\mathrm{d}x$$

Într-adevăr, ținând seama de definiția *funcțiilor hiperbolice*, ecuația curbei se rescrie

$$y = a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a};\ \ x \in [0,b],$$

iar

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2\frac{x}{a}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{ch}\frac{x}{a}\mathrm{d}x \qquad \blacksquare$$

2.8. Elementul de arc al *cardioidei*

$$(C): \rho = a(1 + \cos\alpha) \tag{2.16}$$

este

$$\mathrm{d}s = 2a\cos\frac{\alpha}{2} \tag{2.17}$$

Într-adevăr, din (2.9) avem

$$\mathrm{d}s = a\sqrt{(1+\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha}\,\mathrm{d}\alpha = a\sqrt{2 + 2\cos\alpha}\,\mathrm{d}\alpha =$$

$$= a\sqrt{2(1+\cos\alpha)}\,\mathrm{d}\alpha = a\sqrt{4\cos^2\frac{\alpha}{2}}\,\mathrm{d}\alpha = 2a\cos\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}\alpha \qquad \blacksquare$$

2.9. Elementul de arc al cercului de rază r

$$(C): \begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases},\quad t \in [0, 2\pi] \tag{2.18}$$

este

$$\mathrm{d}s = r\,\mathrm{d}t \tag{2.19}$$

Într-adevăr, din (2.7) avem

$$\mathrm{d}s = \sqrt{x'^2 + y'^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{r^2\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)}\,\mathrm{d}t = r\,\mathrm{d}t \quad \blacksquare$$

2.2.3. *Lungimea unui arc de curbă plană*

Prin definiție, ***lungimea arcului*** $\overset{\frown}{AB}$ pe curba (C) este

$$\ell_{\overset{\frown}{AB}} = \int_{\overset{\frown}{AB}} \mathrm{d}s \tag{2.20}$$

Astfel, ținând seama de relațiile (2.6), (2.7), (2.8), (2.11), (2.13) se obțin *expresiile analitice ale lungimii unui arc* $\overset{\frown}{AB}$ pe o curbă dată corepunzătoare reprezentărilor $(I-IV)$.

(I) $$\ell_{\overset{\frown}{AB}}=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x, \tag{2.21}$$

(II) $$\ell_{\overset{\frown}{AB}}=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{F'_x}{F'_y}\right)^2}\,\mathrm{d}x, \tag{2.22}$$

(III) $$\ell_{\overset{\frown}{AB}}=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{x'^2+y'^2}\,\mathrm{d}t, \tag{2.23}$$

(IV) $$\ell_{\overset{\frown}{AB}}=\int_{t_0}^{t_1}\left\|\overrightarrow{r'}(t)\right\|\mathrm{d}t, \tag{2.24}$$

(VI) $$\ell_{\overset{\frown}{AB}}=\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,\mathrm{d}x, \tag{2.25}$$

Exemple

2.10. Să se afle lungimea cercului de rază r.

Fie cercul definit parametric prin

$$(C):\begin{cases}x=r\cos t\\ y=r\sin t,\end{cases}\quad t\in[0,2\pi].$$

Notând

ℓ_C – lungimea cercului,

atunci din (2.23) rezultă

$$\ell_C=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}r\,\mathrm{d}t=2\pi r \qquad \blacksquare$$

2.11. Să se afle lungimea unei bucle a *cicloidei*

$$(C):\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases},\ t\in[0,2\pi]$$

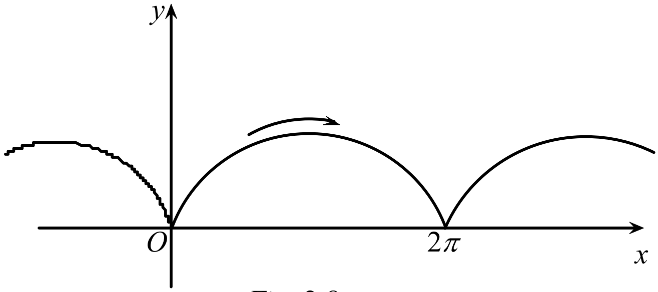


Fig. 2.8

O buclă a arcului cicloidal se poate parcurge pe intervalul $t \in [0, 2\pi]$ (*vezi figura* 2.8). Astfel, din *exemplul* **2.6** s-a stabilit elementul de arc

$$\mathrm{d}s = 2a\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t,$$

cu ajutorul formulei (2.15), iar cu relația (2.23) rezultă

$$\ell_{\overset{\frown}{AB}} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t = -4a\cos\frac{t}{2}\bigg|_0^{2\pi} = 8a \qquad \blacksquare$$

2.12. Să se afle lungimea unui arc al lănțișorului definit la *exercițiul* **2.7**

$$y = a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a},\ x \in [0, b]$$

Aplicând relația (2.21) avem

$$\ell_{\overset{\frown}{AB}} = \int_0^b \sqrt{1 + y'^2(x)}dx = \int_0^b \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2\frac{x}{a}}dx = \int_0^b \mathrm{ch}\frac{x}{a}dx = a\,\mathrm{sh}\frac{x}{a}\bigg|_0^b =$$

$$= a\left(\mathrm{sh}\frac{b}{a} - \mathrm{sh}\frac{0}{a}\right) = a\,\mathrm{sh}\frac{b}{a} \qquad \blacksquare$$

2.3. **Tangenta într-un punct al unei curbe plane**

2.3.1. *Ecuația tangentei într-un punct al unei curbe plane*

Fie $M(x,y)\in(C)$ un *punct ordinar* sau *regulat* i. e. un punct în care

$$x'^2+y'^2\neq 0.$$

Notăm

$T(X,Y)-$ *punctul curent pe tangentă,*

$M(x,y)-$ *punctul curent pe curbă.*

(i) Atunci ecuația tangentei în T la o curbă definită explicit va fi

$$(I)\qquad (MT):\ Y-y=y'(X-x),\tag{2.26}$$

Observație

În liceu obişnuiam să notăm *panta tangentei* în punctul curent, corespunzătoare curbei definite cartezian de ecuația (I), prin $m=y'$.

(ii) Întrucât pentru o curbă definită cartezian de ecuația (II), derivata funcției $y=y(x)$, se obține aşa cum am văzut în *Capitolul* 1 din teorema funcțiilor implicite

$$y'=-\frac{F'_x}{F'_y},$$

astfel încât relația (2.26) se rescrie sub forma

$$(MT):\ Y-y=-\frac{F'_x}{F'_y}(X-x)\tag{2.27}$$

sau

$$(MT):(Y-y)F'_y+(X-x)F'_x=0\tag{2.28}$$

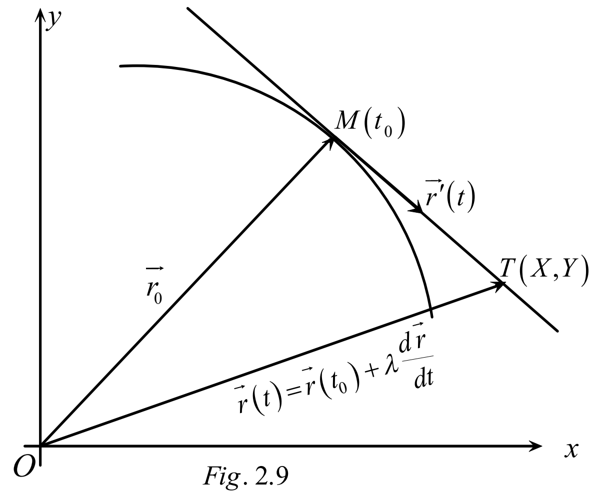


Fig. 2.9

(iii) Mai departe, pentru o reprezentare parametrică a unei curbe,

$$(C):\ x = x(t),\ y = y(t)$$

rezultă că

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y'(t)\mathrm{d}t}{x'(t)\mathrm{d}t} = \frac{y'}{x'},$$

unde în ultima relație am folosit notația uzuală pentru derivata funcției *y* în raport cu *t*. În aceste condiții, ecuația (2.26) devine

$$(MT):\quad \frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'} \tag{2.29}$$

(iii) Ecuația vectorială a tangentei într-un punct ordinar la o curbă definită de (IV) se deduce ținând seama că dreapta ce trece printr-un punct $M(t_0)$, având vectorul de poziție $\vec{r}(t_0)$, are direcția vectorul $\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$

(IV):
$$(MT):\ \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \lambda\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t},\ \lambda \in \mathbb{R} \tag{2.30}$$

Exemple

2.13. Să se scrie ecuațiile tangentei curba

$$(C):\ y = x + 1$$

în punctul de abscisă $x = e.$

Dacă $T(X,Y)$ este punctul curent al tangentei la curba dusă prin punctul $(x,y)\in(C)$ atunci din (2.26) pentru

$$x=e,\ y=e+1,\ y'=1$$

rezultă

$$Y-\cancel{e}-1=X-\cancel{e}\Leftrightarrow X-Y+1=0 \quad \blacksquare$$

2.14. Să se scrie ecuația tangentei la curba

$$(C):\begin{cases} x=e^t\cos t \\ y=e^t\sin t \end{cases}$$

în punctul $A(1,0)$.

Observăm că punctul $A(1,0)$ corespunde bijectiv valorii $t=0$, deci $A(0)\in(C)$.

Atunci ecuația tangentei într-un punct $A(t_0)$ este dată de (2.29), unde (X,Y) este punctul curent pe tangentă, iar

$$x(t_0)=x;\quad y(t_0)=y$$
$$x'=x(t_0);\ y'=y'(t_0).$$

Avem

$$x'(t)=e^t(\cos t-\sin t),\ \ y'(t)=e^t(\cos t+\sin t)$$

iar

$$x(0)=1;\ y(0)=0,$$
$$x'(0)=1;\ \ y'(0)=1.$$

Cu acestea ecuația tangentei (2.29) devine

$$X-1=Y$$

sau

$$X-y-1=0 \qquad \blacksquare$$

2.15. Să se scrie ecuațiile tangentei la curba

$$(C): x^3+3x^2y-y^2+9=0$$

în punctul $A(0,3)$.

Notând

$$F(x,y)\equiv x^3+3x^2y-y^2+9=0\,,$$

panta tangentei la curbă într-un punct oarecare $(x, y) \in (C)$ este

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{3x^2 + 6xy}{3x^2 - 2y},$$

iar, în punctul $(0,3)$ se obține $m = y' = 0.$

Astfel ecuația tangentei la curbă în puctul curent scrisă sub forma

$$Y - y = -\frac{F'_x}{F'_y}(X - x)$$

în punctul $B(0,3)$

$$Y - 3 = 0 \quad \blacksquare$$

2.3.2. *Orientarea tangentei într-un punct al unei curbe plane*

(i) Alegem un *sens de creştere* al tangentei corespunzătoare *sensului pozitiv* al funcției $s = s(t)$ sau $s = s(x)$ ce exprimă arcul pe curbă, unde *t* sau *x* reprezintă *parametrul*, respectiv *abscisa* punctului *M*.

Versorul

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds}; \ \left|\vec{\tau}\right| = 1, \tag{2.31}$$

ne dă sensul pozitiv al tangentei (MT).

Într-adevăr,

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \lambda \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{2.32}$$

Relația (2.32) arată că vectorul $\vec{\tau}$ are direcția tangentei (MT) şi sensul lui $\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$ (întrucât $\lambda > 0$), adică *sensul lui t crescător corespunde sensului de creştere pozitiv ales pe curba* (C).

Apoi, ținând seama şi de (1.6)

$$\left|\vec{\tau}\right| = \frac{\left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}} = \frac{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}} = 1.$$

(ii) Pentru o curbă reprezentată parametric prin ecuațiile intrinseci (VI)

(VI) $$(C):\ x = x(s),\ y = y(s)$$

cosinuşii directori ai tangentei

$$\vec{\tau} = x'(s)\vec{i} + y'(s)\vec{j}, \tag{2.33}$$

sunt

$$x'(s) = \cos\alpha;\quad y'(s) = \sin\alpha;\quad \alpha = \mathrm{m}\left(\widehat{\vec{\tau},\vec{i}}\right), \tag{2.34}$$

iar derivatele

$$x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t};\ y' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{2.35}$$

exprimă parametrii directori ai tangentei.

2.2.3. *Unghiul dintre tangentă şi raza vectoare*

Pentru o curbă dată în coordonate polare

$$(C):\ \rho = \rho(\theta),$$

unghiul dintre tangenta (*MT*) şi raza vectoare $\overrightarrow{OM}$ corespunzătoare unui punct *M* este (*vezi figura* 2.8)

$$V = \mathrm{m}\left(\widehat{(OM),(MT)}\right);\ \alpha + V = \beta.$$

Rezultă

$$\mathrm{tg}\,V = \mathrm{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\mathrm{tg}\,\beta - \mathrm{tg}\,\alpha}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta} \tag{2.36}$$

Însă

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{y'}{x'} = \frac{(\rho\sin\theta)'}{(\rho\cos\theta)'} = \frac{\rho'\sin\theta + \rho\cos\theta}{\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta};\ \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{y}{x}. \tag{2.37}$$

Din (2.36) şi (2.37) rezultă

$$\operatorname{tg} V = \frac{\rho}{\rho'} \tag{2.38}$$

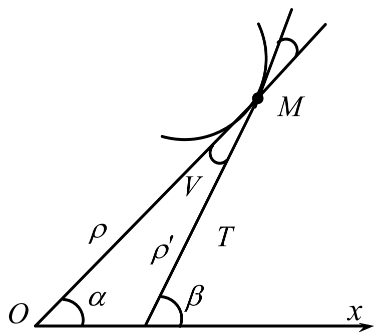


Fig. 2.10

Exemple

2.16. Să se calculeze unghiul *V* dintre tangenta *MT* şi raza vectoare *OM* unde *M* este un punct pe *cardioida* definită la *exemplul* **2.6**

$$(C): \rho = a(1 + \cos\alpha).$$

Aplicând formula (2.18) rezultă că

$$\operatorname{tg} V = \frac{\rho}{\rho'} = -\frac{\cancel{a}\,(1 + \cos\alpha)}{-\cancel{a}\sin\alpha} = -\frac{2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}} = -\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \quad \blacksquare$$

2.17. Să se arate *spirala logaritmică*

$$\rho = ae^{k\alpha}$$

îşi taie razele vectoare sub un unghi constant.

Aplicând formula (2.18) se obține

$$\operatorname{tg} V = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{ae^{kx}}{ake^{kx}} = \frac{1}{k} \quad \blacksquare$$

2.3. **Normala într-un punct punct la o curbă plană**

2.3.1. *Ecuația normalei într-un punct al unei curbe plane*

Fie $M(x,y)$ un punct regulat al unei curbe plane(C).

Perpendiculara pe tangenta (MT) *în M la curba dată se numeşte* ***normala*** *în M la curba* (C) (*vezi figura* 2.11).

Astfel, odată determinată panta tangentei în punctul curent $-y'$, se ştie şi panta normalei în acelaşi punct $-\frac{1}{y'}$.

Notând cu $N(X,Y)$ punctul curent pe normala notată (MN), atunci ecuația acesteia se va scrie sub următoarele forme

(I)
$$(MN):\ Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x), \tag{2.39}$$

(II)
$$(MN):\ (X-x)F'_y-(Y-y)F'_x=0 \tag{2.40}$$

(III)
$$(MN):\ \frac{X-x}{-y'}=\frac{Y-y}{x'} \tag{2.41}$$

Exemple

2.18. Să se scrie ecuația normalei la curba
$$y=\ln^2 x+1$$
în $x=e.$

Dacă $N(X,Y)$ este punctul curent al normalei la curba dusă prin punctul (x,y), atunci pentru $x=e$
$$y=2;\ -\frac{1}{y'}=-\frac{e}{2}$$
relația (2.39)devine prin înlocuire
$$Y-2=-\frac{e}{2}(X-e)\Leftrightarrow eX+2Y-e^2-4=0 \quad \blacksquare$$

2.19. Să se scrie ecuația normalei la curba

$$(C):\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$$

în punctul $A(1,0)$.

Ținând seama de *exemplul* 2.12, normala în punctul $A(0)$ se determină cu relația (2.41), deci

$$\frac{X-1}{-1} = \frac{Y-0}{1}$$

sau

$$X + Y - 1 = 0 \quad \blacksquare$$

2.20. Să se scrie ecuațiile normalei la curba

$$(C): x^3 + 3x^2 y - y^2 + 9 = 0$$

în punctul $A(0,3)$.

Din *exemplul* **2.13**, rezultă că într-un punct arbitrar pe curbă

$$F'_x = 3x^2 + 6xy,\ F'_y = 3x^2 - 2y$$

iar, în $A(0,3)$, relația (2.32) devine

$$0 \cdot (Y-3) + 6(X-0) = 0 \Leftrightarrow X = 0 \quad \blacksquare$$

2.4.2. *Orientarea normalei într-un punct al unei curbe plane*

Sensul pozitiv al normalei (MN) (*vezi figura* 2.11) este dat de versorul

$$\vec{n} = \frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}\alpha}. \tag{2.42}$$

Ținând seama de (2.1) și (2.22)

$$\vec{\tau} = x'(s)\vec{i} + y'(s)\vec{j} = \cos\alpha\,\vec{i} - \sin\alpha\,\vec{j}, \tag{2.43}$$

rezultă

$$\vec{n} = x''(s)\vec{i} + y''(s)\vec{j} = -\sin\alpha\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j}, \tag{2.44}$$

unde,

$$\frac{\pi}{2}+\alpha=\mathrm{m}\left(\widehat{\vec{n},\vec{\tau}}\right).$$

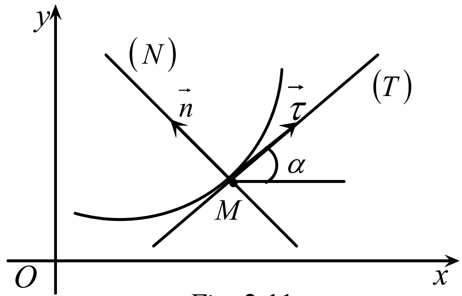


Fig. 2.11

Observații

1^0) *Sensul pozitiv al normalei coincide cu sensul pozitiv ales pe o normala principală la o curbă din spațiu* (*vezi paragraful* 3.6).

Într-adevăr, dacă vectorul de poziție al punctului $M(x,y)$ pe curba (C) este

$$\vec{r}(s)=x(s)\vec{i}+y(s)\vec{j}$$

atunci

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}s^2}=-\sin\alpha\vec{i}+\cos\alpha\vec{j}$$

astfel

$$\vec{n}=\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}/\mathrm{d}s^2}{\left|\mathrm{d}^2 r/\mathrm{d}s^2\right|}=-\sin\alpha\ \vec{i}+\cos\alpha\vec{j}\quad\blacksquare$$

2^0) *Cosinuşii directori ai normalei* (MN) *sunt*

$$\left(-y'(s),\ x'(s)\right)\tag{2.45}$$

Comparând acest rezultat cu (2.28), rezultă că *vectorul normalei este orientat spre concavitatea curbei* (*vezi figura* 2.11).

2.5. **Segmentele tangentă şi normală, subtangentă şi subnormală**

Fie o curbă (C) şi un punct *M* regulat în care am definit tangenta şi normala la această curbă .

*Numim **segment tangentă** în punctul M al curbei* (C) *distanța de la punctul M la punctul T, unde tangenta* (MT) *taie axa Ox.*

*Numim **segment normală** în punctul M al curbei* (C) *distanța de la punctul M la punctul N, unde normala* (MN) *taie axa Ox.*

*Proiecțiile ortogonale ale segmentelor tangentă şi normală pe axa Ox se numesc respectiv **subtangentă** şi **subnormală**.*

Observație.

Subtangenta şi subnormala sunt segmente orientate.

Dacă notăm cu *P* proiecția punctului *M* pe axa absciselor, atunci se pun în evidență următoarele segmente (*vezi figura* 2.12)

MT – segmentul tangentă,

PT – subtangentă,

MN – segmentul normală,

PN – subnormală.

(i) Cazul curbei (C) definite explicit

$$(C): y = f(x).$$

Ecuațiile tangentei şi normalei la curba (C) într-un punct *M* sunt

$$(MT):\ Y - y = y'(X - x); \quad (MN):\ Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x).$$

Abscisele punctelor de intersecție X_T, respectiv, X_N ale acestor drepte cu axa *Ox* se obține luând $x = 0$ în cele două ecuații

$$X_T = x - \frac{y}{y'}; \qquad X_N = x + yy'. \tag{2.46}$$

de unde

$$TP = OP - OT = x - \left(x - \frac{y}{y'} \right); \ PN = ON - OP = (x + yy') - x = yy'.$$

Prin urmare

$$PT = -\frac{y}{y'}; \quad PN = yy'. \tag{2.47}$$

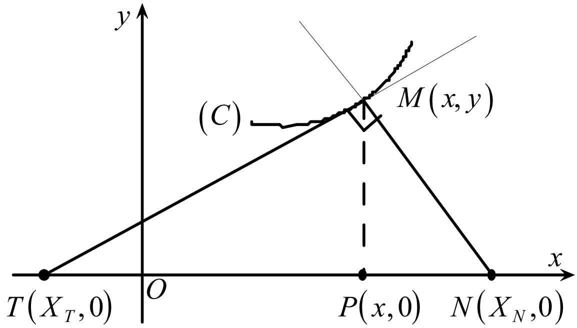


Fig. 2.12

Segmentele $|MT|$ şi $|MN|$ se determină din triunghiurile dreptunghice $[MPT]$şi $[MPN]$:

$$|MT| = \sqrt{MP^2 + PT^2} = \sqrt{y^2 + \left|\frac{y}{y'}\right|^2} = \left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{1+y'^2} \tag{2.48}$$

$$|MN| = \sqrt{MP^2 + PT^2} = \sqrt{y^2 + (yy')^2} = |y|\sqrt{1+y'^2} \tag{2.49}$$

(ii) Pentru o curbă definită cartezian de ecuaţiile implicite

$$(C): F(x,y) = 0,$$

se înlocuieşte

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

în relaţiile (2.48) şi (2.49) se raţionează ca în primul caz.

(iii) Dacă curba (C) este reprezentată parametric

$$(C): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases}$$

se înlocuieşte

$$y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{y'}{x'}$$

în (2.48), (2.49) şi se obţin analog

$$X_T = x - \frac{y}{y'}, \quad X_N = x + yy' \tag{2.50}$$

$$PT = -y\frac{x'}{y'}, \quad PN = y\frac{y'}{x'}, \tag{2.51}$$

$$|MT| = \left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{x'^2 + y'^2}, \quad |MN| = \left|\frac{y}{x'}\right|\sqrt{x'^2 + y'^2} \tag{2.52}$$

(v) Cazul curbelor definite (C) prin coordonate polare (V)

$$(C): \ \rho = \rho(\theta).$$

Se duce perpendiculara pe raza vectoare a punctului *M* (*vezi figura* 2.13) care intersectează tangenta şi normala în punctele *T*, respectiv *N*.

În acest caz, avem

MT – *segmentul tangentă polară*,

MN – *segmentul tangentă polară*,

OT – *subtangenta polară*,

ON – *subnormala polară*.

Dacă se notează

V – *unghiul dintre tangentă şi normală*, atunci

$$\mathrm{tg}V = \frac{\rho}{\rho'} \tag{2.53}$$

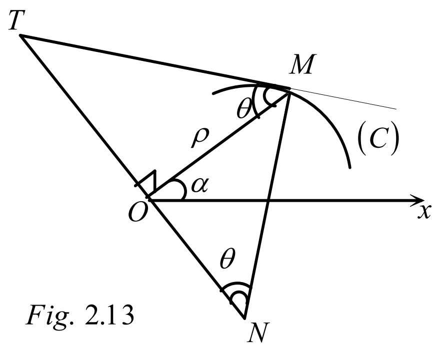


Fig. 2.13

$$|MT| = \left|\frac{\rho}{\rho'}\right|\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}; \quad |MN| = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}, \tag{2.54}$$

$$\left|\overline{OT}\right| = \frac{\rho^2}{\rho'}; \quad \left|\overline{ON}\right| = |\rho'|. \tag{2.55}$$

Exemple

2.21. Să se afle segmentul tangentă, segmentul normală, subtangentă şi subnormală corespunzătoare curbei

$$(C): x^3 - xy^2 + 2x + y - 3 = 0$$

în punctele în care tangenta şi normala în $M(1, 1)$ intersectează axa Ox.

În cazul de față curba este definită de o ecuație implicită

$$F(x, y) \equiv x^3 - xy^2 + 2x + y - 3 = 0,$$

unde

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{3x^2 - y^2 + 2}{-2xy + 1}.$$

Se aplică relațiile (2.39) şi (2.40) pentru

$$y' = -4, \quad x = 1, \quad y = 1,$$

astfel că

$$|MT| = -\frac{\sqrt{17}}{4}, \ |MN| = \sqrt{17}, \ PT = -\frac{1}{4}, \ PN = -4 \quad \blacksquare$$

2.22. Aceleaşi cerințe pentru curba (C), definită de ecuațiile parametrice

$$(C): \begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$$

şi $M(0)$ punctul fixat pe curbă.

Avem

$$\begin{cases} x = x(0) = 1 \\ y = y(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = e^t (\cos t - \sin t) \\ y' = e^t (\cos t + \sin t) \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x'(0) = 1 \\ y' = y'(0) = 1 \end{cases}$$

Mai departe se aplică relațiile (2.51) şi (2.52)

$$|MT| = \left|\frac{y}{y'}\right| \sqrt{x'^2 + y'^2} = 0; \ |MN| = \frac{y}{x'} \sqrt{x'^2 + y'^2} = 0,$$

$$PT = -\frac{y}{y'} x' = 0; \quad PN = yy'x' = 0 \quad \blacksquare$$

2.23. Să se detemine subtangenta şi subnormala într-un punct arbitrar la parabola de ecuație carteziană

$$(C):\ y^2 = 2px,\ \ p > 0$$

Notăm

$$F(x,y) \equiv y^2 - 2px = 0$$

Atunci,

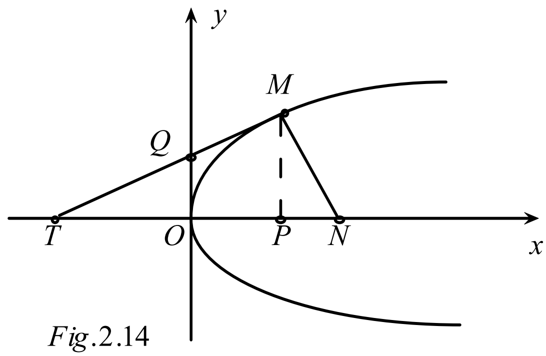
$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{-2p}{2y} = \frac{p}{y}$$

iar dacă ținem seama de relațiile (2.47), rezultă

$$PT = -\frac{y}{y'} = -\frac{y^2}{p} = -\frac{2px}{p} = -2x$$

De aici de deducem o *proprietate* a parabolei, şi anume că *originea sistemului de axe împarte subtangenta parabolei* $y^2 = 2px$ *în două părți egale* (*vezi figura* 2.14).

Deoarece OQ este linie mijolcie în triunghiul [MPT] rezultă o altă *proprietate* a parabolei.



$Fig.2.14$

Axa Oy împarte segmentul tangentă în două părți egale.

Aplicând din nou relațiile (2.47), rezultă

$$PN = yy' = y \cdot \frac{p}{y} = p$$

Cu alte cuvinte, *subnormala parabolei* $y^2 = 2px$ *este constantă şi este egală cu parametrul parabolei* ■

2.24. Să se afle segmentul de tangentă într-un punct arbitrar M al curbei

$$(C):\begin{cases} x = t - \operatorname{th} t \\ y = \dfrac{1}{\operatorname{ch} t} \end{cases} \quad (tractricea)$$

Să observăm mai întâi că

$$x' = 1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t} = \frac{\operatorname{ch}^2 t - 1}{\operatorname{ch}^2 t} = \frac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t}; \quad y' = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t},$$

iar

$$x'^2 + y'^2 = \frac{\operatorname{sh}^4 t + \operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t} = \frac{\operatorname{sh}^2 t\left(\operatorname{sh}^2 t + 1\right)}{\operatorname{ch}^2 t} = \operatorname{th}^2 t,$$

unde am ținut seama de relația fundamentală din teoria funcțiilor hiperbolice

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1.$$

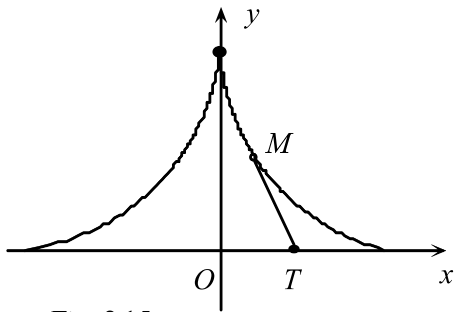


Fig. 2.15

Aplicăm mai departe relațiile (2.52)

$$|MT| = \left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{x'^2 + y'^2} = \frac{\dfrac{1}{\cancel{\operatorname{ch} t}}}{\dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^{\cancel{2}} t}} \operatorname{th} t = \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t} \cdot \operatorname{th} t = 1$$

Prin urmare, *tractricea* (*vezi figura* 2.15) *are proprietatea că segmentul tangentă este constant* ■

2.25. Să se afle tangenta polară, normala polară, subtangenta polară şi subnormala polară într-un punct arbitrar al spiralei logaritmice

$$(C): \rho = ae^{kx}, \; k > 0.$$

Avem

$$\rho' = ake^{kx} = k\rho;\ \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = \sqrt{\rho^2 + k^2\rho^2} = \rho\sqrt{1+k^2}$$

Se aplică mai departe relațiile (2.54) şi (2.55) astfel încât

$$|MT| = \left|\frac{\rho}{\rho'}\right|\sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = \frac{\rho}{k\rho}\cdot\rho\sqrt{1+k^2} = \frac{1}{k}\sqrt{1+k^2}\,\rho$$

$$|MN| = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = \sqrt{1+k^2}\,\rho$$

$$\left|\overline{OT}\right| = \frac{\rho^2}{\rho'} = \frac{\rho^2}{k\rho} = \frac{1}{k}\rho;\ \left|\overline{ON}\right| = |\rho'| = k\rho \quad \blacksquare$$

Din aceste rezultate se obține următoarea *proprietate a spiralei logaritmice* şi anume:

Cele patru segmente de tangentă, subtangentă, normală şi subnormală polară sunt proporționale cu distanța polară a punctului considerat.

2.6. **Punctele singulare ale unei curbe plane orientate**

2.6.1. *Natura punctelor singulare ale unei curbe plane*

Studiul tangentei şi normalei s-a făcut în ipoteza că punctul M este un *punct regulat* (*ordinar*) al curbei (C). Reamintim că un punct M situat pe o curbă (C) se numeşte *ordinar* sau *regulat,* dacă este verificată una din condițiile de la *paragraful* 2.2.1.

Dacă punctul considerat este *singular*, atunci ecuațiile stabilite pentru tangentă şi normală stabilite în *paragrafele* 2.2 şi 2.3 îşi pierd valabilitatea.

Ne propunem în contiunuare să studiem comportamentul curbei în vecinătatea unui astfel de punct.

Fie curba plană reprezentată cartezian de ecuația

$$(C):\ F(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

unde $F \in C^1(D)$. În acest caz, soluțiile sistemului

$$\begin{cases} F(x,y)=0 \\ F'_x(x,y)=0 \\ F'_y(x,y)=0 \end{cases} \tag{2.56}$$

sunt coordonatele *punctelor singulare* ale unei curbe plane.

Observație

Sistemul (2.47) *este în genral incompatibil, deci, în general, curbele plane nu au puncte singulare.*

Un punct singular soluție a sistemului (2.47) *se numeşte* ***punct dublu****, dacă cel puțin una din derivatele parțiale de ordinul 2 ale lui* $F(x,y)$ *este diferită de zero.*

Dacă într-un astfel de punct toate derivatele până la ordinul doi sunt nule, iar cel puțin una din derivatele de ordinul al treilea este diferită de zero, atunci punctul singular se numeşte ***punct triplu****.*

2.6.2. *Studiul punctelor duble ale unei curbe plane*

Pentru a studia tangenta într-un astfel de punct $M(x,y)$ situat pe curba plană (C) plecăm, de la faptul că tangenta (MT) este *poziția limită a secantei* MM' când $M \to M'$, unde $M'(x+\Delta x,\ y+\Delta y) \in (C)$.

În ipoteza că $F(x,y)$ este de clasă C^n, aplicăm formula lui Taylor cu rest astfel încât

$$\begin{gathered} F(x+\Delta x,\ y+\Delta y) = F(x,y) + \frac{1}{1!}\left[F'_x(x,y)\Delta x + F'_y(x,y)\Delta y\right] + \\ \frac{1}{2!}\left[F''_{x^2}(x,y)(\Delta x)^2 + 2F''_{xy}(x,y)\Delta x\Delta y + F''_{y^2}(x,y)(\Delta y)^2\right] + \dots \\ \dots + \frac{1}{(n-1)!}\left[F'_x(x,y)\Delta x + F'_y(x,y)\Delta y\right]^{(n)} + \\ + \frac{1}{n!}\left[F'_x(x+\xi\Delta x, y+\eta\Delta y)\Delta x + F'_y(x+\xi\Delta x, y+\eta\Delta y)\Delta y\right]^{(n)} \end{gathered} \tag{2.57}$$

Ținând seama de (2.57) şi de faptul că $M' \in (C)$ dezvoltarea de mai sus se rescrie sub forma

$$\frac{1}{2!}\left[F''_{x^2}(x,y)(\Delta x)^2 + 2F''_{xy}(x,y)\Delta x\Delta y + F''_{y^2}(x,y)(\Delta y)^2\right] + \dots$$
$$\dots + \frac{1}{(n-1)!}\left[F'_x(x,y)\Delta x + F'_y(x,y)\Delta y\right]^{(n)} + \tag{2.58}$$
$$+\frac{1}{n!}\left[F'_x(x+\xi\Delta x, y+\eta\Delta y)\Delta x + F'_y(x+\xi\Delta x, y+\eta\Delta y)\Delta y\right]^{(n)} = 0$$

Coeficientul unghiular secantei MM' este $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, iar coeficientul unghiular al tangentei este

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag*{(2.49)$_1$}$$

Pentru a determina pe m se împarte egalitatea (2.58) prin Δx^2 şi apoi trecem la limită după $\Delta x \to 0$. Termenii care conțin derivate de ordin superior lui doi se vor anula la limită; astfel se obține egalitatea

$$m^2 F''_{x^2}(x,y) + 2mF''_{xy}(x,y) + F''_{y^2}(x,y) = 0. \tag{2.59}$$

În funcție de discriminantul ecuației de gradul al doilea (2.59) distingem următoarele cazuri:

(i) Dacă într-un punct $M(x,y) \in (C)$

$$\left(F''_{xy}\right)^2 - F''_{x^2}F''_{y^2} > 0, \tag{2.60}$$

Ecuația de gradul al doilea (2.59) admite doua rădăcini reale şi distincte, aşadar prin M trec *două ramuri* ce admit *tangente distincte* în acest punct (*vezi figura* 2.16). Un astfel de punct se numeşte ***nod***.

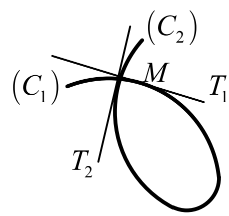


Fig. 2.16

(ii) Dacă în punctul $M(x,y)\in(C)$

$$\left(F''_{xy}\right)^2 - F''_{x^2}F''_{y^2} < 0, \qquad (2.61)$$

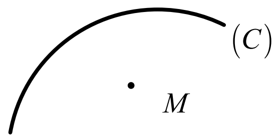


Fig. 2.17

atunci ecuația (2.59) nu admite rădăcini reale, iar curba *nu admite tangentă* în punctul $M(x,y)\in(C)$ (*vezi figura* 2.17). Un astfel de punct se numeşte ***punct izolat.***

(iii) *Punctul* $M(x,y)\in(C)$ *se numeşte* ***punct de întoarcere*** *al curbei dacă*

$$\left(F''_{xy}\right)^2 - F''_{x^2}F''_{y^2} = 0 \qquad (2.62)$$

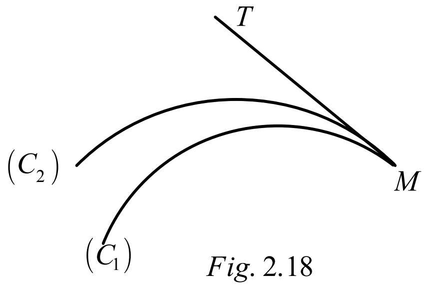


Fig. 2.18

Ecuația (2.59) adimte două rădăcini confundate. În acest caz, prin punctul considerat trec două ramuri (C_1) şi (C_2) ale curbei (C) care admit în *M aceeaşi tangentă* (*vezi figura* 2.18).

Exemple

2.26. Determinați punctele singulare ale curbei

$$(C): y^2-(x-2)(x-1)=0$$

şi să se scrie ecuațiile tangentelor corespunzătoare.

Notăm

$$F(x,y)\equiv y^2-(x-2)(x-1)=0.$$

Punctele singulare ale curbei $F(x,y)=0$ sunt soluțiile sistemului (2.56), adică

$$\begin{cases} F(x,y)\equiv y^2-(x-2)^2(x-1)=0 \\ F'x(x,y)\equiv -2(x-2)^2(x-1)-(x-2)^2=0 \\ F'y(x,y)=2y=0. \end{cases}$$

Soluția sistemului este punctul $A(2,0)$. În acest punct forma pătratică

$$\Delta=\left(F''_{xy}\right)-F''_{x^2}F''_{y^2}$$

este *pozitiv definită*, astfel prin punctul A trec două ramuri ale curbei ce admit tangente distincte în acest punct. $A(2,0)$ este un nod.

Din ecuația

$$m^2\left(F''_{y^2}\right)_A+2m\left(F''_{xy}\right)_A+\left(F''_{x^2}\right)_A=0$$

unde $\left(F''_{xy}\right)_A$ s-a notat valoarea $F''_{xy}(2,0)$, rezultă $m=\pm 1$ iar ecuațiile celor două tangente sunt respectiv

$$y=\pm(x-2)\ \blacksquare$$

2.27. Să se afle punctele singulare ale curbei

$$(C): x^3+y^3-3axy=0\,,\quad x>0$$

şi să se scrie ecuațiile tangentelor corespunzătoare.

