@'

ANALIZĂ MATEMATICĂ
Noţiuni teoretice şi probleme rezolvate

Mircea Olteanu

Cuprins

1 Integrale improprii şi cu parametri **5**
1.1 Noţiuni teoretice 5
1.2 Integrale improprii 10
1.3 Integrale cu parametri 13

2 Integrale duble şi triple **25**
2.1 Noţiuni teoretice 25
2.2 Integrale duble 28
2.3 Integrale triple 33

3 Integrale curbilinii şi de suprafaţă **39**
3.1 Noţiuni teoretice 39
3.2 Integrale curbilinii 45
3.3 Integrale de suprafaţă 54

4 Formule integrale **63**
4.1 Noţiuni teoretice 63
4.2 Formula Green-Riemann 65
4.3 Formula Gauss-Ostrogradski 70
4.4 Formula lui Stokes 77

Capitolul 1

Integrale improprii şi cu parametri

1.1 Noţiuni teoretice

Integrale improprii
Fie $a, b \in R$ şi fie $f : [a, b) \mapsto R$ o funcţie local integrabilă (integrabilă pe orice interval compact $[u, v] \subseteq [a, b)$). Integrala improprie (în b) $\int_a^b f(x)dx$ se numeşte convergentă dacă limita

$$\lim_{t \to b} \int_a^t f(x)dx$$

există şi este finită; altfel, integrala se numeşte divergentă.
Dacă $f : [a, \infty) \mapsto R$ este local integrabilă, atunci integrala improprie (la ∞) $\int_a^\infty f(x)dx$ se numeşte convergentă dacă limita

$$\lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x)dx$$

există şi este finită.
Integrala improprie $\int_a^b f(x)dx$ (b poate fi şi ∞) se numeşte absolut convergentă dacă integrala $\int_a^b |f(x)|\, dx$ este convergentă.
Exemple
a. Fie $a \in (0, \infty)$ şi $\alpha \in R$. Atunci integrala $\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ este convergentă dacă şi

numai dacă $\alpha > 1$.

b. Fie $a, b \in R,\ a < b$ şi $\alpha \in R$. Atunci integrala $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ este convergentă dacă şi numai dacă $\alpha < 1$.

Demonstraţie

a. Fie $\alpha \neq 1$; atunci:

$$\lim_{t\to\infty} \int_a^t \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) < \infty \text{ dacă şi numai dacă } \alpha > 1.$$

Dacă $\alpha = 1$, atunci:

$$\lim_{t\to\infty} \int_a^t \frac{1}{x} dx = \lim_{t\to\infty} (\ln t - \ln a) = \infty.$$

b. Analog.

Criterii de convergenţă

Criteriul lui Cauchy

Fie $f : [a, b) \mapsto R$, local integrabilă; atunci integrala $\int_a^b f(t)dt$ este convergentă dacă şi numai dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists b_\varepsilon \in [a, b)$ astfel încât $\forall x, y \in (b_\varepsilon, b)$ să rezulte $\left| \int_x^y f(t)dt \right| < \varepsilon$.

Criteriul de comparaţie

Fie $f, g : [a, b) \mapsto R$, (b poate fi şi ∞) astfel încât $0 \leq f \leq g$;

i. dacă integrala $\int_a^b g(x)dx$ este convergentă, atunci şi integrala $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă.

ii. dacă integrala $\int_a^b f(x)dx$ este divergentă, atunci şi integrala $\int_a^b g(x)dx$ este divergentă.

Criteriul de comparaţie la limită

Fie $f, g : [a, b) \mapsto [0, \infty)$ astfel încât există limita:

$$\ell = \lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

i. Dacă $\ell \in [0, \infty)$ şi $\int_a^b g(x)dx$ este convergentă, atunci şi $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă.

ii. Dacă $\ell \in (0, \infty)$ sau $\ell = \infty$ şi $\int_a^b g(x)dx$ este divergentă, atunci şi

$\int_a^b f(x)dx$ este divergentă.

Criteriul de comparaţie cu $\frac{1}{x^\alpha}$

Fie $a \in R$ şi $f : [a, \infty) \mapsto [0, \infty)$, local integrabilă astfel încât există

$$\ell = \lim_{x \to \infty} x^\alpha f(x).$$

i. Dacă $\alpha > 1$ şi $0 \leq \ell < \infty$, atunci $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ este convergentă.

ii. Dacă $\alpha \leq 1$ şi $0 < \ell \leq \infty$, atunci $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ este divergentă.

Criteriul de comparaţie cu $\frac{1}{(b-x)^\alpha}$

Fie $a < b$ şi $f : [a, b) \mapsto [0, \infty)$, local integrabilă astfel încât există

$$\ell = \lim_{x \to b} (b-x)^\alpha f(x).$$

i. Dacă $\alpha < 1$ şi $0 \leq \ell < \infty$, atunci $\int\limits_a^b f(x)dx$ este convergentă.

ii. Dacă $\alpha \geq 1$ şi $0 < \ell \leq \infty$, atunci $\int\limits_a^b f(x)dx$ este convergentă.

Criteriul lui Abel

Fie $f, g : [a, \infty) \mapsto R$ cu proprietăţile:

f este de clasă $\mathcal{C}^1$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$, $\int_a^\infty f'(x)dx$ absolut convergentă,

g este continuă, iar funcţia $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ este mărginită pe $[a, \infty)$.

Atunci integrala $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$ este convergentă.

Integrale cu parametri

Fie $A \neq \emptyset$ şi $[a, b] \subset R$ un interval compact. Fie $f : [a, b] \times A \mapsto R$ o funcţie (de două variabile reale) astfel încât pentru orice $y \in A$ aplicaţia $[a, b] \ni x \mapsto f(x, y) \in R$ este integrabilă Riemann. Funcţia definită prin:

$$F : A \mapsto R,\ F(y) = \int_a^b f(x, y)dx,$$

se numeşte integrală cu parametru.

Continuitatea integralei cu parametru

Dacă $f : [a,b] \times A \mapsto R$ este continuă, atunci integrala cu parametru $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ este funcţie continuă.

Formula lui Leibniz de derivare

Fie $f : [a,b] \times (c,d) \mapsto R$ o funcţie continuă astfel încât derivata parţială $\frac{\partial f}{\partial y}$ există şi este continuă pe $[a,b] \times (c,d)$. Atunci integrala cu parametru $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ este derivabilă şi

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx, \ \forall\, y \in (c,d).$$

Formula generală de derivare

Fie $f : [a,b] \times (c,d) \mapsto R$ o funcţie continuă astfel încât derivata parţială $\frac{\partial f}{\partial y}$ există şi este continuă pe $[a,b] \times (c,d)$ şi fie $\varphi,\ \phi : (c,d) \mapsto [a,b)$ două funcţii de clasă $\mathcal{C}^1$. Atunci funcţia $G(y) = \int_{\varphi(y)}^{\phi(y)} f(x,y)dx$ este derivabilă şi:

$$G'(y) = \int_{\varphi(y)}^{\phi(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx + f(\phi(y),y)\phi'(y) - f(\varphi(y),y)\varphi'(y), \ \forall\, y \in (c,d).$$

Schimbarea ordinei de integrare

Fie $f : [a,b] \times [c,d] \mapsto R$ o funcţie continuă; atunci:

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

Integrale improprii cu parametri

Fie $f : [a,b) \times A \mapsto R$ o funcţie cu proprietatea că pentru orice $y \in A$, aplicaţia $[a,b) \ni x \mapsto f(x,y) \in R$ este local integrabilă şi integrala (improprie) $\int_a^b f(x,y)dx$ converge. Se poate defini în acest caz funcţia

$$F(x,y) = \int_a^b f(x,y)dx,$$

numită integrală improprie cu parametru.
Integrala $\int_a^b f(x,y)dx$ se numeşte uniform convergentă (în raport cu y) pe mulţimea A dacă

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, b_\varepsilon \in (a,b) \text{ astfel încât } \left| \int_t^b f(x,y)dx \right| < \varepsilon,\ \forall\, t \in (b_\varepsilon, b),\ \forall y \in A.$$

Continuitatea integralei improprii cu parametru
Dacă $f : [a,b) \times A \mapsto R$ este continuă şi dacă integrala $\int_a^b f(x,y)dx$ este uniform convergentă pe A, atunci funcţia $F : A \mapsto R,\ F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ este continuă.
Derivarea integralei improprii cu parametru
Fie $f : [a,b) \times (c,d) \mapsto R$ o funcţie continuă astfel încât derivata parţială $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ există şi este continuă pe $[a,b) \times (c,d)$ şi pentru orice $y \in (c,d)$ fixat integrala $\int_a^b f(x,y)dx$ este convergentă. Dacă integrala $\int_a^b \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$ este uniform convergentă pe (c,d), atunci integrala improprie cu parametru $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ este derivabilă şi

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx,\ \forall\, y \in (c,d).$$

Schimbarea ordinei de integrare în integrala improprie
Dacă $f : [a,b) \times [c,d] \mapsto R$ este continuă şi dacă integrala $\int_a^b f(x,y)dx$ este uniform convergentă pe (c,d), atunci :

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx.$$

Criterii de uniform convergenţă
Criteriul lui Cauchy
Fie $f : [a,b) \times A \mapsto R$ o funcţie cu proprietatea că pentru orice $y \in A$, aplicaţia $[a,b) \ni x \mapsto f(x,y) \in R$ este local integrabilă. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:
i. integrala improprie $\int_a^b f(x,y)dx$ este uniform convergentă pe A.

ii. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists b_\varepsilon \in (a,b)$ astfel încât pentru orice $u, v \in (b_\varepsilon, b)$ rezultă

$$\left|\int_u^v f(x,y)dx\right| < \varepsilon, \forall y \in A.$$

Criteriul de comparaţie
Fie $f : [a,b) \times A \mapsto R$ o funcţie cu proprietatea că pentru orice $y \in A$, aplicaţia $[a,b) \ni x \mapsto f(x,y) \in R$ este local integrabilă şi fie $g : [a,b) \mapsto R$ astfel încât $|f(x,y)| \le g(x)$, $\forall x \in [a,b)$, $\forall y \in A$. Dacă integrala $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ este convergentă, atunci integrala $\displaystyle\int_a^b f(x,y)dx$ este uniform convergentă.

Funcţiile lui Euler
Fie Γ şi B funcţiile (integralele) lui Euler:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx, \alpha > 0,$$

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, p > 0, q > 0.$$

Proprietăţile uzuale ale funcţiilor Γ şi B
a. $\Gamma(1) = 1$.
b. $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.
c. $B(p,q) = B(q,p)$.
d. $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \dfrac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}, \forall\alpha \in (0,1)$.
e. $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.
f. $B(p,q) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}dy$.
g. $\Gamma(n) = (n-1)!, \forall n \in N$.
h. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.
i. $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = 1 \cdot 3 \cdot 5 .... (2n-1) \cdot 2^{-n}\sqrt{\pi}$.

1.2 Integrale improprii

Aplicand criteriile de comparaţie cu $\dfrac{1}{x^\alpha}$ şi $\dfrac{1}{(b-x)^\alpha}$, să se studieze natura integralelor următoare (exerciţiile 1-10):

1. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

Soluţie

$\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 1$, deci integrala este divergentă.

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Soluţie

$\lim\limits_{x\to1}(1-x)^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, deci integrala este convergentă.

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{1-x^2}dx$.

Soluţie

$\lim\limits_{x\to1} (1-x)\frac{\sin x}{1-x^2} = \frac{\sin 1}{2}$, deci integrala este divergentă.

Următoarele integrale sunt improprii în ambele capete.

4. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{x^3-1}}dx$.

Soluţie

$\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{x^3-1}} = 1$, deci integrala este divergentă, (deşi în $x=1$ integrala este convergentă).

5. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x^3-1}}dx$.

Soluţie

Integrala este convergentă: $\lim\limits_{x\to1} \frac{\ln x}{\sqrt{x^3-1}} = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1,1}\frac{\ln x}{\sqrt{x^3-1}} = 0$.

6. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x}-1}$.