Notăm

$$F(x,y)\equiv x^3+y^3-3axy=0,\ x>0$$

Sistemul (2.56) devine, în acest caz

$$\begin{cases} x^3+y^3-3axy=0 \\ 3x^2-3ay=0 \\ 3y^2-3ax=0 \end{cases}$$

şi admite soluția $(0,0)$. Deci, originea este singurul punct singular al curbei (C).

Mai departe

$$F''_{x^2}=6x\,,\ F''_{xy}=-3a\,,\ F''_{y^2}=6y$$

iar

$$F''_{x^2}(0,0)=0,\quad F''_{xy}(0,0)=-3a\neq 0,\quad F''_{y^2}(0,0)=0,$$

aşa încât forma pătratică asociată acestui punct

$$F''^2_{xy}(0,0) - F''_{y^2}(0,0)\cdot F''_{x^2}(0,0) = +9a^2 > 0$$

fiind pozitiv definită, obținem că punctul $O(0,0)$ este un *nod*. Deci, ecuația

$$m^2 F''_{y^2}(0,0) + 2mF''_{xy}(0,0) + F''_{x^2}(0,0) = 0$$

are două rădăcini reale şi distincte $m_1 = 0$ şi $m_2 = \infty,$ iar în final, prin nodul $O(0,0)$ trec două tangente, $y = 0$ şi respectiv, $x = 0$ ■

2.28. Să se arate că originea $O(0,0)$ este un punct singular al curbei

$$(C):\ F(x,y) \equiv x^3 + xy^2 + xy + y^3 - 2x^2 - 2y^2 = 0$$

şi să se cerceteze dacă prin acest punct se pot duce tangente la curbă.

Sistemul (2.56) se scrie sub forma

$$\begin{cases} x^3 + xy^2 + xy + y^3 - 2x^2 - 2y^2 = 0 \\ 3x^2 + y^2 + y - 4x = 0 \\ 2xy + 3y^2 - 4y = 0, \end{cases}$$

iar $(0,0)$ este o soluție a acestui sistem.

Mai departe, derivatele parțiale de ordinul al doilea

$$F_{x^2}(x,y) = 6x - 4,\ F_{xy}(x,y) = 2y + 1,\ F_{y^2}(x,y) = 2x + 6y - 4$$

în punctul $(0,0)$ devin

$$F_{x^2}(x,y) = -4,\ F_{xy}(x,y) = 1,\ F_{y^2}(x,y) = -4.$$

De aici rezultă că

$$F_{xy}(0,0) - F_{y^2}(0,0)\cdot F_{x^2}(0,0) = -16 < 0$$

deci originea este punct izolat al acestei curbe; curba nu admite tangentă.

Vom da o cale mai simplă de rezolvare a problemei. Să observăm că

$$F(x,y) = x^2(x + y - 2) + y^2(x + y - 2) = (x^2 + y^2)(x + y - 2)$$

Astfel curba este formată din dreapta

$$x + y - 2 = 0$$

şi punctul izolat $O(0,0)$ în care curba (C) nu admite tangentă ■

2.29. Să se determine punctele singulare ale conicei date prin ecuația generală

$$(C): F(x,y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

Punctele singulare ale curbei trebui să verifice sistemul (2.56) care, în acest caz se scrie sub forma

$$\begin{cases} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \\ a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0, \end{cases}$$

unde s-a împărțit cu 2 în ultimele două ecuații.

Condiția de compatibilitate este ca discriminantul sistemului să se anuleze

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

adică conica este una *degenerată*. De aici rezultă că, *doar conicele degenerate* (*singulare*) *admit puncte singulare* ■

2.6.3. *Studiul punctelor multiple ale unei curbe plane*

Studiul *punctelor multiple de ordin p* se face analog. În acest caz dezvoltarea începe cu termenii de rang *p*. Repetăm procedeul indicat mai sus, iar în locul ecuației de gradul doi se consideră una de gradul *p* în *m*,

Prin urmare, *într-un punct multiplu de ordinul p putem construi p tangente*, *unele putând fi reale (distincte sau confundate) sau imaginare*.

Exemple

2.30. Să se găsească punctele singulare ale curbei

$$(C):\ x^4 + 2ax^2y - ay^3 = 0$$

şi tangentele corespunzătoare lor.

Punctele singulare $A(x,y)$ se găsesc printre soluțiile sistemului

$$F(x,y) = 0;\quad F'_x(x,y) = 0;\quad F'_y(x,y) = 0,$$

unde

$$F(x,y)=x^4+2ax^2y-ay^3.$$

Astfel sistemul

$$\begin{cases} x^4+2ax^2y-ay^3=0 \\ 4x^3+4axy=0 \\ 2ax^2-3ay^2=0 \end{cases}$$

furnizează unica soluție $O(0,0)$. Mai departe,

$$\begin{array}{ll} F''_{x^2}=12x^2+4ay & F''_{x^2}(0,0)=0 \\ F''_{xy}=4ax & F''_{xy}(0,0)=0 \\ F''_{y^2}=-6ay & F''_{y^2}(0,0)=0 \end{array}$$

Întrucât în origine se anulează toate derivatele de ordinul *II*, iar

$$F'''_{x^2y}(0,0)=4a\not\equiv 0$$

obținem că originea este *punct triplu*. Pentru a determina pantele tangentelor continuăm procedeul de eliminare al nederminării $\dfrac{0}{0}$ şi avem

$$y_0'=-\left.\frac{F_x'}{F_y'}\right|_0=-\left.\frac{F''_{x^2}+y'F''_{xy}}{F''_{xy}+y'F''_{y^2}}\right|_0=-\left.\frac{F'''_{x^3}+F'''_{x^2y}\cdot y'+F'''_{xy}}{F'''_{x^2y}+2F'''_{xy^2}-y'+F'''_{xy}}\right|_0$$

Cum $y_0'=m$ are loc egalitatea

$$m=-\frac{2\cdot 4a\cdot m}{4a-6am^2}$$

din care rezultă soluțiile $m_1=0$, $m_{2,3}=\pm\sqrt{2}$.

Tangentele corespunzătoare sunt

$$y=0\ ,\ y=\pm\sqrt{2}x \quad \blacksquare$$

2.7. **Concavitate, convexitate. Punctele de inflexiune ale unei curbe plane.**

(i) Fie (C) dată de ecuaţia explicită $(I): y = f(x),\ x \in (a,b)$.

Arcul $\overset{\frown}{AB}$ (*vezi figura* 2.19) se numeşte

- *convex dacă* $f''(x) > 0,\ \forall x \in (a,b)$;
- *concav dacă* $f''(x) < 0,\ \forall x \in (a,b)$.

Punctul M se ***numeşte punct de inflexiune*** (*vezi figura* 2.20) *dacă*

$$f''(x) = 0 \quad \text{în } M$$

şi

$$f''_{|\overset{\frown}{AM}} \cdot f''_{|\overset{\frown}{MB}} < 0.$$

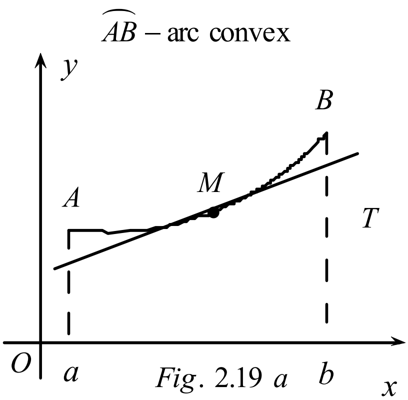


Fig. 2.19 *a*

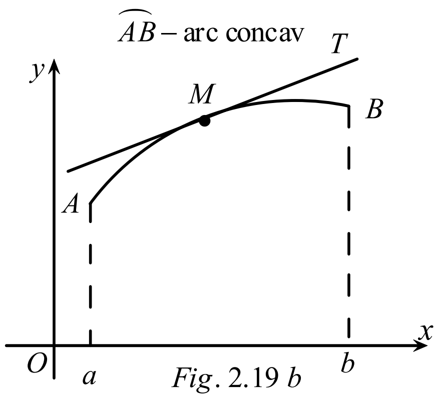


Fig. 2.19 *b*

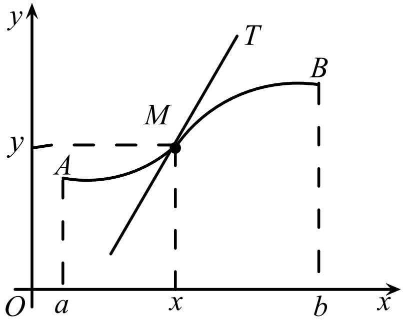


Fig. 2.20

(ii) Fie curba (C) definită implicit de ecuația

$$(II):\ F(x,y)=0,\quad (x,y)\in D\subseteq \mathbb{R}^2,$$

atunci din *teorema funcțiilor implicite*, se obțin derivatele întâi şi a doua a funcției $y=y(x)$ în punctul curent, respectiv

$$y'=-\frac{F'_x}{F'_y},$$

şi

$$y''=-\frac{F'_y\left(F''_{x^2}-y'F''_{xy}\right)-F'_x\left(F''_{xy}+y'F''_{y^2}\right)}{F'_{y^2}}, \tag{2.63}$$

unde s-a ținut seama de *criteriul lui Schwarz*

$$F''_{xy}=F''_{yx}.$$

Mai departe,

$$y''=\frac{F'_x\left(F''_{xy}-\dfrac{F'_x}{F'_y}F''_{x^2}\right)-F'_y\left(F''_{x^2}-\dfrac{F'_x}{F'_y}F''_{xy}\right)}{F'_{y^2}}$$

sau

$$y''=\frac{2F'_xF'_yF''_{xy}-F'_{x^2}F''_{y^2}-F'_{y^2}F''_{x^2}}{F'_{y^2}}. \tag{2.64}$$

Dacă în $M(x,y)\in \overset{\frown}{AB}$:

- $y''>0,$ atunci $\overset{\frown}{AB}$ este *arc convex*;
- $y''<0,$ atunci $\overset{\frown}{AB}$ este *arc concav*;
- $y''=0,$ iar $y''\big|_{\overset{\frown}{AM}}\cdot y''\big|_{\overset{\frown}{MB}}<0,$ atunci M se numeşte *punct de inflexiune*.

În acest caz, punctele de inflexiune sunt soluțiile sistemului

$$\begin{cases} F(x,y)=0 \\ 2F'_xF'_yF''_{xy}-F'_{x^2}F''_{y^2}-F'_{y^2}F''_{x^2}=0, \end{cases} \tag{2.65}$$

pentru care derivata a doua, y'', face schimbare de semn în jurul acestui punct. A doua condiție a sistemului (2.65) se mai poate scrie şi sub forma

$$\begin{vmatrix} F''_{x^2} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{xy} & F''_{y^2} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.56)_1$$

(iii) Pentru o curbă (C) reprezentată parametric în (III) se înlocuiesc y' şi y'' din (i) prin

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{y'}{x'}, \qquad y''_{x^2} = \frac{1}{x'^3}\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}. \qquad (2.66)$$

Fie $A(t_0)$ şi $B(t_1)$ două puncte fixate pe curba (C). Atunci dacă

- $y''_{x^2} < 0$, pe $[t_0, t_1]$, $\overset{\frown}{AB}$ *arc concav*;
- $y''_{x^2} > 0$, pe $[t_0, t_1]$, $\overset{\frown}{AB}$ *arc convex*;
- $y''_{x^2} = 0$ în punctul M şi derivata y'' îşi schimbă semnul în jurul punctului M, atunci $M(t)$ este *punct de inflexiune*.

(iv) Considerăm cazul în care curba reprezentată prin coordonatele polare (ρ, α).

Fie $A(\alpha_0)$ şi $B(\alpha_1)$ extremităţile arcului $\left(\overset{\frown}{AB}\right)$ pe curba $(C): \rho = \rho(\alpha)$.

Atunci dacă

- $\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' < 0$, pe $[\alpha_0, \alpha_1] \Rightarrow \overset{\frown}{AB}$ *arc concav*;
- $\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' > 0$, pe $[\alpha_0, \alpha_1] \Rightarrow \overset{\frown}{AB}$ *arc convex* ; (2.67)

- $\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = 0$, în M (2.68)

iar forma pătratică schimbă semnul în jurul punctului M, atunci M se numeşte *punct de inflexiune*.

Exemple

2.31. Să se precizeze concavitatea arcului de elipsă

$$\overset{\frown}{AB}: \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t, \end{cases} \quad t \in [0, \pi]$$

Pentru a aplica relaţiile (2.66) să observăm că

$$\begin{cases} x' = -a\cos t \\ y' = b\sin t \end{cases}, \quad \begin{cases} x'' = -a\sin t \\ y'' = b\cos t \end{cases}$$

Astfel,

$$y''_{x^2} = \frac{1}{x'^3}\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} = \frac{ab\sin^2 t + ab\cos^2 t}{\left(-a\sin^3 t\right)^3} = -\frac{b}{a^2\sin^3 t}$$

iar cum $\sin t > 0$ pe $[0,\pi]$, urmează că

$$y''_{x^2} < 0,\ \forall t \in [0,\pi],$$

deci arcul $\overset{\frown}{AB}$ este concav ■

2.32. Să se arate că *spirala lui Arhimede* (*vezi figura* 2.21)

$$(C):\ \rho = a\alpha$$

este concavă înspre pol pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$.

Întrucât

$$\rho' = a;\ \rho'' = 0,$$

rezultă că

$$\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = a^2\alpha^2 + 2a^2 = a^2\left(\alpha^2 + 2\right) > 0;\ \forall \alpha \in \mathbb{R},$$

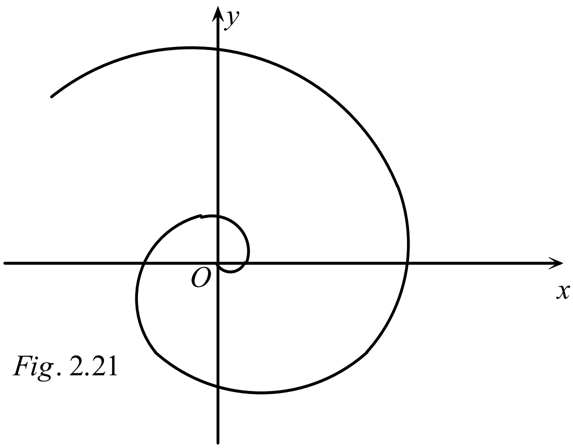


Fig. 2.21

astfel că *spirala logaritmică este concavă pentru orice* α *real*, *având concavitatea înspre pol* ■

2.8. **Curbura unei curbe plane**

Fie M şi M' două puncte suficient de apropiate pe arcul regulat situat pe o curbă (C). Notăm

Δs – lungimea arcului $\overset{\frown}{MM'}$,

$\vec{\tau}$ şi $\vec{\tau_1}$ – versorii tangentelor la curbă în punctele M, respectiv M',

ε – unghiul dintre $\vec{\tau}$ şi $\vec{\tau_1}$, numit şi *unghi de contingență*.

Se numeşte ***curbură a curbei*** (C) *în punctul M limita valorii absolute a raportului dintre unghiul de contingență* ε *şi lungimea* Δs *a arcului* $\overset{\frown}{MM'}$, *când punctul* $M' \to M$ şi $\Delta s \to 0$ (*vezi figura* 2.22)

Notăm

$\dfrac{1}{R}$ – *curbura curbei în punctul M.*

Atunci

$$\frac{1}{R} \overset{def}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \left| \frac{\varepsilon}{\Delta s} \right|, \quad \varepsilon = \mathrm{m}\left(\widehat{\vec{\tau}, \vec{\tau_1}}\right), \tag{2.69}$$

unde, $\left|\dfrac{\varepsilon}{\Delta s}\right|$ este ***curbura medie*** şi reprezintă ***abaterea unitară*** (pe *unitatea de arc*) a curbei de la direcția rectilinie a tangentei.

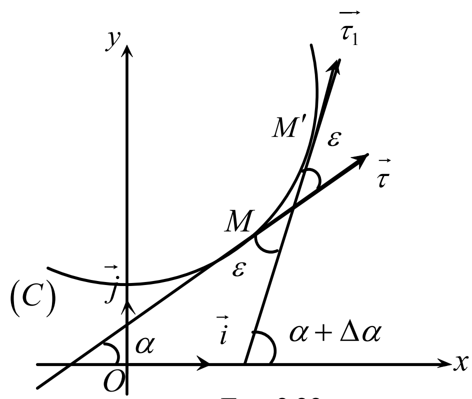


Fig. 2.22

Notând

$$\alpha = \mathrm{m}\left(\widehat{\vec{\tau},\vec{i}}\right);\ \alpha + \Delta\alpha = \left(\widehat{\vec{\tau},\vec{i}}\right), \tag{2.70}$$

rezultă că

$$\varepsilon = \Delta\alpha, \tag{2.71}$$

iar, din (2.69) şi (2.71) deducem că

$$\frac{1}{R} = \lim_{\Delta S \to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta S}\right| = \left|\frac{d\alpha}{ds}\right| \tag{2.72}$$

Scalarul pozitiv R se numeşte ***raza de curbură****.*

Exemplu

2.33. Să se determine curbura cercului de rază r într-un punct oarecare al său.

Într-adevăr, pe baza definiției (2.69) se poate scrie

$$\frac{1}{R} = \lim_{\Delta x \to 0}\left|\frac{\varepsilon}{\Delta s}\right|,$$

însă (*vezi figura* 2.23)

$$\Delta s = r\varepsilon, \tag{2.73}$$

aşa încât din (2.72) şi (2.73) se obține

$$\frac{1}{R} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\varepsilon}{r\varepsilon} = \frac{1}{r},$$

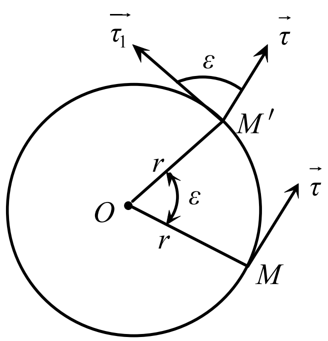


Fig. 2.23

Prin urmare, *curbura cercului este constantă şi este egală cu inversa razei cercului* ■

2.9. **Relații pentru calculul curburii unei curbe plane**

(i) Pentru o curbă (C) dată parametric

$$(C):\ \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

avem

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y'}{x'};\qquad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{y'}{x'}$$

de unde

$$\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{1+\left(\dfrac{y'}{x'}\right)^2}\cdot\frac{x'y''-x''y'}{x'^2}\mathrm{d}t = \frac{x'y''-x''y'}{x'^2+y'^2}\mathrm{d}t,$$

apoi ținând seama că M aparține arcului rectificabil, are loc şi relația (2.7)

$$\mathrm{d}s = \sqrt{x'^2+y'^2}\,\mathrm{d}t,$$

astfel că

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = \frac{x'y''-x''y'}{\left(\sqrt{x'^2+y'^2}\right)^3}\mathrm{d}t$$

iar din relația (2.72) se obține

$$\frac{1}{R} = \frac{|x'y''-x''y'|}{\left(\sqrt{x'^2+y'^2}\right)^3}. \tag{2.74}$$

(ii) Pentru o curbă (C) definită de ecuația explicită

(I): $\qquad (C):\ y = f(x)$

se obține analog

$$\frac{1}{R} = \frac{|y''|}{\left(\sqrt{1+\left(y'^2\right)}\right)^3}. \tag{2.75}$$

(iii) Pentru o curbă (C) definită prin coordonatele polare

(V): $\qquad (C):\ \rho = \rho(\theta)$

se ține seama de formula (2.11) care dă elementul de arc pe curbă

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,\mathrm{d}\theta,$$

aşa încât

$$\frac{1}{R}=\frac{\left|\rho^2+2\rho'^2-\rho''\rho\right|}{\left(\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\right)^3}. \qquad (2.76)$$

Exemple

2.34. Să se determine curbura curbei

$$(C): y=e^x, \quad x\in\mathbb{R}$$

într-un punct oarecare al curbei.

Pentru o curbă (C) dată prin ecuația explicită, $y=f(x)$, curbura este

$$\frac{1}{R}=\frac{|y''|}{\sqrt{\left(1+y'^2\right)^3}}$$

Cum însă $y'=e^x$, rezultă

$$\frac{1}{R}=\frac{e^x}{\left(1+e^{2x}\right)^3} \quad \blacksquare$$

2.35. Să se determine curbura curbei

$$(C):\begin{cases} x=t \\ y=1+t+\dfrac{t^2}{2}\end{cases}$$

în punctul $t=1$.

Pentru o curbă definită parametric, curbura curbei este dată de relația

$$\frac{1}{R}=\frac{|x'y''-x''y'|}{\left(\sqrt{x'^2+y'^2}\right)^3}$$

Evaluăm derivatele de ordinul *I* şi *II* ale funcțiilor $x(t)$ şi $y(t)$, respectiv

$$\begin{cases} x'=1 \\ y'=1+t;\end{cases} \quad \begin{cases} x''=0 \\ y''=1\end{cases}$$

iar, în $t=1$, se obține

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{5\sqrt{5}} \quad \blacksquare$$

2.36. Să se calculeze raza de curbură a curbei de ecuație

$$\rho = \sin^m\left(\frac{\theta}{m}\right), \quad m \in \mathbb{N}^*$$

Din proprietatea cunoscută (2.53)

$$\operatorname{tg} V = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{m\left(\sin\frac{\theta}{m}\right)^{\cancel{m}}}{\frac{1}{\cancel{m}}\cancel{m}\cos\frac{\theta}{m}\left(\sin\frac{\theta}{m}\right)}$$

obținem

$$V = \frac{\theta}{m}.$$

Evaluăm, mai departe, elementul de arc cu relația (2.11)

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

Întrucât

$$\rho^2 + \rho'^2 = \sin^{2m}\frac{\theta}{m} + \sin^{2m-2}\frac{\theta}{m}\cdot\cos^2\frac{\theta}{m} =$$

$$= \sin^{2m}\frac{\theta}{m} + \sin^{2m-2}\frac{\theta}{m} - \sin^{2m}\frac{\theta}{m} = \sin^{2m-2}\frac{\theta}{m} =$$

$$= \left(\sin^m\frac{\theta}{m}\right)^{\frac{2(m-1)}{m}} = \rho^{2\frac{m-1}{m}},$$

deducem că

$$\mathrm{d}s = \rho^{\frac{m-1}{m}}\,\mathrm{d}\theta; \qquad \mathrm{d}V = \frac{1}{m}\mathrm{d}\theta.$$

Raza de curbură va fi în final

$$R = \frac{ds}{d\theta + dV} = \frac{\rho^{\frac{m-1}{m}}\,d\theta}{d\theta + \frac{1}{m}d\theta} = \frac{m}{m+1}\rho^{\frac{m-1}{m}} \quad \blacksquare$$

2.37. Să se calculeze curbura într-un punct oarecare al cicloidei

$$(C): \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

Observăm mai întâi că

$$\begin{cases} x' = a(1-\cos t) \\ y' = a\sin t; \end{cases} \quad \begin{cases} x'' = a\sin t \\ y'' = a\cos t, \end{cases}$$

iar

$$x'^2 + y'^2 = 2a^2(1-\cos t); \quad x'y'' - x''y' = a^2(\cos t - 1)$$

de unde

$$\frac{1}{R} = \frac{|x'y'' - x''y'|}{\sqrt{\left(x'^2 + y'^2\right)^3}} = \frac{a^2|\cos t - 1|}{\sqrt{8a^6(1-\cos t)^3}} = \frac{1}{2a\sqrt{2(1-\cos t)}} = \frac{1}{4a\sin\frac{t}{2}} \quad \blacksquare$$

2.10. **Ecuația intrinsecă a unei curbe plane**

Curbura curbei este o funcție de punctul în care se calculează.

Dacă se alege drept parametru arcul s pe curbă, curbura curbei într-un punct oarecare $M \in (C)$ se poate determina ca funcție de s.

Fie ecuația intrinsecă

$$\frac{1}{R} = F(s) \tag{2.77}$$

care stabileşte curbura într-un punct oarecare al unei curbe necunoscute (C).

Din relația (2.72) ce exprimă curbura în funcție de parametrul natural pe curbă

$$\frac{1}{R} = \left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|$$

se obține ecuația diferențială

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = F(s)$$

a cărei soluție este

$$\alpha = \underbrace{\int F(s)\,\mathrm{d}s}_{f(s)} + \alpha_0; \ \alpha_0 \in \mathbb{R}$$

sau cu notația corespunzătoare

$$\alpha = f(s) + \alpha_0 \tag{2.78}$$

Înlocuind (2.78) în relațiile care ne dau cosinusurile directoare ale tangentei la curba (C) date de (2.34)

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \cos\alpha; \ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \sin\alpha$$

se obțin respectiv relațiile

$$\mathrm{d}x = \cos\left[f(s) + \alpha_0\right]\mathrm{d}s; \ \mathrm{d}y = \sin\left[f(s) + \alpha_0\right]\mathrm{d}s$$

sau

$$\mathrm{d}x = \left[\cos f(s)\cos\alpha_0 - \sin f(s)\sin\alpha_0\right]\mathrm{d}s;$$
$$\mathrm{d}y = \sin f(s)\cos\alpha_0 + \cos f(s)\sin\alpha_0.$$

Prin integrare se obține familia de curbe parametrice în plan

$$\begin{cases} x = X(s)\cos\alpha_0 - Y(s)\sin\alpha_0 + x_0 \\ y = X(s)\sin\alpha_0 + Y(s)\cos\alpha_0 + y_0 \end{cases} \tag{2.79}$$

unde s-a notat

$$X(s) = \int \cos f(s)\,\mathrm{d}s; \ Y(s) = \int \sin f(s)\,\mathrm{d}s. \tag{2.80}$$

Relațiile obține în (2.80) constituie reprezentarea parametrică a unei curbe unic determinate de curbura ei în punctul curent.

Interpretare geometrică

Familia de curbe 3 – parametrice (2.79) *se obține din curba* (2.80) *printr-o transformare completă* (*o rotație şi o translație*) *a sistemului de coordonate.*

Observație

Toate curbele acestei familii au aceeaşi curbură în punctul M.

Am arătat astfel un rezultat important privind ecuația intrinsecă a unei curbe.

Teoremă

Fiind dată curbura unei curbe într-un arbitrar al ei, depinzând de arcul pe curbă s, atunci curba este unic determinată în afara unei compuneri dintr-o rotație şi o translație a sistemului de coordonate ■

Exemple

2.38. Să se determine curbele plane a căror curbură este constantă.

Din ipoteză

$$\frac{1}{R} = const.$$

şi notăm această constantă cu $\frac{1}{r}$. Ne propunem să găsim toate curbele plane pentru care

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r}.$$

În cazul de față

$$F(s) = \frac{1}{r},$$

de unde rezultă

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{r};\ \mathrm{d}\alpha = \frac{1}{r}\mathrm{d}s.$$

Pe de altă parte

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \cos\alpha;\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \sin\alpha.$$

De aici se obțin egalitățile diferențiale

$$\mathrm{d}x = \cos\alpha\,\mathrm{d}s = r\cos\alpha\,\mathrm{d}s;$$
$$\mathrm{d}y = \sin\alpha\,\mathrm{d}s = r\sin\alpha\,\mathrm{d}s.$$

Integrând aceste ecuații se obține familia de curbe 3 – parametrice

$$\begin{cases} x = r\sin\alpha + a \\ y = -r\cos\alpha + b, \end{cases}$$

cu a şi b constante arbitrare. Scriind relații de mai sus sub forma

$$x - a = r\cos\alpha;\ y - b = r\sin\alpha,$$

şi eliminând parametrul α între cele două ecuații se deduce ecuația carteziană a familiei de curbe

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Prin urmare, *curbele plane a căror curbură este constantă sunt cercuri* ■

2.39. Să se determine curbele plane a căror ecuație intrinsecă este

$$\frac{1}{R}=\frac{a}{a^2+s^2};\quad a=const.$$

Plecând de la ecuația intrinsecă (2.77) cu

$$F(s)=\frac{a}{a^2+s^2},\ a=const.$$

se obține ecuația diferențială

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}=\frac{a}{a^2+s^2},\ a=const.$$

Prin integrare conduce la

$$\alpha=\operatorname{arctg}\frac{s}{a}+\alpha_0;\quad \alpha_0\in\mathbb{R},$$

unde α_0 este constantă de integrare. Mai departe, alegem $\alpha_0=0$ şi inversăm în ultima egalitate

$$s=\operatorname{tg}\alpha;\ \mathrm{d}s=\frac{a}{\cos^2\alpha},$$

iar relațiile ce exprimă cosinuşii directori ai tangentei

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=\cos\alpha;\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=\sin\alpha$$

devin

$$\mathrm{d}x=\cos\alpha\,\mathrm{d}s=\frac{a}{\cos\alpha}\mathrm{d}\alpha;$$

$$\mathrm{d}y=\sin\alpha\,\mathrm{d}s=\frac{a\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\mathrm{d}\alpha.$$

Integrăm aceste relații şi obținem familia de ecuații multiparametrice

$$\begin{cases} x=\dfrac{a}{2}\ln\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}+x_0\\[2ex] y=\dfrac{a}{\cos\alpha}+y_0.\end{cases}$$

Putem alege, de exemplu $x_0=0,\ y_0=0$, de unde

$$\begin{cases} x=\dfrac{a}{2}\ln\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}\\[2ex] y=\dfrac{a}{\cos\alpha}.\end{cases}$$

Pentru a găsi ecuația carteziană a curbei, se elimină parametrul α .

Se scrie prima ecuație sub forma

$$\frac{2x}{a} = \ln\left(\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}\right)$$

şi apoi se logaritmează egalitatea găsită

$$e^{\frac{2x}{a}} = \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha},$$

de unde se obțin succesiv relațiile

$$\frac{e^{2\frac{x}{a}}}{e^{2\frac{x}{a}}+1} = \frac{1+\sin\alpha}{2};$$

$$\sin\alpha = \frac{2e^{2\frac{x}{a}} - e^{2\frac{x}{a}} - 1}{e^{2\frac{x}{a}}+1} = \frac{e^{2\frac{x}{a}}-1}{e^{2\frac{x}{a}}+1} = \frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}} = \mathrm{th}\frac{x}{a}.$$

şi mai departe,

$$\sin\alpha = \mathrm{th}\frac{x}{a};\quad \cos\alpha = \frac{1}{\mathrm{ch}\frac{x}{a}},$$

iar dacă se ține seama de aceste expresii, ecuația carteziană explicită este în final

$$y = a\frac{1}{\mathrm{ch}\frac{x}{a}} = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) = a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a} \tag{2.81}$$

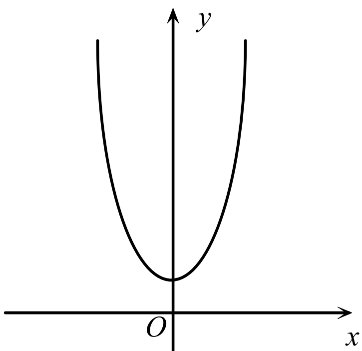


Fig. 2.24

Această curbă este *lănțişorul* (*vezi figura* 2.24) ■

2.11. **Contactul a două curbe plane**

Fie curbele plane (C_1) şi (C_2). *Se spune că cele două curbe au un* ***contact*** *într-un punct M ce aparține ambelor curbe dacă cele două curbe date admit în M aceeaşi tangentă* (MT).

În punctul de contact *M* curbele pot avea două sau mai multe puncte confundate. Numărul acestor puncte defineşte ordinul de contact.

Astfel *curbele* (C_1) şi (C_2) *admit în punctul M un* ***contact de ordinul n***, *dacă cele două curbe au* $(n+1)$ *puncte confundate.*

(i) În cazul curbelor definite explicit

(I) $$(C_1):\ y=f_1(x);\quad (C_2):\ y=f_2(x),$$

notăm

$$E(x)\equiv f_1(x)-f_2(x)=0. \tag{2.82}$$

Dacă

$$E(x)=E'(x)=.....=E^{(n)}(x)=0 \text{ şi } E^{(n+1)}(x)\neq 0, \tag{2.83}$$

atunci curbele (C_1) şi (C_2) au un contact de ordin *n*. Coordonatele punctului de contact $M(x,y)$ se obțin din rezolvarea sistemului

$$\begin{cases} y=f_1(x) \\ y=f_2(x). \end{cases}$$

(ii) În cazul curbelor

$$(C_1):\ \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t); \end{cases} \quad (C_2):\ F(x,y)=0.$$

Notăm

$$\varphi(t)\equiv F\left[x(t),y(t)\right]. \tag{2.84}$$

Dacă

$$\varphi(t)=\varphi'(t)=.....=\varphi^{(n)}(t)=0;\quad \varphi^{(n+1)}(t)\neq 0, \tag{2.85}$$

atunci cele două curbe au în punctul $M(t)$ un *contact de ordinul n*.

Observație

Dacă cele două curbe au în punctul $M_0(t_0)$ *un contact de ordinul n, atunci* t_0 *este rădăcină multiplă de ordinul* $(n+1)$.

Exemple

2.40. Să se stabilească punctul de contact şi ordinul n al acestora între *parabola*

$$(C_1): y = \frac{x^2}{2a} + a$$

şi *lănțişorul*

$$(C_2): y = a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}.$$

Dacă notăm $M(x,y)$ punctul de contact al curbelor

$$(C_1):\ y = f_1(x) \equiv \frac{x^2}{2a} + a;$$

$$(C_2):\ y = f_2(x) \equiv a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a};\quad a \neq 0,$$

atunci coordonatele (x,y) ale acestui punct sunt soluțiile ecuației

$$E(x) \equiv f_1(x) - f_2(x) = 0$$

În cazul de față, ecuația $f_1(x) = f_2(x)$ are o unică soluție: $x = 0,\ y = 1$.

Deci punctul de contact este $M(0,1)$. Ordinul de contact este $n = 3$ întrucât

$$E(0) \equiv f_1(0) - f_2(0)$$

$$E'(0) = f_1'(0) - f_2(0) = 0$$

$$E''(0) \equiv f_1''(0) - f_2''(0) = \frac{1}{a} - \frac{1}{a} = 0$$

$$E'''(0) \equiv f_1'''(0) - f_2'''(0) = 0$$

$$E^{(IV)}(0) \equiv f_1^{(IV)}(0) - f_2^{(IV)}(0) = 0 - \frac{1}{a^3} \neq 0 \quad \blacksquare$$

2.41. Să se afle punctele de contact şi ordinele n ale acestora între *elipsa*

$$(C_1):\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t; \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

şi *cercul*

$$(C_2): x^2 + y^2 = b^2; \qquad 0 < b < a$$

Dacă curbele (C_1) şi (C_2) au respectiv ecuaţiile

$$(C_1):\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t); \end{cases}$$

$$(C_2): F(x, y) = 0$$

iar $M(x, y)$ este un punct de contact, atunci coordonatele (x, y) sunt soluţiile ecuaţiei.

În cazul de faţă

$$\varphi(t) = a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t - b^2 = a^2\cos^2 t - b^2\left(1 - \sin^2 t\right) =$$

$$= a^2\cos^2 t - b^2\cos^2 t = \left(a^2 - b^2\right)\cos^2 t = 0.$$

Presupunând $a \neq b,$ rezultă soluţiile $t_1 = \dfrac{\pi}{2}$ şi $t_2 = \dfrac{3\pi}{2}.$

Corespunzător valorilor bijective, se stabilesc două puncte de contact $M_1(0, b)$ şi $M_2(0, -b).$ Pentru a stabili ordinele de contact n_1 şi n_2 ale punctele obţinute, vom scrie condiţia ca o valoare arbitrară $t = t_0$ a unui contact de ordinul n să verifice egalităţile

$$\varphi(t_0) = \varphi'(t_0) = ... = \varphi^{(n)}(t_0); \; \varphi^{(n+1)}(t_0) \not\equiv 0.$$

Evaluăm derivatele lui $\varphi(t)$ în $t = \dfrac{\pi}{2}$ şi $t = \pi.$ Să observăm mai întâi că

$$\varphi'(t_0) = \left(b^2 - a^2\right)\sin 2t_0,$$

$$\varphi''(t_0) = 2\left(b^2 - a^2\right)\cos 2t_0,$$

$$\varphi'''(t_0) = -4\left(b^2 - a^2\right)\sin 2t_0.$$

Apoi

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=\varphi'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\,,\ \varphi''\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\left(a^2-b^2\right)\neq 0,$$

iar

$$\varphi\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\varphi'\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0\,,\ \varphi''\left(\frac{3\pi}{2}\right)=2\left(a^2-b^2\right)\neq 0,$$

deci punctele $M_1\left(0,b\right)$ şi $M_2\left(0,-b\right)$ au acelaşi ordin de contact $n_1=n_2=2$ ■

2.12. **Curbe osculatoare şi cerc osculator al unei curbe plane**

2.12.1. *Curba osculatoare într-un punct unei curbe plane*

Fie familia de curbe $(n+1)$ – parametrice

$$\left(C_{\alpha_1\cdots\alpha_{n+1}}\right): F\left(x,y;\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n+1}\right)=0. \qquad (2.86)$$

Curba (γ) *se zice* ***curbă osculatoare*** *la o curbă din familia* $\left(C_{\alpha_1\cdots\alpha_{n+1}}\right)$ *într-un punct M al acestei curbe, dacă cele două curbe au în M un contact de ordin n.*

Obținerea punctului de contact se realizeză prin rezolvarea unui sistem de $(n+1)$ *ecuații* corespunzător celor $(n+1)$ *parametri*. Un astfel de sistem este în general *compatibil*.

Exemplu

2.42. Fie familia de drepte depinzând de doi parametri

$$y=mx+n. \qquad (2.87)$$

Să se determine dreapta osculatoare într-un punct arbitrar $M\left(x_0,y_0\right)$ al unei curbe plane date (C).

Familia de drepte depinde de doi parametri aşa că, punctul $M\left(x_0,y_0\right)$ satisface condițiile unui punct de contact de ordinul $n=2$

$$\begin{cases} mx_0+n=f\left(x_0\right)\\ m=f'\left(x_0\right)\end{cases}$$

Sistemul în necunoscutele m şi n are soluția

$$m = f'(x_0),\ n = f(x_0) - mf'(x_0)$$

Înlocuind aceste valori în ecuația (2.87) se obține dreapta osculatoare

$$(MT):\ y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

care reprezintă tocmai tangenta la curba (C) în M (*vezi figura* 2.25).

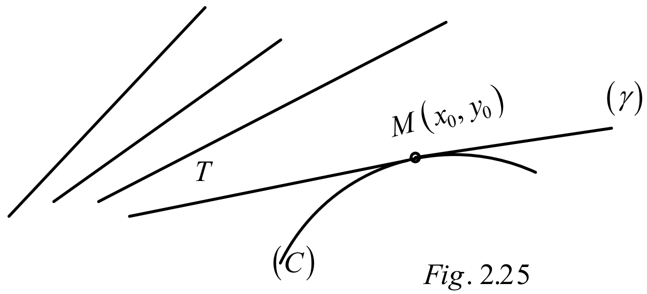


Fig. 2.25

2.11.2. *Cercul osculator într-un punct al unei curbe date*

Mulțimea tuturor cercurilor din plane ste o familie depinzând de trei parametri: coordonatele centrului şi raza.

Se numeşte ***cerc osculator*** *într-un punct al unei curbe plane* (C) *cercul* (γ) *care are cu* (C) *un contact de ordinul doi.*

Observație

Cercul osculator se obține pentru cazul familiilor de curbe 3 – parametrice a, b şi r.

Procedeu practic

(i) Fie (γ) definită parametric de ecuațiile

$$(\gamma):\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

curba osculatoare la o curbă din familia de curbe

$$(C_{\alpha,\beta,r}):\ F(x, y;\ \alpha, \beta, r) \equiv (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - r^2 = 0. \qquad (2.88)$$

▪ Se înlocuiesc $x = x(t)$, $y = y(t)$ în (C) şi se derivează de două ori succesiv egalitatea obținută

$$\begin{cases} \left(x(t)-\alpha\right)^2+\left(y(t)-\beta\right)^2-r^2=0 \\ \left(x(t)-\alpha\right)x'(t)+\left(y(t)-\beta\right)y'(t)-r^2=0 \\ \left(x(t)-\alpha\right)x''(t)+\left(y(t)-\beta\right)y''(t)+x'^2(t)+y'^2(t)=0. \end{cases} \tag{2.89}$$

▪ Se rezolvă apoi în raport cu α, β şi r.

$$\alpha = x - \frac{y'\left(x'^2+y'^2\right)}{x''y''-x''y'} \quad \beta = y + \frac{x'\left(x'^2+y'^2\right)}{x'y''-x''y'}; \qquad r = \frac{\sqrt{\left(x'^2+y'^2\right)^3}}{\left|x'y''-x''y'\right|}; \tag{2.90}$$

(ii) Fie (γ) definită explicit de ecuația

$$(\gamma):\ y = f(x).$$

▪ Alegem drept parametru $x = t$ şi scriem ecuația curbei (γ) sub forma parametrică

$$(\gamma):\ \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$$

▪ Se procedează ca în cazul (i).

▪ Se obțin în final

$$\alpha = x + \frac{y'\left(1+y'^2\right)}{y''}; \qquad \beta = y + \frac{1+y'^2}{y''}; \qquad r = \frac{\sqrt{\left(1+y'^2\right)^3}}{\left|y''\right|}. \tag{2.91}$$

Exemplu

2.43. Să se determine ecuația cercului osculator la elipsa

$$(\gamma):\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

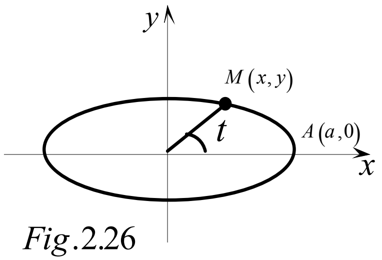
în punctul de intersecție cu semiaxa pozitivă a abciselor.

Scriem ecuații parametrice ale elipsei

$$(\gamma): x = a\cos t;\ y = b\sin t,\ \left(t \in [0, 2\pi]\right) \tag{2.92}$$

Elipsa taie semiaxa pozitivă a abciselor în punctul $A(a,0)$ (*vezi figura* 2.26). Considerăm cercul osculator de ecuație

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)-r^2=0 \tag{2.93}$$



$Fig.2.26$

Înlocuim $x(t)$ şi $y(t)$ din (2.92) în ecuația (2.93)

$$(a\cos t-\alpha)^2+(b\sin t-\beta)^2-r^2=0 \tag{2.94}$$

Rezolvând ecuația (2.94) în raport cu α,β,r se deduc coordonatele şi centrul cercului osculator

$$\alpha=x-\frac{\left(x'^2+y'^2\right)y'}{x'y''-x''y'},\quad \beta=y+\frac{\left(x'^2+y'^2\right)x'}{x'y''-x''y'},\ r=\frac{\sqrt{x'^2+y'^2}}{\left|x'y''-x''y'\right|}$$

În cazul de față punctul $A(a,0)$ corespunde bijective valorii $t=0$ a parametrului. Obținem

$$\alpha=\frac{a^2-b^2}{a},\ \beta=0,\ r=b^2$$

Prin urmare, cercul osculator are ecuația

$$\left(x-\frac{a^2-b^2}{a}\right)^2+y^2=\frac{b^4}{a^2}\quad \blacksquare$$

2.13. **Înfăşurătoarea unei curbe plane**

Fie familia de curbe uniparametrice

$$(C_\alpha): \ F(x,y;\alpha)=0. \tag{2.95}$$

Presupunem că

$$F'_\alpha(x,y;\alpha)\not\equiv 0. \tag{2.96}$$

Se numeşte ***înfăşurătoare*** *a familiei* (C_α) *o curbă* (γ) (*care nu face parte din familie*) *având următoarele proprietăți*

(i) *Fiecărei curbe* (C_{α_0}) *îi corespunde un punct M pe curba* (γ) *şi reciproc fiecărui punct al curbei* (γ) *îi corespunde o curbă din familia* (C_α);

(ii) *Nu există arce comune între curba* (γ) *şi oricare din curbele familiei* (C_α).

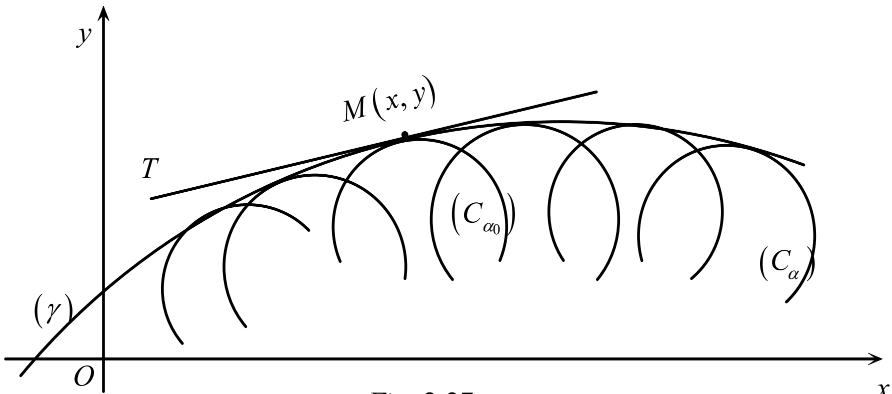


Fig. 2.27

Teoremă

Dacă familia de curbe (C_α) *admite ca înfăşurătoare curba* (γ), *atunci coordonatele parametrice* $(x(\alpha), y(\alpha))$ *ale punctului curent sunt soluțiile sistemului*

$$\begin{cases} F(x,y;\alpha)=0 \\ F'_\alpha(x,y;\alpha)=0. \end{cases} \tag{2.97}$$

Prin urmare, dacă (γ) este înfăşurătoare a familiei (2.95), atunci *unui punct* $M \in (\gamma)$ *îi corespunde în mod unic o curbă din familie şi reciproc.*

Coordonatele x, y ale punctului curent de pe înfăşurătoare sunt funcții de parametrul α şi vor constitui ca atare o reprezentare parametrică a înfăşurătorii

$$(\gamma):\begin{cases} x = x(\alpha) \\ y = y(\alpha) \end{cases} \tag{2.98}$$

Ecuația carteziană a curbei (γ) se poate obține eliminând parametrul între ecuațiile (2.98).

Exemple

2.44. Să se găsească înfăşurătoarea familiei de parabole (*vezi figura* 2.28)

$$y = \alpha x - \frac{x^2}{2c}\left(1 + \alpha^2\right).$$

Notăm

$$F(x, y; \alpha) \equiv \frac{x^2}{2c}\left(1 + \alpha^2\right) - \alpha x + y = 0.$$

Derivata lui F în raport cu α este

$$F'_\alpha(x, y; \alpha) = \frac{x^2}{2c} \cdot 2\alpha - x$$

iar sistemul (2.97) devine

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2c}\left(1 + \alpha^2\right) - \alpha x + y = 0 \\ \dfrac{x^2}{2c} \cdot 2\alpha - x = 0 \end{cases}$$

Eliminăm α între ecuațiile obținute. Din prima ecuație rezultă

$$\alpha = \frac{c}{x},\ x \neq 0,$$

iar dacă înlocuim în cealaltă ecuație se găseşte ecuația carteziană a curbei (γ) – înfăşurătoarea familiei de parabole care este tot o parabolă (*vezi figura* 2.28), anume

$$(\gamma):\ y = \frac{c}{2} - \frac{1}{2c}x^2.$$

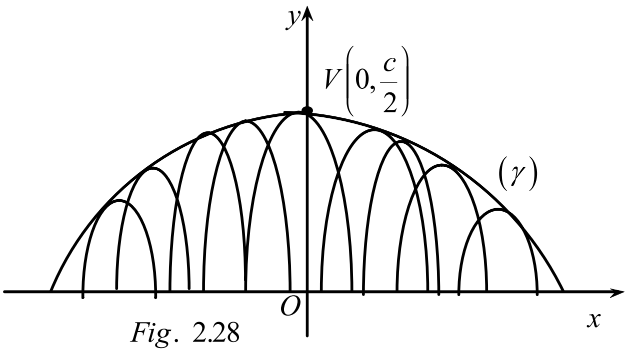


Fig. 2.28

Interpretare geometrică

Parametrul α reprezintă panta tangentei în originela parabola dată.

Într-adevăr,

$$y' = \alpha - \frac{x}{c}\left(1 + x^2\right),$$

iar

$$y'(0) = \alpha \quad \blacksquare$$

2.45. Să se afle înfăşurătoarea cercurilor care trec prin origine şi au centrele pe o hiperbolă echilateră

$$xy = a. \tag{2.99}$$

Fie $M\left(t, \frac{a}{t}\right)$ un punct arbitrar pe hiperbola echilateră. Cercurile considerate au ecuațiile

$$\left(x - t\right)^2 + \left(y - \frac{a}{t}\right)^2 = r^2. \tag{2.100}$$

Din ipoteză cercurile trec prin origine,

$$t^2 + \left(\frac{a}{t}\right)^2 = r^2.$$

Astfel ecuația (2.97) se scrie

$$F\left(x, y; t\right) \equiv x^2 + y^2 - 2tx - \frac{2ay}{t} = 0.$$

Înfăşurătoarea acestor cercuri se obține eliminând t între ecuațiile

$$F(x,y;\,t)=0;\qquad F_t'(x,y;\,t)=0.$$

Se obține sistemul

$$\begin{cases} x^2+y^2-2tx-\dfrac{2ay}{t}=0 \\ -2x+\dfrac{2ay}{t^2}=0. \end{cases}$$

Înmulțind a doua ecuație cu t şi adunând rezultatul la prima se obține

$$t=\frac{x^2+y^2}{4x}.$$

Înlocuind pe t în prima ecuație se găseşte ecuația înfăşurătoarei

$$\left(x^2+y^2\right)^2-16axy=0\quad\blacksquare$$

2.46. Să se determine înfăşurătoarea familiei de de curbe

$$(x-\alpha)^2-(y-\alpha)^2=0.$$

În cazul de față notăm

$$F(x,y;\,\alpha)\equiv(x-\alpha)^2-(y-\alpha)^2=0$$

Înlocuim în sistemul (2.97) şi eliminăm α între cele două ecuații

$$\begin{cases} F(x,y;\,\alpha)\equiv\quad (x-\alpha)^3-(y-\alpha)^2=0 \\ F_\alpha'(x,y;\,\alpha)\equiv 3(x-\alpha)^2-2(y-\alpha)=0 \end{cases}\Bigg|\cdot-3(x-\alpha) \tag{2.101}$$

$$/\quad 3(x-\alpha)(y-\alpha)^2-2(y-\alpha)=0.$$

de unde

$$\frac{x-\alpha}{3}=\frac{y-\alpha}{2};\quad x\neq\alpha,$$

sau

$$\alpha=3y-2x.$$

Dacă se substituie α în cea doua ecuație a sistemului (2.101) se găseşte ecuația

$$3(3x-3y)^2-2(3x-2y)=0$$

sau altfel scris

$$4(x-y)-27(x-y)^2=0;\ (y-x)\left(x-y+\frac{27}{4}\right)=0.$$

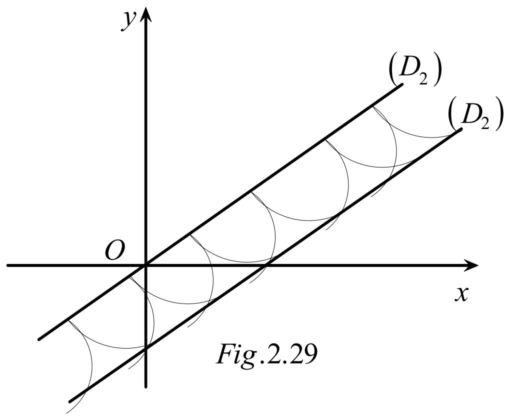


Fig.2.29

Se obțin două drepte (*vezi figura* 2.29)

$$(D_1):\ y-x=0;$$

$$(D_2):\ y-x=-\frac{27}{4}.$$

Să analizăm acum dacă familia dată admite puncte singulare. Formăm sistemul

$$\begin{cases} F'_x(x,y;\alpha)\equiv -3(x-\alpha)^2=0 \\ F'_y(x,y;\alpha)\equiv 2(y-\alpha)=0 \end{cases}$$

Se obține soluția: $x=\alpha;\ y=\alpha.$

Deci, punctele singulare aparțin dreptei

$$(D_1):\ y-x=0.$$

Prin urmare, numai dreapta (D_2) reprezintă înfășurătoarea familiei date ■

2.14. **Desfăşurata (evoluta) unei curbe plane**

Se numeşte ***desfăşurată*** (***evolută***) *a unei curbe plane* (C), *curba* (γ) *care este înfăşurătoarea familiei de normale duse la curba (C)* (*vezi figura* 2.30).

(i) Considerăm cazul în care curba (C) este definită parametric definită parametric

$$(C): x = x(t);\ y = y(t).$$

Notăm

$M(x, y)$ – punctul curent pe curba (C),

$N(X, Y)$ – punctul curent pe curba pe curba (γ).

Normala în punctul curent la curba (C) este

$$(MN):\ x'(X - x) + y'(Y - y) = 0.$$

Pentru a găsi ecuaţia înfăşurătoarei acestei familii derivăm ultima egalitate în raport cu parametrul *t*

$$x''(X - x) + y''(Y - y) - x'^2 - y'^2 = 0$$

şi formăm sistemul

$$\begin{cases} x'(X - x) + y'(Y - y) = 0 \\ x''(X - x) + y''(Y - y) = x'^2 + y'^2. \end{cases}$$

Mai departe se rezolvă în raport cu X, Y obţinându-se ecuaţiile parametrice ale *desfăşuratei* (*evolutei*)

$$(\gamma): \begin{cases} X = x - y' \dfrac{x' + y'^2}{x'y'' - x''y'} \\ Y = y + x' \dfrac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''} \end{cases} \tag{2.102}$$

(ii) În cazul curbei (C) definită prin ecuaţia explicită

$$(C):\ y = f(x)$$

se alege drept parametru al curbei (C), abscisa x, astfel ecuaţiile parametrice ale desfăşuratei vor fi

$$(\gamma):\begin{cases} X = x - y'\dfrac{1+y'^2}{y''} \\ Y = y + x'\dfrac{1+y'^2}{y''} \end{cases} \tag{2.103}$$

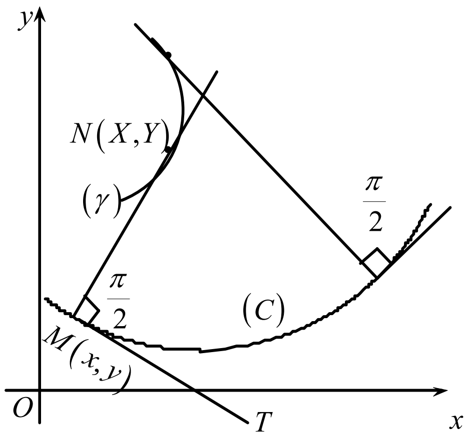


Fig. 2.30

Exemplu

2.47. Se consideră curba

$$(C):\ \begin{cases} x = t - \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t \\ y = 2\operatorname{ch} t \end{cases}$$

Să se scrie ecuațiile parametrice ale desfăşuratei (evolutei) curbei.

Fie $M(x,y)\in(C)$ arbitrar şi $N(X,Y)$ punctul curent al desfăşuratei.

Atunci ecuațiile parametrice căutate sunt

$$(\gamma):\ X = x - y'\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-y'x''};\ Y = y + x'\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-y'x''}$$

Aici

$$\begin{cases} x = t - \dfrac{1}{2}\operatorname{sh} 2t \\ y = 2\operatorname{ch} t; \end{cases} \begin{cases} x' = 1 - \operatorname{ch} 2t \\ y' = 2\operatorname{sh} t; \end{cases} \begin{cases} x'' = -2\operatorname{sh} 2t \\ y'' = 2\operatorname{ch} t. \end{cases}$$

Mai departe, prin înlocuire se obțin

$$\begin{cases} X = t - 3\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t \\ Y = 4\operatorname{ch} t - 2\operatorname{ch}^2 t \end{cases} \quad \blacksquare$$

2.15. **Desfăşurătoarea (evolventa) unei curbe plane**

Se numeşte ***desfăşurătoare*** (***evolventă***) *a unei curbe plane* (C) *curba* (γ) *a cărei desfăşurată este curba dată.*

(i) Fie s parametrul natural pe curba definită de ecuațiile (V)

$$(C):\ \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases}$$

Notăm (*vezi figura* 2.31)

$N(X,Y)-$ punct curent al evolventei,

$M(x,y)-$ punctul curent pe curba (C).

Atunci, ecuațiile parametrice ale *desfăşurătoarei* (*evolventei*) în raport cu parametrul *s* sunt

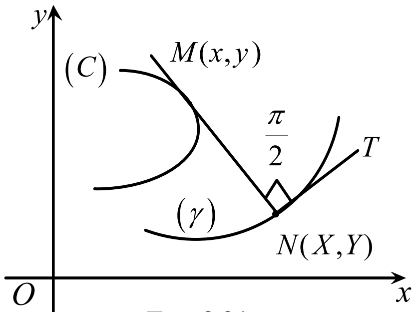


Fig. 2.31

$$(\gamma):\ \begin{cases} X = x + x'(k-s) \\ Y = y + y'(k-s) \end{cases} \tag{2.104}$$

unde k este constantă arbitrară.

(ii) Fie definită prin *t* parametrul oarecare pe curba

$$(C):\ \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Se calculează mai întâi *arcul pe curbă*

$$s=\int_{t_0}^{t}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=\varphi(t) \tag{2.105}$$

apoi cu $t=\varphi^{-1}(s)$ se obține

$$(C):\ \begin{cases} x=x(t)=x\left[\varphi^{-1}(s)\right] \\ y=y(t)=y\left[\varphi^{-1}(s)\right] \end{cases} \tag{2.106}$$

după care se înlocuieşte (2.105) în ecuațiile (2.106) de mai sus.

Exemplu

2.43 Să se scrie ecuațiile desfăşurătoarei (evolventei) la curba

$$(C):\begin{cases} x=t-\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t \\ y=2\operatorname{ch}t \end{cases}$$

Dacă $M(x,y)\in(C)$ este un punct arbitrar al curbei (C) dată, iar $N(X,Y)$ este punctul curent al evoluentei căutat, atunci ecuațiile parametrice căutate sunt

$$(\gamma):\begin{cases} X=x+x'\cdot(k-s) \\ Y=y+y'\cdot(k-s) \end{cases}$$

sau

$$(\gamma):\begin{cases} X=x+(k-s)\cos\theta \\ Y=y+(k-s)\sin\theta \end{cases}$$

unde θ este unghiul făcut de tangentele la curbă cu axa *Ox*, *k* este o constantă arbitrară, iar s arcul curbă. Evaluăm elementul de arc pe curbă

$$\mathrm{d}s=\sqrt{x'^2+y'^2}\,\mathrm{d}t.$$

Derivăm în raport cu t în ecuațiile curbei (C)

$$\begin{cases} x'=1-\operatorname{sh}^2 t-\operatorname{ch}^2 t \\ y'=2\operatorname{sh}t, \end{cases}$$

iar

$$x'^2+y'^2=4\operatorname{sh}^2 t\operatorname{ch}^2 t.$$

Atunci

$$\mathrm{d}s=2\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t\,\mathrm{d}t.$$

Prin integrare găsim

$$s = \int 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t \, \mathrm{d} t = \operatorname{sh}^2 t$$

Ținând cont de faptul că

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y'}{x'} = -\frac{1}{\operatorname{sh} t},$$

rezultă

$$\cos \theta = \operatorname{th} t; \ \sin \theta = -\frac{1}{\operatorname{ch} t}.$$

Prin urmare, evolventa are ecuațiile parametrice

$$\begin{cases} X = t + (k-1) \operatorname{th} t \\ Y = \operatorname{ch} t + \dfrac{1-k}{\operatorname{ch} t}. \end{cases}$$

Pentru $k = 1$, obținem *lănțișorul*

$$y = \operatorname{ch} x \quad \blacksquare$$

Capitolul 3

GEOMETRIA DIFERENȚIALĂ A CURBELOR ÎN SPAȚIU

3.1. **Reprezentarea curbelor în spațiu**

O curbă în spațiu (sau o *curbă strâmbă* cum o mai numesc unii autori) poate fi reprezentată analitic într-un sistem rectangular $xOyz$ printr-una din ecuațiile:

$(I)\ (C): \begin{cases} z = f(x,y) \\ z = g(x,y) \end{cases} \quad (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ *ecuațiile explicite*

$(II)\ (C): \begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$ *ecuațiile implicite*

$(x,y,z) \in D \subset \mathbb{R}^3$

$(III)\ (C): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \quad t \in I \\ z = z(t) \end{cases}$ *ecuațiile parametrice*

$t-$parametru oarecare

$(IV)\ (C): \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} = \\ = \left(x(t), y(t), z(t)\right), \quad t \in I$ *ecuațiile vectoriale*

$(V)\ (C): \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \quad s = \overset{\frown}{AM} \\ z = z(s) \end{cases}$ *ecuațiile intrinseci*

$s-$parametru natural al curbei

$$(VI)\ (C):\ \begin{cases} x = x(\rho,\alpha) \\ y = y(\rho,\alpha) \\ z = z(\rho,\alpha) \end{cases}$$ *ecuațiile în coordonate polare*

$(\rho,\alpha)-$ coordonate polare

Exemple

3.1. *Elicea circulară* are ecuația parametrică:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta,\ \theta \in [0,2\pi] \\ z = k\theta \end{cases}$$

3.2. Cercul de rază r cu centrul în origine şi situat în planul xOy are ecuația implicită

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

3.3. Curba parametrizată:

$$\vec{r} = a\left(\cos t \sin t\,\vec{i} + \sin^2 t\,\vec{j} + \cos t\,\vec{k}\right)$$

este o curbă situată pe o sferă.

Într-adevăr, eliminând parametrul t, se obține sfera de ecuație:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad \blacksquare$$

3.4. *Elicea conică* are ecuația

$$\begin{cases} x = at\cos t \\ y = at\sin t \\ z = bt \end{cases}$$

3.5. *Spirala lui Arhimede* are ecuația în coordonate cilindrice

$$\begin{cases} \rho = at \\ z = 0 \end{cases}$$

3.6. *Curba lui Viviani* este reprezentată analitic de sistemul

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - rx = 0 \end{cases}$$

şi este curba de intersecție dintre sfera de rază r centrată în origine şi cilindrul

$$\left(x - \frac{r}{2}\right)^2 + y - \left(\frac{r}{2}\right)^2 = 0$$

3.2. **Elementul de arc şi lungimea unui arc de curbă în spațiu**

3.2.1. *Elementul de arc al unei curbe în spațiu*

Vom presupune că funcțiile $x(t), y(t), z(t)$ sunt de clasă $C^1(I)$. Prin urmare, un arc $\overset{\frown}{AB}$ se va numi ***regulat***, dacă $\left\|\vec{r}'(t)\right\| \neq 0, \quad \forall t \in I$, iar pentru o curbă (C) definită implicit prin ecuațiile (II)

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} F'_x & F'_y & F'_z \\ G'_x & G'_y & G'_z \end{bmatrix} = 2$$

în toate punctele arcului $\overset{\frown}{AB}$.

Fie $A \in (C)$ fixat. Notăm $\overset{\frown}{AM} = s$. Atunci ***elementul de arc*** $\overset{\frown}{AB}$ pe curba (C) este definit (*vezi Capitolul 2*) prin:

$$\mathrm{d}s = \left\|\vec{r}'(t)\right\| dt \tag{3.1}$$

sau altfel scris:

$$\mathrm{d}s = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt \tag{3.2}$$

Exemple

3.7. Să se calculeze elementul de arc pe *elicea conică* definită la *exemplul* **3.4**.

Se derivează în

$$x = at\cos t;\ \ y = at\sin t;\ \ z = bt;\ \ (t > 0)$$

iar de aici se găseşte

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \left(a^2 + b^2\right)t^2.$$

Mai departe elementul de arc este

$$\mathrm{d}s = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,\mathrm{d}t = t\sqrt{a^2 + b^2}\,\mathrm{d}t \quad ■$$

3.2.2. *Lungimea unui arc de curbă în spațiu*

Prin definiție, ***lungimea unui arc*** $\overset{\frown}{AB}$ *pe curba (C) este*:

$$\ell_{\overset{\frown}{AB}} = \int_{\overset{\frown}{AB}} \mathrm{d}s. \qquad (3.3)$$

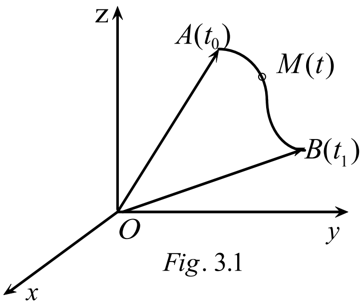


Fig. 3.1

Pentru (III):

$$\ell_{\overset{\frown}{AB}} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt. \qquad (3.4)$$

În general, lungimea unui arc $\overset{\frown}{AM}$ regulat

$$s = s(t) = \int_{\alpha} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt. \qquad (3.5)$$

Exemple

3.8. Să se afle lungimea arcului $\overset{\frown}{AM}$ (*vezi figura 3.2*) al elicei circulare

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \quad \theta \in [0, 2\pi]. \\ z = k\theta; \end{cases}$$

Derivăm în raport cu θ

$$x' = -a\sin\theta;\ y' = a\cos\theta;\ z' = k,$$

apoi

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = a^2 + k^2$$

de unde rezultă că elementul de arc este conform relației (3.2)

$$\mathrm{d}s = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{a^2 + k^2}\,\mathrm{d}t$$

Pentru a calcula lungimea arcului $\overset{\frown}{AM}$ vom ține seama de formula (3.4)

$$\ell_{\overset{\frown}{AB}} = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + k^2}\,\mathrm{d}t = 2\pi\sqrt{a^2 + k^2} \quad \blacksquare$$

3.9 Să se determine arcul pe curba

$$\vec{r} = t\cos(a\ln t)\vec{i} + t\sin(a\ln t)\vec{j} + bt\vec{k}$$

Se aplică relația (3.5) pentru

$$x = t\cos(a\ln t), y = t\sin(a\ln t),\ z = bt.$$

Avem

$$x' = \cos(a\ln t) - a\sin(a\ln t);\ y' = \sin(a\ln t) + a\cos(a\ln t);\ z' = b,$$

iar

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1 + a^2 + b^2$$

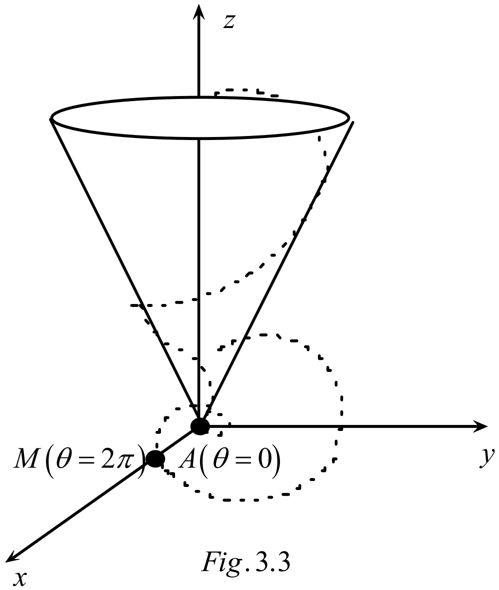


Fig. 3.3

Mai departe, elementul de arc pe curbă este

$$\mathrm{d}s = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{1 + a^2 + b^2}\,\mathrm{d}t,$$

iar dacă se integrează în raport cu $\tau \in [0,\ t]$ aceată egalitate, se obține arcul pe curbă

$$s(t) = \int_0^t \mathrm{d}s = \int_0^t \sqrt{1 + a^2 + b^2}\,\mathrm{d}t = t\sqrt{1 + a^2 + b^2}\quad \blacksquare$$

3.3. **Tangenta într-un punct la o curbă din spațiu**

Fie $M(x,y)\in(C)$ şi $T(X,Y,Z)$ punctul curent pe curbă (*vezi figura 3.2*). Ecuația tangentei la curba (C) în punctul *M* este

(i) pentru (III)

$$(MT):\ \frac{X-x}{x'}=\frac{Y-y}{y'}=\frac{Z-z}{z'} \tag{3.6}$$

(ii) pentru (IV)

$$(MT):\ \vec{r}(t)=\vec{r}(t_0)+\lambda\vec{r}'(t_0), \tag{3.7}$$

unde $M(t_0)\in(C)$, $\forall\ \lambda\in\mathbb{R}$.

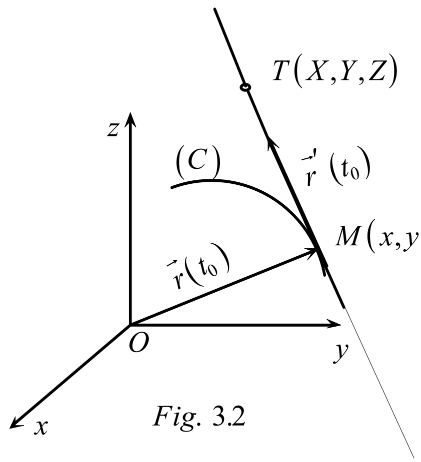


Fig. 3.2

(iii) pentru (I)

$$(MT):\ \frac{X-x}{a}=\frac{Y-y}{b}=\frac{Z-z}{c} \tag{3.8}$$

unde

$$a=\frac{D(F,G)}{D(y,z)}=\begin{vmatrix}F'_y & F'_z\\ G'_y & G_z\end{vmatrix};\ b=\frac{D(F,G)}{D(z,x)}=\begin{vmatrix}F'_z & F'_x\\ G'_z & G'_x\end{vmatrix};$$

$$c=\frac{D(F,G)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}F'_x & F'_y\\ G'_x & G'_y\end{vmatrix} \tag{3.9}$$

Coeficienții a,b,c se rețin mai ușor din matricea

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ \dfrac{D(F,G)}{D(x,y)} & \dfrac{D(F,G)}{D(y,z)} & \dfrac{D(F,G)}{D(z,x)} \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

(iv) pentru (I) se consideră

$$(C): \begin{cases} F(x,y,z) \equiv z - f(x,y) = 0 \\ G(x,y,z) \equiv z - g(x,y) = 0 \end{cases}$$

Exemple

3.10. Să se scrie ecuația tangentei la curba

$$\vec{r} = \frac{1}{2}t^2\vec{i} + \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}\vec{j} + t\vec{k}$$

în punctul $t = 2$.

Corespunzător relației (3.6) scriem

$$x = \frac{1}{2}t^2, y = \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}, \; z = t$$

$$x' = 2t, \; y' = \sqrt{2t}, \; z' = 1$$

iar tangenta în punctul având coordonatele carteziene $(4, 2, 1)$ va fi

$$(MT): \; \frac{x-2}{2} = \frac{y - \frac{8}{3}}{2} = \frac{z-2}{1} \quad ■$$

3.11. Să se scrie ecuația tangentei în punctul curent la curba definită implicit de sistemul

$$\begin{cases} 2px^2 - y^2 = 0 \\ x^2 + z^2 - a^2 = 0 \end{cases}$$

Notăm

$$F(x,y,z) \equiv 2px^2 - y^2 = 0;$$
$$G(x,y,z) \equiv x^2 + z^2 - a^2 = 0.$$

Vom aplica relația (3.8) pentru

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 4px & -2y & 0 \\ 2x & 0 & 2z \end{bmatrix}$$

de unde

$$a=\frac{D(F,G)}{D(y,z)}=-4yz;\ \ b=\frac{D(F,G)}{D(z,x)}=-4pz;\ \ c=\frac{D(F,G)}{D(x,y)}=0.$$

astfel

$$(MT):\ \frac{X-x}{-4yz}=\frac{Y-y}{-4pz}=\frac{Z-z}{0}\qquad\blacksquare$$

3.4. **Planul normal la o curbă din spațiu**

Fie $M(x,y)\in(C)$ un punct regulat. Planul normal, (P_n) la curba (C) în punctul M este planul normal la tangenta (MT) în punctul considerat.

Parametrii directori ai tangentei pot fi luați drepți parametrii directori ai planului normal. Dacă $N(X,Y,Z)$ este punctul curent al planului normal $(\mathcal{P}_n)$ atunci se obțin următoarele reprezentări

(i) pentru (III):

$$(P_n):(X-x)x'+(Y-y)y'+(Z-z)z'=0 \tag{3.11}$$

unde s-a notat

$\vec{n}=(x',y',z')-$ *vectorul normal la plan.*

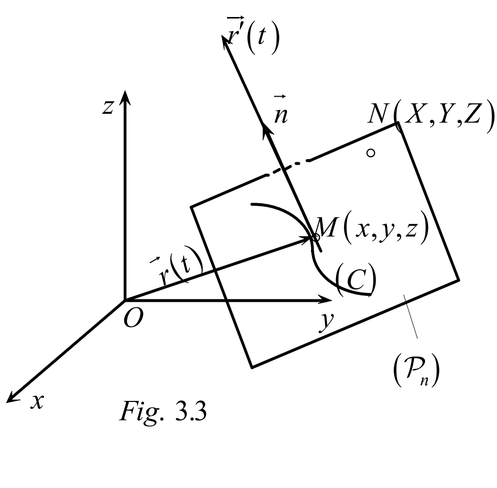


Fig. 3.3

(ii) pentru (IV):

$$(\mathcal{P}_n):\ \left(\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)\right)\cdot\vec{n}=0 \tag{3.12}$$

(iii) pentru (II)

$$(\mathcal{P}_n):\ (X-x)\frac{D(F,G)}{D(y,z)}+(Y-y)\frac{D(F,G)}{D(z,x)}+(Z-z)\frac{D(F,G)}{D(x,y)}=0 \tag{3.13}$$

În notațiile de mai sus:

$$(\mathcal{P}_n):\ a(X-x)+b(Y-y)+c(Z-z)=0 \tag{3.14}$$

sau încă:

$$(\mathcal{P}_n):\ \begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ F'_x & F'_y & F'_z \\ G'_x & G'_y & G'_z \end{vmatrix}=0 \tag{3.15}$$

Exemple

3.12. Să se arate că planele normale la curba:

$$(C):\ x=\sin^2 t,\ y=\sin t\cos t,\ z=\cos t$$

trec prin originea sistemului de coordonate.

Avem

$$x'=2\sin t\cos t=\sin 2t;\ y'=\cos^2 t-\sin^2 t=\cos 2t;\ z'=-\sin t.$$

Mai departe, într-un punct arbitrar (x,y,z) ecuația planului normal (3.14) devine

$$(\mathcal{P}_n):\ X\sin 2t+Y\cos 2t-Z\sin t=0\ \blacksquare$$

3.5. **Planul osculator la o curbă din spațiu**

Fie $M(x,y,z)\in(C)$ un punct regulat şi $M'(X,Y,Z)$ un punct apropiat de M (*vezi figura*).

Se numeşte ***plan osculator*** *la curba* (C) *în punctl* M *poziția limită a planului ce trece prin tangenta* (MT), *când punctul* M' *tinde către* M.

Planul osculator $(\mathcal{P}_O)$ *ce trece prin* $M(t_0)$ *este determinat de direcțiile vectorilor* $\vec{r}(t_0)$ *şi* $\vec{r'}(t_0)$ şi are ecuația:

$$(\mathcal{P}_O): \begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0 \tag{3.16}$$

sau, dacă se efectuează calculele:

$$(\mathcal{P}_O): A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0 \tag{3.17}$$

unde A, B, C se determină din matricea:

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{bmatrix}$$

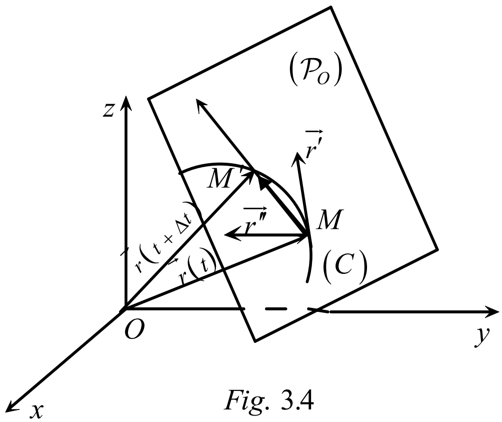


Fig. 3.4

mai exact,

$$A = \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix},\ B = \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix},\ C = \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} \tag{3.18}$$

sau

$$A = y'z'' - y''z',\quad B = z'x'' - x'z'',\quad C = x'y'' - x''y' \tag{3.19}$$

Parametrii directori ai planului osculator sunt:

$$\vec{r'} = (x', y', z'),\ \ \vec{r''} = (x'', y'', z'')$$

3.6. **Normala principală la o curbă din spațiu**

Normala principală, *notată* $(\mathcal{N}_p)$, *este normala conținută în planul osculator*.