Soluţie

$\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}} \frac{1}{x\sqrt{x}-1} = 1$, deci integrala este convergentă la infinit, dar este divergentă în $x=1$: $\lim\limits_{x\to1} (x-1)\frac{1}{x\sqrt{x}-1} = \frac{3}{2}$,
deci integrala este divergentă.

7. $\int\limits_{-1}^{\infty} \frac{x^{2n}e^{-x}}{\sqrt{1+x}}dx, n \in N.$

Soluţie

Integrala este convergentă pentru orice $n \in N$:

$$\lim_{x\to -1}(1+x)^{\frac{1}{2}}\frac{x^{2n}e^{-x}}{\sqrt{1+x}} = e,$$

$$\lim_{x\to\infty} x^2\frac{x^{2n}e^{-x}}{\sqrt{1+x}} = 0.$$

8. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{\alpha}}, \alpha > 0.$

Soluţie

Cu schimbarea de variabilă $\ln x = u$, obţinem integrala $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{du}{u^{\alpha}}$, care este divergentă pentru orice $\alpha > 0$.

9. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^m - 1}{\ln x}dx, m \in N - \{0\}.$

Soluţie

Integrala este convergentă:

$$\lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{2}}\frac{x^m - 1}{\ln x} = 0,$$

$$\lim_{x\to 1}(x-1)^{\frac{1}{2}}\frac{x^m - 1}{\ln x} = 0.$$

10. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(ax)}{x^m}dx, a > 0, m \in N - \{0\}.$

Soluţie

Dacă $m = 1$, integrala este divergentă; dacă $m > 1$, integrala este convergentă.

11. Să se arate că integrala $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ este convergentă, dar nu este absolut convergentă.

Soluţie
Convergenţa (la ∞) rezultă aplicând criteriul lui Abel: $f(x) = \frac{1}{x}$ şi $g(x) = \sin x$. În 0 integrala este convergentă deoarece funcţia $\frac{\sin x}{x}$ se poate prelungi prin continuitate.

Presupunem acum prin absurd ca integrala $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$ ar fi absolut convergentă. Atunci, din inegalitatea:

$$\frac{1-\cos 2x}{2} = \sin^2 x \leq |\sin x|,$$

ar rezulta (aplicând criteriul de comparaţie) că integrala $\int\limits_0^\infty \frac{1-\cos 2x}{2x}\, dx$ este convergentă; de aici, ar rezulta (întrucât integrala $\int\limits_0^\infty \frac{\cos 2x}{2x}\, dx$ este convergentă, conform criteriului lui Abel), că şi integrala $\int\limits_0^\infty \frac{1}{2x}\, dx$ ar fi convergentă, ceea ce constituie o contradiţie.

1.3 Integrale cu parametri

12. Să se studieze continuitatea funcţiei

$$F(y) = \int_0^\infty \frac{\sin xy}{1+x^2} dx, \forall\, y \in R.$$

Soluţie
Fie $f(x,y) = \frac{\sin xy}{1+x^2}$, $(x,y) \in [0,\infty) \times R$. Evident, f este funcţie continuă. Demonstrăm acum că integrala (improprie) cu parametru

$$\int_0^\infty f(x,y)dx$$

este uniform convergentă în raport cu y pe R şi deci funcţia F este continuă. Evident, are loc inegalitatea:

$$|f(x,y)| \leq \frac{1}{1+x^2},\ \forall\, (x,y) \in [0,\infty) \times R.$$

Integrala improprie $\int\limits_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$ este convergentă şi deci, conform criteriului de comparaţie, integrala dată este uniform convergentă.

13. Fie $f : [0,1]\times(0,\infty)\mapsto R$, $f(x,y) = \frac{x}{y^2}\; e^{-\left(\frac{x}{y}\right)^2}$ şi fie integrala parametru $F(y) = \int_0^1 f(x,y)\,dx$. Să se calculeze:

i. $\lim\limits_{y\to 0}\int_0^1 f(x,y)$,

ii. $\int_0^1 \lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\,dx$.

Soluţie

i. Pentru orice $y>0$, avem:

$$F(y) = \int_0^1 f(x,y)dx = -\frac{1}{2}e^{-\left(\frac{x}{y}\right)^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{y^2}}.$$

În consecinţă, rezultă: $\lim\limits_{y\to 0}\int_0^1 f(x,y)=\frac{1}{2}$.

ii. Pe de altă parte: $\int_0^1 \lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\,dx = \int_0^1 0\;dx = 0.$

14. Fie $f(x,y) = \begin{cases} \ln\sqrt{x^2+y^2} & \text{dacă} \quad (x,y)\in[0,1]\times(0,\infty) \\ \ln x & \text{dacă} \quad (x,y)\in(0,1]\times\{0\} \end{cases}$

şi fie $F(y) = \begin{cases} \int_0^1 f(x,y)dx & \text{dacă} \quad y>0 \\ -1 & \text{dacă} \quad y=0 \end{cases}$

i. Să se demonstreze că funcţia F este continuă.

ii. Să se calculeze $F'(0)$.

iii. Să se calculeze $\int\limits_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x,0)\;dx$.

Soluţie

i. Pentru orice $y>0$, integrând prin părţi, obţinem:

$$F(y) = \int_0^1 f(x,y)dx = x\ln\sqrt{x^2+y^2}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+y^2}dx =$$

$$= \ln\sqrt{1+y^2} - 1 + y\cdot \mathrm{arctg}\frac{1}{y}.$$

Pentru $y=0$, obţinem $F(0) = \int_0^1 f(x,0)dx = \int_0^1 (-1)dx = -1.$

Funcţia F este continuă în 0:

$$\lim_{y\to 0_+} F(y) = \lim_{y\to 0_+} \ln\sqrt{1+y^2} - 1 + y\cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{y} = -1.$$

ii. Derivata $F'(0)$ se calculează cu definiţia:

$$F'(0) = \lim_{y\to 0_+} \frac{F(y)-F(0)}{y} = \lim_{y\to 0_+} \left(\frac{1}{y}\ln\sqrt{1+y^2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{y}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

iii. Pentru orice $x \in (0,1]$, avem:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{y\to 0_+} \frac{\ln\sqrt{x^2+y^2} - \ln x}{y} = \lim_{y\to 0_+} \frac{\ln\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}{\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{y}{x^2} = 0.$$

Rezultă $\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x,0)dx = 0.$

15. Fie $f : [0,\infty)\times[0,1] \mapsto R$, $f(x,y) = ye^{-xy}$ şi fie integrala cu parametru $F(y) = \displaystyle\int_0^\infty f(x,y)dx$, $\forall\, y \in [0,1]$. Să se studieze continuitatea funcţiei F.

Soluţie

Evident, $F(0) = 0$; pentru orice $y \in (0,1]$, avem:

$$F(y) = \int_0^\infty ye^{-xy}dx = -e^{-xy}\Big|_0^\infty = 1,$$

deci F nu este continuă în 0.

16. Fie $\alpha > 0$. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}dx.$

Soluţie

Considerăm integrala (cu parametrul $y > 0$):

$$F(y) = \int_0^\infty e^{-yx}\frac{\sin x}{x}dx.$$

Sunt verificate ipotezele teoremei de derivare sub integrală şi obţinem:

$$F'(y) = \int_0^\infty -e^{-yx}\sin x dx = -\frac{1}{y^2+1}.$$

Rezultă deci $F(y) = -\text{arctg}y + \frac{\pi}{2}$; în concluzie:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{y \to 0} F(y) = \frac{\pi}{2}.$$

Se arată simplu (printr-o schimbare de variabilă) că:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \forall \alpha > 0.$$

Analog, dacă $\alpha < 0$, atunci $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} dx = -\frac{\pi}{2}$.

17. Fie $\alpha, \beta \in R$; să se calculeze $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x \cdot \cos \beta x}{x} dx$.

Soluţie

Se transformă produsul $\sin \alpha x \cdot \cos \beta x$ în sumă şi apoi se aplică rezultatul din exerciţiul anterior.

18. Să se calculeze integrala $J = \displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$, folosind integrala cu parametru $F(\alpha) = \displaystyle\int\limits_0^\alpha \frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2} dx, \alpha > 0$.

Soluţie

Prin derivare în raport cu α, obţinem:

$$F'(\alpha) = \frac{\ln(1+\alpha^2)}{2(1+\alpha^2)} + \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \text{arctg}\alpha.$$

Primitivele acestei funcţii sunt: $\dfrac{1}{2} \text{arctg}\, \alpha \ln(1+\alpha^2) + k, k \in R$. Dar $F(0) = 0$ şi deci $k = 0$. Rezultă $J = F(1) = \frac{\pi}{8} \ln 2$.

19. Să se calculeze integrala:

$$F(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2 x + y^2 \sin^2 x) dx, \forall y > 0.$$

Soluţie

Dacă $y = 1$, atunci, evident, $F(1) = 0$.

Fie $y > 0$, $y \neq 1$; atunci:

$$F'(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2y \sin^2 x}{\cos^2 x + y^2 \sin^2 x} dx = 2y \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{tg}^2 x}{1 + y^2 \text{tg}^2 x} dx =$$

$$= 2y\int_0^\infty \frac{u^2}{(1+y^2u^2)(1+u^2)}du =$$
$$= \frac{2y}{1-y^2}\int_0^\infty\left(\frac{1}{1+y^2u^2}-\frac{1}{1+u^2}\right) = \frac{\pi}{1+y}.$$

Rezultă $F(y) = \pi\ln(1+y)+k$, unde k este o constantă ce se determină din condiţia $F(1) = 0$; se obţine $k = -\pi\ln 2$, şi deci $F(y) = \pi\ln\frac{1+y}{2}$.

20. Pentru orice $a > 0, b > 0$, să se calculeze $J = \int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\cos(\ln x)dx$.

Soluţie
Integrala J se poate scrie şi sub forma:

$$J = \int\limits_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\cos(\ln x)dx = \int_0^1 \cos(\ln x)\left(\int_a^b x^y dy\right)dx =$$
$$= \int_a^b\left(\int_0^1 x^y\cos(\ln x)dx\right)dy.$$

Vom calcula mai întâi integrala: $J_1 = \int\limits_0^1 x^y\cos(\ln x)dx$, folosind schimbarea de variabilă: $t = \ln x$;obţinem: $J_1 = \frac{y+1}{1+(y+1)^2}$, şi deci $J = \frac{1}{2}\ln\frac{1+(b+1)^2}{1+(a+1)^2}$.

21. Să se calculeze integralele:
$J(\alpha) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{arctg}(\alpha \mathrm{tg}x)}{\mathrm{tg}x}dx, \alpha > 0, \alpha \neq 1$ şi $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\mathrm{tg}x}dx.$

Soluţie
$J'(\alpha) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\alpha^2\mathrm{tg}^2x}$. Pentru a calcula ultima integrala facem schimbarea de variabilă $t = \mathrm{tg}x$; în final obţinem $J(\alpha) = \frac{\pi}{2}\ln(1+\alpha)$ şi $I = \frac{\pi}{2}\ln 2$.

22. Să se calculeze integralele:

a. $F(a) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\right)\frac{dx}{\cos x}, |a| < 1.$

b. $G(a) = \int\limits_0^{\infty} \frac{\mathrm{arctg}(ax)}{x(1+x^2)}dx, a \in R, |a| \neq 1.$

Soluţie

a. $F'(a) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{1 - a^2\cos^2 x}dx$; cu schimbarea de variabilă $t = \mathrm{tg}x$, obţinem:

$$F'(a) = \int_0^\infty \frac{2}{t^2 + (\sqrt{1-a^2})^2}dt = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{1-a^2}}\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}},$$

şi deci $F(a) = \pi \arcsin a$.

b. $G'(a) = \int\limits_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+a^2x^2)} = \frac{\pi}{2(1+a)}$ şi deci $G(a) = \frac{\pi}{2}\ln(1+a)$.

23. Să se calculeze integralele:

a. $J(a,b) = \int\limits_0^\infty \frac{\ln(a^2+x^2)}{b^2+x^2}dx, a > 0, b > 0, a \neq b.$

b. $F(a) = \int\limits_0^1 \frac{\ln\left(1 - a^2x^2\right)}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx, |a| < 1.$

Soluţie

a. Derivând în raport cu a, obţinem:

$$J' = \int_0^\infty \frac{2a}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)}dx =$$

$$= \int_0^\infty \frac{2a}{b^2-a^2}(\frac{1}{a^2+x^2} - \frac{1}{b^2+x^2})dx = \frac{\pi}{b(a+b)}.$$

Rezultă deci $J = \frac{\pi}{b}\ln(a+b) + K(b)$. Pentru a calcula $K(b)$, calculăm

$$J(b,b) = \int_0^\infty \frac{\ln(b^2+x^2)}{b^2+x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(b^2+b^2\mathrm{tg}^2 t)}{b^2+b^2\mathrm{tg}^2 t}b(1+\mathrm{tg}^2 t)dt =$$

$$= \frac{1}{b}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{b^2}{\cos^2 t}dt = \frac{\pi}{b}\ln b - \frac{2}{b}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos t dt.$$

Ultima integrală se poate calcula cu schimbarea de variabilă $t = \frac{\pi}{2} - y$ şi se obţine

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos t dt = -\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

Rezultă $J(b,b) = \frac{\pi}{b}\ln(2b)$ şi deci $K(b) = 0$.

b. Derivând în raport cu a, obţinem:

$$F'(a) = \int_0^1 \frac{-2a}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-2a}{1 - a^2 \sin^2 t} dt = -\frac{2a}{1 - a^2} \int_0^\infty \frac{du}{u^2 + (\frac{1}{\sqrt{1-a^2}})^2} = -\frac{a\pi}{\sqrt{1 - a^2}},$$

deci $F(a) = \pi\sqrt{1 - a^2} + k$; dar $F(0) = 0$, deci $F(a) = \pi(\sqrt{1 - a^2} - 1)$.

24. Să se calculeze integrala:

$$J(a) = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(ax)}{x\sqrt{1 - x^2}} dx, \ a \in R.$$

Soluţie
Derivata funcţiei J este:

$$J'(a) = \int_0^1 \frac{dx}{(1 + a^2x^2)\sqrt{1 - x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{(1 + a^2 \sin^2 t) \cos t} dt =$$

$$= \int_0^\infty \frac{du}{1 + (1 + a^2) u^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{1 + a^2}}.$$

Rezultă:

$$J(a) = \frac{\pi}{2} \ln\left(a + \sqrt{1 + a^2}\right) + C,$$

constanta C calculându-se din $J(0) = 0$. În final se obţine:

$$J(a) = \ln\left(a + \sqrt{1 + a^2}\right).$$

25.Formula lui Froullani
Fie $0 < a < b$ şi fie $f : [0, \infty) \mapsto R$ o funcţie continuă şi mărginită astfel încât integrala $\int_1^\infty \frac{f(t)}{t} dt$ este convergentă. Să se demonstreze egalitatea:

$$\int_0^\infty \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = f(0) \ln \frac{a}{b}.$$

Soluţie
Vom demonstra mai întâi egalitatea:

$$\int_u^\infty \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = \int_{bu}^{au} \frac{f(t)}{t} dt \ , \ \forall u > 0. \ (*)$$

Fie $u > 0$; cu schimbarea de variabilă $bx = t$, obţinem:

$$\int_u^\infty \frac{f(bx)}{x} dx = \int_{bu}^\infty \frac{f(t)}{t} dt.$$

Analog, se demonstrează şi egalitatea:

$$\int_u^\infty \frac{f(ax)}{x}dx = \int_{au}^\infty \frac{f(t)}{t}dt.$$

Prin scăderea membru cu membru a celor două egalităţi rezultă egalitatea $(*)$. Demonstrăm acum formula lui Froullani; folosind egalitatea $(*)$, avem:

$$\int_0^\infty \frac{f(bx)-f(ax)}{x}dx = \lim_{u\to 0}\int_u^\infty \frac{f(bx)-f(ax)}{x}dx = \lim_{u\to 0}\int_{bu}^{au} \frac{f(t)}{t}dt.$$

Pentru a calcula ultima integrală considerăm funcţia

$$h(u) = \sup_{t\in[au,bu]} |f(t)-f(0)|.$$

Din continuitatea funcţiei f, rezultă $\lim\limits_{u\to 0} h(u) = 0$. Evident, avem:

$$\int_{bu}^{au} \frac{f(t)}{t}dt = \int_{bu}^{au} \frac{f(t)-f(0)}{t}dt + \int_{bu}^{au} \frac{f(0)}{t}dt.$$

Prima integrală tinde la 0 pentru $u \mapsto 0$:

$$\left|\int_{bu}^{au} \frac{f(t)-f(0)}{t}dt\right| \leq \int_{bu}^{au} \frac{|f(t)-f(0)|}{t}dt \leq$$

$$\leq \int_{bu}^{au} \frac{h(u)}{t}dt = h(u)\ln\frac{a}{b} \mapsto 0 \text{ atunci când } u \mapsto 0.$$

În concluzie:

$$\int_0^\infty \frac{f(bx)-f(ax)}{x}dx = \lim_{u\to 0}\int_{bu}^{au} \frac{f(t)}{t}dt = \lim_{u\to 0}\int_{bu}^{au} \frac{f(0)}{t}dt = f(0)\ln\frac{a}{b}.$$

26. Fie $0 < a < b$; să se calculeze integralele:

a. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx.$

b. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x}dx.$

Soluţie

Se aplică formula lui Froullani.

27. Să se calculeze, folosind funcţiile Γ şi B, integralele:

a. $\int\limits_0^\infty e^{-x^p}dx, p > 0.$

b. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{4}}}{(x+1)^2}dx.$

c. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}\,dx.$

Soluţie

a. Cu schimbarea de variabilă $x^p = y$,obţinem:

$$\int_0^\infty e^{-x^p}dx = \int_0^\infty \frac{1}{p}y^{\frac{1-p}{p}}e^{-y}dy = \frac{1}{p}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{p}+1\right).$$

În cazul particular $p = 2$, obţinem:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

b. Folosind proprietăţile funcţiilor lui Euler, obţinem:

$$\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{4}}}{(x+1)^2}dx = B\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

c. Cu schimbarea de variabilă $x^3 = y$,obţinem:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\int_0^\infty \frac{y^{-\frac{2}{3}}}{1+y}dy = \frac{1}{3}B\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}.$$

28. Să se calculeze integralele:

a. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x\cos^q x\,dx, p > -1, q > -1.$

b. $\int\limits_0^1 x^{p+1}(1-x^m)^{q-1}\,dx, p > 0, q > 0, m > 0.$

c. $\int\limits_0^\infty x^p e^{-x^q}\,dx, p > -1,\ q > 0.$

d. $\int\limits_0^1 \ln^p\left(\frac{1}{x}\right) dx, p > -1.$

e. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1-x^n)^{\frac{1}{n}}}, n \in N.$

Soluţie

a. Cu schimbarea de variabilă $\sin^2 x = y$, obţinem:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^q x dx = \frac{1}{2}\int_0^1 y^{\frac{p-1}{2}}(1-y)^{\frac{q-1}{2}} dy = \frac{1}{2}B\left(\frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2}\right).$$

b. Cu schimbarea de variabilă $x^m = y$, obţinem:

$$\int_0^1 x^{p+1}(1-x^m)^{q-1}dx = \frac{1}{m}B\left(\frac{p+2}{m}, q\right).$$

c. Cu schimbarea de variabilă $x^q = y$, obţinem:

$$\int_0^\infty x^p e^{-x^q} dx = \frac{1}{q}\int_0^\infty y^{\frac{p+1}{q}-1} e^{-y} dy = \frac{1}{q}\Gamma\left(\frac{p+1}{q}\right).$$

d. Cu schimbarea de variabilă $\ln(\frac{1}{x}) = y$, obţinem:

$$\int_0^1 \ln^p\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_0^\infty y^p e^{-y} dy = \Gamma(p+1).$$

e. Cu schimbarea de variabiă $x^n = y$, obţinem:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^n)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n}\int_0^1 y^{\frac{1}{n}-1}(1-y)^{-\frac{1}{n}} dy = \frac{1}{n}B\left(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}}.$$

29. Să se calculeze integrala $\int\limits_0^\infty e^{-x^2} \cos x dx.$

Soluţie

Folosind dezvoltarea în serie de puteri (în jurul lui 0) a funcţiei cos şi teorema de integrare termen cu termen a seriilor de puteri, obţinem:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos x dx = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2n} dx =$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\int_0^\infty \frac{1}{2} y^{n-\frac{1}{2}} e^{-y} dy = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{1}{2}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{1\cdot 3\cdot 5...(2n-1)}{2^{n+1}}\sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{4}\right)^{-n} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{1}{4}}.$$

30. Să se calculeze în funcţie de B integralele:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} \text{ şi } J = \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}}.$$

Soluţie

Pentru I se face schimbarea de variabilă $x = t^{\frac{1}{3}}$; rezultă:

$$I = \frac{1}{3}\int_0^1 t^{-\frac{2}{3}}\,(1-t)^{-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{3}\,B\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right).$$

Pentru calculul lui J se face schimbarea de variabilă $x = t^{-\frac{1}{3}}$; rezultă:

$$J = \frac{1}{3}\int_0^1 t^{-\frac{5}{6}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{3}\,B\left(\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right).$$

31. Să se calculeze integralele lui Fresnel:

$$I = \int_0^\infty \cos x^2 dx \text{ şi } J = \int_0^\infty \sin x^2 dx.$$

Soluţie

Convergenţa celor două integrale rezultă din criteriul lui Abel şi cu schimbarea de variabilă $x^2 = y$. Calculăm acum:

$$J - iI = \int_0^\infty e^{-ix^2}dx.$$

Cu schimbarea de variabilă $x^2 = -it^2$ şi folosind relaţia $\Gamma(1) = 1$, obţinem $I = J = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Capitolul 2

Integrale duble şi triple

2.1 Noţiuni teoretice

Măsura Lebesgue
Fie R^k spaţiul euclidian k-dimensional şi fie $-\infty \leq a_i \leq b_i \leq \infty$, $\forall\, i = 1, 2..., k$. Un paralelipiped în R^k este orice mulţime de forma:

$$P = \{(x_1, x_2, ..., x_k) \mid a_i \leq x_i \leq b_i,\ \forall i = 1, 2, ..., k\}.$$

Inegalităţile nestricte pot fi înlocuite şi de inegalităţi stricte. Prin definiţie, mulţimea vidă şi R^k sunt paralelipipede.

Măsura (Lebesgue) a unui paralelipiped este definită prin:

$$\mu\,(P) = \Pi_{i=1}^{n}(b_i - a_i).$$

În cazurile particulare $k = 1, 2, 3$ se obţin noţiunile uzuale de lungime, arie, volum.

O submulţime $E \subseteq R^k$ se numeşte elementară dacă există $P_1, P_2, ..., P_n$ paralelipipede astfel încât $E = \bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i$.
Notăm cu $\mathcal{E}$ familia mulţimilor elementare din R^k.
Orice mulţime elementară se poate scrie ca reuniune de paralelipipede disjuncte două câte două. Dacă $E = \bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i$ este o astfel de descompunere, atunci măsura Lebesgue a lui E este: $\mu(E) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(P_i)$. Se poate arăta că $\mu(E)$ nu depinde de descompunerea considerată.