Ea este determinată de intersecția dintre planul normal și de planul osculator în același punct M (*vezi figura de la paragrafu* 3.8) și are ecuația

$$(\mathcal{N}_p): \begin{cases} x'(X-x)+y'(Y-y)+z'(Z-z)=0 \\ A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0 \end{cases} \tag{3.20}$$

sau

$$(\mathcal{N}_p): \ \frac{X-x}{a_1}=\frac{Y-y}{b_1}=\frac{Z-z}{c_1} \tag{3.21}$$

unde $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ sunt:

$$a_1=\begin{vmatrix} y' & z' \\ B & C \end{vmatrix},\ b_1=\begin{vmatrix} z' & x' \\ C & A \end{vmatrix},\ b_1=\begin{vmatrix} x' & y' \\ A & B \end{vmatrix} \tag{3.22}$$

Coeficienții $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ se pot reține mai ușor din matricea:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ x' & y' & z' \\ A & B & C \end{bmatrix}$$

Exemple

3.13. Să se găsească ecuația normalei principale în punctul $M(1,1,1)$ la curba

$$\begin{cases} x=z^2 \\ z=x^2 \end{cases}$$

Scriem ecuațiile curbei sub forma

$$\begin{cases} y=\sqrt{x} \\ z=x^2; \end{cases} \quad (x>0)$$

apoi considerăm x drept parametru pe curbă așa încât

$$x=t;\ y=\sqrt{t};\ z=t^2;\ (t>0)$$

Derivăm aceste relații în raport cu t

$$x'=1;\ y'=\frac{1}{2\sqrt{t}};\ z'=2t,$$

de unde deducem ecuația planului normal

$$(\mathcal{P}_n):\ x'(X-x)+y'(Y-y)+z'(Z-z)=0 \Leftrightarrow$$

$$(\mathcal{P}_n):\ 1(X-1)+\frac{1}{2}(Y-1)+2(Z-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$(P_n):\ 2X+Y+4Z-5=0$$

Pe de altă parte, derivatele de ordinul al doilea ale lui x, y, z în raport cu t sunt

$$x''=0;\ y''=-\frac{1}{4\sqrt{t^3}};\ z''=2.$$

Planul osculator are ecuația dată de (3.16)

$$(\mathcal{P}_O):\ \begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}=0$$

Înlocuind

$$x=1;\quad y=1;\quad z=1;$$

$$x'=1;\quad y=\frac{1}{2};\quad z=2;$$

$$x''=0;\ y''=-\frac{1}{4};\ z''=0.$$

în ecuația (3.16) se obține

$$(\mathcal{P}_O):\ \begin{vmatrix} X-1 & Y-1 & Z-1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \end{vmatrix}=0$$

sau dacă se efectuează calculele găsim

$$(\mathcal{P}_O): 2X-Z-1=0,$$

iar ecuațiile implicite ale planului normal

$$\begin{cases} 2X+Y+4Z-5=0 \\ 2X-Z-1=0 \end{cases} \qquad \blacksquare$$

3.7. **Binormala la o curbă din spațiu**

Binormala, notată $(\mathcal{B}_n)$ *este normala perpendiculara pe planul osculator dus prin punctul* $M(x,y,z)\in(C)$ (*vezi figura de la paragraful 3.9*).

Ținând seama de această definiție, rezultă că pentru o curbă definită parametric (III) binormala are ecuația:

$$(\mathcal{B}_n):\frac{X-x}{A}=\frac{Y-y}{B}=\frac{Z-z}{C} \tag{3.23}$$

Exemplu

3.14. Fie curba

$$(C):\ x=t\cos(a\ln t), y=t\sin(a\ln t),\ z=bt,\ \ (t>0)$$

Să se arate că binormala într-un punct oarecare al curbei face cu axa *Oz* un unghi constant, iar normala principală în acelaşi punct este paralelă cu planul *xOy*.

Binormala în punctul curent are ecuația dată de (3.23), iar în acest caz se scrie

$$(\mathcal{B}_n):\ \frac{X-t\cos(a\ln t)}{A}=\frac{Y-t\sin(a\ln t)}{B}=\frac{Z-bt}{C}$$

Coeficienții a,b,c se determină din matricea

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{bmatrix}$$

Ținând seama că

$$x=t\cos(a\ln t);\ y=t\sin(a\ln t);\ z=bt;$$

$$x'=\cos(a\ln t)-a\sin(a\ln t);\ y'=\sin(a\ln t)+a\cos(a\ln t);\ z'=b;$$

$$x''=-\frac{1}{t}\sin(a\ln t)-\frac{1}{t}\cos(a\ln t);\ y''=\frac{1}{t}\cos(a\ln t)-\frac{1}{t}\sin(a\ln t);\ z''=b.$$

De aici se obțin coeficienții *A*, *B*, *C* determinați în punctul *M* conform (3.19)

$$A=\frac{ab}{t}\left[a\sin(a\ln t)-\cos(a\ln t)\right]$$

Parametri directori ai normalei planului rectifiant sunt chiar parametrii directori ai normalei principale.

3.9. **Triedrul lui Frenet într-un punct al unei curbe în spaţiu**

Fie $M \in (C)$ un punct regulat. Ataşăm acestui punct:

▪ trei drepte perpendiculare, două cate două

– *tangenta* (T)

– *normala principala* (N_p)

– *binormala* (B_n)

▪ trei plane, determinate fiecare, două de două dintre aceste drepte (*vezi figura* 3.5)

– *planul normal* (P_n)

– *planul osculator* (P_o)

– *planul rectifiant* (P_r)

Asociem acestor trei drepte o origine un sens pozitiv şi notăm, respectiv $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ şi $\vec{b}$ vectorii axelor (T), (N_p), (B_n). Obţinem un *triedru mobil*, *drept orientat*, *ataşat curbei* (C) într-un punct $M \in (C)$, numit ***triedrul lui Frenet***.

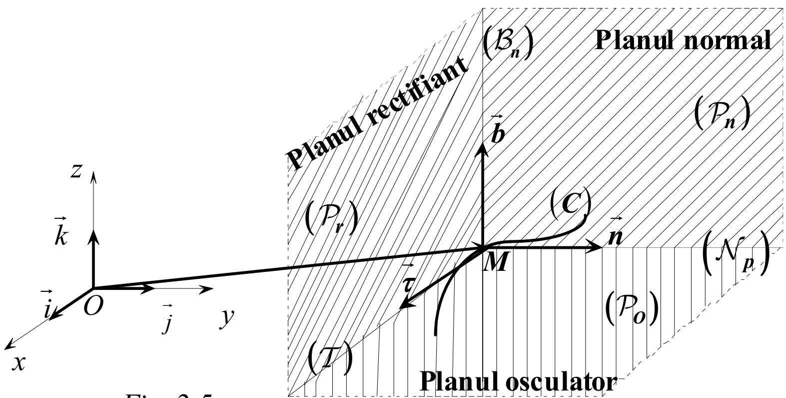


Fig. 3.5

$\boxed{A}$ Alegem $s-$parametrul natural pe curbă şi fie $M \in (C)$, având vectorul de poziție $\vec{r} = \vec{r}(s)$. Atunci

- $\vec{\tau}-$ *vectorul director al tangentei*

definit prin

$$\vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s} \tag{0.1}$$

este astfel încât

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}s^2} = \frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}s} \perp \vec{\tau},$$

iar

- $\vec{n}-$ *vectorul director al normalei principale*,

este definit prin

$$\vec{n} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}/\mathrm{d}s^2}{\left\|\mathrm{d}^2\vec{r}/\mathrm{d}s^2\right\|} \tag{0.2}$$

Tripletul $\left(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}\right)$ *este un triedru drept orientat*, iar

- $\vec{b}-$*vectorul director al binormalei* se alege astfel încât:

$$\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}. \tag{0.3}$$

$\boxed{B}$ Alegem ca parametru *t* arbitrar şi fie $M \in (C)$ cu vectorul de poziție $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Astfel:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}}{\left|\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|} = \frac{\vec{r}'}{r}$$

de unde,

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{r}'}{\left\|\vec{r}'\right\|} \tag{0.4}$$

- $\vec{b}-$*vectorul director al binormalei* are direcția şi sensul vectorului:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s} \times \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}s^2}$$

adică,

$$\vec{b} = \frac{\overrightarrow{r'} \times \overrightarrow{r''}}{\left\| \overrightarrow{r'} \times \overrightarrow{r''} \right\|} \tag{0.5}$$

- $\vec{n}$ – *vectorul director al normalei principale* se alege astfel încât:

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{\tau} \tag{0.6}$$

Exemplu

3.15. Să se afle versorii triedrului lui Frenet într-un punct oarecare M al *elicei circulare*

$$(C): x = a\cos\theta,\ y = a\sin\theta,\ z = b\theta$$

şi să precizeze aceşti versori în punctul $A(\theta = 0)$.

Vectorul de poziție al punctului M arbitrar pe curba (C) este

$$\vec{r} = a\cos\theta\vec{i} + a\sin\theta\vec{j} + b\theta\vec{k},$$

iar determinăm derivatele de ordinul întâi şi doi ale acestuia

$$\overrightarrow{r'} = -a\sin\theta\vec{i} + a\cos\theta\vec{j} + b\vec{k};$$

$$\overrightarrow{r''} = -a\cos\theta\vec{i} - a\sin\theta\vec{j}.$$

Scriem mai departe produsul vectorial al celor vectori

$$\overrightarrow{r'} \times \overrightarrow{r''} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k},$$

unde

$$A = ab\sin\theta;\ B = -ab\cos\theta;\ C = a^2,$$

deci

$$\overrightarrow{r'} \times \overrightarrow{r''} = ab\sin\theta\vec{i} - ab\cos\theta\vec{j} + a^2\vec{k}.$$

Aplicăm mai departe relațiile (0.4), (0.5), (0.6) pentru θ arbitrar

$$\vec{\tau}(M) = \frac{\overrightarrow{r'}}{\left\| \overrightarrow{r'} \right\|} = \frac{-a\sin\theta\vec{i} + a\cos\theta\vec{j} + b\vec{k}}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

$$\vec{b}(M) = \frac{\overrightarrow{r'} \times \overrightarrow{r''}}{\left\| \overrightarrow{r'} \times \overrightarrow{r''} \right\|} = \frac{ab\sin\theta\vec{i} - ab\cos\theta\vec{j} + a^2\vec{k}}{\sqrt{a^2b^2 + a^4}} = \frac{b\sin\theta\vec{i} - b\cos\theta\vec{j} + a\vec{k}}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

$$\vec{n}(M)=\vec{b}\times\vec{\tau}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -a\sin\theta & a\cos\theta & a\\ -\cos\theta & \sin\theta & 0\end{vmatrix}.$$

3.10. **Formulele lui Frenet**

Fie $M\in(C)$ punct regulat, iar $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ şi $\vec{b}$ versorii triedrului lui Frenet ataşați punctului considerat.

▪ ***Prima formulă a lui Frenet*** – stabileşte derivata lui $\vec{\tau}$ în raport cu parametrul natural al curbei

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds}=\frac{1}{R}\vec{n},\ \left(R\geq 0\right),\quad \frac{1}{R}:=\left\|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right\|. \tag{0.7}$$

Interpretare geometrică.

Derivata tangentei într-un punct oarecare al curbei are direcția şi sensul normalei principale în acest punct.

▪ ***A două formula a lui Frenet*** – stabileşte derivata lui $\vec{n}$

$$\frac{d\vec{n}}{ds}=\frac{1}{T}\vec{b}-\frac{1}{R}\vec{\tau}\ . \tag{0.8}$$

▪ ***A treia formula a lui Frenet*** – *stabileşte derivata lui* $\vec{b}$

$$\frac{d\vec{b}}{ds}=-\frac{1}{T}\vec{n}. \tag{0.9}$$

Observații.

1⁰) Formulele lui Frenet ne dau derivatele versorilor $\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ în funcție de parametrul natural s pe curbă.

2^0) *Scalarii* $\frac{1}{R}$ *şi* $\frac{1}{T}$ *se numesc* ***curbura*** *şi* ***torsiunea curbei*** (C) *în punctul M.*

3^0) *Coeficienții versorilor* $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$ *sunt dați de matricea antisimetrică*:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R} & 0 \\ -\frac{1}{R} & 0 & \frac{1}{T} \\ 0 & -\frac{1}{T} & 0 \end{bmatrix}.$$

3.11. **Curbura unei curbe în spațiu**

Ținând seama că $\frac{1}{R} \geq 0$, din *prima formulă a lui Frenet* rezultă:

$$\frac{1}{R} = \left\| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right\| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\left\| \Delta\vec{\tau} \right\|}{\Delta s} \tag{0.10}$$

Notăm:

$\alpha = \mathrm{m}\left(\widehat{t(s+\Delta s), \tau(s)}\right)$ *– unghiul de contingență*;

$\Delta s = \mathrm{m}\left(\widehat{MM'}\right)$

$\frac{\alpha}{\Delta S}$ – *curbura medie* a curbei (C) pe porțiunea $\widehat{MM'}$.

Prin definiție, *curbura unei curbe din spațiu este limita către care tinde raportul dintre unghiul de contingență al tangentelor şi creşetrea arcului, când cresterea arcului tinde la zero*.

Scriem:

$$\frac{1}{R} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\alpha}{\Delta S}. \tag{0.11}$$

Inversa curburii – R, se numeşte ***rază de curbură***.

Observație

$\frac{1}{R} \geq 0$, *deci* $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ *şi* $\vec{n}$ *au aceeaşi orientare spre concavitatea curbei*.

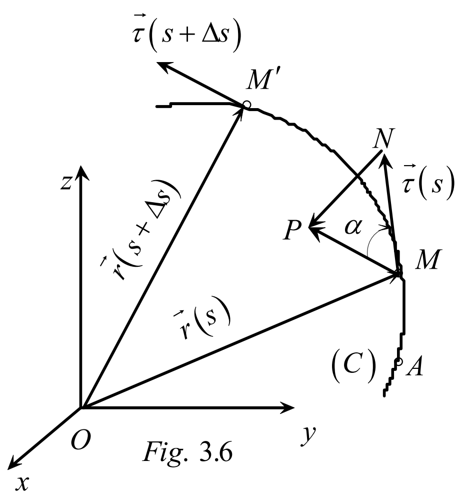


Fig. 3.6

3.12. **Torsiunea unei curbe din spațiu**

Să facem observația că $\frac{1}{T}$ *este un număr real*.

Prin definiție, *valoarea absolută a torsiunii unei curbe din spațiu într-un punct M este limita raportului între unghiul de contingență al binormalelor şi creşterea arcului, când acesta din urmă tinde la zero*.

Din a treia formulă a lui Frenet rezultă:

$$\left|\frac{1}{T}\right| = \left|\frac{d\vec{b}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\left|\Delta \vec{b}\right|}{\Delta s} \tag{0.12}$$

Notăm:

$\beta = \mathrm{m}\left(\widehat{\vec{n}(s+\Delta s), \vec{n}(s)}\right)$ – *unghiul de contingență* al normalelor duse din M, respectiv M',

$\Delta s = \mathrm{m}\left(\widehat{MM'}\right)$

$\frac{\beta}{\Delta s}$ – *torsiunea medie* a curbei (C) pe porțiunea de curbă $\widehat{MM'}$.

Prin definiție, *valoarea absolută a torsiunii unei curbe din spațiu într-un punct M este limita raportului între unghiul de contingență al binormalelor şi creşterea arcului, când acesta din urmă tinde la zero.*

$$\frac{1}{T} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\beta}{\Delta s} \tag{0.13}$$

Observații.

1^0) *Dacă* $\frac{1}{T} > 0$, *atunci* $\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}s}$ *este orientat dinspre concavitatea curbei, deci are sens contrar lui* $\vec{n}$.

2^0) *Dacă* $\frac{1}{T} < 0$, *atunci* $\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}s}$ *este orientat înspre concavitatea curbei, deci are sensul lui* $\vec{n}$.

3^0) *Dacă* $\frac{1}{T} = 0$, *atunci curba (C) reprezintă o dreaptă în toate punctele ei.*

Consecințe

(i) *Orice dreaptă din spațiu are curbura nulă în toate punctele ei.*

(ii) *Orice curbă din spațiu situată îintr-un plan are torsiunea nulă.*

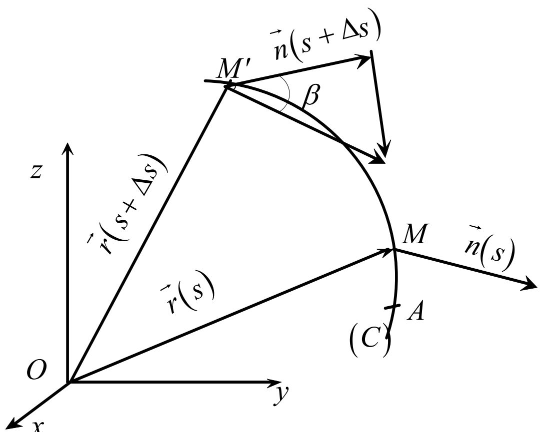


Fig. 3.7

3.13. **Calculul curburii şi torsiunii unei curbe din spaţiu**

Fie curba de ecuaţie:

$$(C):\ \vec{r} = \vec{r}(t)$$

Atunci *curbura curbei* în punctul curent are expresia analitică

$$\frac{1}{R} = \frac{\left\| \vec{r'} \times \vec{r''} \right\|}{\left\| \vec{r'} \right\|^3} \tag{0.14}$$

iar *torsiunea*:

$$\frac{1}{T} = \frac{\left(\vec{r'} \times \vec{r''} \right) \cdot \vec{r'''}}{\left\| \vec{r'} \times \vec{r''} \right\|^2} = \frac{\left(\vec{r'},\ \vec{r''},\ \vec{r'''} \right)}{\left\| \vec{r'} \times \vec{r''} \right\|^2} \tag{0.15}$$

unde

$$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$
$$\vec{r'} = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$$
$$\vec{r''} = x''(t)\vec{i} + y''(t)\vec{j} + z''(t)\vec{k}$$

Să ne reamintim că *produsul vectorial a doi vectori* are expresia analitică

$$\vec{r'} \times \vec{r''} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$$

unde

$$A = \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix};\quad B = \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix};\quad C = \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix},$$

iar *produsul mixt a trei vectori*

$$\left(\vec{r'} \times \vec{r''} \right) \cdot \vec{r'''} =: \left(\vec{r'},\ \vec{r''},\ \vec{r'''} \right) = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

Întrucât

$$\left\| \vec{r'} \right\| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2};\quad \left\| \vec{r'} \times \vec{r''} \right\| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

se obțin relațiile de calcul ale curburii şi torsiunii:

$$\frac{1}{R}=\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{\left(\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\right)^3}, \tag{0.16}$$

$$\frac{1}{T}=\frac{1}{A^2+B^2+C^2}\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}. \tag{0.17}$$

3.14. **Cercul osculator într-un punct al unei curbe din spațiu**

Fie (C) o curbă din spațiu şi $M \in (C)$ punct regulat (*vezi figura* 3.8).

Se numeşte ***cerc osculator*** (γ) *al unei curbe (C) în punctul M*, *cercul situat în planul osculator corespunzator punctului M şi care are drept rază, raza de curbură R, corespunzătoare acestui punct*, *iar centrul într-un punct* M_1 *situat pe normala principală* $\left(\mathcal{N}_p\right)$ astfel încât:

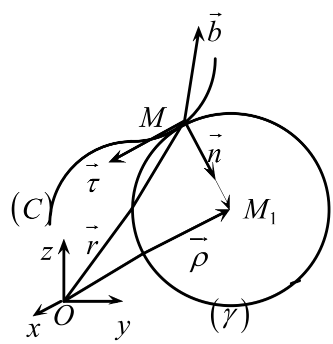


Fig. 3.8

$$\overrightarrow{MM_1}=R\vec{n}, \quad \overrightarrow{MM_1}=\vec{\rho}-\vec{r}$$

Aşadar,

$$\vec{\rho}=\vec{r}+R\vec{n}. \tag{0.18}$$

Pe componente, relația (0.19) se rescrie

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \tag{0.20}$$

3.15. **Înfăşurătoarea unei familii de curbe în spațiu**

Fie (C_α) o familie de curbe depinzând de un parametru α definită de sistemul

$$(C_\alpha): \begin{cases} F(x,y,z;\alpha)=0 \\ G(x,y,z;\alpha)=0 \end{cases} \tag{0.21}$$

Dacă (γ) este înfăşurătoarea familiei de curbe (C_α), atunci coordonatele unui punct $M \in (\gamma)$ sunt soluțiile sistemului

$$\begin{cases} F(x,y,z;\alpha)=0 \\ G(x,y,z;\alpha)=0 \\ F'_\alpha(x,y,z;\alpha)=0 \\ G'_\alpha(x,y,z;\alpha)=0 \end{cases} \tag{0.22}$$

adică

$$(\gamma): \begin{cases} x = x(\alpha) \\ y = y(\alpha) \\ z = z(\alpha). \end{cases}$$

3.16. **Evoluta unei curbe din spațiu**

*Se numeşte **evolută** a unei curbe (C) din spațiu, o curbă (γ) care are proprietatea că în fiecare din punctele ei regulate este tangentă la o normală a curbei (C).*

Teoremă

Locul geometric al centrelor de curburăale unei curbe (C) din spațiu este o evolută a acestei curbe.

Dacă notăm:

$M\left(x,y,z\right)$ – coordonatele punctului curent pe curbă;

$N\left(X,Y,Z\right)$ – centrul de curbură corespunzător punctului *M*;

R – raza de curbură a curbei date,

atunci

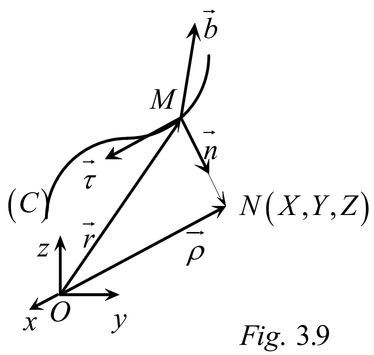


Fig. 3.9

$$\left(\gamma\right):\begin{cases} X = x+\alpha_2 R \\ Y = y+\beta_2 R \\ Z = z+\gamma_2 R \end{cases} \tag{0.23}$$

Observație

Dacă s este parametrul natural pe curba $\left(C\right)$, atunci

$$\vec{\rho}\left(s\right)=\vec{r}\left(s\right)+R\vec{n} \tag{0.24}$$

iar dacă derivăm:

$$\frac{d\vec{\rho}}{ds}=\frac{d\vec{r}}{ds}+\frac{dR}{ds}\vec{n}+R\frac{d\vec{n}}{ds}=\vec{\tau}+\frac{dR}{ds}\vec{n}+R\left(\frac{1}{T}\vec{b}-\frac{1}{R}\vec{\tau}\right)=\frac{dR}{ds}\vec{n}+\frac{R}{T} \tag{0.25}$$

Egalitatea

$$\frac{d\vec{\rho}}{ds}=\frac{dR}{ds}\vec{n}+\frac{R}{T}\vec{b} \tag{0.26}$$

ne arată că vectorul $\dfrac{\mathrm{d}\vec{\rho}}{\mathrm{d}s}$ este situat în planul normal la curba (*C*).

3.17. **Evolventa unei curbe din spațiu**

Numim ***evolventă*** *a unei curbe (C) din spațiu o curbă* (γ) *a cărei evolută este curba dată (C).*

Observație

Din definiție rezultă că *tangentele la curba data* (C) *sunt normale ale evolventei* (γ).

Fie $M(x,y,z)\in(C)$, dat (*vezi figura* 3.9) şi $N(X,Y,Z)\in(\gamma)$ punctul curent pe curbă. Ecuația curbei (γ):

$$\left.\begin{array}{l}\vec{\rho}(s)=\vec{r}(s)+\overrightarrow{MN}\\ \overrightarrow{MN}=\mu(s)\vec{\tau}\end{array}\right\}\Rightarrow\vec{\rho}=\vec{r}+\mu\vec{\tau} \tag{0.27}$$

unde s-a notat

$\mu(s)$ – factor de proporționalitate.

μ se determină din condiția

$$\overrightarrow{MN}\perp\frac{\mathrm{d}\vec{\rho}}{\mathrm{d}s}\Leftrightarrow\vec{\tau}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{\rho}}{\mathrm{d}s}=0 \tag{0.28}$$

Astfel din (0.27) şi (0.28) se obține:

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}s}+1=0,$$

de unde

$$\mu=k-s,\;\; k=\text{const.}$$

Forma vectorială a ecuației evolventei va fi

$$(\gamma):\;\vec{\rho}(s)=\vec{r}(s)+(k-s)\vec{\tau} \tag{0.29}$$

sau pe componente

$$(\gamma):\begin{cases}X=x+\alpha_1(k-s)\\ Y=y+\beta_1(k-s)\\ Z=z+\gamma_1(k-s)\end{cases} \tag{0.30}$$

unde prin $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ am notat parametrii directori ai tangentei $\vec{\tau}$ la curba (C)

$$\vec{\tau} = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$$

iar

$$\alpha_1 = x + \frac{y'\left(1 + y'^2\right)}{y''};\ \beta_1 = y + \frac{1 + y'^2}{y''};\ \gamma_1 = \sqrt{\frac{\left(1 + y'^2\right)^3}{\left|y''\right|}}. \qquad (0.31)$$

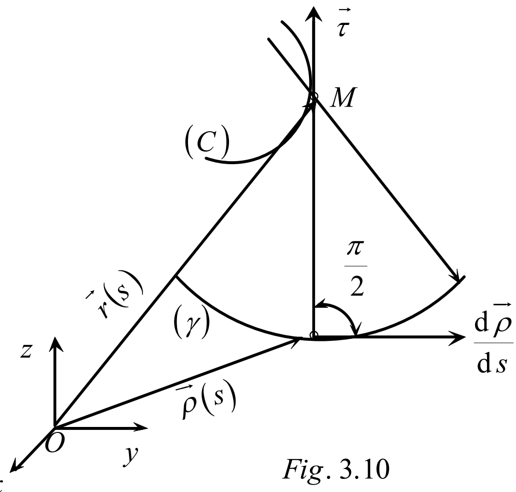


Fig. 3.10

$$B=\frac{ab}{t}\left[a\cos\left(a\ln t\right)+\sin\left(a\ln t\right)\right]$$

$$C=\frac{a}{t}\left(1+a^2\right)$$

Cosinuşii directori ai binormalei fiind

$$\cos\alpha=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \cos\beta=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \cos\gamma=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

deducem că unghiul făcut de normala $\left(B_n\right)$ cu axa Oz

$$\cos\gamma=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\pm\sqrt{\frac{1+a^2}{1+a^2+b^2}}=const.$$

Parametrii directori ai normalei principale se obțin din matricea

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ x' & y' & z' \\ A & B & C \end{bmatrix}$$

respectiv

$$a_1=y'C-z'B,\ b_1=z'A-x'C,\ c_1=x'B-y'A$$

Va trebui să evaluăm doar coefientul c_1

$$c_1=x'B-y'A=\frac{ab}{t}\left[a\sin\left(a\ln t\right)-\cos\left(a\ln t\right)\right]\cdot\left[a\cos\left(a\ln t\right)+\sin\left(a\ln t\right)\right]-$$

$$-\frac{ab}{t}\left[\sin\left(a\ln t\right)+a\cos\left(a\ln t\right)\right]\cdot\left[a\sin\left(a\ln t\right)-\cos\left(a\ln t\right)\right]=0\quad\blacksquare$$

3.8. **Planul rectifiant la o curbă în spațiu**

Planul rectifiant sau rectificator, notat $\left(P_r\right)$, *este planul perpendicular în* $M(x,y,z)\in(C)$ *pe normala principală* şi are ecuația:

$$\left(\mathcal{P}_r\right):\ \begin{vmatrix} y' & z' \\ b & c \end{vmatrix}\left(x-x\right)+\begin{vmatrix} z' & x' \\ c & a \end{vmatrix}\left(Y-y\right)+\begin{vmatrix} x' & y' \\ a & b \end{vmatrix}\left(Z-z\right)=0 \qquad (0.1)$$

sau

$$\left(\mathcal{P}_r\right):\ a_1(X-x)+b_1(Y-y)+c_1(Z-z)=0 \qquad (0.2)$$

Capitolul 4

GEOMETRIA DIFERENȚIALĂ A SUPRAFEȚELOR

4.1. **Reprezentarea unei suprafețe**

O suprafață (S) poate fi reprezentată prin următoarele ecuații

$(I)\quad z = f(x,y), \qquad (x,y)\in D_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ *ecuația explicită*

$(II)\quad F(x,y,z)=0, \quad (x,y,z)\in D \subseteq \mathbb{R}^3$ *ecuația implicită*

$(III)\quad \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \quad (u,v)\in D_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ *ecuațiile parametrice*

$(IV)\quad \vec{r} = \vec{r}(u,v) \qquad (u,v)\in D_1 \subset \mathbb{R}^2$ *ecuația vectorială*

Exemple

4.1. *Sfera* cu centru în origine şi de rază *R*

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

are următoarele reprezentări:

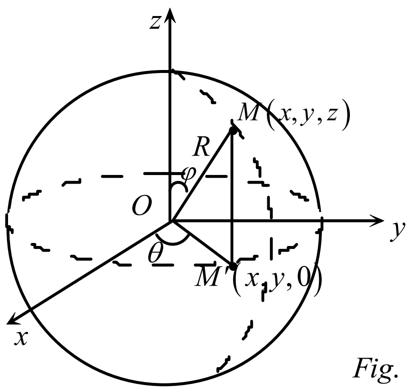


Fig. 4.1

(I): $$z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2},\ x^2 + y^2 \le R^2$$

unde

$$f(x,y) \equiv \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2},\ (x,y) \in D,\ D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le R^2\right\}$$

(II): $$F(x,y,z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

(III): $$\begin{cases} x = R\cos\theta\sin\psi & 0 \le \theta \le 2\pi, \\ y = R\sin\theta\sin\psi & -\dfrac{\pi}{2} \le \psi \le \dfrac{\pi}{2} \\ z = R\cos\psi; & \end{cases}$$

Iată o altă parametrizare a acestei sfere

(III'): $$\begin{cases} x = u \\ y = v & \left(u^2 + v^2 \le R^2\right) \\ z = \pm\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}; & \end{cases}$$

4.2. *Elipsoidul* de ecuație

$$(S): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

poate avea următoarele reprezentări (*vezi figura* 4.3)

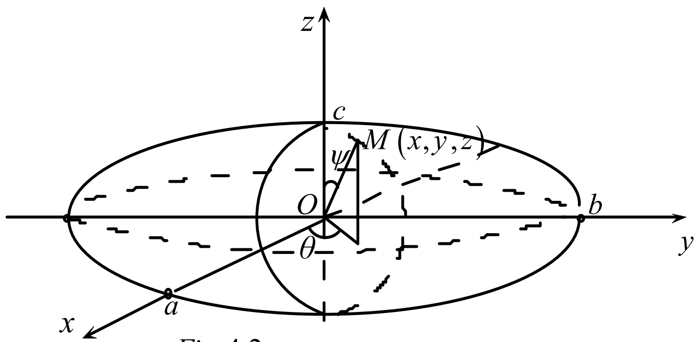


Fig.4.2

(I): $$(S):\ z = \pm\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}},\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$$

(II): $$(S): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

(III):
$$(S):\begin{cases} x = a\cos\theta\sin\psi & 0 \le \theta \le 2\pi, \\ y = b\sin\theta\sin\psi & -\dfrac{\pi}{2} \le \psi \le \dfrac{\pi}{2} \\ z = c\cos\psi, & \end{cases}$$

$(III)'$:
$$(S):\begin{cases} x = au \\ y = bv \\ z = \pm c\sqrt{1-u^2-v^2}, \end{cases} \quad \left(u^2+v^2 \le 1\right)$$

4.3. *Cilindrul* de ecuație
$$(S):\ x^2 + y^2 = r^2$$
admite următoarele reprezentări

(I): $\quad (S):\ x^2 + y^2 - r^2 = 0$

(III):
$$(S):\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

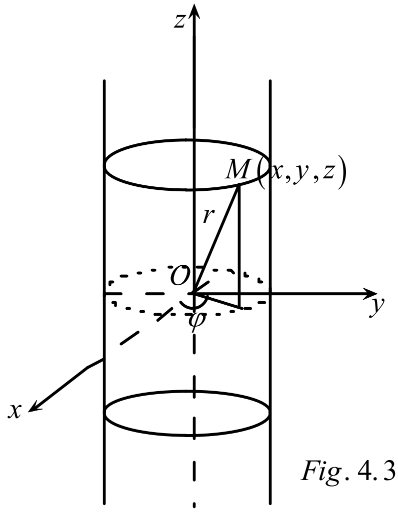


Fig. 4.3

Observație

Numerele R, θ, ψ *definesc coordonatele polare ale unui punct* $M(x,y,z)$ *pe sferă sau* ***coordonatele sferice***, u, v – ***coordonatele curbilinii*** *ale acestui punct, iar* r, φ *– coordonatele polare ale punctului M pe un cilindru sau* ***coordonatele cilindrice***.

Presupunem $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ de clasă $C^1(D_1)$ în sensul următor

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_u & y'_v & z'_v \end{bmatrix} = 2 \tag{4.1}$$

unde prin x_u sau x'_u s-a notat $\dfrac{\partial x}{\partial u}$, derivata parțială a funcției $x(\cdot\,,\,v)$ în raport cu u.

Condițiile care definesc o *suprafață regulată* (*netedă*) se numesc *condiții de regularitate* (*de netezime*).

Punctele unei suprafețe regulate sunt ***puncte ordinare****, altfel ele se numesc* ***puncte singulare****.*

Condiția (4.2) se poate scrie, de exemplu, pentru o suprafață definită de ecuațiile explicite (I) sub forma

$$f'^2_x + f'^2_y + 1 \not\equiv 0;\ (x,y) \in D_0. \tag{4.3}$$

Pentru o suprafață definită implicit, prin (II), condițiile de netezime se reduc la

$$F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z \not\equiv 0, \quad \text{pe} \quad D \subset \mathbb{R}^3 \tag{4.4}$$

sau dacă suprafața (S) este definită vectorial

$$\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v \neq \vec{0}, \tag{4.5}$$

ceea ce înseamnă că

$$\left\| \vec{r}'_u \times \vec{r}'_v \right\| \neq 0$$

sau, mai mult, nu toate componentele scalare ale vectorului $\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v$ sunt nule.

Ținând seama că

$$\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix},$$

rezultă că pentru o suprafață definită parametric condiția (4.5) se reduce la a scrie, de exemplu

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} \overset{def}{=} \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall\ (u,v) \in D_1.$$

Exemple.

4.4 Sfera este o suprafaţă regulată.

Într-adevăr, dacă se calculează derivatele parţiale ale funcţiei

$$F(x,y,z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

rezultă

$$F'_x = 2x;\ F'_y = 2y;\ F'_z = 2z$$

şi mai departe

$$F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z \equiv 4\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = 4R^2 > 0 \quad \blacksquare$$

4.5 Elipsoidul este o suprafaţă regulată.

Se raţionează analog pentru

$$F(x,y,z) \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

astfel că

$$F'_x = \frac{2x}{a^2};\ F'_y = \frac{2y}{b^2};\ F'_z = \frac{2z}{c^2},$$

de unde

$$F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z \equiv 4\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) = 4 > 0 \quad \blacksquare$$

4.6 Conul de rotaţie

$$x^2 + y^2 = z^2$$

nu este o suprafaţă regulată.

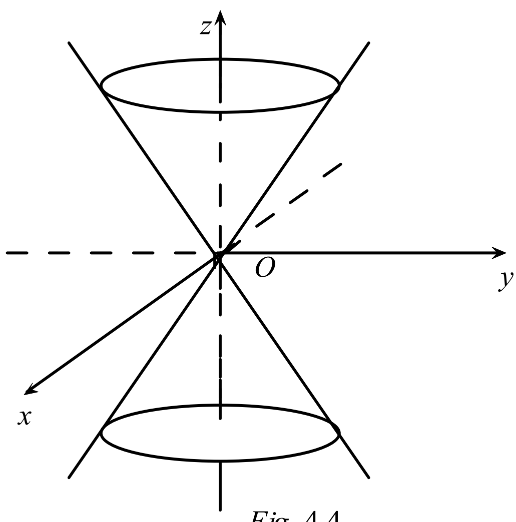


Fig. 4.4

Într-adevăr, notând

$$F(x,y,z) \equiv x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

rezultă

$$F'_x = 2x;\ F'_y = 2y;\ F'_z = -2z.$$

Condiția (4.4) nu este satisfăcută, întrucât expresia

$$F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z \equiv 4\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

se anulează pentru $x = y = z = 0.$ Mai mult, punctul $(0,0,0)$ (*vezi figura* 4.4) este punct pe suprafață, fiind chiar vârful conului.

Prin urmare, originea sistemului de coordonate este punct singular pentru această suprafață ■

4.7. Suprafața

$$(S):\ x = u\ \cos v,\ y = u\ \sin v,\ z = a\ v$$

este regulată.

Avem

$$\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & a \end{vmatrix} = a\sin v\,\vec{i} - a\cos v\,\vec{j} + u\,\vec{k},$$

de unde

$$\left\|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v\right\| = a^2 + u^2 \neq 0 \quad ■$$

4.2. **Curbe coordonate pe o suprafață**

Fie suprafața

$$(S):\ \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v); \end{cases} \quad (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2,\ (D = I \times J) \qquad (4.6)$$

şi fie $M_0(u_0,v_0) \in (S)$ un punct fixat, dar arbitrar (*vezi figura* 4.4).

Pentru $u = u_0 = const.$ se obține *familia* (γ_v) *de curbe – v*, trasate pe suprafața (S), având ecuațiile parametrice

$$(\gamma_v):\ \vec{r} = \vec{r}(u_0, v) \Leftrightarrow (\gamma_v): \begin{cases} x = x(u_0, v) \\ y = y(u_0, v) \\ z = z(u_0, v), \end{cases} \quad (v \in I). \tag{4.7}$$

În mod analog, pentru $v = v_0 = const.$ se găseste *familia de curbe – u*, notată (γ_u), definită prin

$$(\gamma_u):\ \vec{r} = \vec{r}(u, v_0) \Leftrightarrow (\gamma_u): \begin{cases} x = x(u, v_0) \\ y = y(u, v_0) \\ z = z(u, v_0), \end{cases} \quad (v \in J). \tag{4.8}$$

Familiile de curbe (γ_u) şi (γ_v) au următoarele *proprietăți*:

$1^0)$ *Prin punctul* $M_0(u_0, v_0) \in (S)$ *trece câte o singură curbă din familiile* (γ_u) *şi* (γ_v).

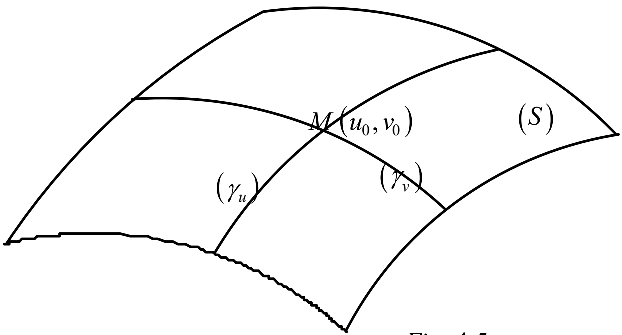


Fig. 4.5

$2^0)$ *Perechile* $(u,v) \in (C)$ *formează un sistem de* ***coordonate locale*** ***(curbilinii)*** *pe suprafața (S). De aceea cele două familii* (γ_u) *şi* (γ_v) *se mai numesc* ***familii de curbe coordonate***.

$3^0)$ *Cele două curbe de coordonate care trec printr-un punct* M_0 *al unei suprafețe regulate au în* M_0 *tangente distincte.*

Într-adevăr, vectorii

$$\vec{r}_u' = x_u'\vec{i} + y_u'\vec{j} + z_u'\vec{k}$$
$$\vec{r}_v' = x_v'\vec{i} + y_v'\vec{j} + z_v'\vec{k}$$

calculați in $M(u_0,v_0)$ sunt tangenți la curbele coordonate (γ_u) respectiv (γ_v), iar

$$\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = \frac{D(y,z)}{D(u,v)}\vec{i} + \frac{D(z,x)}{D(u,v)}\vec{j} + \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\vec{k} \not\equiv \vec{0}$$

întrucât (S) este o suprafață regulată. Deducem că *vectorii* $\vec{r}'_u$ *şi* $\vec{r}'_v$ *nu sunt coliniari*, *aşadar*, *cele două tangente în* M_0 *sunt distincte* ■

Potivit acestor proprietăți, spunem că *familiile* (γ_u) *şi* (γ_v) *formează o rețea pe suprafața* (S), *numită şi* ***rețeaua de curbe coordonate*** (*vezi figura* 4.3).

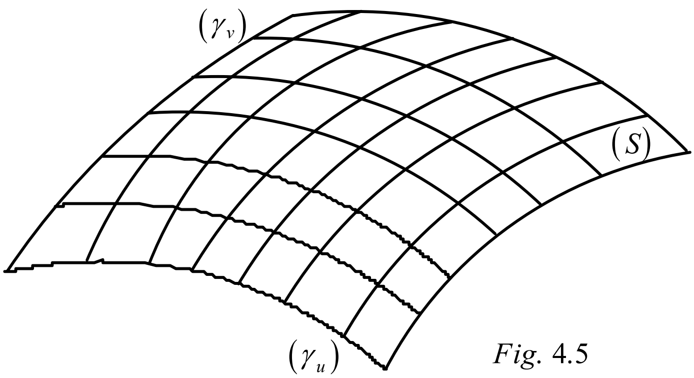


Fig. 4.5

Exemple

4.8. Referindu-ne la *exemplul* **4.1**, familiile de curbe coordonate (γ_θ) şi (γ_θ), definite prin

$$(\gamma_\varphi):\begin{cases} x = R\cos\theta_0 \sin\psi \\ y = R\sin\theta_0 \sin\psi\ , \quad \theta = \theta_0 = const. \\ z = R\cos\psi \end{cases}$$

respectiv

$$(\gamma_\theta):\begin{cases} x = R\cos\theta \sin\psi_0 \\ y = R\sin\theta \sin\psi_0\ , \quad \psi = \psi_0 = const. \\ z = R\cos\psi_0 \end{cases}$$

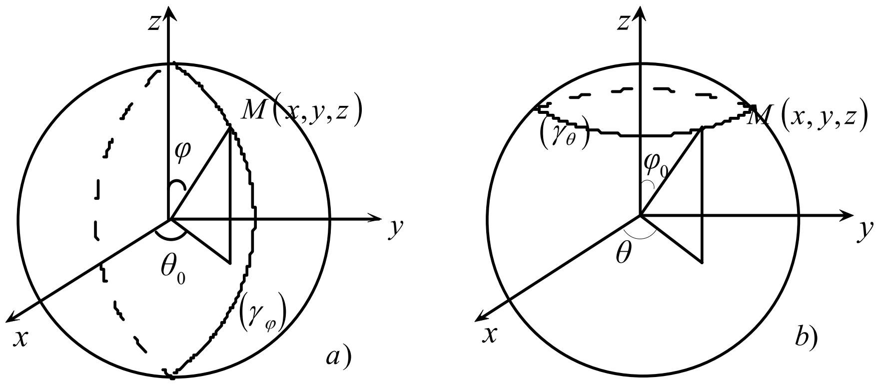


Fig. 4. 6

reprezintă *familiile de cercuri paralele*, respectiv *cercuri meridiane* trasate pe această sfera de rază R centrată în origine . Cele două familii de cercuri formează *rețeaua de curbe coordonate* pe sfera dată parametric de ecuațiile (*vezi figura* 4.6 *a* şi *b*) ■

4.9. Fie suprafața

$$(S):\ x=2u-v;\ y=u^2+v^2;\ z=u^3-v^3$$

Pentru $u=1$ se obține o curbă din familia de curbe coordonate (γ_v), anume

$$(\gamma_1):\ x=2-v;\ y=1+v^2;\ z=1-v^3,$$

iar pentru $v=-1$ se găseşte, analog,

$$(\gamma_2):\ x=2u+1;\ y=u^2+1;\ z=u^3+1 \quad ■$$

4.3. **Curbe oarecare trasate pe o suprafață**

Fie suprafața (S) definită parametric de ecuațiile

$$(S):\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \quad (u,v)\in D\subset\mathbb{R}^2 \\ z=z(u,v); \end{cases} \tag{4.6}$$

şi fie $M(x,y,z)$ punctul curent pe suprafață.

Presupunem că între coordonatele curbilinii u şi v se stabileşte o relație $\phi(u,v)=0$. În acest caz coordonatele carteziene ale punctului M vor depine de un singur parametru.

Curba determinată de relația între coordonatele curbilinii ale punctului curent $M \in (S)$ poate avea una din reprezentările

$$(\gamma):\ F(u,v)=0$$

$$(\gamma):\ v=f(u)$$

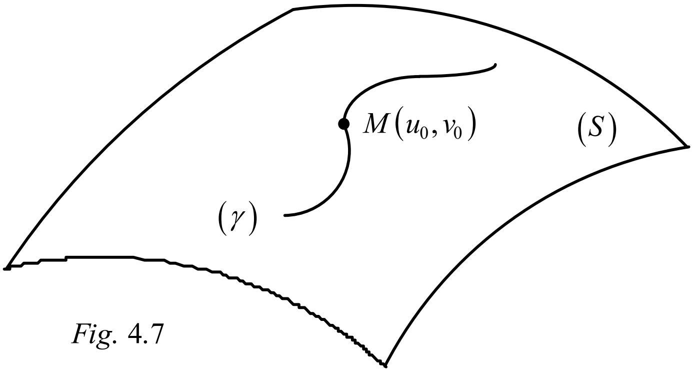


Fig. 4.7

De exemplu, o curbă (γ) reprezentată parametric prin

$$(\gamma):\ \begin{cases} u=u(t) \\ v=v(t); \end{cases} \quad t\in(a,b)$$

situată pe suprafața (4.3) se va putea scrie sub forma

$$(\gamma):\ \begin{cases} x=x(u(t),v(t)) \\ y=y(u(t),v(t)) \quad t\in(a,b). \\ z=z(u(t),v(t)); \end{cases}$$

Exemplu

4.10. Fie suprafața

$$(S):\ x=u^2+v^2,\ y=u^2-v^2,\ z=uv.$$

Dacă

$$(\gamma):\ v=au$$

este o curbă pe suprafața (S), atunci că ecuația ei se mai poate scrie

$$(\gamma):\ x=u^2+a^2u^2,\ y=u^2-a^2u^2,\ z=au^2 \quad \blacksquare$$

4.4. **Curbe trasate pe o suprafaţă şi date prin ecuaţiile diferenţiale**

(i) Fie ecuaţia diferenţială ordinară de ordinul întâi

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{du} = h(u,v) \\ v|_{u=u_0} = v_0 \end{cases} \quad (u,v) \in (a,b) \times (c,\mathrm{d}) \tag{4.9}$$

unde $h(u,v)$ este o funcţie dată.

În condiţiile teoremei de existenţă şi unicitate a soluţiei a ecuaţiilor diferenţiale de ordinul întâi, rezultă că *există o singură funcţie* $v = f(u)$ *de clasă* $C^1(a,b)$ *care satisface ecuaţia* $(4.9)_1$ şi trece prin punctul (u_0,v_0).

Aşadar, *există o unică **curbă integrală***

$$(\gamma): \; v = f(u) \tag{4.10}$$

a ecuaţiei ce trece prin punctul (u_0,v_0) (*vezi figura* 4.3).

Dacă se renunţă la *condiţia iniţială* $(4.9)_2$, atunci soluţiile ecuaţiile sunt date implicit de relaţia

$$(\gamma_C): \; \Phi(u,v,C) = 0 \tag{4.11}$$

care reprezintă o *familie de curbe integrale* depinzând de un parametru *C*, *C* fiind o constantă de integrare.

Astfel, *ecuaţia diferenţială defineşte o familie de curbe uniparametrice pe suprafaţa* (S), *aşa încât prin fiecare punct al suprafeţei trece o singură curbă din această familie*.

(ii) Fie ecuaţia diferenţială ordinară de ordinul al doilea

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}u^2} = g\left(u, v, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right) \tag{4.12}$$

Dacă sunt satisfăcute condiţiile de existenţă şi unicitate a soluţiilor ecuaţiei, atunci există o singură curbă (4.10) care trece prin punctul (u_0,v_0)

$$(\gamma): \; v = f(u)$$

Prin urmare, *ecuaţia diferenţială* (4.12) *defineşte o familie de curbe integrale*

$$\Psi\left(u,v,C_1,C_2\right)=0 \qquad (4.13)$$

trasate pe suprafaţa (S). *Prin fiecare punct M al suprafeţei trec o infinitate de curbe din familia* (4.13) *depinzând de doi parametrii* C_1 *şi* C_2, *dar numai una singură dintre acestea trece prin punctul* (u_0,v_0), *având tangentă dată*.

4.5. **Planul tangent într-un punct al unei suprafeţe**

Fie o suprafaţă

$$(S):\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \qquad (u,v)\in D\subset\mathbb{R}^2 \\ z=z(u,v); \end{cases}$$

$M(u,v)$ un punct ordinar situat pe (S) şi fie curbele coordonate (γ_u) şi (γ_v) duse prin acest punct. Din *proprietatea* 3^0) de la *paragraful* 4.4 rezultă că există *două tangente distincte* ce trec prin acest punct la curbele coordonate.

Mai mult, prin *M* trec o infinitate de curbe oarecare trasate pe suprafaţa (S) şi să considerăm toate tangentele în *M* la aceste curbe.

Numim ***plan tangent*** $(\mathcal{P}_t)$ *într-un punct M al suprafeţei regulate* (S), *locul geometric al tangentelor duse la toate curbele pe suprafaţă care trec prin M*.

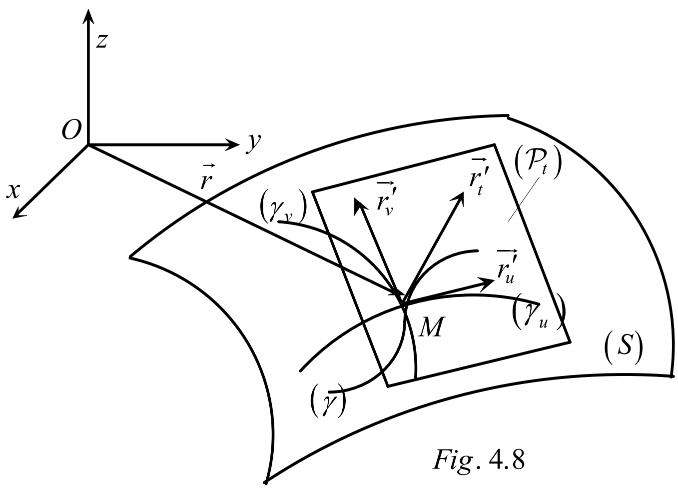


Fig. 4.8

Fie

$$(\gamma):\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases} \quad (t\in(a,b))$$

o curbă oarecare pe suprafața (S) care trece prin M, definită vectorial prin

$$(S):\ \vec{r} = \vec{r}(u,v)$$

Atunci ecuația vectorială a curbei este

$$(\gamma):\ \vec{r} = \vec{r}\big(u(t),v(t)\big),\ t\in(a,b).$$

Vectorul tangent în M la (γ) va fi

$$\vec{r}_t' = \vec{r}_u'\,u'(t) + \vec{r}_v'\,v'(t) \tag{4.14}$$

Relația (4.14) exprimă faptul că $\vec{r}_t'$ este coplanar cu vectorii $\vec{r}_u'$ şi $\vec{r}_v'$ care potivit celor de mai sus sunt necoliniari.

Prin urmare, *tangenta la o curbă* (γ) *situată pe suprafața* (S) *ce trece prin M este situată în planul tangentelor* $\vec{r}_u'$ *şi* $\vec{r}_v'$ *duse la curbele coordonate ce trec prin acest punct*.

Suprafața generată de aceste tangente este aşadar un plan.

(i) Planul tangent la suprafața (S), definită parametric de ecuațiile (4.3) se determină considerând vectori directori tangentele $\vec{r}_u'$ şi $\vec{r}_v'$ la curbele coordonate duse prin punctul $M\in(S)$.

Dacă notăm

$N(X,Y)$ – punctul curent al planului tangent,

$M(x,y,z)$ – punctul curent al suprafeței (S), atunci ecuația planului tangent este

$$(\mathcal{P}_t):\ \begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x_u' & y_u' & z_u' \\ x_v' & y_v' & z_v' \end{vmatrix} = 0 \tag{4.15}$$

sau

$$(\mathcal{P}_t):\ A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0 \tag{4.16}$$

unde

$$A=\frac{D(y,z)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix};\ B=\frac{D(z,x)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix};C=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_u & y'_v \end{vmatrix}. \tag{4.17}$$

Observație

Coeficienții A, B, C *din ecuația* (4.16) *definiți de relațiile* (4.17) *sunt parametrii directori ai normalei planului tangent în punctul curent la suprafața* (S).

(ii) Dacă suprafața (S) este reprezentată cartezian de ecuația explicită

$$(S):\ z=f(x,y);\ (x,y)\in D,$$

atunci se poate considera parametrizarea

$$(S):\ \begin{cases} x=u \\ y=v \\ z=f(u,v) \end{cases};\ (u,v)\in D \tag{4.18}$$

Întrucât

$$x'_u=1;\quad y'_u=0;\quad z'_u=p,$$
$$x'_v=0;\quad y'_v=1;\quad z'_v=q,$$

unde s-a notat

$$p=f'_x=f'_u;\quad q=f'_y=f'_v$$

ecuația (4.15) devine

$$(\mathcal{P}_t):\ \begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \end{vmatrix}=0 \tag{4.19}$$

sau altfel scris

$$(\mathcal{P}_t):\ p(X-x)+q(Y-y)-(Z-z)=0 \tag{4.20}$$

(iii) Dacă suprafața (S) este reprezentată cartezian de ecuația implicită

$$F(x,y,z)=0,\quad (x,y,z)\in D\subseteq\mathbb{R}^3,$$

şi presupununând că z este definită implicit de x şi y, atunci din *teorema funcțiilor implicite* rezultă că

$$p=-\frac{F'_x}{F'_z};\ q=-\frac{F'_y}{F'_z} \tag{4.21}$$

astfel că ecuația (4.20) se rescrie sub forma

$$(\mathcal{P}_t):\ (X-x)F'_x+(Y-y)F'_y+F'_z(Z-z)=0 \tag{4.22}$$

Exemple

4.11. Să se scrie ecuația planului tangent în punctul curent situat pe suprafața sferei de rază R.

$$(S):\ F(x,y,z)\equiv x^2+y^2+z^2-R^2=0$$

Aşa cum avăzut mai sus sfera este o suprafață regulată, iar într-un punct arbitrar $M(x,y,z)\in(S)$ putem scrie

$$F'_x=2x;\ F'_y=2y;\ F'_z=2z$$

Prin urmare, ecuația (4.20) devine

$$(\mathcal{P}_t):\ (X-x)x+(Y-y)y-(Z-z)z=0$$

însă, dacă se ține seama că

$$x^2+y^2+z^2=R^2,$$

atunci ecuația planului tangent devine

$$xX+yY+zZ=R^2 \qquad \blacksquare \tag{4.23}$$

Observație

În liceu obişnuiam să scriem planul tangent în punctul $M(x_0,y_0,z_0)$ la sfera

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

prin aşa-zisa *dedublare* în ecuația sferei, adică tocmai ecuația (4.23) scrisă sub forma

$$xx_0+yy_0+zz_0=R^2 \tag{4.24}$$

4.12. Să se scrie ecuația planului tangent în punctul curent situat pe elipsoidul de ecuație

$$(S):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Notând

$$(S):\ F(x,y,z)\equiv\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{x^2}-1=0,$$

se observă că

$$F'_x = 2\frac{x}{a};\ F'_y = 2\frac{y}{b};\ F'_z = 2\frac{z}{c},$$

iar cum

$$F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z = 4\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{x^2}\right) = 4 \neq 0$$

rezultă că elipsoidul este o suprafață regulată. Ecuația planului tangent se va scrie la fel ca în *exemplul* **4.11**, adică înlocuind F'_x, F'_y, F'_z de mai sus în ecuația (4.20)

$$(\mathcal{P}_t):\ (X-x)\frac{2x}{a^2} + (Y-y)\frac{2y}{b^2} - (Z-z)\frac{2z}{c^2} = 0$$

Desfacem parantezele şi ținem seama că

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

de unde

$$\frac{2x}{a^2}X + Y\frac{2y}{b^2} + \frac{2z}{c^2}Z - 2\left(\underbrace{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}_{=1}\right) = 0,$$

iar în final, ecuația planului tangent se va scrie

$$(P_t):\ \frac{x}{a}X + \frac{y}{b}Y + \frac{z}{c}Z = 1 \quad ■$$

4.13. Fie suprafața

$$(S):\ x^2 + 2xy + y^2 + 4xz + z^2 + 2x + 4y - 6z + 8 = 0$$

Să se afle ecuația planului tangent în punctul $M(0,0,2)$.

Întrucât

$$F'_x = 2x + 2y + 4z + 2; F'_y = 2x + 2y + 4; F'_z = 4x + 2y - 6$$

rezultă că în $(0,0,2)$ parametrii directori ai planului tangent sunt

$$F'_x = 10;\ F'_x = 4;\ F'_x = -2$$

astfel că ecuația (4.22) devine

$$10X + 4Y - 2(Z-2) = 2$$

sau

$$10X + 4Y - 2Z + 2 = 0 \quad ■$$

4.14. Fie suprafața

$$(S):\ z=5x^2+4y-3$$

Să se determine ecuația planului tangent în punctul $M(1,0,2)$.

Să observăm că suprafața este definită cartezian explicit, astfel pentru

$$f(x,y)\equiv 5x^2+4y-3$$

rezultă că

$$p=f_x'=10x;\ q=f_y'=4.$$

În punctul $(1,0,2)$ coeficienții p, q devin $p=10,\ q=4,$ iar ecuația (4.20) devine

$$10(X-1)+4Y-(Z-2)=0$$

de unde se găseşte în final

$$10X+4Y-Z-8=0 \quad \blacksquare$$

4.15. Fie suprafața

$$(S):\ x=u\ \cos v,\ y=u\ \sin v,\ z=a\ v$$

Să se determine ecuația planului tangent în punctul curent pe suprafață.

Forma parametrică sub care este dată suprafața indică faptul că planului tangent este dat de ecuația (4.15). Evaluăm mai întâi derivatele de ordinul întâi ale lui x, z, y respectiv

$$x_u'=\cos v;\quad y_u'=\sin v;\quad z_u'=a$$
$$x_v'=-u\sin v;\ y_v'=u\cos v;\ z_v'=0$$

iar, mai departe ecuația (4.15) se va scrie

$$(\mathcal{P}_t):\begin{vmatrix} X-u\cos v & Y-u\sin v & Z-av \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & a \end{vmatrix}=0$$

Dezvoltând determinantul se obține

$$a\sin v(X-u\cos v)-a\cos v(Y-u\sin v)+u(Z-av)=0$$

sau

$$a\sin vX-a\cos v+uZ-auv+2au\sin v\cos v=0 \quad \blacksquare$$

4.6. **Normala într-un punct la o suprafață**

Se numeşte ***normala*** *într-un punct ordinar M la o suprafață (S) dreapta perpendiculară în M la planul tangent în acel punct.*

Parametrii directori ai normalei sunt tocmai parametrii directori ai planului tangent, aşa cum am văzut în *paragraful* 4.5.

Notăm (*vezi figura* 4.9):

$N(X,Y,Z)-$ punctul curent al normalei,

$M(x,y,z)-$ coordonatele punctului curent pe suprafață.

(i) Presupunem că suprafața este reprezentată parametric prin

$$(S):\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v), \quad (u,v)\in D\subset\mathbb{R}^2 \\ z=z(u,v) \end{cases} \tag{4.3}$$

Ținând seama de ecuația planului tangent (4.16) rezultă

$$(MN):\ \frac{X-x}{\dfrac{D(y,z)}{D(u,v)}}=\frac{Y-y}{\dfrac{D(z,x)}{D(u,v)}}=\frac{Z-z}{\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}} \tag{4.25}$$

sau cu notațiile

$$A=\frac{D(y,z)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix};\ B=\frac{D(z,x)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix};C=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_u & y'_v \end{vmatrix} \tag{4.26}$$

ecuația normalei se mai scrie

$$(MN):\frac{X-x}{A}=\frac{Y-y}{B}=\frac{Z-z}{C} \tag{4.27}$$

(ii) Dacă suprafața (S) este dată cartezian explicit

$$(S):\ z=f(x,y),(x,y)\in D$$

atunci potrivit ecuației (4.20) vom scrie

$$(MN):\ \frac{X-x}{p}=\frac{Y-y}{q}=\frac{Z-z}{-1} \tag{4.28}$$

(iii) Dacă suprafața (S) este dată cartezian implicit, atunci din (4.22) rezultă

$$(MN):\ \frac{X-x}{F'_x}=\frac{Y-y}{F'_y}=\frac{Z-z}{F'_z} \tag{4.29}$$

Exemple

4.16. Fie suprafața

$$(S):\begin{cases} x=(b+r\cos v)\cos u\\ y=(b+r\cos v)\sin u\\ z=r\sin v\end{cases}$$

numită *torr.* Să determinăm normala la suprafața (S) în punctul $M\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ situat pe (S).

Pentru a aplica formula (4.25) vom determina mai întâi derivatele parțiale de ordinul întâi ale componentelor *x*, *z*, *y* ale vectorului de poziție, apoi coeficienții *A*, *B*, *C* din relațiile (4.26). Astfel

$$x'_u=-(b+r\cos v)\sin u;\ \ y'_u=(b+r\cos v)\cos u;\ z'_u=0,$$
$$x'_v=-r\sin v\cos u;\qquad y'=r\sin v\cos u;\qquad z'_v=r\cos v$$

de unde

$$A=\begin{vmatrix} y'_u & z'_u\\ y'_v & z'_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}(b+r\cos v)\cos u & 0\\ r\sin v\cos u & r\cos v\end{vmatrix}=a(b+r\cos v)\cos u\cos v$$

$$B=\begin{vmatrix} z'_u & x'_u\\ z'_v & x'_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -(b+r\cos v)\sin u\\ r\cos v & -r\sin v\cos u\end{vmatrix}=a(b+r\cos v)\sin u\cos v$$

$$C=\begin{vmatrix} x'_u & y'_u\\ x'_u & y'_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-(b+r\cos v)\sin u & (b+r\cos v)\cos u\\ -r\sin v\cos u & r\sin v\cos u\end{vmatrix}=r(b+r\cos v)\sin v$$

În punctul $M\left(u=\frac{\pi}{4},v=\frac{\pi}{2}\right)$ acești coeficienți sunt

$$A=0;\ B=0;\ C=rb.$$

Pe de altă parte, coordonatele carteziene ale punctului *M* pe suprafață sunt

$$x=x\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)=\frac{b}{\sqrt{2}};\ y=y\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)=\frac{b}{\sqrt{2}};\ z=z\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)=r$$

Aşadar, normala (MN) are ecuațiile canonice

$$(MN):\ \frac{X-\dfrac{b}{\sqrt{2}}}{0}=\frac{Y-\dfrac{b}{\sqrt{2}}}{0}=\frac{Z-r}{rb}\quad \blacksquare$$

4.17. Să se scrie ecuațiile planului tangent şi a normalei în punctul $M(1,\,3,\,4)$ la suprafața

$$(S):\begin{cases} x=u \\ y=u^2-2v \\ z=u^3-3uv \end{cases}$$

Cordonatele curbilinii ale punctului se obțin din egalitățile

$$u=1;\ u^2-v=3;\ u^3-3uv=4$$

de unde găsim valorile $u=1,\ \ v=-1.$ Evaluăm derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcțiilor $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ respectiv

$$\begin{aligned} &x'_u=1; \quad y'_u=2u; \quad z'_u=3u^2; \\ &x'_v=0; \quad y'_v=-2; \quad z'_v=-3u. \end{aligned}$$

De aici rezultă coeficienții (4.26)

$$A=-6v;\ B=3v;\ C=-2.$$

iar pentru $u=1$ şi $v=-1$ se obțin valorile $A=0;\ B=-3;\ C=-2.$ Mai departe, ecuația planului tangent îm punctul M se scrie

$$(\mathcal{P}_t):\ 0(X-1)+3(Y-3)-2(Z-4)=0$$

sau

$$(\mathcal{P}_t):\ 3Y-2Z-1=0.$$

Ecuația normalei în acelaşi punct se va scrie imediat ținând seama de (4.25) şi (4.26)

$$(MN):\ \frac{X-1}{0}=\frac{Y-3}{3}=\frac{Z-4}{-2}\quad \blacksquare$$

4.7. **Orientarea normalei într-un punct la o suprafață**

Pe normala (MN) la suprafața (S) (*vezi figura* 4.9) alegem un *sens pozitiv* determinat de un versor $\vec{\upsilon}$ ales pe normală

$$\vec{\upsilon} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}, \tag{4.30}$$

unde, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sunt *cosinuşii directori ai normalei* şi se determină pentru fiecare tip de reprezentare, ținând seama de faptul că versorul (direcția) unui vector se determină împărțind coordonatele vectorului la modulul (norma) sa.

În general, pe normala (MN) se pot alege doi versori $\vec{\upsilon}$ şi $-\vec{\upsilon}$. Corespunzător fiecărui tip de reprezentare se pun în evidență expresiile analitice ale cosinuşilor directori ai normalei.

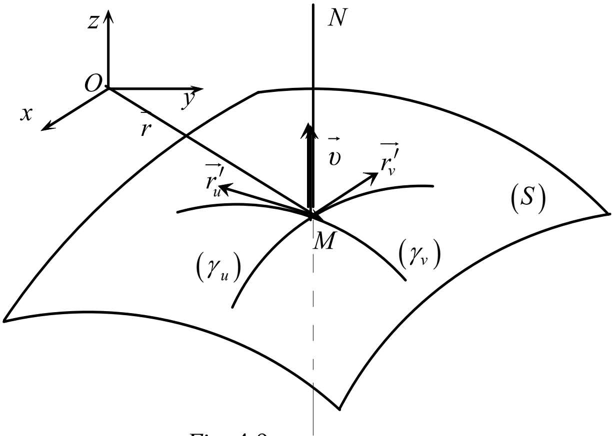


Fig. 4.9

(i) pentru o suprafață (S) dată de ecuațiile (III):

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{4.31}$$

unde,

$$A = \frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \quad B = \frac{D(z,x)}{D(u,v)}, \quad C = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \tag{4.32}$$

(ii) pentru o suprafață (S) dată de ecuația explicită (I):

$$\cos\alpha = \frac{p}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos\beta = \frac{q}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{-1}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}. \tag{4.33}$$

(iii) pentru o suprafață (S) dată de ecuația implicită (II):

$$\cos\alpha = \frac{F'_x}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}}, \quad \cos\beta = \frac{F'_y}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}}, \quad \cos\gamma = \frac{F'_z}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}}. \tag{4.34}$$

Observație

1^0) *Dacă suprafața* (S) *este tăiată de o paralelă la axa Oz în cel mult un punct, atunci versorul* $\vec{\upsilon}$ *face cu axa* Oz *un unghi ascuțit i.e.* $\cos\gamma > 0.$

Dacă punem în evidență cele două curbe coordonate care trec prin punctul $M(u,v)\in(S),$ atunci

$$\vec{\upsilon} = \frac{\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v}{\left\|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v\right\|} \tag{4.35}$$

unde

$$\left\|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v\right\| = \left\|\vec{r}'_u\right\|\left\|\vec{r}'_v\right\|\sin\left(\widehat{\vec{r}'_u,\vec{r}'_v}\right),$$

Reamintim că

$$\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$$

unde sunt definiți de relațiile (4.32).

Introducem ***notațiile lui Gauss***

$$\begin{aligned} E &= \left\|\vec{r}'_u\right\|^2 = x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u \\ F &= \vec{r}'_u \cdot \vec{r}'_v = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_u \\ G &= \left\|\vec{r}'_v\right\|^2 = x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v \end{aligned} \tag{4.36}$$

Atunci

$$\left\|\vec{r'_u} \times \vec{r'_v}\right\|^2 = \left\|\vec{r'_u}\right\|^2 \left\|\vec{r'_v}\right\|^2 - \left\|\vec{r'_u}\right\|^2 \left\|\vec{r'_v}\right\|^2 \cos^2(\vec{r'_u}, \vec{r'_v})$$

$$\left\|\vec{r'_u} \times \vec{r'_v}\right\|^2 = EG - F^2 \equiv A^2 + B^2 + C^2$$

În aceste condiții, cosinuşii directori ai normalei dați de (4.31) se mai pot scrie

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{EG-F^2}},\ \cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{EG-F^2}},$$
$$\cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{EG-F^2}}. \tag{4.37}$$

Exemple

4.18. Fie suprafața

$$(S):\ x = u\ \cos v,\ y = u\ \sin v,\ z = a\ v$$

Să se determine versorul normalei la suprafața (S) în punctul curent.

Formăm matricea

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & C \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & a \end{vmatrix}$$

unde

$$A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix} = a\sin v;\ B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix} = -a\cos v;\ C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_u & y'_v \end{vmatrix} = u$$

iar

$$A^2 + B^2 + C^2 = u^2 + a^2.$$

Cu ajutorul relațiilor (4.31) obținem cosinuşii directori ai normalei

$$\cos\alpha = \frac{a\sin v}{\pm\sqrt{u^2+a^2}};\ \cos\beta = \frac{-a\cos v}{\pm\sqrt{u^2+a^2}};\ \cos\gamma = \frac{u}{\pm\sqrt{u^2+a^2}}$$

iar în final

$$\vec{\upsilon} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k} = \frac{a\sin v}{\pm\sqrt{u^2+a^2}}\vec{i} - \frac{a\cos v}{\pm\sqrt{u^2+a^2}}\vec{j} + \frac{u}{\pm\sqrt{u^2+a^2}}\vec{k} \quad \blacksquare$$

4.19. Să se determine cosinuşii drectori ai normalei la semisfera

$$(S):\ F(x,y,z)\equiv x^2+y^2+z^2-R^2=0,\ \ z>0\ .$$

Întrucât,

$$F'_x=2x;\ F'_y=2y;\ F'_z=2z,$$

iar

$$F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z=4\left(x^2+y^2+z^2\right)=4R^2$$

rezultă că

$$\cos\alpha=\frac{x}{R};\ \cos\beta=\frac{y}{R};\ \cos\gamma=\frac{z}{R}\quad ■$$

Observație

Dacă normala în punctul curent al unei suprafețe păstrează direcția fixă, suprafața este un plan.

Într-adevăr, fie $\vec{r_0}$ vectorul de poziție al unui punct fix M_0 pe suprafață, iar $\vec{r}(u,v)$ vectorul de poziție al punctului curent $M\in(S)$. Fie, de asemenea, $\vec{\upsilon}$ versorul normalei în M la suprafață.

Notăm

$$p=\vec{\upsilon}\cdot\left(\vec{r}-\vec{r_0}\right)\tag{4.38}$$

unde $p=p(u,v)$. Întrucât $\vec{\upsilon}$ păstrează direcție fixă, deducem că

$$\overrightarrow{\upsilon_u}=0;\ \overrightarrow{\upsilon_v}=0.$$

Pe de altă parte, dacă derivăm în (4.38) în raport cu u, respectiv, v se obțin egalitățile

$$p_u=\vec{\upsilon}\cdot\vec{r_u};\ \ p_v=\vec{\upsilon}\cdot\vec{r_v}$$

Însă $\vec{r_u}$ şi $\vec{r_v}$ sunt situați în planul tangent la suprafață în punctul M astfel

$$\vec{\upsilon}\perp\vec{r_u},\ \vec{\upsilon}\perp\vec{r_v}$$

de unde rezultă că

$$p_u=p_v=0.$$

Prin urmare, $p=const.$ În particular, pentru $\vec{r}=\vec{r_0}$, produsul scalar (4.38) este nul, deci

$$\vec{\upsilon}\cdot\left(\vec{r}-\vec{r_0}\right)=0\tag{4.39}$$

Relația (4.39) reprezintă tocmai ecuația unui plan ■

4.8. **Prima formă pătratică fundamentală a unei suprafețe**

4.8.1. *Elementul de arc al unei curbe pe o suprafață*

(i) Fie (S) suprafața dată de ecuațiile parametrice (III)

$$(S):\ \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v), \qquad (u,v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2 \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

şi fie o curbă (γ) trasată pe acestă suprafață

$$(\gamma):\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}, \qquad\qquad t \in I$$

unde $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ sunt funcții derivabile. Fie $M \in (\gamma)$, un punct având vectorul de poziție $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \vec{r}(u(t),v(t))$. Reamintim că,

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \left\| \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} \right\|$$

Atunci

$$\mathrm{d}s = \left\|\vec{r}'(t)\right\| \mathrm{d}t = \left\|\mathrm{d}\vec{r}\right\|$$

Însă,

$$\mathrm{d}\vec{r} = \vec{r}_u'\,\mathrm{d}u + \vec{r}_v'\,\mathrm{d}v$$

rezultă, atunci

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \left\|\vec{r}_u'\right\|^2 \mathrm{d}u^2 + \left\|\vec{r}_v'\right\|^2 \mathrm{d}v^2 + 2\vec{r}_u'\cdot\vec{r}_v'\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

sau

$$\mathrm{d}s^2 = E\,\mathrm{d}u^2 + 2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G\,\mathrm{d}v^2 \tag{4.40}$$

Relația (4.40) exprimă *pătratul elementului de arc* al curbei (γ) pe suprafața (S) şi se mai numeşte ***prima forma pătratică fundamentală***.

(ii) Fie (S) dată de ecuația explicită

$$(S):\ z = f(x,y),\ \ (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2.$$

Alegem parametrizarea

$$(S):\ x=u;\ y=v;\ z=f(u,v);\quad (u,v)\in D$$

În acest caz, *coeficienții lui Gauss* se rescriu sub forma

$$E=1+p^2,\ F=pq,\ G=1+q^2, \tag{4.41}$$

iar *pătratul elementului de arc*

$$\mathrm{d}s^2=\left(1+p^2\right)\mathrm{d}x+2pq\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\left(1+q^2\right)\mathrm{d}y^2 \tag{4.42}$$

unde

$$p=-f'_x,\quad q=-f'_y \tag{4.43}$$

(ii) Fie o suprafață reprezentată cartezian de ecuația

$$(S):\ F(x,y,z)=0,\qquad (x,y,z)\in\Delta\subset\mathbb{R}^3$$

Presupunând că z este funcție implicită de x și y, atunci cum

$$p=-\frac{F'_x}{F'_z},\quad q=-\frac{F'_y}{F'_z} \tag{4.21}$$

rezultă că

$$\mathrm{d}s^2=\frac{1}{F_z'^2}\left[\left(F_x'^2+F_z'^2\right)\mathrm{d}x^2+2F'_xF'_y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\left(F_y'^2+F_z'^2\right)\mathrm{d}y^2\right] \tag{4.44}$$

Observație

Coeficienții E,F,G definiți de relațiile (4.36) *formează primul grup al lui Gauss*.

Exemple

4.20. Fie suprafața

$$(S):\ x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=uv$$

Să se scrie prima formă fundamentală a suprafeței.