Proprietăţile aplicaţiei μ pe familia mulţimilor elementare sunt:
i. dacă $A, B \in \mathcal{E}$ atunci $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ sunt mulţimi elementare.
ii. dacă $A, B \in \mathcal{E}$ astfel încât $A \cap B = \emptyset$ atunci $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.
iii. pentru orice $A \in \mathcal{E}$ şi $\varepsilon > 0$ există $F, G \in \mathcal{E}$, F închisă şi G deschisă astfel încât:

$$F \subseteq A \subseteq G$$

$$\mu(G) - \varepsilon < \mu(A) < \mu(F) + \varepsilon.$$

Aplicaţia μ se prelungeşte la toate părţile lui R^k; fie $A \subseteq R^k$ şi fie

$$\mu^\star(A) = \inf\{\sum_{n \in N} \mu(A_n) \mid A \subseteq \bigcup_{n \in N} A_n,\ A_n \in \mathcal{E},\ A_n \text{ deschisă } \forall n \in N\}.$$

Aplicaţia $\mu^\star$ se numeşte măsură exterioară; principalele proprietăţi sunt:
i. $\mu^\star(A) \geq 0$, $\forall A \subseteq R^k$.
ii. dacă $A_1 \subseteq A_2$ atunci $\mu^\star(A_1) \leq \mu^\star(A_2)$.
iii. dacă $E \in \mathcal{E}$ atunci $\mu^\star(E) = \mu(E)$.
iv. $\mu^\star\left(\bigcup_{n \in N} A_n\right) \leq \sum_{n \in N} \mu^\star(A_n)$, $\forall A_n \subseteq R^k$.
Se demonstrează că există o σ-algebră de părţi ale lui R^k, notată $\mathcal{M}$ astfel încât restricţia $\mu^\star : \mathcal{M} \mapsto [0, \infty]$ este măsură. Măsura astfel obţinută (notată μ) se numeşte măsura Lebesgue (în R^k), iar elementele lui $\mathcal{M}$ se numesc mulţimi măsurabile Lebesgue.

Principalele proprietăţi ale spaţiului cu măsură $\left(R^k, \mathcal{M}, \mu\right)$ sunt:
i. $\mathcal{M}$ conţine mulţimile Boreliene.
ii. dacă $A \in \mathcal{M}$ atunci $\mu(A) = \inf\{\mu(D) \mid D \text{ deschisă şi } D \supseteq A\}$.
iii. dacă $A \in \mathcal{M}$ atunci $\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \text{ compactă şi } K \subseteq A\}$.
iv orice mulţime compactă are măsură Lebesgue finită.
v. dacă $A \in \mathcal{M}$, $\mu(A) = 0$ şi $B \subseteq A$ atunci $B \in \mathcal{M}$ şi $\mu(B) = 0$.
vi. dacă $A \in \mathcal{M}$ atunci pentru orice $x \in R^k$ mulţimea (translatată) $A + x = \{a + x \mid a \in A\}$ este măsurabilă Lebesgue şi $\mu(A + x) = \mu(A)$.

Integrala Lebesgue

Dacă f este o funcţie integrabilă în raport cu măsura Lebesgue (în R^k), atunci integrala corespunzătoare (pe o mulţime A) se notează

$$\int_A f(x_1, x_2, ..., x_k) dx_1 dx_2 ... dx_k.$$

În cazurile particulare (uzuale) $k = 1, 2, 3$ se folosesc notaţiile:

$$\int_A f(x)dx,\ \int\int_A f(x,y)dxdy,\ \int\int\int_A f(x,y,z)dxdydz.$$

Legătura cu integrabilitatea în sens Riemann
i. Dacă $f : [a, b] \mapsto R$ este o funcţie integrabilă Riemann (pe intervalul compact $[a, b]$), atunci f este şi integrabilă în raport cu măsura Lebesgue şi cele două integrale sunt egale.
ii. Dacă $f : [a, b] \mapsto R$ este o funcţie mărginită atunci ea este integrabilă Riemann dacă şi numai dacă mulţimea punctelor sale de discontinuitate are măsura Lebesgue nulă (se spune că f este continuă a.p.t.).
iii. Există funcţii care sunt integrabile Lebesgue dar nu sunt integrabile Riemann; de exemplu, funcţia lui Dirichlet (pe intervalul $[0, 1]$) nu este integrabilă Riemann dar este integrabilă Lebesgue (integrala sa este 0, pentru că funcţia este nulă a.p.t.).
iv. Dacă $\int_a^b f(x)dx$ este o integrală Riemann improprie absolut convergentă atunci f este integrabilă Lebesgue şi integralele sunt egale.
Există însă integrale Riemann improprii convergente $\int_a^b f(x)dx$ (dar nu absolut convergente) pentru care funcţia f nu este integrabilă Lebesgue; de exemplu $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ pe intervalul $(0, \infty)$.
Teorema lui Fubini
În continuare notăm $(x, y) \in R^{k+p}$, măsura Lebesgue în R^k cu dx, măsura Lebesgue în R^p cu dy şi măsura Lebesgue în R^{k+p} cu $dxdy$.
Fie $f : R^{k+p} \mapsto R$ o funcţie integrabilă Lebesgue; atunci:

$$\int_{R^k} \left(\int_{R^p} f(x, y)dy \right) = \int_{R^{k+p}} f(x, y)dxdy = \int_{R^p} \left(\int_{R^k} f(x, y)dx \right) dy.$$

Următoarele cazuri particulare ale rezultatului de mai sus sunt frecvent utilizate în aplicaţii.
i. Fie $\varphi, \phi : [a, b] \mapsto R$ două funcţii continue astfel încât $\varphi \leq \phi$ şi fie mulţimea

$$K = \{(x, y) \in R^2 \mid x \in [a, b],\ \varphi(x) \leq y \leq \phi(x)\}.$$

Dacă $f : K \mapsto R$ este o funcţie continuă, atunci f este integrabilă Lebesgue pe K şi:

$$\int\int_K f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\phi(x)} f(x, y)dy \right) dx.$$

În particular, aria mulţimii K este:

$$\mu(K) = \int\int_K dxdy = \int_a^b (\phi(x) - \varphi(x))\, dx.$$

ii. Fie $D \subseteq R^2$ o mulţime compactă, fie φ, $\phi : D \mapsto R$ două funcţii continue astfel încât $\varphi \leq \phi$ şi fie

$$\Omega = \{(x, y, z) \in R^3 \mid (x, y) \in D, \ \varphi(x, y) \leq z \leq \phi(x, y)\}.$$

Dacă $f : \Omega \mapsto R$ este o funcţie continuă, atunci f este integrabilă Lebesgue pe Ω şi:

$$\int\int\int_\Omega f(x, y, z) dxdydz = \int\int_D \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\phi(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dxdy.$$

În particular, volumul lui Ω este:

$$\mu(\Omega) = \int\int\int_\Omega dxdydz = \int\int_D (\phi(x, y) - \varphi(x, y))\, dxdy.$$

Formula schimbării de variabile
Fie $A \subseteq R^n$ o mulţime deschisă şi fie $\Lambda : A \mapsto \Lambda(A) \subseteq R^n$ un difeomorfism. Pentru orice funcţie continuă $f : \Lambda(A) \mapsto R$, avem:

$$\int_{\Lambda(A)} f(x)dx = \int_A (f \circ \Lambda)(y)|J_\Lambda(y)|dy,$$

unde J_Λ este iacobianul difeomorfismului Λ.

2.2 Integrale duble

1. Să se calculeze următoarele integrale duble:
a. $\displaystyle\int\int_D xy^2 dxdy$, unde $D = [0, 1] \times [2, 3]$.
b. $\displaystyle\int\int_D xydxdy$, unde $D = \{(x, y) \in R^2 \,;\, y \in [0, 1]\,,\, y^2 \leq x \leq y\}$.
c. $\displaystyle\int\int_D ydxdy$, unde $D = \{(x, y) \in R^2 \,;\, (x - 2)^2 + y^2 \leq 1\}$.
Soluţie
a. $\displaystyle\int\int_D xy^2 dxdy = \int_0^1 dx \int_2^3 xy^2 dy = \int_0^1 \frac{19}{3} x\, dx = \frac{19}{6}.$
b. $\displaystyle\int\int_D xydxdy = \int_0^1 \int_{y^2}^{y} xydx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(y^3 - y^5\right) dy = \frac{1}{24}.$
c. $\displaystyle\int\int_D ydxdy = \int_1^3 dx \int_{-\sqrt{1-(x-2)^2}}^{\sqrt{1-(x-2)^2}} ydy = 0.$

2. Să se calculeze integralele duble:

a. $\int\int_D (x+3y)dxdy$, D fiind mulţimea plană mărginită de curbele de ecuaţii

$$y = x^2 + 1,\ y = -x^2,\ x = -1,\ x = 3.$$

b. $\int\int_D e^{|x+y|}dxdy, D$ fiind mulţimea plană măginită de curbele de ecuaţii

$$x + y = 3,\ x + y = -3,\ y = 0,\ y = 3.$$

c. $\int\int_D xdxdy, D$ fiind mulţimea plană mărginită de curba de ecuaţie

$$x^2 + y^2 = 9,\ x \geq 0.$$

Soluţii

a. $\int\int_D (x + 3y)dxdy = \int_{-1}^{3} dx \int_{-x^2}^{x^2+1} (x + 3y)dy.$

b. Fie $D_1 = \{(x, y) \in D\,;\, x + y \leq 0\}$ şi $D_2 = D \setminus D_1$.
Atunci $D = D_1 \cup D_2$ şi:

$$\int\int_D e^{|x+y|}dxdy = \int\int_{D_1} e^{-x-y}dxdy + \int\int_{D_2} e^{x+y}dxdy =$$

$$= \int_0^3 dy \int_{-3-y}^{-y} e^{-x-y}dx + \int_0^3 dy \int_{-y}^{3-y} e^{x+y}dx.$$

c. $\int\int_D xdxdy = \int_{-3}^{3} dy \int_0^{\sqrt{9-y^2}} xdx.$

3. Folosind coordonatele polare, să se calculeze integralele:

a. $\int\int_D e^{x^2+y^2}dxdy,\ D = \{(x, y) \in R^2\,;\, x^2 + y^2 \leq 1\}.$

b. $\int\int_D \left(1 + \sqrt{x^2 + y^2}\right) dxdy,\ D = \{(x, y) \in R^2\,;\, x^2 + y^2 - y \leq 0,\ x \geq 0\}.$

c. $\int\int_D \ln(1 + x^2 + y^2)dxdy,\ D$ fiind mărginit de curbele de ecuaţii

$$x^2 + y^2 = e^2,\ y = x\sqrt{3},\ x = y\sqrt{3},\ x \geq 0.$$

Soluţie

Coordonatele polare sunt $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, iacobianul este ρ, iar domeniul maxim pentru coordonatele ρ şi φ este $(\rho, \varphi) \in [0, \infty) \times [0.2\pi)$.

a. In coordonate polare domeniul de integrare este dreptunghiul $(\rho, \varphi) \in [0, 2\pi) \times [0, 1]$, şi deci:

$$\int\int_D e^{x^2+y^2} dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho e^{\rho^2} d\rho = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{\rho^2}\Big|_0^1 d\varphi = \pi(e-1).$$

b. Înlocuind pe x şi y în condiţiile ce definesc domeniul D, obţinem

$$\rho \leq \sin\varphi,\ \cos\varphi \geq 0$$

şi deci

$$\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}),\ \rho \in [0, \sin\varphi].$$

Rezultă:

$$\int\int_D \left(1 + \sqrt{x^2+y^2}\right) dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sin\varphi} \rho(1+\rho) d\rho = \frac{\pi}{8} + \frac{2}{9}.$$

c. Domeniul de integrare în coordonate polare este dreptunghiul $(\rho, \varphi) \in [0, e] \times [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$, deci:

$$\int\int_D \ln(1+x^2+y^2) dxdy = \int_0^e d\rho \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \rho \ln(1+\rho^2) d\varphi =$$

$$= \frac{\pi(1+e^2)}{12}\left(\ln(1+e^2) - 1\right) + \frac{\pi}{12}.$$

4. Să se calculeze cu o eroare mai mică decât 10^{-2} integralele:

a. $\displaystyle\int\int_A \frac{dxdy}{1+xy},\ A = [0, \frac{1}{2}] \times [0, 1].$

b. $\displaystyle\int\int_B \frac{\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2-1)(x^2+y^2)}},\ dxdy$, unde:

$$B = \{(x, y)\,;\, 1 \leq x^2+y^2 \leq (e-1)^2\}.$$

Soluţii

a.

$$\int\int_A \frac{dxdy}{1+xy} = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^1 \frac{dy}{1+xy} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+xy)}{x}\Big|_0^1 dx =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n dx = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}} \cong \frac{65}{144}.$$

b. Folosim coordonatele polare:

$$\int\int_B \frac{\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2-1)(x^2+y^2)}} = 4\pi \int_1^{e-1} \frac{\ln\rho}{\rho-1} d\rho =$$

$$= 4\pi \int_0^{e-2} \frac{\ln(1+u)}{u} du = 4\pi \int_0^{e-2} \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} \rho^n d\rho =$$

$$= 4\pi \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n (e-2)^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

În continuare se aproximează suma seriei alternate obţinute.

5. Fie $D \subseteq R^2$ şi fie $f : D \mapsto [0, \infty)$ o funcţie continuă.
Să se calculeze volumul mulţimii

$$\Omega = \{(x, y, z) \in R^3 \,;\, (x, y) \in D, \, 0 \leq z \leq f(x, y)\},$$

în următoarele cazuri:
a. $D = \{(x, y) \in R^2 \,;\, x^2 + y^2 \leq 2y\}, \; f(x, y) = x^2 + y^2.$
b. $D = \{(x, y) \in R^2 \,;\, x^2 + y^2 \leq x, \; y > 0\}, \; f(x, y) = xy.$
c. $D = \{(x, y) \in R^2 \,;\, x^2 + y^2 \leq 2x + 2y - 1\}, \; f(x, y) = y.$
Soluţie
Volumul mulţimii Ω este dat de formula

$$\text{vol}(\Omega) = \int\int_D f(x, y) dx dy$$

a. Trecând la coordonate polare, se obţine:

$$\text{vol}(\Omega) = \int\int_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} \rho^3 d\rho = \frac{3}{2}\pi.$$

b. Cu aceeaşi metodă, se obţine:

$$\text{vol}(\Omega) = \int\int_D xy dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos\varphi} \rho^3 \cos\varphi \sin\varphi \, d\rho = \frac{1}{24}.$$

c. Cu schimbarea de variabile:

$$x = 1 + \rho\cos\varphi, \; y = 1 + \rho\sin\varphi, \; (\rho, \varphi) \in [0, 1] \times [0.2\pi),$$

rezultă:

$$\text{vol}(\Omega) = \int\int_D y dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho(1 + \rho\sin\varphi) d\rho = \pi.$$

6. Să se calculeze ariile mulţimilor plane D mărginite de curbele de ecuaţii:

a. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, a$ şi b fiind două constante pozitive.

b. $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2(x^2-y^2), x>0,$ a fiind o constantă pozitivă.

c. $\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2xy,$ a fiind o constantă pozitivă.

Soluţii

a. Ecuaţia elipsei în coordonate polare generalizate, $x=a\rho\cos\varphi,\ y=b\rho\sin\varphi,$ este $\rho=1$ şi deci obţinem:

$$\text{aria}(D)=\int\int_D dxdy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 ab\rho d\rho=\pi ab.$$

b. Ecuaţia curbei în coordonate polare este $\rho^2=a^2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)$, sau $\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi}$, şi deci domeniul de integrare în coordonate polare este

$$\varphi\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right),\ \rho\in(0,a\sqrt{\cos 2\varphi}).$$

Rezultă:

$$\text{aria}(D)=\int\int_D dxdy=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}}\rho d\rho=\frac{a^2}{2}.$$

c. Ecuaţia lemniscatei în coordonate polare este $\rho^2=2a^2\cos\varphi\sin\varphi$. Domeniul de integrare este $\varphi\in(0,\frac{\pi}{2})\cup(\pi,\frac{3\pi}{2}),\ \rho\in(0,a\sqrt{\sin 2\varphi})$; obţinem:

$$\text{aria}(D)=\int\int_D dxdy=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}}\rho d\rho=a^2.$$

7. Fie $\alpha\in R$ şi fie D discul unitate închis. Să se calculeze integralele:

a. $I=\displaystyle\int\int_D\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha}$

b. $J=\displaystyle\int\int_{R^2\setminus D}\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha}.$

Soluţie

$$I=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\frac{d\rho}{\rho^{2\alpha-1}}=\begin{cases}\frac{\pi}{1-\alpha} & \text{dacă} \quad \alpha<1\\ \infty & \text{dacă} \quad \alpha\geq 1\end{cases}$$

$$J=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_1^\infty\frac{d\rho}{\rho^{2\alpha-1}}=\begin{cases}\frac{\pi}{\alpha-1} & \text{dacă} \quad \alpha>1\\ \infty & \text{dacă} \quad \alpha\leq 1\end{cases}$$

2.3 Integrale triple

8. Fie mulţimea:

$$\Omega = \{(x,y,z) \in R^3\,;\, x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1,\, x^2+y^2 \geq 1,\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, 0 \leq z \leq 5\}$$

Să se calculeze integrala $\int\int\int_\Omega \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdydz$ prin două metode:
a. proiectând Ω pe planul xoy şi
b. folosind coordonatele cilindrice.
Soluţie
a. Proiecţia mulţimii Ω pe planul xoy este

$$D = \{(x,y) \in R^2\,;\, x \in [0,1],\, \sqrt{1-x^2} \leq y \leq 2\sqrt{1-x^2}\}$$

Obţinem:

$$\int\int\int_\Omega \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdydz = \int\int_D dxdy \int_0^5 \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dz =$$

$$= \frac{25}{2}\int\int_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy,$$

integrală care se calculează folosind coordonate polare.
b. Coordonatele cilindrice sunt $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi, z = z$, domeniul maxim fiind $(\rho,\varphi,z) \in [0,\infty) \times [0,2\pi) \times R$, iar iacobianul $J = \rho$.
Pentru Ω, domeniul de integrare în coordonate cilindrice este
$z \in [0,5]$, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\rho \in [1, \frac{2}{\sqrt{3\cos^2\varphi+1}}]$ şi deci:

$$\int\int\int_\Omega \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdydz = \int_0^5 dz \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_1^{\frac{2}{\sqrt{3\cos^2\varphi+1}}} \frac{z\rho\sin\varphi}{\rho}\rho\, d\rho =$$

$$= \frac{25}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3(1-\cos^2\varphi)}{3\cos^2\varphi+1}\sin\varphi\, d\varphi = \frac{25}{18}(4\sqrt{3}\pi - 9).$$

9. Să se calculeze integralele:
a. $\int\int\int_\Delta (y-x)\, dxdydz,$
$\Delta = \{(x,y,z) \in R^3\,;\, x^2+y^2+z^2 \leq 1,\, y > 0\}$
b. $\int\int\int_\Omega \left(1 - x^2 - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}} dxdydz,$
$\Omega = \{(x,y,z) \in R^3\,;\, y \geq 0,\, z \geq 0,\, x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} \leq 1\}.$

c. $\displaystyle\int\int\int_{\Pi} z\, dxdydz,$
$\Pi = \{(x, y, z) \in R^3\, ;\, x^2 + y^2 + (z-1)^2 \le 1\}.$
Soluţie
Coordonatele sferice sunt

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi,\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi,\ z = \rho\cos\theta,$$

domeniul maxim fiind:

$$(\rho, \theta, \varphi) \in [0, \infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi),$$

iar iacobianul $J = \rho^2 \sin\theta$.
a. Pentru Δ, domeniul în coordonate sferice este

$$\rho \in [0, 1],\ \theta \in [0, \pi],\ \varphi \in [0, \pi]$$

şi avem:

$$\int\int\int_{\Delta} (y - x) dxdydz =$$

$$= \int_0^1 d\rho \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\pi} \rho^3 \sin^2\theta(\sin\varphi - \cos\varphi) d\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

b. Coordonatele sferice generalizate sunt:

$$x = a\rho \sin\theta \cos\varphi,\ y = b\rho \sin\theta \sin\varphi,\ z = c\rho\cos\theta,$$

având acelaşi domeniu maxim ca mai sus şi iacobianul $J = abc\rho^2 \sin\theta$.
Pentru domeniul Ω vom lua $a = 1$, $b = 3$, $c = 2$, şi onţinem:

$$\int\int\int_{\Omega} \left(1 - x^2 - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}} dxdydz =$$

$$= \int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\pi} 6\rho^2 \left(1 - \rho^2\right)^{\frac{3}{2}} \sin\theta d\varphi = 6\pi \int_0^1 \rho^2 (1 - \rho^2)^{\frac{3}{2}}\, d\rho =$$

$$= 6\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, \cos^4 t\, dt = 6\pi \int_0^{\infty} \frac{u^2}{(1 + u^2)^4}\, du =$$

$$= 3\pi \left(- \frac{u}{3(1 + u^2)^3} \Bigg|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{du}{3(1 + u^2)^3} \right) = \pi \int_0^{\infty} \frac{du}{(1 + u^2)^3} =$$

$$= \pi \left(\int_0^{\infty} \frac{du}{(1 + u^2)^2} - \int_0^{\infty} \frac{u^2}{(1 + u^2)^3}\, du \right) = \frac{3}{4}\pi \int_0^{\infty} \frac{du}{(1 + u^2)^2} = \frac{3}{16}\pi.$$

c. Pentru Π, domeniul în coordonate sferice este

$$\varphi \in [0, 2\pi),\ \theta \in [0, \frac{\pi}{2}],\ \rho \in [0, 2\cos\theta)$$

şi deci:

$$\int\int\int_{\Pi} zdxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho^3 \sin\theta \cos\theta \, d\rho =$$

$$8\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta \, \sin\theta \, d\theta = \frac{4}{3}\pi.$$

10. Fie $0 < k < R$; să se calculeze volumul mulţimii:

$$\Omega = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2,\ z \geq k\}.$$

Soluţie

Mulţimea Ω este interiorul calotei sferice situate "deasupra" planului $z = k$. Pentru a calcula volumul, trecem la coordonate sferice. Fie $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ astfel încât $R\cos\theta_0 = k$, deci $\cos\theta_0 = \frac{k}{R}$; rezultă domeniul (pentru coordonatele sferice):

$$\varphi \in [0, 2\pi),\ \theta \in [0, \theta_0],\ \rho \in [\frac{k}{\cos\theta}, R].$$

Se obţine:

$$\int\int\int_{\Omega} dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta_0} d\theta \int_{\frac{k}{\cos\theta}}^{R} \rho^2 \sin\theta \, d\rho =$$

$$\frac{2\pi}{3} \int_0^{\theta_0} \left(R^3 - \frac{k^3}{\cos^3\theta}\right) d\theta = \frac{2\pi}{3} \left(-R^3\cos\theta - \frac{k^3}{2\cos^2\theta}\right)\Bigg|_0^{\theta_0} =$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left(R^3 - \frac{3}{2}r^2 k + \frac{k^3}{2}\right).$$

11. Să se calculeze volumele mulţimilor Ω mărginite de suprafeţele de ecuaţii:

a. $2x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $2x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $z \geq 0$.

b. $z = x^2 + y^2 - 1$, $z = 2 - x^2 - y^2$.

c. $z = 4 - x^2 - y^2$, $2z = 5 + x^2 + y^2$.

d. $x^2 + y^2 = 1$, $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$.

e. $x^2 + y^2 = 4a^2$, $x^2 + y^2 - 2ay = 0$, $x + y + z = 3$, $x \geq 0$, $z \geq 0$, $a \in (0, 1)$.

f. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $y^2 + z^2 = x^2$, $x \geq 0$.