Evaluăm derivatele parțiale de ordinul întâi ale cooordinatelor *x*, *z*, *y* vectorului de poziție corespunzător unui punct curent pe suprafață și apoi aplicăm relațiile (4.36) și (4.40). Așadar

$$x'_u=u\sin v;\quad y'_u=u\sin v;\quad z'_u=v,$$

$$x'_v=-u\sin v;\ \ y'_v=u\cos v;\ \ z'_v=u.$$

iar

$$E = x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2 = 1 + v^2;$$

$$F = x_u' x_v' + y_u' y_v' + z_u' z_u' = 2u^2;$$

$$G = x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2 = uv.$$

Deducem că

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 + v^2\right)\mathrm{d}u^2 + 2uv\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + 2u^2\,\mathrm{d}v^2 \quad \blacksquare$$

4.21 Să se determine prima formă fundamentală a suprafeței pe sfera de ecuație

$$(S):\ F(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0.$$

Întrucât,

$$F_x' = 2x;\ F_y' = 2y;\ F_z' = 2z,$$

relația (4.44) devine

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 + \frac{x^2}{z^2}\right)\mathrm{d}x^2 + \frac{xy}{z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \left(1 + \frac{y^2}{z^2}\right)\mathrm{d}y^2 \quad \blacksquare$$

4.22. Să se determine prima formă fundamentală a suprafeței pe *paraboloidul* de ecuație

$$2z = \frac{x^2 + y^2}{a},\ a \neq 0$$

Notăm

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2a}$$

În acest caz, coeficienții E, F, G sunt dați de relațiile (4.41) sunt respectiv

$$E = 1 + p^2 = 1 + \frac{x^2}{a^2};\ F = pq = \frac{xy}{a^2};\ G = 1 + q^2 = 1 + \frac{y^2}{a^2},$$

de unde, în virtutea formulei (4.42) rezultă prima formă fundamentală

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x^2 + \frac{2xy}{a^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \left(1 + \frac{y^2}{a^2}\right)\mathrm{d}y^2 \quad \blacksquare$$

4.8.2. *Lungimea unui arc de curbă trasată pe o suprafață*

(i) Pentru o suprafață (S) dată de ecuațiile parametrice (III), *elementul de arc* $\overset{\frown}{AB} \subset (\gamma)$ se obține din relația (4.40)

$$\mathrm{d}s = \sqrt{E\,\mathrm{d}u^2 + 2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G\,\mathrm{d}v^2} \tag{4.45}$$

Observație

Forma pătratică

$$E\,\mathrm{d}u^2 + 2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G\,\mathrm{d}v^2 \tag{4.46}$$

este pozitiv definită.

Într-adevăr, expresia (4.46) se poate scrie

$$E\,\mathrm{d}u^2 + 2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G\,\mathrm{d}v^2 = \mathrm{d}u^2\left[E + 2F\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} + G\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)^2\right]$$

unde discriminantul expresiei de gradul doi este

$$F^2 - EG = -\left(EG - F^2\right) = -\left(A^2 + B^2 + C^2\right) < 0.$$

Cum coeficientul termenului de gradul doi, $G = \left\|\vec{r}_v\right\|^2$ este pozitiv, deducem că forma pătratică (4.46) este pozitiv definită ■

Ținând seama că

$$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t;\ \mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

relația (4.45) se mai scrie sub forma

$$\mathrm{d}s = \sqrt{E\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2F\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + G\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,dt.$$

Fie arcul $\overset{\frown}{AB} \subset (\gamma)$ (*vezi figura* 4.10) unde A și B corespund valorilor $t = t_0$, respectiv, $t = t_1$. Atunci *lungimea arcului* $\overset{\frown}{AB}$ va dată de integrala

$$\ell_{\overset{\frown}{AB}} = \left|\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt\right| \tag{4.47}$$

Cazuri particulare

$1^0\big)\ u = const \Rightarrow (\gamma) \equiv (\gamma_v) \therefore\ du = 0,\ \ ds = \sqrt{G}du,$

$$l_{\widehat{AB}} = \left|\int_{v_1}^{v_2} \sqrt{G}dv\right| \tag{4.48}$$

$2^0\big)\ v = const \Rightarrow (\gamma) \equiv (\gamma_u) \therefore\ \ dv = 0,\ \ \ ds = \sqrt{E}du,$

$$l_{\widehat{AB}} = \left|\int_{u_1}^{u_2} \sqrt{E}dv\right| \tag{4.49}$$

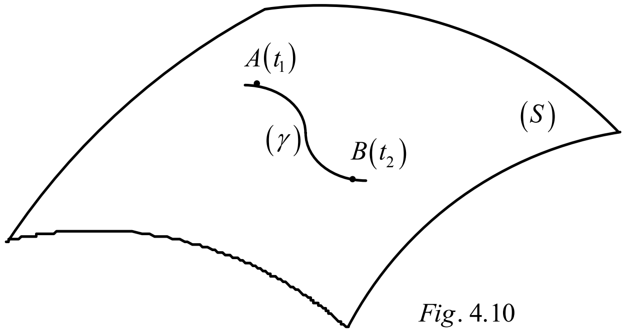


Fig. 4.10

Exemple

4.23. Fie suprafaţa

$$(S):\ x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = av$$

şi curbele

$$(\gamma_1): 2u - av^2 = 0; (\gamma_2): 2u + av^2 = 0; (\gamma_3): v = 1.$$

trasate pe această suprafaţă.

Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC pe suprafaţa (S), ale cărui vârfuri sunt punctele de intersecţia ale curbelor date.

Coordonatele A, B, C se obţin, respectiv din rezolvarea sistemelor de ecuaţii (*vezi figura 4.10*)

$$A:\begin{cases} 2u - av^2 = 0 \\ v = 1 \end{cases};\ B:\begin{cases} 2u - av^2 = 0 \\ 2u + av^2 = 0 \end{cases};\ C:\begin{cases} 2u + av^2 = 0 \\ v = 1 \end{cases}.$$

Aşadar

$$A\left(\frac{a}{2}, 1\right);\ B(0,0);\ C\left(-\frac{a}{2}, 1\right).$$

Evaluăm coeficienții lui Gauss corespunzători suprafeței (S) cu ajutorul relațiilor (4.36).

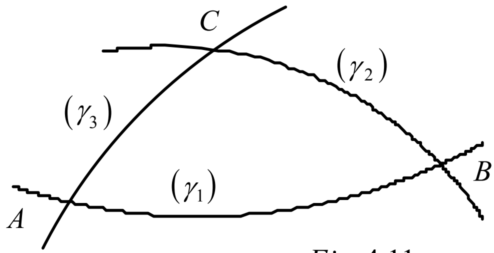


Fig. 4.11

Astfel

$$x'_u = \cos v; \quad y'_u = \sin v; \quad z'_u = 0,$$
$$x'_v = -u\sin v;\ y'_v = u\cos v;\ z'_v = a.$$

de unde rezultă

$$E = x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u = 1;$$
$$F = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_u =$$
$$= -u\sin v\cos v + u\sin v\cos v = 0;$$
$$G = x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v = u^2 + a^2.$$

Din (4.40) prima forma fundamentală este în acest caz

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}u^2 + \left(u^2 + a^2\right)\mathrm{d}v^2,$$

iar din (4.45) se obține elementul de arc pe suprafața (S)

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}u^2 + \left(u^2 + a^2\right)\mathrm{d}v^2}.$$

Elementul de arc al curbei (γ_1)

Alegem drept parametru al curbei (γ_1) coordonata curbilinie *v*; astfel

$$(\gamma_1): u = \frac{av^2}{2};\ \mathrm{d}u = av\,\mathrm{d}v,$$

iar elementul de arc al curbei (γ_1) este

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}u^2 + \left(u^2 + a^2\right)\mathrm{d}v^2} = \sqrt{a^2v^2\,\mathrm{d}v^2 + \left(\frac{a^2v^2}{4} + a^2\right)\mathrm{d}v^2} =$$
$$= \sqrt{av^2 + a^2 + \frac{a^2v^4}{4}}\,\mathrm{d}v = a\left(1 + \frac{v^2}{2}\right)\mathrm{d}v.$$

Elementul de arc al curbei (γ_2)

Pe curba (γ_2) se alege drept parametru v

$$(\gamma_1): u=-\frac{av^2}{2};\ \mathrm{d}u=av\,\mathrm{d}v.$$

Se obține de asemenea

$$\mathrm{d}s=a\left(1+\frac{v^2}{2}\right)\mathrm{d}u.$$

Elementul de arc al curbei (γ_3)

Pe curba (γ_3) se alege drept parametru coordonata v,

$$(\gamma_3):\ v=1;\ \mathrm{d}v=0,$$

de unde

$$E=1;\ F=G=0,$$

iar elementul de arc pe (γ_3) este, în acest caz particular, dat de (4.49)

$$\mathrm{d}s=\sqrt{E\,\mathrm{d}u}=\mathrm{d}u.$$

Suntem în măsura de a calcula lungimile arcelor $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{AC}$ cu ajutorul relației (4.47).

Lungimea arcului $\overset{\frown}{AB}$

$$\ell_{\overset{\frown}{AB}}=\left|\int_{\overset{\frown}{AB}}\mathrm{d}s\right|=\left|\int_1^0 a\left(1+\frac{v^2}{2}\right)\mathrm{d}v\right|=a\left(v+\frac{v^3}{6}\right)\Bigg|_1^0=\frac{7}{6}a.$$

Lungimea arcului $\overset{\frown}{BC}$

$$\ell_{\overset{\frown}{BC}}=\left|\int_{\overset{\frown}{BC}}\mathrm{d}s\right|=\left|\int_0^1 a\left(1+\frac{v^2}{2}\right)\mathrm{d}v\right|==\frac{7}{6}a.$$

Lungimea arcului $\overset{\frown}{AC}$

$$\ell_{\overset{\frown}{AC}}=\left|\int_{\overset{\frown}{AC}}\mathrm{d}s\right|=\left|\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\mathrm{d}u\right|=a.$$

Prin urmare, perimetrul triunghiului curbiliniu ABC este

$$\ell_{\overset{\frown}{ABCA}}=\frac{7}{6}a+\frac{7}{6}a+a=\frac{10}{3}a\quad\blacksquare$$

4.24. Să considerăm sfera parametrizată

$$(S):\begin{cases} x = R\cos u\sin v & 0 \le u \le 2\pi, \\ y = R\sin u\sin v & \\ z = R\cos v & -\dfrac{\pi}{2} \le v \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

şi curba (γ) pe (S) definit prin

$$(\gamma): v = \frac{\pi}{4}.$$

Ne propunem să determinăm lungimea arcului $\overset{\frown}{AB}$ pe (γ) ale cărui extremități sunt punctele $A\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ şi $B\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$ (*vezi figura* 4.12).

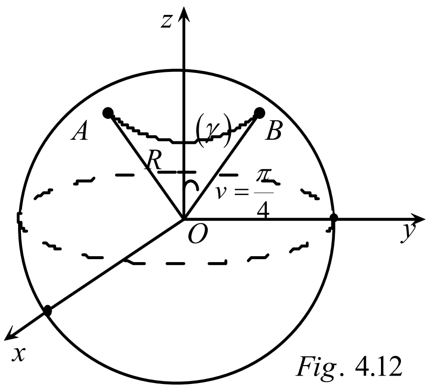


Fig. 4.12

Să observăm mai întâi că

$$x'_u = -R\sin u\sin v;\ y'_u = R\cos u\sin v;\ z'_u = 0,$$

$$x'_v = R\cos u\cos v;\quad y'_v = R\sin u\cos v;\ z'_v = -R\sin v.$$

apoi

$$E = x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u = R^2\sin^2 v$$

$$F = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_u =$$

$$= -R^2\sin u\cos u\sin v\cos v + R^2\sin u\cos u\sin v\cos v = 0$$

$$G = x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v = R^2$$

astfel

$$\mathrm{d}s = \sqrt{E\,\mathrm{d}u^2 + 2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G\,\mathrm{d}v^2} = \sqrt{R^2\sin^2 v\,\mathrm{d}u^2 + R^2\,\mathrm{d}v^2} =$$

$$= R\sqrt{\sin^2 v\,\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2}.$$

Alegând drept parametru pe curbă coordonata v şi întrucât pe (γ)

$$v = \frac{\pi}{4},\ \mathrm{d}v = 0.$$

rezultă că elementul de arc este

$$\mathrm{d}s = \frac{R}{2}\mathrm{d}u,$$

din relația (4.47)

$$\ell_{\widehat{AB}} = \left|\int_{\widehat{AB}} \mathrm{d}s\right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R}{2}\mathrm{d}u = \frac{\pi R}{4}.$$

O cale mai rapidă ar fi, în acest caz particular, să scriem ecuațiile parametrice ale curbei (γ) pe (S) sub forma

$$(\gamma):\ x = \frac{R}{\sqrt{2}}\cos u;\ y = \frac{R}{\sqrt{2}}\sin u;\ z = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Recunoaştem aici ecuațiile parametrice ale unui cerc de rază $\dfrac{R}{\sqrt{2}}$.

Întrucât arcul $\widehat{AB}$ se parcurge de la A la B, iar u variază între 0 şi $\dfrac{\pi}{2}$, urmează că lungimea cercului este evident $\dfrac{1}{4}$ din lungimea unui cerc de rază $\dfrac{R}{\sqrt{2}}$. Mai detaliat, se poate scrie că

$$\ell_{\widehat{AB}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{y'^2(u) + y'^2(u) + z'^2(u)}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R}{2}\mathrm{d}u = \frac{\pi R}{4} \quad \blacksquare$$

4.9. **Elementul de arie al unei suprafețe**

(i) Fie (S) o suprafață dată prin ecuațiile parametrice şi $M(u,v)\in(S)$.

Ducem curbele de coodonate (γ_u), respectiv, (γ_v). Paralelogramul curbiliniu obținut (*vezi figura 4.11*) se aproximează prin paralelogramul rectiliniu construit pe laturile vectorilor tangenți la curbele coordonate având aria egală cu

$$\mathrm{d}\sigma=\left\|\vec{r}_u'\,\mathrm{d}u\times\vec{r}_v'\,\mathrm{d}v\right\| \tag{4.50}$$

Ținând seama de proprietățile produsului vectorial, rezultă că *elementul de arie al suprafeței* (S), definită prin ecuațiile (III), este

$$\mathrm{d}\sigma=\left\|\vec{r}_u'\times\vec{r}_v'\right\|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{4.51}$$

sau

$$\mathrm{d}\sigma=\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \tag{4.52}$$

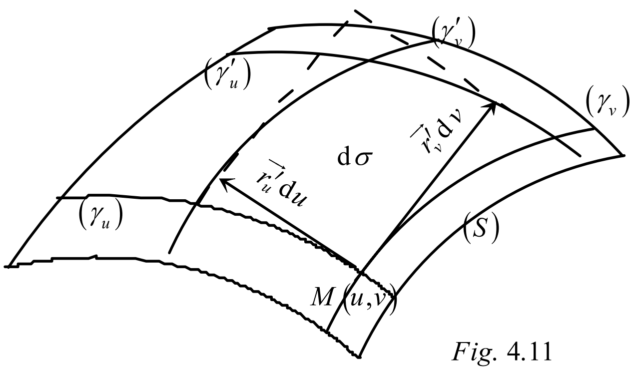


Fig. 4.11

(ii) Dacă (S) este reprezentată prin ecuația (III), atunci

$$E=1+p^2,\ F=pq,\ G=1+q^2 \tag{4.53}$$

iar

$$\mathrm{d}\sigma=\sqrt{1+p^2+q^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{4.54}$$

(iii) Pentru o suprafață date de ecuația implicită (II) se obține similar

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{|F_z'|}\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{4.55}$$

Exemple

4.25 Să se determine elementul de arie pe paraboloidul de rotație

$$(S):\ z = \frac{x^2 + y^2}{2a}.$$

Trecem la coordonate cilindrice cu

$$x = r\cos\varphi;\ y = r\sin\varphi;\ z = \frac{r^2}{2a};\ \varphi \in [0, 2\pi]; z > 0;\ a > 0$$

apoi evaluăm coeficienții E, F, G din relațiile (4.36) ținând seama de

$$x_r = \cos\varphi; \quad y_r = \sin\varphi; \quad z_r = \frac{r}{a};$$

$$x_\varphi = -r\sin\varphi;\ y_\varphi = r\cos\varphi;\ z_\varphi = 0.$$

Astfel

$$E = 1 + \frac{r^2}{a^2};\ F = 0;\ G = r^2,$$

iar din (4.52) rezultă

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{\left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right) r^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{r}{a}\sqrt{r^2 + a^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

O altă cale ar fi să notăm

$$f(x, y) = \frac{1}{2a}\left(x^2 + y^2\right)$$

Apoi cu

$$p = f_x' = \frac{x}{a};\ p = f_y' = \frac{y}{a}$$

în (4.54) găsim

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \blacksquare$$

4.26 Să determinăm elementul de arie pe sfera definită parametric de ecuațiile

$$\begin{cases} x = R\cos u \sin v & 0 \le u \le 2\pi, \\ y = R\sin u \sin v & -\dfrac{\pi}{2} \le v \le \dfrac{\pi}{2} \\ z = R\cos v; & \end{cases}$$

Din *exemplul* **4.24** avem

$$E = x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2 = R^2 \sin^2 v;$$
$$F = x_u' x_v' + y_u' y_v' + z_u' z_u' = 0;$$
$$G = x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2 = R^2,$$

iar din (4.52) urmează în final

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = R^2 \sin v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \quad \blacksquare$$

4.10. **Unghiul a două curbe oarecare pe o suprafață**

Fie suprafața (S) dată prin ecuațiile parametrice (III) şi (γ_1), (γ_2) două curbe oarecare pe această suprafață.

$$(\gamma_1):\begin{cases} u = u_1(t) \\ v = v_1(t) \end{cases}, (\gamma_2):\begin{cases} u = u_2(t) \\ v = v_2(t) \end{cases} \tag{4.56}$$

Se consideră punctul *M* de intersecție al celor două curbe.

Prin definiție, *unghiul dintre curbele* (γ_1) *şi* (γ_2) *este egal cu unghiul dintre tangentele la cele două curbe în punctul M de intersecție*, respectiv

$$\cos\alpha = \frac{d\vec{r}\cdot\delta\vec{r}}{\left\|d\vec{r}\right\|\left\|\delta\vec{r}\right\|} \tag{4.57}$$

unde $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ este vectorul de poziție al punctului $\{M\} = (\gamma_1)\cap(\gamma_2)$, iar $\mathrm{d}\vec{r}$ şi $\delta\vec{r}$ sunt diferențialele vectorilor de poziție ale punctului M pe curbele (γ_1), respectiv, (γ_2) (*vezi figura* 4.12).

Vectorii de poziție ale punctului *M* şi diferențialele lor pe curbele (γ_1) şi (γ_2) sunt respectiv

$$\vec{r} = \vec{r}\left(u_1(t), v_1(t)\right) \quad \mathrm{d}\vec{r} = \vec{r}_u'\,\mathrm{d}u + \vec{r}_v'\,\mathrm{d}v, \tag{4.58}$$

$$\vec{r} = \vec{r}\left(u_2(t), v_2(t)\right) \quad \delta\vec{r} = \vec{r}_u'\delta u + \vec{r}_v'\delta v, \tag{4.59}$$

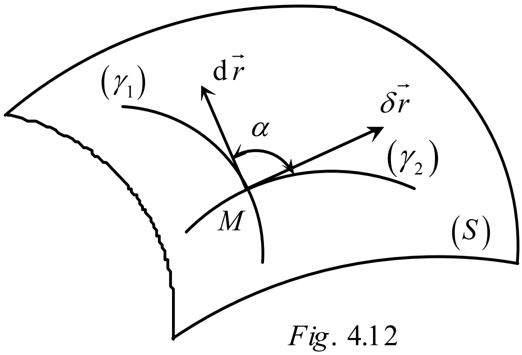


Fig. 4.12

Pe de altă parte

$$\left\|d\vec{r}\right\| = ds = \sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2};$$
$$\left\|\delta\vec{r}\right\| = \delta s = \sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u dv + G\delta v^2}. \qquad (4.60)$$

Înlocuind (4.58), (4.59) şi (4.60) în relaţia (4.57) se obţine

$$\cos\alpha = \frac{Edu\delta u + F(du\delta u + \delta u dv) + Gdv\delta u}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}} \qquad (4.61)$$

Observaţie

Condiţia de ortogonalitate a două curbe (γ_1) *şi* (γ_2) *pe o suprafaţă este*

$$Edu\delta u + F\left(du\delta v + dv\delta u\right) + Gdv\delta u = 0 \qquad (4.62)$$

Exemple

4.27 Fie suprafaţa

$$(S):\ x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = av$$

şi curbele

$$(\gamma_1): 2u - av^2 = 0;\ (\gamma_2): 2u + av^2 = 0;\ (\gamma_3): v = 1.$$

trasate pe această suprafaţă. Să determinăm unghiurile făcute de curbele $(\gamma_1), (\gamma_2)$ şi (γ_3).

Să observăm mai întâi că ecuaţiile vectoriale ale celor trei curbe pe suprafaţa (S) sunt respectiv

$$(\gamma_1): \vec{r} = \frac{av^2}{2}\cos v\vec{i} + \frac{av^2}{2}\sin v\vec{j} + av\vec{k};$$

$$(\gamma_2): \vec{r} = -\frac{av^2}{2}\cos v\,\vec{i} - \frac{av^2}{2}\sin v\,\vec{j} + av\,\vec{k};$$

$$(\gamma_3): \vec{r} = u\cos 1\,\vec{i} + u\sin 1\,\vec{j} + a\,\vec{k}.$$

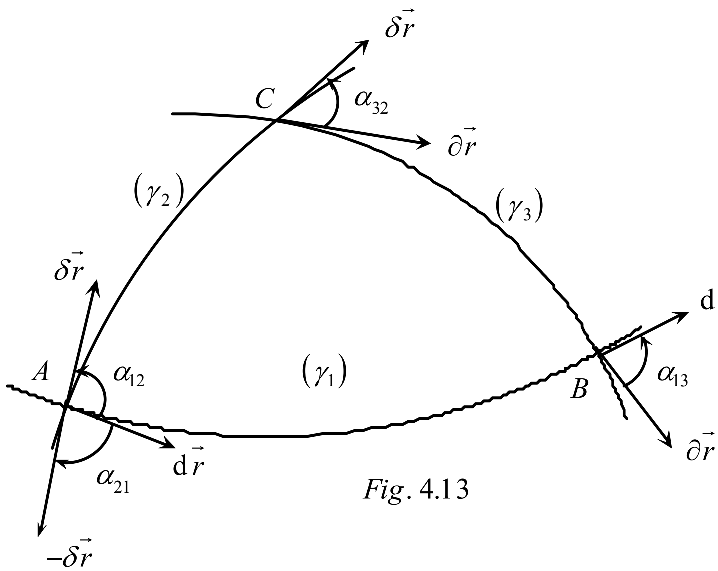


Fig. 4.13

Notăm

d, δ, ∂ – operatorii de diferențiere pe curbele (γ_1), (γ_2) respectiv (γ_3).

Atunci

$$\mathrm{d}\vec{r} = \vec{r_v}\,\mathrm{d}v = \left[\left(av\cos v - \frac{av^2}{2}\sin v\right)\vec{i} + \left(av\sin v + \frac{av^2}{2}\cos v\right)\vec{j} + a\vec{k}\right]\mathrm{d}v;$$

$$\delta\vec{r} = \vec{r_v}\delta v = \left[-\left(av\cos v - \frac{av^2}{2}\sin v\right)\vec{i} - \left(av\sin v + \frac{av^2}{2}\cos v\right)\vec{j} + a\vec{k}\right]\delta v;$$

$$\partial\vec{r} = \vec{r_u}\partial u = \left(\cos 1\,\vec{i} + \sin 1\,\vec{j}\right)\partial u.$$

Normele acestori vectori vor fi

$$\left\|\mathrm{d}\vec{r}\right\| = \sqrt{a^2v^2 + \frac{a^2v^4}{4} + a^2}\,\mathrm{d}v = a\left(\frac{v^2}{2} + 1\right)\mathrm{d}v;$$

$$\left\|\delta\vec{r}\right\| = a\left(\frac{v^2}{2} + 1\right)\delta v; \quad \left\|\partial\vec{r}\right\| = \partial u.$$

Notăm mai departe α_{ij} – unghiurile dintre curbele (γ_i) şi (γ_j). Întrucât

$$\mathrm{d}\vec{r}\cdot\delta\vec{r}=\left(-a^2v^2-\frac{a^2v^4}{4}+a^2\right)\mathrm{d}v\delta v=a^2\left(1-v^2-\frac{v^4}{4}\right)\mathrm{d}v\delta v;$$

$$\mathrm{d}\vec{r}\cdot\partial\vec{r}=\left(av\cos v\cos 1-\frac{av^2}{2}\sin v\cos 1\right)+\left(av\sin v\sin 1+\frac{av^2}{2}\cos v\sin 1\right)\mathrm{d}v\partial v=$$

$$=\left[av\cos(v+1)+\frac{av^2}{2}\sin(v-1)\right]\mathrm{d}v\partial v;$$

$$\delta\vec{r}\cdot\partial\vec{r}=-av\cos(v+1)-\frac{av^2}{2}\sin(v-1).$$

Vom aplica definiția (4.57) pentru a calcula cosinusurile unghiurilor dintre curbele $(\gamma_1),(\gamma_2)$ şi (γ_2) şi vom ține seama de rezultatele de la *exemplul* **4.24,** unde coordonatele punctelor de intersecție ale celor trei curbe erau

$$A\left(\frac{a}{2},1\right);\ B(0,0);\ C\left(-\frac{a}{2},1\right).$$

Măsura unghiului dintre (γ_1) *şi* (γ_2)

$$\cos\alpha_{12}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}\cdot\delta\vec{r}}{\left\|\mathrm{d}\vec{r}\right\|\left\|\delta\vec{r}\right\|}=\left.\frac{\left(1-v^2-\frac{v^4}{4}\right)}{\left(\frac{v^2}{2}+1\right)}\right|_{v=1}=-\frac{1}{6}$$

Măsura unghiului dintre (γ_1) *şi* (γ_3)

$$\cos\alpha_{13}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}\cdot\partial\vec{r}}{\left\|\mathrm{d}\vec{r}\right\|\left\|\partial\vec{r}\right\|}=\left.\frac{v\cos(v+1)+\frac{v^2}{2}\sin(v-1)}{\left(\frac{v^2}{2}+1\right)}\right|_{u=0;\,v=0}=0$$

Măsura unghiului dintre (γ_3) *şi* (γ_2)

$$\cos\alpha_{23}=\frac{\partial\vec{r}\cdot\delta\vec{r}}{\left\|\partial\vec{r}\right\|\left\|\delta\vec{r}\right\|}=-\left.\frac{v\cos(v+1)+\frac{v^2}{2}\sin(v-1)}{\left(\frac{v^2}{2}+1\right)}\right|_{v=1}=-\frac{2}{3}\cos 2$$

Observație

Măsura unghiului dintre (γ_2) *şi* (γ_1) *este*

$$\cos\alpha_{21} = -\cos\alpha_{12}.$$

Într-adevăr, din *figura 4.13* rezultă că unghiul dintre (γ_2) şi (γ_1) este unghiul măsurat între vectorii $\mathrm{d}\vec{r}$ şi $\delta\vec{r}$ ■

4.28. Fie suprafața

$$(S): \begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = u + v \end{cases}$$

şi curbele

$$(\gamma_1): u - e^v = 0;$$
$$(\gamma_2): u^2 + u + 1 - \frac{1}{e^v} = 0$$

situate pe suprafața (S).

Să se arate că cele două curbe sunt ortogonale.

Într-adevăr, ținând seama de exprsiile derivatelor parțiale de ordinul intâi ale coordonatelor vectorului de poziție ale unui punct pe suprafața dată

$$x'_u = \cos v; \quad y'_u = \sin v; \quad z'_u = 1,$$
$$x'_v = -u\sin v; \; y'_v = u\cos v; \; z'_v = 1$$

rezultă că

$$E = x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u = 2$$
$$F = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_u = 2$$
$$G = x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v = 1 + u^2$$

Pentru a aplica condiția de ortogonalitate vom evalua diferențialele coordonatelor curbilinii respectiv:

Pe curba (γ_1)

$$u = e^v; \, \mathrm{d}u = e^v \, \mathrm{d}v = u \, \mathrm{d}v.$$

Pe curba (γ_2)

$$u^2 + u + 1 = e^{-v}; \, (2u+1)\delta u = -e^v \delta v \Leftrightarrow \delta v = \frac{2u+1}{u^2+u+1}\delta u.$$

Cu aceste date suntem în măsură să aplicăm *condția de ortogonalitate* (4.62)

$$Edu\delta u + F\left(du\delta v + \delta udv\right) + G\delta udv = 2u\,\mathrm{d}u\delta u +$$

$$+\left[-\frac{u(2u+1)}{u^2+u+1}\delta udv + \delta udv\right] - \frac{\left(u^2+1\right)(2u+1)}{u^2+u+1}\delta udv =$$

$$= \frac{1}{u^2+u+1}\left[\frac{2u\left(u^2+u+1\right) - u\left(u^2+u+1\right)\left(u^2+u+1\right) - 2u\left(u^2+u+1\right)}{u^2+u+1}\right]\delta udv = 0$$

ceea ce înseamnă că cele două curbe sunt ortogonale ■

4.11. **Unghiul a două curbe coordonate**

Fie $(S) \subset \mathbb{R}^3$ o suprafață reprezentată prin ecuațiile ei parametrice (III)

$$\begin{aligned} &(\gamma_1) \equiv (\gamma_u) \quad v = t,\ \mathrm{d}v = 0 \\ &(\gamma_2) = (\gamma_v) \quad u = t,\ \mathrm{d}u = 0 \end{aligned} \tag{4.63}$$

astfel, unghiul dintre curbele (γ_1) şi (γ_2) este în virtutea relației (4.61)

$$\cos\alpha = \frac{F}{\sqrt{EG}} \tag{4.64}$$

Observație

Condiția de ortogonalitate a două curbe coordonate (γ_u) şi (γ_v) pe o suprafață este

$$F = 0. \tag{4.65}$$

Exemplu

4.29 Fie sfera parametrizată

$$\begin{cases} x = R\cos u\sin v & 0 \le u \le 2\pi, \\ y = R\sin u\sin v & -\dfrac{\pi}{2} \le v \le \dfrac{\pi}{2} \\ z = R\cos v; & \end{cases}$$

Să arătăm că rețeaua de curbe coordonate definiă prin (4.7) şi (4.8) este ortogonală.

Din *exemplul* **4.24** avem

$$E = x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2 = R^2 \sin^2 v;$$
$$F = x_u' x_v' + y_u' y_v' + z_u' z_u' = 0;$$
$$G = x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2 = R^2.$$

de unde deducem, că (4.65)este identic satisfăcută ■

4.12. **Curbura curbelor trasate pe o suprafață**

Forma a unei suprafețe se poate exprima şi prin trasarea unor curbe pe suprafață, cărora le determinăm curburile.

(i) Fie $(S) \subset \mathbb{R}^3$ o suprafață reprezentată de ecuațiile parametrice (III)

$$(S): x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v).$$

Fie (γ_u), (γ_v) curbele de coordonate duse printr-un punct $M \in (S)$ şi definite de ecuațiile parametrice (4.7) şi (4.8).

Fie (γ) o curbă oarecare trasată pe această suprafață prin acelasi punct P (*vezi figura* 4.14).

$$(\gamma): \begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$$

Ne propunem să determină curbura curbei $\frac{1}{R}$ a curbei într-un punct regulat pe (γ).

Notăm

$\vec{\upsilon}$ – versorul normalei la suprafață;

$\vec{\tau}$ – versorul tangentei la curba (γ);

$\vec{n}$ – versorul normalei principale la curba (γ);

$\frac{1}{R}$ – curbura curbei (γ) în punctul $P \in (\gamma)$.

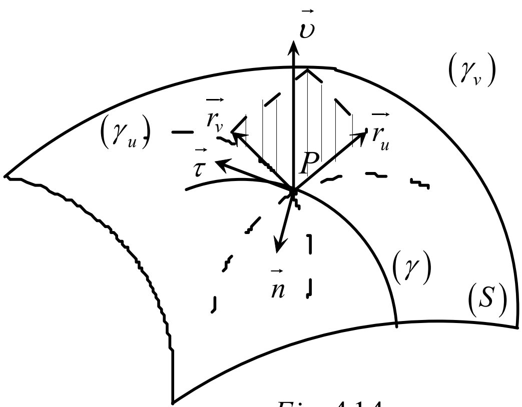


Fig. 4.14

Din teoria diferențială a curbelor strâmbe prezentată în *Capitolul* 2 au loc relațiile

$$\vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}; \quad \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{R}\vec{n}. \tag{4.66}$$

Evident $\vec{\tau} \perp \vec{\upsilon}$, deci

$$\vec{\tau} \cdot \vec{\upsilon} = 0 \;\Big|\; \frac{\mathrm{d}\cdot}{\mathrm{d}s} \;\Rightarrow\; \frac{-\mathrm{d}\vec{r} \cdot \mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}s^2} = 0, \tag{4.67}$$

Pe de altă parte

$$\vec{n} \cdot \vec{\upsilon} = \left\|\vec{n}\right\| \left\|\vec{\upsilon}\right\| \cos\alpha = \cos\alpha, \quad \alpha = \widehat{(\vec{n}, \vec{\upsilon})} \tag{4.68}$$

Înmulțind termenii extremi ai egalității (4.68) cu $\dfrac{1}{R}$ se obține în final

$$\frac{1}{R}\vec{n} \cdot \vec{\upsilon} = \frac{1}{R}\cos\alpha,$$

de unde ținând cont şi de prima formulă a lui Frenet $(4.66)_2$, rezultă că

$$\frac{1}{R}\cos\alpha = -\frac{\mathrm{d}\vec{r} \cdot \mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}s^2}. \tag{4.69}$$

4.13. **A doua formă pătratică fundamentală a unei suprafețe**

Relația (4.68) exprimă legătura dintre curbura curbei (γ) în punctul P ca funcție de unghiul α dintre $\vec{\upsilon}$ şi $\vec{n}$ din prima formă fundamentală a suprafeței (S) şi de prdusul $\mathrm{d}\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{\upsilon}$.

Notăm

$$\varphi=-\mathrm{d}\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{\upsilon} \tag{4.70}$$

Fie $P\in(\gamma)$, unde (γ) este o curbă pe suprafața (S) definită prin

$$(\gamma):\ \begin{cases} u=u(t) \\ v=v(t) \end{cases}$$

Vectorul de poziție al punctului P şi versorul normalei la suprafață, $\vec{\upsilon}$ corespunzător lui P depinde de t prin intermediul lui u şi v

$$\vec{r}=\vec{r}\big(u(t),v(t)\big),\ \vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}\big(u(t),v(t)\big), \tag{4.71}$$

iar diferențialele acestor vectori sunt respectiv

$$\mathrm{d}\vec{r}=\vec{r_u'}\,\mathrm{d}u+\vec{r_v'}\,\mathrm{d}v;\ \mathrm{d}\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon_u'}\,\mathrm{d}u+\vec{\upsilon_v'}\,\mathrm{d}v \tag{4.72}$$

Înlocuim (4.72) în (4.70)

$$\varphi=-\mathrm{d}\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{\upsilon}=-\left(\vec{r_u'}\,\mathrm{d}u+\vec{r_v'}\,\mathrm{d}v\right)\cdot\left(\vec{\upsilon_u'}\,\mathrm{d}u+\vec{\upsilon_v'}\,\mathrm{d}v\right)=$$

$$=-\vec{r_u'}\cdot\vec{\upsilon_u'}\,\mathrm{d}u^2-\left(\vec{r_u'}\cdot\vec{\upsilon_v'}+\vec{r_v'}\cdot\vec{\upsilon_u'}\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v-\vec{r_v'}\cdot\vec{\upsilon_v'}\,\mathrm{d}v^2.$$

şi apoi notăm

$$L=-\vec{r_u'}\cdot\vec{\upsilon_u'};\ \ 2M=-\left(\vec{r_u'}\cdot\vec{\upsilon_v'}+\vec{r_v}\cdot\vec{\upsilon_u'}\right);\ \ N=-\vec{r_v'}\cdot\vec{\upsilon_v'} \tag{4.73}$$

Obținem *a doua formă patratică fundamentală*

$$\varphi=L\,\mathrm{d}u^2+2M\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+N\,\mathrm{d}v^2 \tag{4.74}$$

Observații

1^0) *Relația* (4.74) *exprimă faptul că* φ *este o formă pătratică în diferențialele* $\mathrm{d}u$ *şi* $\mathrm{d}v$.

2^0) *Coeficienții* L , M, N *din forma pătratică diferențială* (4.73) *formează cel de-al doilea grup la lui Gauss*.

4.14. **Evaluarea coeficienților *L*, *M*, *N* ai celui de-al doilea grup al lui Gauss**

Se pleacă de la faptul observația că vectorii $\vec{r_u'}$ şi $\vec{r_v'}$ fiind situați în planul tangent în punctul *P* la suprafață sunt perpendiculari pe versorul normalei la suprafață, $\vec{\upsilon}$, adică putem scrie

$$\vec{r_u'}\cdot\vec{\upsilon}=0;\ \vec{r_v'}\cdot\vec{\upsilon}=0.$$

Derivând aceste relații în raport cu *u*, apoi cu *v*, obținem egalitățile

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{r_{uu}''}\cdot\vec{\upsilon}+\vec{r_u'}\cdot\overrightarrow{\upsilon_u'}=0;\ \overrightarrow{r_{uv}''}\cdot\vec{\upsilon}+\vec{r_u'}\cdot\overrightarrow{\upsilon_v'}=0;\\&\overrightarrow{r_{vu}''}\cdot\vec{\upsilon}+\vec{r_v'}\cdot\overrightarrow{\upsilon_u'}=0;\ \overrightarrow{r_{vv}''}\cdot\vec{\upsilon}+\vec{r_v'}\cdot\overrightarrow{\upsilon_v'}=0\end{aligned}\tag{4.75}$$

şi ținând sema că

$$\overrightarrow{r_{uv}''}=\overrightarrow{r_{vu}''},$$

deducem

$$L=-\vec{r_u'}\cdot\overrightarrow{\upsilon_u'}=\overrightarrow{r_{uu}''}\cdot\vec{\upsilon};\ 2M=-\left(\vec{r_u'}\cdot\overrightarrow{\upsilon_v'}+\vec{r_v}\cdot\overrightarrow{\upsilon_u'}\right)=2\overrightarrow{r_{uv}''}\cdot\vec{\upsilon};\ N=-\vec{r_v'}\cdot\overrightarrow{\upsilon_v'}=\overrightarrow{r_{vv}''}\cdot\vec{\upsilon}.\tag{4.76}$$

Mai departe, se înlocuieşte expresia versorului normalei la suprafață şi se ține seama definiția produsului mixt a trei vectori (*vezi Capitolul II*).