Soluţie

a. Curba de intersecţie dintre elipsoid şi con este elipsa de ecuaţii

$$4x^2 + 2y^2 = 1,\ z = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Proiecţia pe planul xoy a lui Ω este

$$D = \{(x, y)\,;\, 4x^2 + 2y^2 \leq 1\}.$$

Rezultă:

$$\mathrm{vol}(\Omega) = \int\int\int_{\Omega} dxdydz = \int\int_D dxdy \int_{\sqrt{2x^2+y^2}}^{\sqrt{1-2x^2-y^2}} dz =$$

$$= \int\int_D \left(\sqrt{1-2x^2-y^2} - \sqrt{2x^2+y^2}\right) dxdy =$$

$$= \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{1-\frac{1}{2}\rho^2} - \sqrt{\frac{1}{2}\rho^2}\right) \frac{1}{2\sqrt{2}}\rho\, d\varphi = \frac{\pi}{3}(\sqrt{2}-1).$$

b. Curba de intersecţie a celor doi paraboloizi este cercul de ecuaţii

$$x^2 + y^2 = \frac{3}{2},\ z = \frac{1}{2}.$$

Proiecţia pe planul xOy a lui Ω este

$$D = \{(x, y)\,;\, x^2 + y^2 \leq \frac{3}{2}\},$$

şi deci obţinem:

$$\mathrm{vol}(\Omega) = \int\int\int_{\Omega} dxdydz = \int\int_D dxdy \int_{x^2+y^2-1}^{2-x^2-y^2} dz =$$

$$= \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} d\rho \int_0^{2\pi} (3-\rho^2)\rho\, d\varphi.$$

c. Curba de intersecţie dintre cei doi paraboloizi este cercul $x^2 + y^2 = 1$ situat în planul $z = 3$. Notând cu $D = \{(x, y) \in R^2 \ |\ x^2 + y^2 \leq 1\}$, rezultă:

$$\mathrm{vol}(\Omega) = \int\int\int_{\Omega} dxdydz = \int\int_D dxdy \int_{\frac{1}{2}(1+x^2+y^2)}^{4-x^2-y^2} dz =$$

$$= \int\int_D \frac{3}{2}(1-x^2-y^2)\,dxdy = \frac{3}{2}\int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi}(1-\rho^2)\rho\,d\varphi = \frac{3}{4}\pi.$$

d. Curba de intersecţie dintre cilindru şi con este cercul $x^2+y^2=1$ situat în planul $z=1$. Notând cu $D=\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}$, rezultă:

$$\mathrm{vol}(\Omega) = \int\int\int_\Omega dxdydz = \int\int_D dxdy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 dz =$$

$$= \int\int_D \left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right) dxdy = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} (1-\rho)\,\rho\,d\varphi = \frac{\pi}{3}.$$

e. Proiecţia lui Ω pe planul xOy este

$$D = \{(x,y)\,;\, x^2+y^2 \le 4a^2,\ x^2+(y-a)^2 \ge a^2,\ x>0\},$$

şi deci obţinem:

$$\mathrm{vol}(\Omega) = \int\int\int_\Omega dxdydz = \int\int_D dxdy \int_0^{3-x-y} dz =$$

$$= \int_0^\pi d\varphi \int_{2a\sin\varphi}^{2a} \rho(3-\rho\cos\varphi-\rho\sin\varphi)\,d\rho.$$

f. Curba de intersecţie dintre sferă şi con este cercul $y^2+z^2=\frac{1}{2}$, situat în planul $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Proiecţia mulţimii Ω pe planul yOz este discul $D=\{(y,z)\in R^2 \mid y^2+z^2 \le \frac{1}{2}\}$; rezultă:

$$\mathrm{vol} = \int\int\int_\Omega dxdydz = \int\int_D dydz \int_{\sqrt{y^2+z^2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx =$$

$$= \int\int_D \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{y^2+z^2}\right) dydz = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} d\rho \int_0^{2\pi} \rho^2\,d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{12}\pi.$$

12. Să se calculeze volumele mulţimilor Ω mărginite de suprafeţele de ecuaţii:

a. $\left(x^2+y^2+z^2\right)^3 = x$.

b. $\left(x^2+y^2\right)^3 = z^2$, $z=0$, $z=8$.

c. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$, $0\le z\le c$, $a>0$, $b>0$, $c>0$.

Soluţie

a. Folosim coordonatele sferice. Obţinem domeniul:
$\theta\in[0,\pi]$, $\varphi\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $\rho\in[0,\sqrt[5]{\sin\theta\cos\varphi}]$ şi deci:

$$\mathrm{vol}(\Omega) = \int\int\int_\Omega dxdydz = \int_0^\pi d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt[5]{\sin\theta\cos\varphi}} \rho^2\sin\theta\,d\rho =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, \sin^{\frac{3}{5}}\theta\, \cos^{\frac{3}{5}}\varphi\, d\varphi = \frac{1}{3}\left(\int_0^{\pi} \sin^{\frac{8}{5}}\theta\, d\theta\right)\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{3}{5}}\varphi\, d\varphi\right).$$

Calculăm prima integrală; mai întâi, observăm că:

$$\int_0^{\pi} \sin^{\frac{8}{5}}\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{8}{5}}\theta\, d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{\frac{8}{5}}\theta\, d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{8}{5}}\theta\, d\theta,$$

cu schimarea de variabilă $t = \theta - \pi$ în a doua integrală. Vom calcula acum integrala $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{8}{5}}\theta\, d\theta$ folosind funcţia B a lui Euler (a se vedea şi exerciţiul 28(a) din capitolul 5). Cu schimbarea de variabilă $\sin^2\theta = y$, rezultă:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{8}{5}}\theta\, d\theta = \int_0^1 \frac{y^{\frac{4}{5}}}{2\sqrt{y}\,\sqrt{1-y}}\, dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 y^{\frac{3}{10}}\,(1-y)^{-\frac{1}{2}}\, dy = \frac{1}{2}\, B\left(\frac{13}{10}, \frac{1}{2}\right).$$

Calculăm acum integrala $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{3}{5}}\varphi\, d\varphi$ cu aceeaşi metodă: fie $\sin^2\varphi = y$; rezultă:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{3}{5}}\varphi\, d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{3}{5}}\varphi\, d\varphi = 2\int_0^1 \frac{(1-y)^{\frac{3}{10}}}{2\sqrt{y}\,\sqrt{1-y}}\, dy =$$

$$= \int_0^1 (1-y)^{-\frac{1}{5}} y^{-\frac{1}{2}}\, dy = B\left(\frac{4}{5}, \frac{1}{2}\right).$$

În concluzie, volumul cerut este:

$$\mathrm{vol}(\Omega) = B\left(\frac{13}{10}, \frac{1}{2}\right) + B\left(\frac{4}{5}, \frac{1}{2}\right).$$

b. Folosim coordonatele cilindrice; obţinem:

$$\mathrm{vol}(\Omega) = \int\int\int_{\Omega} dxdydz = \int_0^8 dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt[3]{z}} \rho\, d\rho = 32\pi.$$

c. Folosim coordonate cilindrice generalizate:

$$x = a\rho\cos\varphi,\ y = b\rho\sin\varphi,\ z = z$$

şi obţinem:

$$\mathrm{vol}(\Omega) = \int\int\int_{\Omega} dxdydz = \int_0^c dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{z}{c}} ab\rho\, d\rho = \frac{\pi}{3}abc.$$

Capitolul 3

Integrale curbilinii şi de suprafaţă

3.1 Noţiuni teoretice

Drumuri parametrizate

Fie J un interval real; se numeşte drum parametrizat pe J cu valori în R^n orice aplicaţie continuă $\gamma : J \mapsto R^n$.
Dacă notăm $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), ..., \gamma_n(t))$, atunci relaţiile

$$x_1 = \gamma_1(t),\ x_2 = \gamma_2(t), ..., x_n = \gamma_n(t)$$

se numesc ecuaţiile parametrice ale drumului γ.
Dacă $J = [a, b]$, atunci $\gamma(a)$ şi $\gamma(b)$ se numesc capetele (extremităţile) drumului. Drumul se numeşte închis dacă $\gamma(a) = \gamma(b)$.
Opusul drumului $\gamma : [a, b] \mapsto R^n$ este, prin definiţie,

$$\gamma^- : [a, b] \mapsto R^n,\ \gamma^-(t) = \gamma(a + b - t).$$

Evident, γ şi γ^- au aceeaşi imagine.
Dacă $\gamma_1 : [a, b] \mapsto R^n$ şi $\gamma_2 : [b, c] \mapsto R^n$ sunt două drumuri parametrizate, atunci drumul concatenat $\gamma_1 \cup \gamma_2 : [a, c] \mapsto R^n$ este definit prin

$$\gamma_1 \cup \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a, b] \\ \gamma_2(t), & t \in [b, c] \end{cases}$$

Imaginea lui $\gamma_1 \cup \gamma_2$ este reuniunea imaginilor drumurilor γ_1 şi γ_2.

Un drum $\gamma : J \mapsto R^n$ se numeşte neted dacă aplicaţia γ este de clasă $\mathcal{C}^1$ şi $\gamma'(t) \neq 0, \forall t \in J$.
Un drum se numeşte neted pe porţiuni dacă este concatenarea unui număr finit de drumuri netede.

Două drumuri $\gamma_1 : I \mapsto R^n$ şi $\gamma_2 : J \mapsto R^n$ se numesc echivalente cu aceeaşi orientare (notăm $\gamma_1 \sim \gamma_2$) dacă există un difeomorfism strict crescător $\phi : I \mapsto J$ astfel încât $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \phi$. Dacă difeomorfismul de mai sus este strict descrescător, atunci cele două drumuri se numesc echivalente cu orientări opuse.

În cazurile particulare $n = 2$ (plan) şi $n = 3$ (spaţiu) notaţiile uzuale sunt $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ şi respectiv $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$.
Lungimea unui drum neted $\gamma : [a, b] \mapsto R^3$ este:

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt.$$

Integrala curbilinie de prima speţă

Fie $\gamma : [a, b] \mapsto R^3$ un drum neted şi fie $f : D \mapsto R$ o funcţie continuă astfel încât $D \supseteq \gamma([a, b])$. Integrala curbilinie de prima speţă a funcţiei f pe drumul γ este, prin definiţie:

$$\int_\gamma f(x, y, z)ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt.$$

Dacă γ_1 şi γ_2 sunt două drumuri parametrizate echivalente (indiferent de orientare) atunci $\int_{\gamma_1} fds = \int_{\gamma_2} fds$.

Aplicaţii

i. Dacă f este funcţia constantă 1, atunci se obţine lungimea drumului γ.
ii. Dacă imaginea lui γ este un fir material având densitatea f, atunci masa M şi coordonatele centrului de greutate G sunt date de formulele:

$$\mathrm{M} = \int_\gamma fds,$$

$$x_G = \frac{1}{M}\int_\gamma xfds,\ y_G = \frac{1}{M}\int_\gamma yfds,\ z_G = \frac{1}{M}\int_\gamma zfds.$$

Integrala curbilinie de speţa a doua
Fie $\alpha = Pdx+Qdy+Rdz$ o 1-formă diferenţială cu funcţiile P, Q, R continue pe un deschis $D \subseteq R^3$ şi fie

$$\gamma : [a,b] \mapsto R^3,\ \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

un drum parametrizat neted cu imaginea inclusă în D. Integrala curbilinie a formei diferenţiale α de-a lungul drumului γ este, prin definiţie:

$$\int_\gamma \alpha = \int_a^b \left(P(\gamma(t))x'(t) + Q(\gamma(t))y'(t) + R(\gamma(t))z'(t)\right) dt.$$

Definiţia se generalizează evident la n variabile. De exemplu, în două variabile:

$$\int_\gamma Pdx + Qdy = \int_a^b \left(P(\gamma(t))x'(t) + Q(\gamma(t))y'(t)\right) dt.$$

Dacă γ_1 şi γ_2 sunt două drumuri parametrizate echivalente cu aceeaşi orientare, atunci integralele corespunzătoare sunt egale:

$$\int_{\gamma_1} \alpha = \int_{\gamma_2} \alpha.$$

Dacă cele două drumuri parametrizate sunt echivalente dar cu orientări opuse, atunci integralele corespunzătoare diferă prin semn.

Notaţii vectoriale
Unei 1-forme diferenţiale $\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$ i se asociază (în mod canonic) câmpul de vectori $\overline{V} : D \mapsto R^3, \overline{V} = (P, Q, R)$. Dacă γ este un drum parametrizat neted (cu imaginea inclusă în D) atunci integrala $\int_\gamma \alpha$ se mai notează şi $\int_\gamma \overline{V} d\overline{r}$, numindu-se circulaţia câmpului $\overline{V}$ de-a lungul drumului γ. În particular, dacă $\overline{V} = \overline{F}$ este un câmp de forţe, atunci circulaţia $\int_\gamma \overline{F} d\overline{r}$ este lucrul mecanic efectuat de forţa $\overline{F}$ pe drumul γ.

Forme diferenţiale exacte
O 1-formă diferenţială $\alpha = Pdx+Qdy+Rdz$ se numeşte exactă pe mulţimea D dacă există f o funcţie (numită potenţial scalar sau primitivă) de clasă $\mathcal{C}^1(D)$ astfel încât $Df = \alpha$, sau, echivalent:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P,\ \frac{\partial f}{\partial y} = Q,\ \frac{\partial f}{\partial z} = R,$$

în orice punct din D. Câmpul de vectori $\overline{V} = (P, Q, R)$ asociat formei diferenţiale α se numeşte în acest caz câmp de gradienţi.

O 1-formă diferenţială $\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$ se numeşte închisă pe D dacă sunt verificate (în orice punct din D) egalităţile:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \ \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Definiţiile de mai sus se generalizează în mod evident la n variabile.
Importanţa formelor diferenţiale exacte este dată de următorul rezultat:
Independenţa de drum a integralei curbilinii
Fie $\alpha = Df$ o 1-formă diferenţială exactă pe D şi fie γ un drum parametrizat neted cu imaginea inclusă în D având extremităţile $p, q \in D$; atunci:
i. $\displaystyle\int_\gamma Df = f(q) - f(p)$.
ii. dacă în plus drumul γ este închis, atunci $\displaystyle\int_\gamma Df = 0$.

Din teorema de simetrie a lui Schwarz rezultă că orice formă diferenţială exactă (cu potenţialul scalar de clasă $\mathcal{C}^2$) este în mod necesar şi închisă; reciproca acestei afirmaţii este, în general, falsă. De exemplu, forma diferenţială

$$\alpha = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

este închisă pe $R^2 \setminus \{(0,0)\}$ dar nu este exactă pe această mulţime.
Are loc totuşi următorul rezultat fundamental:
Teorema lui Poincare
Fie α o 1-formă diferenţială de clasă $\mathcal{C}^1$ inchisă pe deschisul $D \subseteq R^n$. Atunci pentru orice $x \in D$ există o vecinătate deschisă a sa $U \subseteq D$ şi o funcţie $f \in \mathcal{C}^1$ astfel încât $Df = \alpha$ pe U.
Într-o formulare succintă teorema afirmă că orice 1-formă diferenţială închisă este local exactă.

Există mulţimi pe care teorema de mai sus este adevărată global. De exemplu, dacă mulţimea D este stelată (adică există un punct $x_0 \in D$ cu proprietatea că segmentul $[x_0, x] \subseteq D$, $\forall x \in D$) atunci orice 1-formă diferenţială închisă pe D este exactă pe D.

Pânze parametrizate
Fie $D \subseteq R^2$ o mulţime deschisă şi conexă; o pânză parametrizată pe D este orice aplicaţie de clasă $\mathcal{C}^1$, $\Phi : D \mapsto R^3$.
Pânza parametrizată Φ se numeşte simplă dacă aplicaţia Φ este injectivă.
Două pânze parametrizate $\Phi_1 : D_1 \mapsto R^3$ şi $\Phi_2 : D_2 \mapsto R^3$ se numesc echivalente dacă există un difeomorfism $\theta : D_1 \mapsto D_2$ astfel încât $\Phi_1 = \Phi_2 \circ \theta$.

Se spune că difeomorfismul θ păstrează orientarea dacă iacobianul său este pozitiv; în acest caz se spune Φ_1 şi Φ_2 au aceeaşi orientare; în caz contrar se spune că pânzele parametrizate au orientări opuse. Evident, două pânze parametrizate echivalente au aceeaşi imagine (în R^3), numită simplu pânză (sau porţiune de suprafaţă).

Fie $\Phi : D \mapsto R^3$, $\Phi(u,v) = (X(u,v), Y(u,v), Z(u,v))$ o pânză parametrizată; pânza Φ se numeşte regulată dacă vectorii $\dfrac{\partial \Phi}{\partial u}$ şi $\dfrac{\partial \Phi}{\partial v}$ sunt liniari independenţi în orice punct din D. În acest caz planul generat de ei se numeşte planul tangent la pânză (în punctul respectiv); vectorul normal la pânză în punctul $\Phi(u,v)$ indus de parametrizarea Φ este:

$$N_\Phi(u,v) = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}.$$

Dacă Φ_1 şi Φ_2 sunt două pânze parametrizate simple, regulate echivalente cu aceeaşi orientare, atunci versorii normalelor induse coincid:

$$n_{\Phi_1}(u,v) = \frac{1}{\parallel N_{\Phi_1}(u,v) \parallel} \cdot N_{\Phi_1}(u,v) = \frac{1}{\parallel N_{\Phi_2}(u,v) \parallel} \cdot N_{\Phi_2}(u,v) = n_{\Phi_2}(u,v).$$

Integrala de suprafaţă de prima speţă

Fie $\Phi : D \mapsto R^3$ o pânză parametrizată, fie $\Sigma = \Phi(D)$ imaginea ei şi fie $F : U \mapsto R$ o funcţie continuă pe imaginea pânzei. Integrala de suprafaţă de prima speţă a lui F pe Σ este, prin definiţie:

$$\int_\Sigma F(x,y,z)d\sigma = \int\int_D F(\Phi(u,v)) \parallel \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \parallel dudv.$$

Dacă pânza este parametrizată cartezian, $z = f(x,y), (x,y) \in D \subseteq R^2$, atunci formula de mai sus devine:

$$\int_\Sigma F(x,y,z)d\sigma = \int\int_D F(x,y,f(x,y))\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}dxdy.$$

Dacă Φ_1 şi Φ_2 sunt două parametrizări echivalente (nu neapărat cu aceeaşi orientare) atunci integralele corespunzătoare sunt egale.

Aplicaţii

i. În cazul particular $F = 1$ se obţine aria suprafeţei Σ:

$$\text{aria}\,(\Sigma) = \int_\Sigma d\sigma.$$

ii. Dacă $F \geq 0$ reprezintă densitatea unei plăci Σ, atunci masa ei este:

$$M = \int_{\Sigma} F d\sigma,$$

iar coordonatele centrului de greutate sunt:

$$x_G = \frac{1}{M}\int_{\Sigma} xF d\sigma,\ y_G = \frac{1}{M}\int_{\Sigma} yF d\sigma,\ z_G = \frac{1}{M}\int_{\Sigma} zF d\sigma.$$

iii. Fie $\overline{V}$ un câmp vectorial şi fie $\overline{n}$ versorul normalei indus de pânza parametrizată fixată; fluxul câmpului $\overline{V}$ prin suprafaţa Σ în raport cu orientarea aleasă (dată de versorul $\overline{n}$) este, prin definiţie:

$$\mathcal{F}_{\Sigma}(\overline{V}) = \int_{\Sigma} \overline{V} \cdot \overline{n}\, d\sigma.$$

Integrala de suprafaţă de speţa a doua

Prin definiţie, dacă

$$\omega = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$$

este o 2-formă diferenţială şi

$$\Phi : D \mapsto R^3,\ \Phi(u,v) = (X(u,v), Y(u,v), Z(u,v))$$

este o pânză parametrizată, atunci integrala pe suprafaţa (orientată) Σ a formei diferenţiale ω este:

$$\int_{\Sigma} \omega = \int\int_D \left((P \circ \Phi)\frac{D(Y,Z)}{D(u,v)} + (Q \circ \Phi)\frac{D(Z,X)}{D(u,v)} + (R \circ \Phi)\frac{D(X,Y)}{D(u,v)} \right) dudv,$$

unde, $\frac{D(Y,Z)}{D(u,v)}, \frac{D(Z,X)}{D(u,v)}, \frac{D(X,Y)}{D(u,v)}$ sunt iacobienii funcţiilor X, Y, Z în raport cu variabilele u şi v.

Dacă Φ_1 şi Φ_2 sunt două pânze parametrizate echivalente cu aceeaşi orientare, atunci integralele corespunzătoare sunt egale; dacă parametrizările au orientări opuse, atunci integralele diferă prin semn.

Notaţii vectoriale

Unei 2-forme diferenţiale $\omega = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$ i se asociază (în mod canonic) câmpul de vectori $\overline{V} = (P, Q, R)$; dacă $\Phi : D \mapsto R^3$ este o pânză parametrizată cu imaginea Σ (orientată cu versorul normalei $\overline{n}$), atunci:

$$\int_{\Sigma} \omega = \int_{\Sigma} \overline{V} \cdot \overline{n}\, d\sigma.$$

3.2 Integrale curbilinii

1. Fie $a \in R$ şi fie $P, Q : R^2 \mapsto R$, $P(x,y) = x^2 + 6y$, $Q(x,y) = 3ax - 4y$. Să se afle a astfel încât $\omega = Pdx + Qdy$ să fie o 1-formă diferenţială exactă pe R^2 şi apoi să se determine $f \in \mathcal{C}^1(R^2)$ cu proprietatea $df = \omega$.

Soluţie

Spaţiul R^2 este mulţime stelată, deci este suficient ca ω să fie 1-formă diferenţială închisă , adică $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$; rezultă $a = 2$. O primitivă (potenţial scalar) a lui ω se calculează fie integrând sistemul $\dfrac{\partial f}{\partial x} = P$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = Q$, fie direct cu formula

$f(x,y) = \displaystyle\int_{x_o}^{x} P(x, y_o)dx + \int_{y_o}^{y} Q(x,y)dy$, unde x_o şi y_o sunt arbitrari fixaţi; obţinem $f(x,y) = \dfrac{x^3}{3} + 6xy - 2y^2 + k$, $k \in R$.

2. Fie $P, Q : R^2 \mapsto R$, definite prin:

$$P(x,y) = \sqrt{\sqrt{x^2+y^2} - x},\ Q(x,y) = \sqrt{\sqrt{x^2+y^2} + x}$$

şi fie $\omega = Pdx + Qdy$. Să se găsească un domeniu maximal pe care forma diferenţială ω să fie exactă.

Soluţie

Funcţiile P şi Q sunt de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $R^2 \setminus \{(0,0)\}$ şi:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\sqrt{x + \sqrt{x^2+y^2}}}{2\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y}{|y|}\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Mulţimea $D = \{(x,y) \in R^2\,;\, y > 0\}$ este stelată şi $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ pe D; evident, D este maximală cu aceste proprietăţi.

3. Folosind definiţia, să se calculeze următoarele integrale curbilinii (orientarea curbei nu este precizată):

a. $\displaystyle\int_\Gamma (x+y)dx + (x-y)dy$, $\Gamma = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 4, y \geq 0\}$.

b. $\displaystyle\int_\Gamma \frac{y}{x+1}dx + dy$, Γ este triunghiul ABC, $A(2,0), B(0,0), C(0,2)$.

c. $\displaystyle\int_\Gamma xdy - ydx$, $\Gamma = \{(x,y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$.