Corespunzător fiecarei reprezentări se găsesc următoarele expresii analitice pentru coeficienții celui de-al doilea grup al lui Gauss.

(i) Pentru o suprafață dată prin ecuațiile parametrice (III)

$$\vec{\upsilon}=\frac{\vec{r_u'}\times\vec{r_v'}}{\sqrt{EG-F^2}};\tag{4.77}$$

$$L=\frac{\left(\vec{r_u'}\times\vec{r_v'}\right)\cdot\overrightarrow{r_{uu}''}}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix}x_u' & y_u' & z_u'\\ x_v' & y_v' & z_v'\\ x_{uu}'' & y_{uu}'' & z_{uu}''\end{vmatrix};\tag{4.78}$$

$$M=\frac{\left(\vec{r_u'}\times\vec{r_v'}\right)\cdot\overrightarrow{r_{uv}''}}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix}x_u' & y_u' & z_u'\\ x_v' & y_v' & z_v'\\ x_{uv}'' & y_{uv}'' & z_{uv}''\end{vmatrix};\tag{4.79}$$

$$N=\frac{\left(\overrightarrow{r'_u}\times\overrightarrow{r'_v}\right)\cdot\overrightarrow{r''_{vv}}}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \\ x''_{vv} & y''_{vv} & z''_{vv} \end{vmatrix}; \tag{4.80}$$

(ii) Pentru (S) dată de ecuațiile explicite (I)

Notăm

$$(S):\begin{cases} x=u \\ y=v \\ z=f(u,v), \end{cases} \qquad (u,v)\in\mathbb{R}^2$$

Obținem

$$\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{1+p^2+q^2}$$

$$L=\frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}};\quad M=\frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}};\quad N=\frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}. \tag{4.81}$$

unde

$$p=z'_u,\ \ q=z'_v,\ \ r=z''_{uu},\ \ s=z''_{uu},\ \ t=z''_{vv} \tag{4.82}$$

A două formă fundamentală a suprafeței (S) se va rescrie sub forma

$$\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\left(r\,\mathrm{d}x^2+2s\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+t\,\mathrm{d}y^2\right) \tag{4.83}$$

Observație

Pentru ca o suprafață să fie un plan este necesar şi suficient ca a doua formă fundamentală să fie identic nulă.

Într-adevăr, ecuația parametrică a unui plan fiind de forma

$$\vec{r}=\vec{r_0}+u\overrightarrow{\ell_1}+v\overrightarrow{\ell_2} \tag{4.84}$$

unde s-a notat

$\vec{r_0}$ – este vectorul de poziție al unui punct fixat în plan,

$\overrightarrow{\ell_1}, \overrightarrow{\ell_2}$ – doi vectori directori ai planului ($\overrightarrow{\ell_1}$ şi $\overrightarrow{\ell_2}$ vectori constanți).

Atunci

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{r'_u}=\overrightarrow{\ell_1};\ \overrightarrow{r'_v}=\overrightarrow{\ell_2}, \\ &\overrightarrow{r'_{uu}}=\overrightarrow{r''_{uv}}=\overrightarrow{r''_{vv}}=0. \end{aligned} \tag{4.85}$$

Prin urmare

$$L=M=N=0. \tag{4.86}$$

Reciproc, presupunând că relațiile (4.86) sunt identic verificate, rezultă potrivit relațiilor (4.76)

$$\overrightarrow{r'_u} \cdot \overrightarrow{\upsilon'_u} = 0; \ \overrightarrow{r'_v} \cdot \overrightarrow{\upsilon'_u} = 0.$$

sau scăzând termen cu termen aceste relații

$$\overrightarrow{r'_u} \cdot \overrightarrow{\upsilon'_u} - \overrightarrow{r'_v} \cdot \overrightarrow{\upsilon'_u} = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{r'_u} - \overrightarrow{r'_v}\right) \cdot \overrightarrow{\upsilon'_u} = 0.$$

Ultima egalitate este verificată fie dacă

$$\overrightarrow{r'_u} = \overrightarrow{r'_v}, \tag{4.87}$$

fie dacă

$$\overrightarrow{\upsilon'_u} = 0. \tag{4.88}$$

Prima posibilitate este exclusă întrucât vectorii $\overrightarrow{r'_u}$ şi $\overrightarrow{r'_v}$ sunt necoliniari, aşa că din (4.88) deducem

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}(v). \tag{4.89}$$

Considerăm acum cealaltă relație din (4.76), din care rezultă

$$\overrightarrow{r'_u} \cdot \overrightarrow{\upsilon'_v} + \overrightarrow{r_v} \cdot \overrightarrow{\upsilon'_u} = 0 \tag{4.90}$$

Din (4.89) şi (4.90) rezultă că

$$\overrightarrow{r'_u} \cdot \overrightarrow{\upsilon'_v} = 0. \tag{4.91}$$

Presupunând că $\overrightarrow{r'_u} \neq 0$ se obține $\vec{\upsilon}$ este un vector constant, adică suprafața considerată este un plan ■

Exemple

4.29. Să se calculeze a doua formă fundamentală pe sfera parametrizată

$$\begin{cases} x = R\cos u \sin v & 0 \le u \le 2\pi, \\ y = R\sin u \sin v & -\dfrac{\pi}{2} \le v \le \dfrac{\pi}{2} \\ z = R\cos v & \end{cases}$$

Din *exemplul* **4.24** avem

$$E = x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2 = R^2 \sin^2 v; \ F = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_u = 0;$$

$$G = x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2 = R^2,$$

de unde urmează (*vezi exemplul* 4.26)

$$\sqrt{EG - F^2} = R^2 \sin v.$$

Pentru transparența calculului să scriem derivatele parțiale până la ordinul doi inclusiv respectiv

$$\overrightarrow{r'_u}: -R\sin u\sin v; \quad R\cos u\sin v; \quad 0,$$
$$\overrightarrow{r'_v}: \quad R\cos u\cos v; \quad R\sin u\cos v; -R\sin v,$$
$$\overrightarrow{r''_{uu}}: -R\cos u\sin v; \ -R\sin u\sin v; \quad 0,$$
$$\overrightarrow{r''_{uv}}: -R\sin u\cos v; \quad R\cos u\cos v; \quad 0,$$
$$\overrightarrow{r''_{vv}}: -R\cos u\sin v; -R\sin u\sin v; -R\cos v.$$

Aplicăm relațiile (4.78), (4.79), (4.80) pentru determinarea coeficienților $L, M, N.$ Astfel

$$L = \frac{1}{R^2\sin v}\begin{vmatrix} -R\sin u\sin v & R\cos u\sin v & 0 \\ R\cos u\cos v & R\sin u\cos v & -R\sin v \\ -R\cos u\sin v & -R\sin u\sin v & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= \frac{1}{R}\begin{vmatrix} -R\sin u\sin v & R\cos u\sin v \\ -R\cos u\sin v & -R\sin u\sin v \end{vmatrix} = -R\sin^2 v$$

$$M = \frac{1}{R^2\sin v}\begin{vmatrix} -R\sin u\sin v & R\cos u\sin v & 0 \\ R\cos u\cos v & R\sin u\cos v & -R\sin v \\ -R\sin u\cos v & R\cos u\cos v & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= \frac{1}{R}\begin{vmatrix} -R\sin u\sin v & R\cos u\sin v \\ -R\sin u\cos v & R\cos u\cos v \end{vmatrix} = 0$$

$$N = \frac{1}{R^2\sin v}\begin{vmatrix} -R\sin u\sin v & R\cos u\sin v & 0 \\ R\cos u\cos v & R\sin u\cos v & -R\sin v \\ -R\cos u\sin v & -R\sin u\sin v & -R\cos v \end{vmatrix} =$$
$$= -\frac{R^{\cancel{3}}\cancel{\sin v}}{\cancel{R^2}\cancel{\sin v}}\begin{vmatrix} -\sin u & \cos u & 0 \\ \cos u\cos v & \sin u\cos v & -\sin v \\ \cos u\sin v & -\sin u\sin v & -\cos v \end{vmatrix} =$$
$$= -R\left(\sin^2 u\cos^2 v - \cos^2 u\sin^2 v + \sin^2 u\sin^2 v + \cos^2 u\cos^2 v\right) =$$
$$= -R\left[\sin^2 u\left(\cos^2 v + \sin^2 v\right) + \cos^2 u\left(\cos^2 v + \sin^2 v\right)\right] = -R$$

Mai departe, ținem seama de relația (4.74) care exprimă a doua formă fundamentală pentru cazul unei suprafețe parametrizate

$$\varphi = L\,\mathrm{d}u^2 + 2M\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + N\,\mathrm{d}v^2 = -R\sin^2 v\,\mathrm{d}u^2 - R\,\mathrm{d}v^2 \quad \blacksquare$$

Observație

Pentru ca o suprafață să fie sferă, este necesar şi suficient ca cele două forme fundamentale să fie proporționale.

Într-adevăr, ecuația vectorială a sferei se mai poate scrie sub forma

$$\vec{r} = \vec{r_0} + R\vec{\upsilon}, \tag{4.92}$$

unde s-a notat

$\vec{r_0}$ – vectorul de poziție la centrului,

R – raza sferei,

$\vec{\upsilon}$ – versorul normalei la suprafață.

Derivăm egalitatea (4.92) în raport cu u şi v,

$$\overrightarrow{r'_u} = R\overrightarrow{\upsilon'_u}; \quad \overrightarrow{r'_v} = R\overrightarrow{\upsilon'_v}, \tag{4.93}$$

apoi înmulțim scalar cu $\overrightarrow{r'_u}$ respectiv $\overrightarrow{r'_v}$ în (4.93)

$$\left\|\overrightarrow{r'_u}\right\|^2 = R\,\overrightarrow{r'_u}\cdot\overrightarrow{\upsilon'_u}; \quad \overrightarrow{r'_u}\cdot\overrightarrow{r'_v} = \overrightarrow{r'_u}\cdot\overrightarrow{\upsilon'_v}; \quad \left\|\overrightarrow{r'_v}\right\|^2 = R\,\overrightarrow{r'_v}\overrightarrow{\upsilon'_v}, \tag{4.94}$$

Ținând seama de relațiile care definesc coeficienții celor două grupuri ale lui Gauss, (4.36) şi (4.76) se obțin egalitățile

$$E = -RL; \; F = -RM; \; G = -RN. \tag{4.95}$$

Relația (4.95) probează faptul că *factorul de proporționalitate este constant* în sensul că

$$\frac{E}{L} = \frac{F}{M} = \frac{G}{N} = -R = const. \; \blacksquare$$

4.30. Fie suprafața parametrizată

$$(S): \; x = u\cos v, \; y = u\sin v, \; z = av$$

Să se scrie a doua formă fundamentală.

Ca şi la exemplul anterior, vom scrie

$$\begin{array}{llll}
\overrightarrow{r'_u}: & \cos v; & \sin v; & 0, \\
\overrightarrow{r'_v}: & -u\sin v; & u\cos v; & a, \\
\overrightarrow{r''_{uu}}: & 0; & 0; & 0, \\
\overrightarrow{r''_{uv}}: & -\sin v; & \cos v; & 0, \\
\overrightarrow{r''_{vv}}: & -u\cos v; & -u\sin v; & 0.
\end{array}$$

de unde

$$\begin{aligned}
&E = x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2 = 1;\\
&F = x_u' x_v' + y_u' y_v' + z_u' z_u' =\\
&\quad = -u\sin v\cos v + u\sin v\cos v = 0;\\
&G = x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2 = u^2 + a^2,
\end{aligned}$$

iar de aici,

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{u^2 + a^2}.$$

Aplicăm relațiile (4.78), (4.79), (4.80) pentru a găsi coeficienții L, M, N.

$$L = \frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}}\begin{vmatrix} \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & a \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}}\begin{vmatrix} \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & a \\ -\sin v & \cos v & 0 \end{vmatrix} = \frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}}\begin{vmatrix} \cos v & \sin v \\ -\sin v & \cos v \end{vmatrix} = \frac{-a}{\sqrt{u^2 + a^2}}$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}}\begin{vmatrix} \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & a \\ -u\cos v & -u\sin v & 0 \end{vmatrix} = \frac{-a}{\sqrt{u^2 + a^2}}\begin{vmatrix} \cos v & \sin v \\ -u\cos v & -u\sin v \end{vmatrix} = 0.$$

În final relația (4.74) devine

$$\varphi = L\,\mathrm{d}u^2 + 2M\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + N\,\mathrm{d}v^2 = \frac{-2a}{\sqrt{u^2 + a^2}}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \quad \blacksquare$$

4.31. Să se determine a doua formă fundamentală a suprafeței

$$(S):\begin{cases} x = f(u)\cos v \\ y = f(u)\sin v \\ z = g(u) \end{cases}$$

unde funcțiile f şi g sunt de clasă C^1.

Calculăm mai întâi derivatele parțiale pînă la ordinul doi inclusiv ale funcțiilor componentelor vectorului de poziție corespunzătoare unui punct arbitrar pe suprafață.

$$\begin{aligned}
&\vec{r}_u':\ f'(u)\cos v;\quad f'(u)\sin v;\ g'(u),\\
&\vec{r}_v':\ -f(u)\sin v;\quad f(u)\cos v;\ 0,
\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{r''_{uu}} : f''(u)\cos v;\quad f''(u)\sin v;\; g''(u),$$
$$\overrightarrow{r''_{uv}} : -f(u)\sin v;\quad f(u)\cos v;\; 0,$$
$$\overrightarrow{r''_{vv}} : -f(u)\cos v;\; -f(u)\sin v;\, 0.$$

Cu acestea se obțin coeficienții primei forme fundamentale

$$E = x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2 = f'^2(u) + g'^2(u),$$
$$F = x_u' x_v' + y_u' y_v' + z_u' z_u' = -f(u) f'(u)\sin v\cos v +$$
$$+ f(u) f'(u)\sin v\cos v = 0$$
$$G = x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2 = f^2(u),$$

şi apoi

$$\sqrt{EG - F^2} = f(u)\sqrt{f'^2(u) + g'^2(u)}.$$

Pentru simplitatea scrierii vom scrie f, g în loc de $f(u), g(u)$, la fel şi pentru derivatele acestor funcții. În continuare, vom determina coeficienții celui de-al doilea grup al lui Gauss

$$L = \frac{1}{f\sqrt{f'^2 + g'^2}}\begin{vmatrix} f'\cos v & f'\sin v & g' \\ -f\sin v & f\cos v & 0 \\ f''\cos v & f''\sin v & g'' \end{vmatrix} = \frac{1}{f\sqrt{f'^2 + g'^2}}\left(f'g'' - g'f''\right);$$

$$M = \frac{1}{f\sqrt{f'^2 + g'^2}}\begin{vmatrix} f'\cos v & f'\sin v & g' \\ -f\sin v & f\cos v & 0 \\ -f\sin v & f\cos v & g'' \end{vmatrix} = 0$$

$$M = \frac{1}{f\sqrt{f'^2 + g'^2}}\begin{vmatrix} f'\cos v & f'\sin v & g' \\ -f\sin v & f\cos v & 0 \\ -f\cos v & f\sin v & 0 \end{vmatrix} = -\frac{f^2 g'}{f\sqrt{f'^2 + g'^2}}.$$

În final, se obține

$$\varphi = L\,\mathrm{d}u^2 + 2M\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + N\,\mathrm{d}v^2 = \varphi = L\,\mathrm{d}u^2 + 2M\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + N\,\mathrm{d}v^2$$
$$= \frac{1}{f\sqrt{f'^2 + g'^2}}\left(f'g'' - g'f''\right)\mathrm{d}u^2 - \frac{f^2 g'}{f\sqrt{f'^2 + g'^2}}\mathrm{d}v^2 \;\blacksquare$$

4.15. **Curbura normală a unei curbe pe o suprafaţă**

Vectorul $\vec{n}$ *se numeşte* ***versorul normalei principale*** *în P la curba* (γ) *şi este situat în planul normal al curbei* (γ).

Notăm

$\frac{1}{R}$ – curbura curbei (γ),

Vectorul $\frac{1}{R}\vec{n}$ *se numeşte* ***vector de curbură*** *al curbei considerate.*

Numim ***curbură normală*** *a curbei* $(\gamma)\subset(S)$ *în punctul P, proiecţia vectorului de curbură corespunzător pe normala la suprafaţă în P.* Notăm

$\frac{1}{\rho_n}$ – curbura normală definită mai sus.

Atunci din definţia dată rezultă că

$$\frac{1}{\rho_n} =: \frac{1}{R}\cos\alpha, \quad \alpha = \left(\widehat{\vec{n},\vec{v}}\right) \tag{4.96}$$

sau

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{L\,\mathrm{d}u^2 + 2M\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + N\,\mathrm{d}v^2}{E\,\mathrm{d}u^2 + 2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G\,\mathrm{d}v^2} = \frac{Lm^2 + 2Mm + N}{En^2 + 2Fm + G} \tag{4.97}$$

unde s-a notat

$$m = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} \tag{4.98}$$

Observaţii

1^0) *Curbura normală* $\frac{1}{\rho_n}$ *nu depinde de punctul P, ci de direcţia tangentei în P la curba* (γ), *întrucât vectorul*

$$\mathrm{d}\vec{r} = \vec{r}_u'\,\mathrm{d}u + \vec{r}_v'\,\mathrm{d}v, \tag{4.99}$$

se află pe tangenta în acest punct la curbă.

2^0) *Toate curbele de pe suprafaţa* (S) *care trec printr-un punct* $P\in(S)$ *şi admit în P aceeaşi tangentă, au aceeaşi curbură normală în punctul considerat.*

Interpretare geometrică

Dintre toate curbele (γ) care trec prin punctul P şi admit aceeaşi tangentă, determinată de $\vec{\tau}$ şi de versorul normalei $\vec{\upsilon}$ dus prin P, să considerăm pe aceea care se obţine secţionând suprafaţa cu un plan (P_n) (*vezi figura* 4.8).

Dacă notăm

$\frac{1}{R_n}$ – *curbura secţiunii normale*,

atunci din (8) rezultă

$$\frac{1}{\rho_n} = \pm\frac{1}{R_n} \tag{4.100}$$

Prin urmare, *curbura normală* $\frac{1}{\rho_n}$ *într-un punct* $P \in (S)$ *corespunzătoare familiei de curbe care trec prin acest punct şi admit aceeaşi tangentă este egală cu curbura secţiunii normale* $\frac{1}{R_n}$ *asociate acestei familii*; *semnul plus sau minus se alege după cum versorul normalei principale este de acelaşi sens sau de sens contrar versorului normalei la suprafaţă în punctul P*.

În acest sens

(i) dacă $\frac{1}{\rho_n} > 0,$ *concavitatea secţiunii normale* este orientată înspre vectorul $\vec{\upsilon}$;

(ii) dacă $\frac{1}{\rho_n} < 0,$ *concavitatea secţiunii normale* este orientată în sens opus lui $\vec{\upsilon}$.

De reţinut!

Studiul curburii unei curbe oarecare pe o suprafaţă se reduce la studiul curburii normale a acelei curbe.

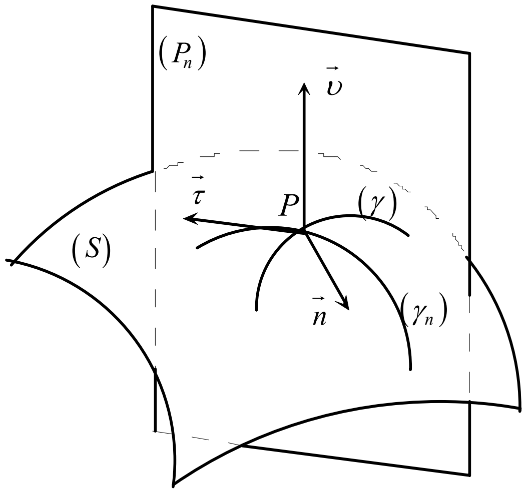


Fig. 4.15

4.16. **Teoremele lui Meusnier**

Teorema 1 *(Meusnier)*

Două curbe (γ_1) *şi* (γ_2) *situate pe o suprafaţă* (S) *care admit în punctul* $P \in (S)$ *aceeaşi tangentă şi acelaşi plan osculator au acelaşi centru de curbură.*

Notând

$\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}$ – *curburile* celor două curbe, teorema arată că

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2} \tag{4.101}$$

Într-adevăr, curbele (γ_1) şi (γ_2) având în P aceeaşi tangentă, atunci conform celor pecizate anterior ele admit aceeaşi curbură normală.

Notăm

$\vec{\upsilon}$ – versorul normalei la planul tangent,

$\vec{n_1}$ – versorul normalei principale la curba (γ_1) în punctul P,

$\overrightarrow{n_2}$ – versorul normalei principale la curba (γ_2) în punctul P,

$\alpha_1 = \mathrm{m}\left(\widehat{\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{\upsilon}}\right)$, $\alpha_2 = \mathrm{m}\left(\widehat{\overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{\upsilon}}\right)$.

Din (4.96) rezultă că

$$\frac{1}{R_1}\cos\alpha_1 = \frac{1}{R_2}\cos\alpha_2 \tag{4.102}$$

Deoarece $\frac{1}{R_1}$ şi $\frac{1}{R_2}$ sunt numere pozitive, din egalitatea (4.102) rezultă că unghiurile α_1 şi α_2 sunt fie *ambele ascuțite*, deci

$$\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{n_2},$$

fie *ambele obtuze* şi scriem

$$\overrightarrow{n_1} = -\overrightarrow{n_2}.$$

A doua posibilitate este exclusă deoarece, în acest caz am avea

$$\alpha_1 = \pi - \alpha_2,$$

ceea ce ar contrazice ipoteza ■

Teorema 2 (*Meusnier*)

Centrul de curbură într-un punct P al unei curbe oarecare (γ) *pe o suprafață* (S) *este proiecția ortogonală pe planul osculator al acestei curbe a centrului de curbură în acelaşi punct P al secțiunii normale corespunzătoare tangentei în P la curba* (γ).

Într-adevăr, dacă notăm (*vezi figura 4.16*)

(γ_n) – secțiunea normală tangentă în P,

$(\mathcal{P}_O)$ – planul osculator în P la (γ),

$(\mathcal{P}_n)$ – planul osculator în P la (γ_n),

$\frac{1}{R}$ – *curbura curbei* (γ),

$\frac{1}{R_n}$ – *curbura secțiunii normale* (γ_n),

C – *centrul de curbură al curbei* (γ) *în punctul* P,

C_n – *centrul de curbură al secțiunii normale în punctul* P.

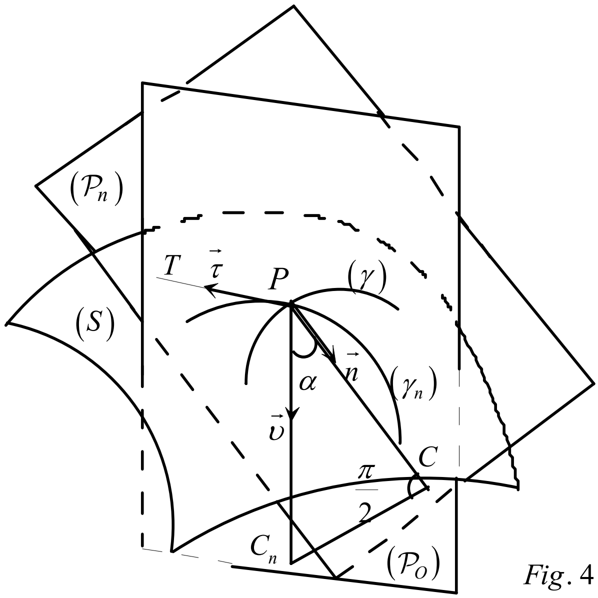


Fig. 4.16

rezultă conform relațiilor (4.96) şi (4.100)

$$\frac{1}{R}\cos\alpha = \frac{1}{R_n},$$

unde α este un unghi ascuțit.

De aici deducem că

$$R = R_n \cos\alpha, \tag{4.103}$$

Mai mult (*vezi figura* 4.16)

$$R_n = PC_n, \quad R = PC$$

Aşadar

$$PC = PC_n \cos\alpha$$

ceea ce arată că triunghiul $[PCC_n]$ este dreptunghic.

Pe de altă parte dreapta (CC_n) aparține planului determinat de $\vec{\upsilon}$ şi $\vec{n},$ deci planului normal comun în P la (γ) şi (γ_n). Această dreaptă este deci perpendiculară pe tangenta (MT) şi ca atare pe planul osculator $(\mathcal{P}_O)$. Cum $C \in (\mathcal{P}_O)$, teorema este astfel demonstrată ■

4.17. **Curbura geodezică a unei curbe pe o suprafață**

Considerăm dreapta de intersecție dintre planul normal în *P* la curba (γ) trasată pe o suprafață (S) şi planul tangent (S) în punctul *P* la suprafața dată.

Această dreaptă este evident o normală a curbei (γ) şi o vom numi ***normală tangențială***.

Proiecția vectorului de curbură $\frac{1}{R}\vec{n}$ *pe normala tangențială* (*deci proiecția ortogonală a acestui vector pe planul tangent în P la suprafață*) *se numeşte* ***curbură geodezică*** *sau* ***tangențială*** *a curbei* (γ) *în punctul P*.

Orientăm normala tangențială prin versorul

$$\vec{\mu}=\vec{\upsilon}\times\vec{\tau}$$

Notăm

$\vec{\mu}$ – versorul normalei tangențiale,

$\frac{1}{\rho_g}$ – curbura geodezică a curbei (γ) în punctul *P*.

Atunci (*vezi figura* 4.17)

$$\frac{1}{\rho_g}=\frac{1}{R}\vec{n}\cdot\vec{\mu}=\frac{1}{R}\sin\alpha \qquad (4.104)$$

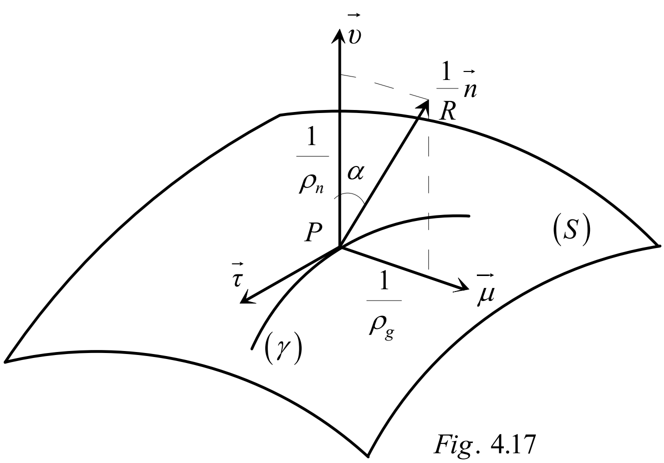


Fig. 4.17

Interpretare geometrică

Curbura geodezică într-un punct P la o curbă (γ) *situată pe o suprafață* (S) (*vezi figura* 4.18) *este egală cu curbura proiecției ortogonale* (γ') *a acestei curbe pe planul tangent în P la suprafața* (S).

$$\frac{1}{R_g}=\frac{1}{R} \tag{4.105}$$

Într-adevăr, fie (γ) o curbă oarecare pe o suprafață (S), iar (γ') proiecția ortogonală a acestei curbe pe planul tangent în *P* la suprafața (S).

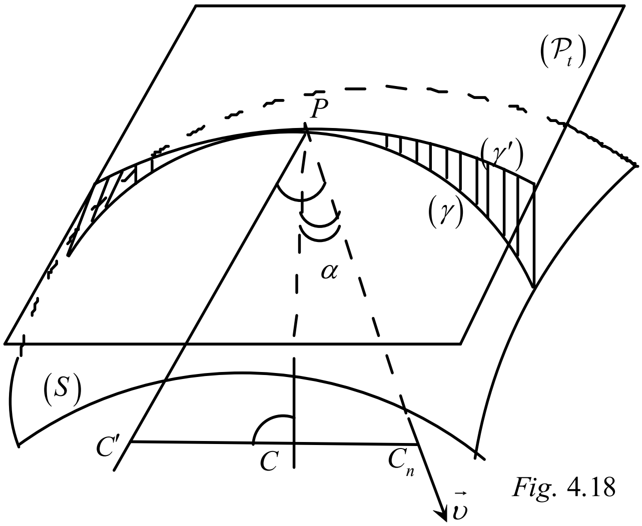


Fig. 4.18

Curba (γ') conținută în planul tangent este intersecția între acest plan şi cilindrul proiectant al curbei (γ) pe planul tangent în *P* la suprafața (S).

Rezultă că (γ') este secțiunea normală a cilindrului proiectant (S'), tangentă în *P*. Aplicând *teorema* 1 a lui Meusnier suprafeței (S'), centrul de curbură *C* al curbei (γ) corespunzător punctului *P* este proiecția centrului de curbură C' al curbei (γ') pe planul osculator al curbei (γ) în punctul *P*.

Prin urmare

$$PC=PC'\cos\widehat{C'PC}.$$

Însă, din cele arătate mai sus rezultă că

$$\widehat{C'PC} = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

unde α este unghiul ascuțit dintre normala în P la suprafața (S) şi normala principală în P la curba (γ).

Mai departe, rezultă că

$$PC = PC' \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = PC' \sin\alpha.$$

Dar

$$PC = R;\ PC' = R',$$

unde R, respectiv, R' sunt razele de curbură în P ale curbelor (γ), respectiv (γ').

Aşadar

$$R = R' \sin\alpha$$

sau

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R'} \sin\alpha.$$

Comparând cu relația (4.104) se ajunge la egalitatea

$$\frac{1}{R_g} = \frac{1}{R'}$$

şi astfel teorema este demonstrată ■

4.18. **Curburile principale ale unei suprafețe**

Fie (S) o suprafață definită parametric de ecuațiile (III) şi $M \in (S)$.

Curbura normală $\frac{1}{\rho_n}$ definită de relația (4.97) depinde de punctul P pe suprafață şi de raportul

$$m = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} \tag{4.106}$$

care determină o anumită direcție în planul tangent în P la suprafață.

Rezultă că într-un punct dat pe o suprafață *curbura normală este o funcție continuă și derivabilă ca funcție de variabila reală m*.

Pentru simplitatea scrierii vom nota

$$\frac{1}{\rho_n}(m) \overset{Not.}{=} k(m) \tag{4.107}$$

Atunci din (4.97) rezultă

$$k(m) = \frac{Ln^2 + 2Mm + N}{En^2 + 2Fm + G} \tag{4.108}$$

Se numesc ***curburi principale*** *într-un punct* $P \in (S)$ *valorile extreme ale curburii normale în acest punct.*

Cu alte cuvinte curburile normale sunt extremele funcției $k(m)$.

Să determinăm în continuare aceste extreme. Derivând în (4.108) se obține

$$k'(m) = \frac{2\left[\left(En^2 + 2Fm + G\right)\left(Lm + M\right) - \left(Lm^2 + 2Mm + N\right)\left(Em + F\right)\right]}{\left(En^2 + 2Fm + G\right)^2}. \tag{4.109}$$

Punctele critice ale funcției $k(m)$ sunt date de soluțiile ecuației

$$\left(En^2 + 2Fm + G\right)\left(Lm + M\right) - \left(Lm^2 + 2Mm + N\right)\left(Em + F\right) = 0,$$

din care rezultă

$$\frac{Ln^2 + 2Mm + N}{En^2 + 2Fm + G} = \frac{Lm + M}{Em + F}. \tag{4.110}$$

Din (4.108) și (4.110) se obține o altă formă a lui $k(m)$

$$k(m) = \frac{Lm + M}{Em + F} \tag{4.111}$$

Aplicând o proprietate a proporțiilor derivate în (4.110) rezultă

$$\frac{Ln^2 + 2Mm + N}{En^2 + 2Fm + G} = \frac{Lm^2 + Mm}{Em^2 + Fm} = \frac{Mm + N}{Fm + G} \tag{4.112}$$

Prin urmare

$$k(m) = \frac{Mm + N}{Fm + G} \tag{4.113}$$

Astfel se obține sistemul format din egalitățile (4.111), (4.113)

$$\begin{cases} k(m) = \dfrac{Lm + M}{Em + F} \\ k(m) = \dfrac{Mm + N}{Fm + G} \end{cases} \tag{4.114}$$

în care $m-$ reprezintă valorile variabilei pentru care funcția (4.108) admite extreme, iar k – extremele acestei funcții, respectiv curburile principale în punctul P.

Înlocuind valoarea lui m din (4.106) sistemul (4.114) devine

$$\begin{cases} k\left(E\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} + F\right) = L\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} + M \\ k\left(F\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} + G\right) = M\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} + N \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} (Ek - L)\mathrm{d}u + (Fk - M)\mathrm{d}v = 0 \\ (Fk - M)\mathrm{d}u + (Gk - N)\mathrm{d}v = 0 \end{cases} \tag{4.115}$$

Sistemul (4.115) este liniar şi omogen în necunoscutele $\mathrm{d}u$ şi $\mathrm{d}v$ având soluții nebanale deoarece prin P trec şi alte curbe în afara curbelor de coordonate. Drept urmare

$$\begin{vmatrix} Ek - L & Fk - M \\ Fk - M & Gk - N \end{vmatrix} = 0. \tag{4.116}$$

Ecuația (4.116) ne dă *curburile principale în punctul P ale suprafeței* (S) şi se mai scrie sub forma

$$(EG - F)k^2 - (EN - 2FM + GL)k + \left(LN - M^2\right) = 0. \tag{4.117}$$

Rădăcinile ecuației (4.117), notate k_1 şi k_2, sunt curburile principale ale suprafeței (S) corespunzătoare punctului P.

Observație

Curburile principale ale unei suprafețe sunt determinate de coeficienții celor două forme fundamentale.

Numerele

$$R_1 = \frac{1}{k_1};\ R_2 = \frac{1}{k_2} \tag{4.118}$$

*se numesc **raze pricipale de curbură** ale suprafeței* (S) *în punctul P.*

Exemple

4.33. Să se calculeze curburile principale în punctul curent al elicoidului drept cu plan director

$$(S): x = u\cos v;\ y = u\sin v;\ z = av.$$

În *exemplul* **4.30** s-au evaluat derivatele parțiale până la ordinul doi inclusiv ale lui $x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)$ şi s-au determinat coeficienții E,F,G şi L,M,N corespunzători primei, respectiv celei de a doua forme fundamentale. Astfel

$$E = 0; \qquad F = 0; \qquad G = u^2 + a^2,$$

$$L = 0;\ M = \frac{-a}{\sqrt{u^2 + a^2}};\ N = 0.$$

Ecuația (4.117)

$$\left(u^2 + a^2\right)k^2 - \frac{a^2}{u^2 + a^2} = 0.$$

ne dă curburile principale ale suprafeței (S) în punctul curent

$$k_1 = \frac{a}{u^2 + a^2};\ k_1 = \frac{-a}{u^2 + a^2}.$$

Razele de curbură sunt în acest caz

$$R_1 = \frac{u^2 + a^2}{a};\ R_2 = -\frac{u^2 + a^2}{a} \quad \blacksquare$$

4.19. **Direcțiile principale ale unei suprafețe**

Fie o suprafață (S) parametrizată şi P punct pe (S).

Numim ***direcții principale*** *într-un punct P ale unei suprafețe* (S) *valorile argumentului m pentru care funcția*

$$m = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} \tag{4.119}$$

admite extreme.

Din (4.114) se obține egalitatea

$$\frac{Lm + M}{Em + F} = \frac{Mm + N}{Fm + G}$$

sau

$$\left(EM-FL\right)m^2+\left(EN-GL\right)m+\left(FN-GM\right)=0 \tag{4.120}$$

Ecuația (4.120) ne dă direcțiile principale ale suprafeței, m_1 şi m_2.

Este mai practic să reținem (4.120) sub formă de determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & -m & m^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix}=0 \tag{4.121}$$

Dacă coeficienții ecuației (4.120) se anulează

$$EM-FL=0;\ EN-GL=0;\ FN-GM=0 \tag{4.122}$$

egalitatea este identic verificată.

În acest caz, spunem că *punctul P este un* ***punct ombilical*** *al suprafeței* (S).

Să observăm că egalitatea (4.122) se mai poate scrie şi sub forma

$$\frac{L}{E}=\frac{M}{F}=\frac{N}{G},$$

ceea ce arată că *într-un punct ombilical curbura normală este constantă*.

Observație

Toate punctele unei sfere sunt puncte ombilicale.

În cele ce urmează *vom considera doar puncte regulate pe suprafață care nu sunt ombilicale.*

Iată câteva dintre *proprietățile direcțiilor principale.*

1^0) *Direcțiile principale într-un punct regulat al unei suprafețe* (S) *sunt reale şi distincte*.

Într-adevăr, să ne situăm în cazul unei suprafețe în care rețeaua de curbe coordonate este ortogonală. În acest caz este satisfăcută condiția (4.65), iar ecuația (4.120) se scrie sub forma

$$EMm^2+\left(EN-GL\right)m-GM=0,$$

unde discriminantul ei

$$\Delta=\left(EN-GL\right)^2+4EGM^2=0$$

este pozitiv, ceea ce înseamnă că ecuația admite două rădăcini reale şi distincte.

Dacă rețeaua de curbe coordonate nu este una ortogonală, atunci se efectuează schimbarea de coordonate

$$(u,v)\to(U,V)\therefore\begin{cases}u=f(U,V)\\ v=g(U,V)\end{cases}$$

a.î. noua rețea de curbe să fie ortogonală şi astfel demonstrația de mai sus rămâne valabilă ■

2^0) *Direcțiile principale într-un punct regulat al unei suprafețe* (S) *sunt ortogonale*.

Într-adevăr, dacă în egalitatea care stabileşte condiția de ortogonalitate a două curbe oarecare (γ_1) şi (γ_2) pe o suprafață (4.62)

$$Edu\delta u+F(du\delta v+dv\delta u)+Gdv\delta u=0 \tag{4.62}$$

se împarte prin $\mathrm{d}v\delta v$ obținem

$$E\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\frac{\delta u}{\delta v}+F\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}+\frac{\delta u}{\delta v}\right)+G=0. \tag{4.123}$$

Notând

$$m_1=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v};\ m_2=\frac{\delta u}{\delta v}, \tag{4.124}$$

ecuația devine

$$Em_1m_2+F(m_1+m_2)+G=0, \tag{4.125}$$

unde m_1 şi m_2 sunt două direcții din planul tangent în P la suprafață în punctul de intersecție al curbelor (γ_1) şi (γ_2), respectiv direcțiile tangentelor la aceste curbe.

Revenind la ecuația (4.120), vom arăta că cele două rădăcini ale ei care reprezintă, după cum ştim, cele două direcții principale în P, reale şi distincte conform *proprietății* 1^0), verifică ecuația (4.125).

Într-adevăr, din (4.120) deducem

$$m_1+m_2=-\frac{EN-GL}{EM-FL};\ m_1\cdot m_2=\frac{FN-GM}{EM-FL} \tag{4.126}$$

iar dacă se ține seama de (4.126) în (4.125), egalitatea

$$E\frac{FN-GM}{EM-FL}-F\frac{EN-GL}{EM-FL}+G=0$$

este identic verificată ■

Tangentele (PT_1) *şi* (PT_2) *din planul tangent în P la suprafaţa* (S), *corespunzătoare direcţiilor principale* m_1 *şi* m_2 *se numesc* ***tangente principale***.

Secţiunile normale ale suprafeţei (S) *duse prin tangentele principale se numesc* ***secţiuni principale***.

Curburile acestor secţiuni, în punctul P, sunt ***curburi principale*** *corespunzătoare acestui punct luate în valoare absolută.*

Exemplu

4.34. Fie suprafaţa

$$(S): x = u\cos v;\ y = u\sin v;\ z = av.$$

Să se determine tangentele principale şi să se calculeze curburile principale într-un punct arbitrar al suprafeţei.

Aşa cum am văzut în exemplul **4.30**

$$E = 1;\ \ F = 0;\qquad G = u^2 + a^2,$$

$$L = 0;\ M = \frac{-a}{\sqrt{u^2 + a^2}};\ N = 0.$$

astfel că ecuaţia care determină tangentele principale (4.121) devine

$$\begin{vmatrix} 1 & -m & m^2 \\ 1 & 0 & u^2 + a^2 \\ 0 & \dfrac{-a}{\sqrt{u^2 + a^2}} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

de unde deducem ecuaţia diferenţială

$$\mathrm{d}u^2 - \left(u^2 + a^2\right)\mathrm{d}v^2 = 0.$$

Se obţin direcţiile principale

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \pm\frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}}.$$

De aici rezultă şi tangentele principale

$$v - \ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right) = C_1;\ v + \ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right) = C_2 \quad ■$$

4.20. **Curbura totală şi curbura medie a unei suprafeţe**

Numim ***curbură totală*** *într-un punct P al unei suprafeţe produsul curburilor principale corespunzătoare acestui punct.*

Numim ***curbură medie*** *într-un punct P al unei suprafeţe semisuma curburilor principale.*

Notăm

K – curbura totală a suprafeţei,

H – curbura medie,

k_1, k_2 – curburile principale corespunzătoare punctului *P*.

Atunci

$$K = k_1 k_2; \;\; H = \frac{1}{2}\left(k_1 + k_2\right). \tag{4.127}$$

Pe de altă parte din relaţia (4.117) mai obţinem

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}; \;\; H = \frac{EN - 2FM + GL}{2\left(EG - F^2\right)} \tag{4.128}$$

O suprafaţă pentru care curbura totală este aceeaşi în toate punctele ei se numeşte ***suprafaţă de curbură totală constantă***.

O suprafaţă pentru care curburamedie este nulă în toate punctele ei se numeşte ***suprafaţă minimă***.

Observaţie

Sfera este o suprafaţă de curbură totală constantă.

Într-adevăr, din cele arătate anterior, pentru sfera de rază *R* avem

$$\begin{aligned} &E = R^2 \sin^2 v; \;\; F = 0; \quad G = R, \\ &L = -R \sin^2 v; \;\; M = 0; \;\; N = -R. \end{aligned} \tag{4.129}$$

Înlocuind (4.129) în (4.128) se obţine

$$K = \frac{1}{R^2} \quad \blacksquare$$

Să mai observăm că curbura totală (4.128) *este dată de raportul dintre discriminantul celei de a doua forme fundamentale şi discriminantul primei forme fundamentale.*

Exemple

4.35. Să se determine curbura totală şi curbura medie într-un punct oarecare al *elicoidului*

$$(S): x = u\cos v;\ y = u\sin v;\ z = av.$$

Am văzut în *exemplul* **4.33** că

$$E = 1;\ \ F = 0;\qquad G = u^2 + a^2,$$

$$L = 0;\ M = \frac{-a}{\sqrt{u^2 + a^2}};\ N = 0.$$

De aici cu relațiile (4.128), rezultă

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{\frac{-a}{u^2 + a^2}}{u^2 + a^2} = -\frac{a}{\left(u^2 + a^2\right)^2};$$

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{2\left(EG - F^2\right)} = 0.$$

Din definiția de mai sus rezultă că *elicoidul este o suprafață minimă.*

4.21. **Clasificarea punctelor unei suprafețe**

Fie P un punct regulat al unei suprafețe (S).

*Dacă în P curbura totală este pozitivă, atunci P se numeşte **punct eliptic** al suprafeței respective*.

Întrucât

$$EG - F^2 > 0$$

în orice punct regulat al suprafeței, din (4.128) deducem că într-un *punct eliptic*

$$LN - M^2 > 0$$

şi reciproc.

O suprafață ale cărei puncte sunt eliptice se numeşte suprafață de tip eliptic.

*Un punct P se numeşte **punct hiperbolic** dacă curbura este negativă în acest punct.*

Din (4.128) rezultă că într-un punct hiperbolic

$$LN - M^2 < 0$$

şi reciproc.

Într-un astfel de punct, curburile sunt de semn contrare, deci secțiunile principale ale suprafeței au în P concavități diferite de o parte şi alta a planului tangent.

Numim suprafață de tip hiperbolic o suprafață (S) *ale cărei puncte sunt hiperbolice*.

Un punct P se numeşte ***punct parabolic*** *dacă în toate punctele ei curbura totală este nulă.*

Într-un punct parabolic

$$LN - M^2 = 0$$

şi reciproc.

O suprafață ale cărei puncte sunt parabolice se numeşte suprafață de tip parabolic.

Suprafațele conice şi cilindrice sunt suprafețe de tip parabolic.

4.22. **Linii de curbură pe o suprafață**

Se numesc ***linii de curbură*** *ale unei suprafețe* (S), *curbele situate pe această suprafață care au proprietatea că tangentele în oricare din punctele lor coincide cu una din tangentele principale corespunzătoare punctului respectiv*.

Ținând seama de relația (4.121) şi de (4.119) rezultă că ecuația

$$\begin{vmatrix} 1 & -\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} & \left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\right)^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0 \tag{4.130}$$

reprezintă *ecuația diferențială a liniilor de curbură*, care poate fi pusă şi sub forma echivalentă (4.120)

$$\left(EM-FL\right)\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\right)^2+\left(EN-GL\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}+\left(FN-GM\right)=0. \tag{4.131}$$

Rezolvând în raport cu $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}$ obținem ecuațiile diferențiale

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}=\varphi_1\left(u,v\right);\ \ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}=\varphi_2\left(u,v\right), \tag{4.132}$$

care admit soluțiile

$$f_1\left(u,v;C_1\right)=0;\ f_2\left(u,v;C_2\right)=0. \tag{4.133}$$

Fiecare dintre aceste soluții este o familie de curbe uniparametrice. Relațiile (4.133) definesc famiile de lini de curbură ale suprafeței (S).

Prin urmare, *mulțimea liniilor de curbură ale unei suprafețe* (S) *este fiormată din două familii de curbe. Prin fiecare punct al suprafeței, care nu este punct ombilical, trec două linii de curbură câte una din fiecare familie şi care în punctul P admit tangente distincte şi ortogonale*.

Altfel zis, *liniile de curbură formează o rețe de curbe ortogonale pe suprafața respectivă*.

Observație

În cazul unui plan, ecuația (4.131) este nedeterminată deoarece

$$L=M=N=0.$$

La fel şi în cazul suprafeței ale cărei puncte sunt puncte ombilicale, adică pentru care

$$\frac{L}{E}=\frac{M}{F}=\frac{N}{G}$$

Teoremă

O condiție necesară şi suficientă ca liniile coordonate ale unei suprafețe să fie linii de curbură este să aibă loc egalitatea

$$F=M=0. \tag{4.134}$$

Într-adevăr, să presupunem că liniile coordonate (γ_u) şi (γ_v) sunt linii de curbură ale suprafeței (S). În acest caz, aceste linii sunt ortogonale, avem

$$F=0,$$

iar ecuația diferențială (4.131) devine

$$\left(EM-FL\right)\mathrm{d}u^2+\left(EN-GL\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+\left(FN-GM\right)\mathrm{d}v^2=0. \qquad (4.135)$$

Această ecuație diferențială trebuie să fie verificată de curbele (γ_u) şi (γ_v). Astfel

$$(\gamma_u):\ v=const.;\quad EM\,\mathrm{d}u^2=0,$$
$$(\gamma_v):\ u=const.;\quad GM\,\mathrm{d}v^2=0.$$

Însă E şi G sunt pozitivi, aşa încât din egalități deducem

$$M=0$$

deci condiția (4.134) este identic satisfăcută.

Exemplu

4.36. Să se afle liniile de curbură ale suprafeței definită cartezian prin

$$(S):\ z=\ln(\cos x\,\cos y).$$

Să observăm că se poate scrie suprafața dată sub formă parametrică

$$(S): x=u,\ y=v;\ z=\ln\cos u+\ln\cos v.$$

Întrucât derivatele de ordinul întâi şi al doilea ale funcțiilor x, z, y sunt

$$\overrightarrow{r'_u}:\ 1;\ 0;\ \frac{1}{u};\quad \overrightarrow{r'_v}:\ 0;\ 1;\ \frac{1}{v},$$
$$\overrightarrow{r''_{uu}}:\ 0;\ 0;\ -\frac{1}{u^2};\quad \overrightarrow{r''_{uv}}:\ 0;\ 0;\ 0;$$
$$\overrightarrow{r''_{vv}}:\ 0;\ 0;\ 0-\frac{1}{v^2}.$$

rezultă că

$$E=1+\mathrm{tg}^2\,u;\ F=\mathrm{tg}\,u\,\mathrm{tg}\,v;\ G=1+\mathrm{tg}^2\,v,$$
$$L=-\frac{1}{\cos^2 u};\quad M=0;\quad M=-\frac{1}{\cos^2 v}.$$

Înlocuind aceste relații în ecuația (4.135), se obțin ecuațiile diferențiale ale lininior de curbură ale suprafeței date

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\right)^2=\frac{\cos^2 u}{\cos^2 v};$$

echivalente cu

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}=\frac{\cos u}{\cos v};\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}=-\frac{\cos u}{\cos v}.$$

Integrând aceste ecuații, obținem cele două familii de linii de curbură

$$C_1 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{v}{2}\right)$$

$$C_1 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{v}{2}\right) \quad \blacksquare$$

4.23. **Direcții şi tangente asimptotice**

Se numesc ***direcții asimptotice*** *într-un punct* $P \in (S)$ *direcțiile* (4.119)

$$m = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}$$

din planul tangent în P la suprafață pentru care curbura normală (4.97)

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{Ln^2 + 2Mm + N}{En^2 + 2Fm + G}$$

este nulă, *deci pentru care avem*

$$Lm^2 + 2Mm + N = 0. \tag{4.136}$$

Din definiția dată rezultă că *printr-un punct P al unei suprafețe trec două direcții asimptotice* date de ecuația (4.136) şi acestea pot fi reale şi distincte, confundate sau imaginare, după cum discriminantul acestei ecuații

$$\Delta' = M^2 - LN \tag{4.137}$$

este pozitiv, nul sau negativ. Observăm că Δ' este de semn contrar cu semnul curburii totale, K fiind definit prin relația (4.128), iar $EG - F^2 > 0.$

Distingem următoarele cazuri

1^0) Dacă punctul *P* este *hiperbolic* $(K < 0)$, atunci prin acest punct trec două direcții asimptotice reale şi distincte.

2^0) Dacă punctul *P* este *parabolic* $(K = 0)$, atunci prin acest punct trec două direcții asimptotice confundate;

1^0) Dacă punctul *P* este *eliptic* $(K > 0)$, atunci prin acest punct trec două direcții asimptotice imaginare.

*Se numesc **direcții asimptotice**, tangentele din planul tangent în P la suprafața (S) care au ca direcții, direcțiile asimptotice corespunzătoare acestui punct.*

Din definiție rezultă că aceste tangente asimptotice pot reale şi distincte, confundate sau imaginare după cum *P* este hiperbolic, parabolic sau eliptic.

4.24. **Linii asimptotice ale unei suprafețe**

*Numim **linii asimptotice** ale unei suprafețe (S) curbele situate pe această suprafață care au proprietatea că tangenta în fiecare din punctele lor coincide cu una din tangentele asimptotice corespunzătoare punctului respectiv.*

Fie

$$m = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}$$

direcția tangentei într-un punct oarecare la o linie asimptotică.

Atunci *m* verifică (4.136); se stabileşte astfel egalitatea

$$L\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\right)^2 + 2M\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} + N = 0. \tag{4.138}$$

a cărei rezolvare conduce la două ecuații diferențiale de ordinul întâi

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = f(u,v); \ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = g(u,v). \tag{4.139}$$

Soluțiile generale ale ecuațiilor (4.139) sunt familiile de curbe integrale uniparametrice

$$\varphi(u,v;C_1) = 0; \ \psi(u,v;C_1) = 0. \tag{4.140}$$

care ne dau liniile asimptotice pe suprafața (S).

De aici rezultă că *printr-un punct P al unei suprafețe trec două linii asimptotice*. Ele pot fi reale şi distincte, confundate sau imaginare după cum *P* este un punct hiperbolic, parabolic sau eliptic.

Exemple

4.37. Să se determine liniile asimptotice ale suprafeței

$$(S): x = u\cos v;\ y = u\sin v;\ z = av;\ a > 0.$$

În *exemplul* **4.30** s-au determinat coeficienții E, F, G şi L, M, N.

Astfel

$$E = 0; \quad F = 0; \quad G = u^2 + a^2,$$

$$L = 0;\ M = \frac{-a}{\sqrt{u^2 + a^2}};\ N = 0.$$

Ecuația (4.138) se scrie

$$\frac{-2a}{\sqrt{u^2 + a^2}} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = 0$$

şi are soluția

$$u = C$$

unde C este o constantă arbitrară.

Prin urmare *liniile asimptotice ale suprafeței elicoidale sunt curbele coordonate* (γ_v) ■

4.38. Să se determine liniile asimptotice ale suprafeței

$$(S): x = u\cos v;\ y = u\sin v;\ z = \frac{1}{u}.$$

Ca şi la exemplele anterioare este necesar să determinăm mai întâi derivatele parțiale ale vectorului de poziție $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ până la ordinul *II* inclusiv

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{r'_u}: && \cos v; && \sin v; && -\frac{1}{u^2}\\
&\overrightarrow{r'_v}: && -u\sin v; && u\cos v; && 0\\
&\overrightarrow{r''_{uu}}: && 0; && 0; && \frac{2}{u^3}\\
&\overrightarrow{r''_{uv}}: && -\sin v; && \cos v; && 0\\
&\overrightarrow{r''_{vv}}: && -u\cos v; && -u\sin v; && 0.
\end{aligned}$$

Aplicăm apoi relațiile (4.78), (4.79), (4.80) pentru a găsi coeficienții L, M, N.

$$L=\frac{1}{\sqrt{u^2+a^2}}\begin{vmatrix}\cos v & \sin v & -\dfrac{1}{u^2}\\ -u\sin v & u\cos v & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{2}{u^3}\end{vmatrix}=\frac{2}{u^2\sqrt{u^2+a^2}},$$

$$M=\frac{1}{\sqrt{u^2+a^2}}\begin{vmatrix}\cos v & \sin v & -\dfrac{1}{u^2}\\ -u\sin v & u\cos v & 0\\ -\sin v & \cos v & 0\end{vmatrix}=0,$$

$$N=\frac{1}{\sqrt{u^2+a^2}}\begin{vmatrix}\cos v & \sin v & -\dfrac{1}{u^2}\\ -u\sin v & u\cos v & 0\\ -u\cos v & -u\sin v & 0\end{vmatrix}=\frac{-1}{\sqrt{u^2+a^2}}.$$

Înlocuind coeficieții L, M, N în (4.138) se ajunge la ecuația diferențială

$$\frac{2}{u^2\sqrt{u^2+a^2}}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\right)^2-\frac{1}{\sqrt{u^2+a^2}}=0$$

sau

$$\frac{2}{u^2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\right)^2-1=0.$$

reductibilă la ecuațiile liniare de ordinul întâi

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}=\frac{v}{\sqrt{2}};\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}=-\frac{v}{\sqrt{2}},$$

ale cărei soluții sunt respectiv famiile de curbe integrale

$$\ln|u|-\frac{v}{\sqrt{2}}=\ln|C_1|;\ \ln|u|+\frac{v}{\sqrt{2}}=\ln|C_2|$$

care sunt tocmai liniile asimptotice ale ale suprafeței date.

Alegem constantele C_1 şi C_2 astfel încât să aibă acelaşi semn cu u şi apoi renotând constantele.

Prin urmare, putem scrie ecuațiile explicite ale familor de linii asimptotice

$$u=C_1e^{-\frac{v}{\sqrt{2}}};\ u=C_1e^{\frac{v}{\sqrt{2}}}\quad\blacksquare$$

Teoremă

Pentru ca o curbă (γ) *să fie linie asimptotică a suprafeței* (S) *este necesar şi suficient ca planul osculator în punctul curent al curbei* (γ) *să coincidă cu planul tangent în P la suprafața* (S).

Într-adevăr, să presupunem mai întâi că (γ) este linie asimptotică pentru suprafața (S) de-a lungul căreia avem

$$\frac{1}{\rho_n}=0.$$

Atunci, în baza relației (4.96) are loc

$$\frac{1}{R}\cos\alpha=0,$$

unde s-a notat

$\frac{1}{R}-$ curbra curbei în punctul curent,

$\alpha=\left(\widehat{\vec{n},\vec{v}}\right)-$ unghiul dintre versorul normalei principale $\vec{n}$ în punctul curent la (γ) şi versorul normalei la planul tangent în punctul considerat.

Presupunem

$$\frac{1}{R}\neq 0,$$

în caz contrar curba (γ) devine o dreaptă, iar cele două plane, osculator şi tangent, coincid. Atunci

$$\cos\alpha=0;\ \alpha=\frac{\pi}{2}.$$

Prin urmare, *în cazul liniei asimptotice, normala principală este perpendiculară pe normala la suprafață.* Cum şi tangenta la curba (γ) este perpendiculară pe normala la suprafață, iar planul osculator este determinat de tangenta şi normala principală la curbă, rezultă că planul osculator în punctul curent *P* al liniei asimptotice coincide cu planul tangent în acest punct la suprafață.

Reciproc, să presupunem că de-a lungul unei curbe (γ) situate pe o suprafață (S), planul osculator coincide cu planul tangent la suprafață în punctul curent.

Atunci

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

şi având în vedere relaţiile (4.96) şi (4.97), rezultă că în orice punct al curbei (γ) se stabileşte egalitatea

$$Lm^2 + 2Mm + N = 0,$$

ceea ce înseamnă că (γ) este o linie asimptotică ■

Consecinţă

O dreaptă ce aparţine unei suprafeţe este o linie asimptotică a acestei suprafeţe.

Observaţii

1^0) *Generatoarele unei cuadrice sunt cele două familii de linii asimptotice ale cuadrice respective.*

Exemplu

4.38. Fie hiperboloidul cu o pânză de ecuaţie carteziană

$$(\mathscr{H}_1):\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

În cazul de faţă există două familii de generatoare rectilinii definite ca interesecţii de câte două plane

$$(D_\lambda):\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = \lambda\left(1 + \dfrac{y}{b}\right) \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = \lambda\left(1 - \dfrac{y}{b}\right); \end{cases}$$

$$(D_\mu):\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = \mu\left(1 - \dfrac{y}{b}\right) \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = \mu\left(1 + \dfrac{y}{b}\right). \end{cases}$$

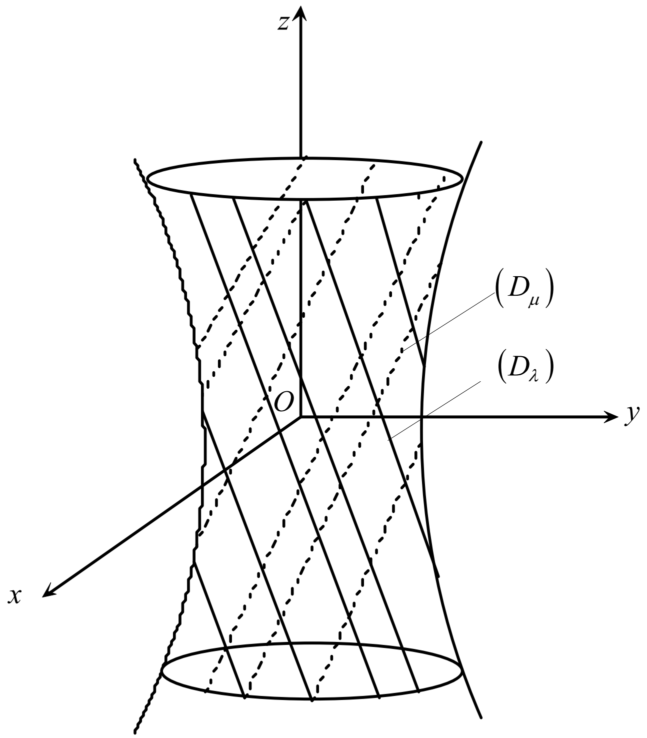


Fig. 4.19

2^0) *Curbura unei linii asimptotice corespunzătoare într-un punct arbitar al unei suprafețe este egală cu curbura ei geodezică, iar torsiunea ei este egală cu torsiunea ei geodezică.*

4.25. **Linii geodezice ale unei suprafețe**

Se numesc ***linii geodezice*** *ale unei suprafețe* (S) *curbele trasate pe această suprafață care au proprietatea că planul osculator* $(\mathcal{P}_O)$ *în fiecare punct al lor este normal la suprafață.*

Din definiție rezultă că *normala la o linie geodezică într-un punct al acesteia are direcția normalei în P la suprafață.*

Fie (S) o suprafață, (γ) o linie geodezică şi $P \in (\gamma)$.

Notăm

$\vec{r}(t)$ – vectorul de poziție al punctului P,

$\vec{\upsilon}$ – versorul normalei la suprafață.

După cum se știe $\vec{r}'(t)$ și $\vec{r}''(t)$ respectiv $\mathrm{d}\vec{r}$ și $\mathrm{d}^2\vec{r}$ aparțin planului osculator $(\mathcal{P}_O)$ în P la linia geodezică (γ). Reamintim că ecuația planului osculator într-un punct $P(x,y,z)$ situat pe o curbă (γ) din spațiu definită parametric este

$$(\mathcal{P}_O):\ \begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}=0$$

unde (X,Y,Z) este punctul curent al planului osculator.

Versorul normalei la suprafața (S) în același punct P definit de (4.35)

$$\vec{\upsilon}=\frac{\vec{r}_u'\times\vec{r}_v'}{\left\|\vec{r}_u'\times\vec{r}_v'\right\|}$$

aparține și el planului osculator $(\mathcal{P}_O)$.

În aceste condiții vectorii $\vec{\upsilon}$, $\mathrm{d}\vec{r}$ și $\mathrm{d}^2\vec{r}$ sunt coplanari ceea ce înseamnă că produsul mixt al acestor vectori se anulează

$$\left(\frac{\vec{r}_u'\times\vec{r}_v'}{\left\|\vec{r}_u'\times\vec{r}_v'\right\|},\ \mathrm{d}\vec{r},\ \mathrm{d}^2\vec{r}\right)=0 \Leftrightarrow \vec{\upsilon}=\left(\vec{r}_u'\times\vec{r}_v',\ \mathrm{d}\vec{r},\ \mathrm{d}^2\vec{r}\right)=0.$$

Altfel scris

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \\ \mathrm{d}^2x & \mathrm{d}^2y & \mathrm{d}^2z \end{vmatrix}=0 \tag{4.141}$$

unde prin

$$A=\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix};\ B=\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix};\ C=\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}. \tag{4.142}$$

s-au notat parametrii directori ai normalei.

Ecuația diferențială de ordinul al doilea (4.141) are soluția generală

$$\varphi(u,v;\, C_1,C_2)=0 \tag{4.143}$$

şi ne dă familia de linii geodezice ale suprafeței (S). Relația implicită (4.143) reprezintă familia de curbe biparametrice trasate pe suprafața (S).

Determinarea parametrilor C_1 şi C_2 este posibilă atunci când se dau două condiții suplimentare.

În consecință, printr-un punct P al suprafeței (S) trec o infinitate de geodezice, iar prin două puncte, în general, una singură.

Exemplu

4.40. *Liniile geodezice ale unui plan sunt dreptele planului respectiv.*

Fie planul de ecuație

$$(\mathcal{P}):\ ax+by+cz+d=0$$

Reprezentarea parametrică a planului $(\mathcal{P})$ este

$$(\mathcal{P}):\ x=u;\ y=v;\ z=-\frac{au+bv+d}{c}.$$

iar derivatele vectorului de poziție ale punctului curent din plan

$$\begin{aligned}
&x'_u=1;\ y'_u=0;\quad z'_u=-\frac{a}{c}\\
&x'_v=0;\ y'_v=1;\quad z'_v=-\frac{b}{c}\\
&x''_{uu}=0; y''_{uu}=0;\ z''_{uu}=0\\
&x''_{uv}=0;\ y''_{uv}=0;\ z''_{uv}=0\\
&x''_{vv}=0;\ y''_{vv}=0;\ z''_{vv}=0.
\end{aligned}$$

Coeficieții A,B,C definiți de (4.142) sunt

$$A=\frac{a}{c};\ B=\frac{b}{c};\ C=1,$$

astfel că ecuația (4.141) devine

$$\begin{vmatrix} \frac{a}{c} & \frac{b}{c} & 1 \\ \mathrm{d}u & \mathrm{d}v & -\frac{a}{c}\mathrm{d}u-\frac{b}{c}\mathrm{d}v \\ \mathrm{d}^2 u & \mathrm{d}^2 v & -\frac{a}{c}\mathrm{d}^2 u-\frac{b}{c}\mathrm{d}^2 v \end{vmatrix}=0.$$

Notând

$$m=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u};\ \alpha=-\frac{a}{c};\ \beta=-\frac{b}{c}$$

rezultă că ecuația diferențială de mai sus se va scrie

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ 1 & m & \alpha+\beta m \\ 1 & m^2 & \alpha+\beta m^2 \end{vmatrix}=0.$$

sau

$$\alpha m\left(\alpha+\beta m^2\right)+m^2+\beta\left(\alpha+\beta m\right)-m-m^2\left(\alpha+\beta m\right)-\beta\left(\alpha+\beta m^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \beta\left(\alpha-1\right)m^3+\left(1-\alpha-\beta^2\right)m^2+\left(\alpha^2+\beta^2-1\right)m=0;$$

De aici rezultă

1^0) $m=0;\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}u \Leftrightarrow v=u+C_0.$

2^0) $\beta\left(\alpha-1\right)m^2+\left(1-\alpha-\beta^2\right)m+\left(\alpha^2+\beta^2-1\right)=0;$

Discriminantul ecuației de gradul doi fiind

$$\Delta=\left(1-\alpha-\beta^2\right)^2-4\beta\left(\alpha-1\right)\left(\alpha^2+\beta^2-1\right)$$

rezultă

$$m_1=\frac{\left(\beta^2+\alpha-1\right)}{2\beta\left(\alpha-1\right)}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2\beta\left(\alpha-1\right)};\ m_2=\frac{\left(\beta^2+\alpha-1\right)}{2\beta\left(\alpha-1\right)}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2\beta\left(\alpha-1\right)}.$$

Mai departe se obțin soluțiile

$$v=m_1u+C_1;\ v=m_2u+C_2$$

care reprezintă mulțimea dreptelor conținute în planul $\left(\mathcal{P}\right)$ ■

4.26. **Înfăşurătoarea unei familii de suprafețe**

Fie o familie de suprafețe uniparametrice

$$(S): F(x, y, z;\ \alpha) = 0. \tag{0.1}$$

Se numeşte ***înfăşurătoare*** *a familiei* (S) *o suprafață*

$$(\sigma): G(x, y, z) = 0, \tag{0.2}$$

care să fie tangentă la toate suprafețele familiei (S).

Dacă familia (0.1) admite înfăşuratoarea(0.2) atunci ecuația înfăşurătorii (σ) se obține eliminând parametrul α între ecuațiile sistemului

$$\begin{cases} F(x, y, z;\ \alpha) = 0 \\ F'_\alpha(x, y, z;\ \alpha) = 0. \end{cases} \tag{0.3}$$

Curbele (0.3) care generează înfăşurătoarea (σ) se numesc *curbe caracterisitce* ale familiei (0.1).

Observație

Dacă suprafețele familiei (0.1) *au punctele singulare*, *coordonatele acestor puncte verifică*, *de asemenea*, *sistemul* (0.3).

Prin urmare, *eliminarea parametrului* α *între ecuațiile sistemului* (0.3) *conduce la o ecuație ce reprezintă, fie înfăşurătoarea familiei de suprafețe*, *fie locul geometric al punctelor singulare ale suprafețelor din familie*, *fie şi una şi alta din cele de mai sus*.

Exemplu

4.41. Să se afle înfăşurătoarea familiei de paraboloizi

$$F(x, y, z;\ \alpha) \equiv \alpha^2 x^2 + y^2 - 2\alpha z = 0$$

Pentru a găsi înfăşurătoarea acestei familii vom scrie

$$F'_\alpha(x, y, z;\ \alpha) \equiv 2\alpha x^2 - 2z = 0$$

Formăm sistemul (0.3)

$$\begin{cases} \alpha^2 x^2 + y^2 - 2\alpha z = 0 \\ \alpha x^2 - z = 0. \end{cases}$$

Înlocuind

$$\alpha = \frac{z}{x^2}$$

în prima ecuație a sistemului se obține suprafața algebrică

$$z^2 - x^2y^2 = 0,$$

formată din paraboloizii hiperbolici

$$z = xy;\ z = -xy.$$

Familia dată nu admite puncte singulare, deoarece sistemul

$$F = 0;\ F'_x = F'_y = F'_z = 0.$$

nu are soluții. Aşadar cei doi parabolizi formează înfăşurătoare ale familiei de paraboloizi date ■

Teoremă

Fie familia de suprafețe (4.144), *căreia îi ataşăm familia de curbe* (4.145). *Presupunem că*:

1^0) *Cel puțin unul dintre determinanții funcționali*

$$\frac{D(F,F'_\alpha)}{D(y,z)};\ \frac{D(F,F'_\alpha)}{D(z,x)};\ \frac{D(F,F'_\alpha)}{D(x,y)}; \tag{4.147}$$

este diferit de zero de-a lungul unei curbe (γ_α) *(α fixat) din familia* (4.146);

2^0) *Pentru orice* α *avem*

$$F''_{\alpha^2} \neq 0. \tag{4.148}$$

Atunci, familia (4.144) *admite o înfăşurătoare* (σ) *dată de* (4.145).

Într-adevăr, presupunând

$$\frac{D(F,F'_\alpha)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ F''_{\alpha x} & F''_{\alpha y} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{4.149}$$

rezultă că cel puțin una din derivatele F'_x, F'_y, respectiv $F''_{\alpha x}, F''_{\alpha y}$ este nenulă.

De aici deducem că punctele ordinare ale curbei (γ_α) sunt şi puncte ordinare ale suprafeței (σ_α) din familia (4.144) pentru α corespunzător curbei (γ_α), precum şi pentru suprafața reprezentată de ecuația $F'_\alpha = 0$.

Apoi condiția (4.149) ne permite să rezolvăm sistemul (4.146) astfel încât să obținem soluțiile parametrice

$$x = x(z,\alpha);\ y = y(z,\alpha);\ z = z \tag{4.150}$$

Când α variază, curba (γ_α) descrie o suprafață ale cărei ecuații biparametrice sunt (4.150).

Mai trebuie arătat că suprafața astfel generată este o înfăşurătoare a familiei (4.144).

Ecuațiile (4.150) verifică sistemul (4.146), aşadar

$$\begin{cases} F\left(x(z,\alpha), y(z,\alpha), z;\ \alpha\right) = 0 \\ F'_\alpha\left(x(z,\alpha), y(z,\alpha), z;\ \alpha\right) = 0. \end{cases} \tag{4.151}$$

Derivând în raport cu α cele două egalități din (4.151) şi ținând seama că $F'_\alpha = 0$ se obține

$$\begin{cases} F'_x x'_\alpha + F'_y y'_\alpha = 0 \\ F''_{\alpha x} x'_\alpha + F''_y y'_\alpha + F''_{\alpha^2} = 0. \end{cases}$$

Ținem seama că $F''_{\alpha^2} \neq 0$ din ipoteză, astfel că cel puțin una din derivatele x'_α, y'_α este diferită de zero. Mai departe, scriind determinanții funcționali ataşați funcțiilor (4.150)

$$\begin{gathered} \frac{D(y,z)}{D(z,\alpha)} = \begin{vmatrix} y'_z & 1 \\ y'_\alpha & 0 \end{vmatrix} = y'_\alpha;\ \frac{D(z,x)}{D(z,\alpha)} = \begin{vmatrix} 1 & x'_z \\ 0 & x'_\alpha \end{vmatrix} = x'_\alpha; \\ \frac{D(x,y)}{D(z,\alpha)} = \begin{vmatrix} x'_z & y'_z \\ y'_\alpha & y'_\alpha \end{vmatrix} = x'_z y'_\alpha - y'_z y'_\alpha \end{gathered} \tag{4.152}$$

rezultă că cel puțin unul dintre aceştia este nenul.

Prin urmare punctele ordinare ale suprafețelor din familia (4.144) *sunt puncte ordinare şi pentru cele din familia* (4.150).

Să mai observăm că derivând identitatea

$$F\left(x(z,\alpha), y(z,\alpha), z;\ \alpha\right) = 0$$

în raport cu *y* se obține

$$F'_x x'_z + F'_y y'_z + F'_z = 0.$$

Formăm apoi sistemul omogen în necunoscutele $F'_x,\ F'_y,\ F'_z$

$$\begin{cases} F'_x x'_\alpha + F'_y y'_\alpha = 0 \\ F'_x x'_z + F'_y y'_z + F'_z = 0. \end{cases}$$

Ținând seama că cel puțin unul dintre determinanții funcționali (4.152) este diferit de zero, soluția acestui sistem se scrie sub forma

$$\frac{F'_x}{\frac{D(y,z)}{D(z,\alpha)}} = \frac{F'_y}{\frac{D(z,x)}{D(z,\alpha)}} = \frac{F'_z}{\frac{D(x,y)}{D(z,\alpha)}}. \tag{4.153}$$

Acest rezultat ne arată că suprafețele din familia (4.144) sunt tangente la suprafața determinată de ecuațiile (4.150), deci la suprafața generată de familia (4.146) ■

Familia de caracteristici (4.154) generează, aşa cum am văzut, înfăşurătoarea familiei (4.144), în *ipoteza că aceasta există*. Ne punem problema de a determina înfăşurătoarea acestei familii în condițiile de existență ale acestei înfăşurători.

Din rezultatele stabilite în *Capitolul* 3 înfăşurătoarea unei familii de caracteristici este dată de sistemul

$$\begin{cases} F(x,y,z;\,\alpha)=0 \\ F'_\alpha(x,y,z;\,\alpha)=0 \\ F''_{\alpha^2}(x,y,z;\,\alpha)=0. \end{cases} \tag{4.155}$$

Existența este asigurată pentru acea soluție

$$x=x(\alpha);\; y=y(\alpha);\; z=z(\alpha)$$

a sistemului (4.155) pentru care are loc

$$\frac{D(y,z)}{D(z,\alpha)} = \begin{vmatrix} F'_x & F'_y & F'_z \\ F''_{\alpha x} & F''_{\alpha y} & F''_{\alpha z} \\ F'''_{\alpha^2 x} & F'''_{\alpha^2 y} & F'''_{\alpha^2 z} \end{vmatrix} \neq 0;\; F''_{\alpha^2} \neq 0. \tag{4.156}$$

Înfăşurătoarea familiei de caracterisitici care este o curbă situată pe înfăşurătoarea familiei de suprafețe se numeşte ***muchia de întoarcere*** *a suprafeței înfăşurătoare.*

Bibliografie

1. Dobrescu, A., *Geometrie diferențială*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1962.
2. Duda, I., *Algebră liniară*, *geometrie analitică şi diferențială*, Editura Fundației *România de Mâine*, Bucureşti, 1994.
3. Duda, I., Grădinaru, S., *Calcul integral cu aplicații*, Editura Fundației *România de Mâine*, Bucureşti, 2007.
4. Iacob, Caius, *Curs de matematici superioare*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1957.
5. Ionescu, Ghe. D., *Teoria diferențială a curbelor şi suprafețelor*, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1984.
6. Mihăileanu, M., *Geometrie analitică*, *proiectivă şi diferențială*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1971.
7. Murgulescu, E., Flexi, S., Kreindler, O., Sacter, O., Tîrnoveanu, M., *Geometrie analitică şi diferențială,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1965.
8. Roşculeț, M. *Algbră liniară, geometrie analitică şi geometrie diferențială*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1987.
9. Udrişte, C., Radu, C., Dicu, C., Mălăncioiu, O., *Algebră, geometrie şi ecuații diferențiale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1962.
10. Vrânceanu, Ghe., *Geometrie analitică*, *proiectivă şi diferențială*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1962.