Soluţie

a. Cu parametrizarea $x(t) = 2\cos t$, $y(t) = 2\sin t$, $t \in [0, \pi]$ obţinem:

$$\int_\Gamma (x+y)dx + (x-y)dy = \int_0^\pi (4\cos 2t - 4\sin 2t) = 0.$$

b. $\Gamma = [AC] \cup [CB] \cup [BA]$; parametrizăm fiecare segment:

$$[AC] : x(t) = 2 - t,\ y(t) = t,\ t \in [0, 2]$$

$$[CB] : x(t) = 0,\ y(t) = 2 - t,\ t \in [0, 2]$$

$$[BA] : x(t) = t,\ y(t) = 0,\ t \in [0, 2];$$

obţinem:

$$\int_\Gamma \frac{y}{x+1}dx + dy = \int_0^2 \left(\frac{t}{t-3} + 1\right) dt - \int_0^2 dt = 2 - 3\ln 3.$$

c. Parametrizarea canonică a elipsei de semiaxe a şi b este

$$x(t) = a\cos t,\ y(t) = b\sin t,\ t \in [0, 2\pi);$$

obţinem:

$$\int_\Gamma xdy - ydx = \int_0^{2\pi} abdt = 2\pi ab.$$

4. Fie $P(x,y) = e^{-x^2+y^2}\cos(2xy)$, $Q(x,y) = e^{-x^2+y^2}\sin(2xy)$ şi fie

$$\omega = Pdx + Qdy.$$

a. Să se arate că $\displaystyle\int_\Gamma \omega = 0$ pentru orice curbă închisă Γ.
b. Fie $\alpha \in R$. Să se calculeze integrala

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\cos(2\alpha t)dt,$$

aplicând rezultatul de la punctul a dreptunghiului $\Gamma = ABCD$, unde

$$A(0,0), B(a,0), C(a,\alpha), D(0,\alpha).$$

Soluţie
a. Deoarece $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, rezultă că ω este 1-formă diferenţială închisă pe R^2

şi deci şi exactă; în consecinţă, $\int_\Gamma \omega = 0$, pentru orice curbă închisă Γ.
b. Parametrizând $\Gamma = [AB] \cup [BC] \cup [CD] \cup [DA]$, obţinem:

$$0 = \int_\Gamma \omega = \int_0^a e^{-t^2} dt + \int_0^\alpha e^{-a^2+t^2} \sin(2at) dt - \int_0^a e^{-t^2+\alpha^2} \cos(2\alpha t) dt.$$

Pentru $a \to \infty$, obţinem:

$$\int_0^\infty e^{-t^2} \cos(2\alpha t) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\alpha^2},$$

deoarece

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ şi } \lim_{a \to \infty} \int_0^\alpha e^{-a^2+t^2} \sin(2\alpha t) dt = 0.$$

5. Să se calculeze $\int_\Gamma \omega$ în următoarele cazuri:
a. $\omega = x^2 yz dx + xy^2 z dy + xyz^2 dz$, iar Γ este intersecţia suprafeţelor

$$x = 1,\ y^2 + z^2 = 1.$$

b. $\omega = z(z-y)dx + xzdy - xydz,\ \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, unde Γ_1, Γ_2 şi Γ_3 sunt intersecţiile conului $x^2 + y^2 = (z-1)^2$ cu planele $x = 0$, $y = 0$, şi, respectiv, $z = 0$, cu restricţiile $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.
c. $\omega = (y - 2z)dx + (x - z)dy + (2x - y)dz$, Γ fiind intersecţia suprafeţelor

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,\ x - y + z = 0.$$

d. $\omega = ydx + (x + z)dy + x^2 dz$, Γ fiind intersecţia suprafeţelor

$$x^2 + y^2 - 2x = 0,\ x + z = 4.$$

Soluţie
Integralele se calculează cu definiţia.
a. Γ este un cerc situat în planul $x = 1$; o parametrizare este:

$$x = 1,\ y = \cos t,\ z = \sin t,\ t \in [0, 2\pi).$$

Rezultă:

$$\int_\Gamma \omega = \int_0^{2\pi} \left(-\cos^2 t \sin^2 t + \cos^2 t \sin^2 t \right) dt = 0.$$

b. În planul $x = 0$ obţinem dreapta de ecuaţie $y + z = 1$, în planul $y = 0$ obţinem dreapta $x + z = 1$, iar în planul $z = 0$ obţinem sfertul de cerc

$x^2 + y^2 = 1, x > 0, y > 0$. Rezultă parametrizările:
$\Gamma_1 : x(t) = 0,\ y(t) = 1 - t,\ z(t) = t,\ t \in [0, 1]$.
$\Gamma_2 : x(t) = t,\ y(t) = 0,\ z(t) = 1 - t,\ t \in [0, 1]$.
$\Gamma_3 : x(t) = \cos t,\ y(t) = \sin t,\ z(t) = 0,\ t \in [0, \frac{\pi}{2})$.
În continuare se aplică definiţia.
c. Curba este o elipsă situată în planul $x - y + z = 0$; înlocuind $z = y - x$ în ecuaţia sferei obţinem: $x^2 + y^2 + (y - x)^2 = r^2$. Pentru a aduce ecuaţia acestei conice la forma canonică, facem schimbarea de variabile: $x - y = u$, $x + y = v$; obţinem ecuaţia:

$$\frac{u^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}r\right)^2} + \frac{v^2}{\left(\sqrt{2}r\right)^2} = 1.$$

Rezultă parametrizarea:

$$u(t) = x(t) - y(t) = \sqrt{\frac{2}{3}}\, r \cos t,$$

$$v(t) = x(t) + y(t) = \sqrt{2}\, r \sin t,$$

$$z(t) = y(t) - x(t) = -\sqrt{\frac{2}{3}}\, r \cos t,\ t \in [0, 2\pi).$$

Se obţine:

$$x(t) = \frac{1}{2}\, r \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \cos t + \sqrt{2} \sin t \right),$$

$$y(t) = \frac{1}{2}\, r \left(\sqrt{2} \sin t - \sqrt{\frac{2}{3}} \cos t \right),$$

$$z(t) = -\sqrt{\frac{2}{3}}\ r \cos t,\ t \in [0, 2\pi).$$

În continuare se aplică definiţia.
d. Ecuaţia canonică a cilindrului este $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ şi deci

$$x(t) - 1 = \cos t,\ y(t) = \sin t,\ z(t) = 3 - \cos t,\ t \in [0, 2\pi).$$

În continuare se aplică definiţia.

6. Să se calculeze $\int_\Gamma y dx + x dy$ pe un drum cu capetele $A(2, 1)$ şi $B(1, 3)$.

Soluţie

Forma diferenţială $\alpha = y dx + x dy$ este închisă pe R^2 şi deci este exactă. Rezultă că integrala este independentă de drumul particular care uneşte punctele A şi B. Integrala se calculează pe un drum particular, de exemplu pe segmentul $[AB]$, a cărui parametrizare este:

$$x(t) = \frac{5-t}{2},\ y(t) = t,\ t \in [1,3].$$

O altă metodă constă în a determina un potenţial scalar f pentru 1-forma diferenţială α:

$$f(x,y) = \int_{x_0}^{x} y_0 dx + \int_{y_0}^{y} x dy = xy + k,$$

k fiind o constantă arbitrară. Integrala cerută în enunţ este:

$$\int_\Gamma \alpha = f(B) - f(A) = 1,$$

Γ fiind un drum arbitrar având capetele A şi B.

7. Fie $P, Q, R : \Omega = \{(x,y,z)\,;\, y > 0, z \geq 0\} \mapsto R$,

$$P(x,y,z) = x^2 - yz + \frac{y}{x^2+y^2},$$

$$Q(x,y,z) = y^2 - zx - \frac{x}{x^2+y^2},$$

$$R(x,y,z) = z^2 - xy.$$

Notând cu $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$, să se calculeze $\int_\Gamma \omega$, unde Γ este un drum parametrizat arbitrar (inclus în Ω) ce uneşte punctele $A(1,1,0)$ şi $B(-1,1,0)$.

Soluţie

Observăm că ω este o 1-formă diferenţială închisă:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} - z = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = -y = \frac{\partial P}{\partial z},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = -x = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

Domeniul Ω este stelat, aşadar ω este exactă pe Ω. Rezultă că $\int_\Gamma \omega$ nu depinde de drumul parametrizat Γ, ci doar de extremităţile A şi B şi de

orientare (de la A către B).
Fie parametrizarea $x(t) = -t$, $y(t) = 1$, $z(t) = 0$, $t \in [-1, 1]$; obţinem:

$$\int_\Gamma \omega = -\int_{-1}^{1} \left(t^2 + \frac{1}{t^2+1} \right) dt = -\frac{2}{3} - \frac{\pi}{2}.$$

Să mai facem observaţia că raţionamentul de mai sus nu mai este corect dacă drumul nu ar fi inclus în Ω, deoarece, pe un astfel de domeniu ω nu ar mai fi exactă şi deci integrala nu ar mai fi independentă de drum.
De exemplu, să considerăm punctele $C(1, -1, 0)$, $D(-1, -1, 0)$ şi drumul Γ_1 format prin concatenarea segmentelor (orientate) $[AC] \cup [CD] \cup [DB]$.
Atunci $\displaystyle\int_{\Gamma_1} \omega \neq \int_\Gamma \omega$. Într-adevăr, cu parametrizarea:
$[AC] : x(t) = 1$, $y(t) = -t$, $z(t) = 0$, $t \in [-1, 1]$,
$[CD] : x(t) - t$, $y(t) = -1$, $z(t) = 0$, $t \in [-1, 1]$,
$[DB] : x(t) = -1$, $y(t) = t$, $z(t) = 0$, $t \in [-1, 1]$.
se obţine:

$$\int_{\Gamma_1} \omega = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} + \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} + \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3} = -\frac{2}{3} + 3\frac{\pi}{2}.$$

8. Fie $P, Q : R^2 \setminus \{(x, y) \mid xy = -1\} \mapsto R$,

$$P(x, y) = \frac{y}{1+xy},\ Q(x, y) = \frac{x}{1+xy}$$

şi fie $\alpha = Pdx + Qdy$. Să se calculeze integrala $\displaystyle\int_\Gamma \alpha$, unde Γ este un drum arbitrar având capetele $A(-1, -1)$ şi $B(3, 3)$ şi nu intersectează hiperbola $xy = -1$.
Soluţie
Forma diferenţială α este închisă:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{(1+xy)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x},\ \forall\, (x, y) \in R^2,\ xy \neq -1.$$

Mulţimea $\Omega = \{(x, y) \in R^2 \mid xy > -1\}$ este stelată, deci pe Ω α este exactă. Rezultă că integrala este independentă de drumul particular (inclus în Ω) care uneşte punctele A şi B. Un potenţial scalar pentru α pe mulţimea Ω este:

$$f(x, y) = \int_{x_0}^{x} \frac{y_0}{1+xy_0} dx + \int_{y_0}^{y} \frac{x}{1+xy} dy = \ln(1+xy) + k, xy > -1,$$

şi deci integrala este:

$$\int_\Gamma \alpha = f(B) - f(A) = \ln 5.$$

9. Să se calculeze circulaţia câmpului de vectori $\overline{V}$ de-a lungul curbei Γ în următoarele cazuri:
a. $\overline{V} = -(x^2+y^2)\overline{i} - (x^2-y^2)\overline{j}$,
$\Gamma = \{(x,y) \in R^2\,; x^2+y^2 = 4,\ y<0\} \cup \{(x,y) \in R^2\,; x^2+y^2-2x = 0, y \geq 0\}$.
b. $\overline{V} = x\overline{i} + xy\overline{j} + xyz\overline{k}$,
$\Gamma = \{(x,y,z) \in R^3\,;\ x^2+y^2 = 1\} \cap \{(x,y,z) \in R^3\,;\ x+z = 3\}$.
Soluţie
Câmpului de vectori $\overline{V} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$ i se asociază, prin definiţie, 1-forma diferenţială $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$; circulaţia lui $\overline{V}$ de-a lungul lui Γ este, prin definiţie integrala curbilinie: $\int_\Gamma \overline{V} d\overline{r} = \int_\Gamma \omega$.
a. Notăm:

$$\Gamma_1 = \{(x,y) \in R^2\,; x^2+y^2 = 4,\ y<0\},$$

$$\Gamma_2 = \{(x,y) \in R^2\,; x^2+y^2-2x = 0,\ y \geq 0\}.$$

O parametrizare (în sens trigonometric pozitiv) pentru Γ se obţine astfel:

$$\Gamma_1 : x(t) = 2\cos t,\ y(t) = 2\sin t,\ t \in [\pi, 2\pi),$$

$$\Gamma_2 : x(t) = 1+\cos t,\ y(t) = \sin t,\ t \in [0,\pi].$$

b. Parametrizarea este: $x(t) = \cos t,\ y(t) = \sin t,\ z(t) = 3-\cos t,\ t \in [0, 2\pi)$.

10. Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de prima speţă:
a. $\int_\Gamma yds$, $\Gamma : x(t) = \ln(\sin t) - \sin^2 t,\ y(t) = \dfrac{1}{2}\sin 2t,\ \ t \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$.
b. $\int_\Gamma xyds$, $\Gamma : x(t) = |t|,\ y(t) = \sqrt{1-t^2},\ t \in [-1,1]$.
c. $\int_\Gamma |x-y|$, $\Gamma : x(t) = |\cos t|,\ y(t) = \sin t,\ t \in [0,\pi]$.
Soluţie
a. Cu definiţia, obţinem:

$$\int_\Gamma yds = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\sin 2t \sqrt{(\text{ctg}t - \sin 2t)^2 + \cos^2 2t}\, dt =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (2\cos^2 t - 1)\sin t dt = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{5}{12}.$$

b. Integrala se descompune într-o sumă de două integrale:

$$\int_\Gamma xyds = \int_{-1}^{0} -tdt + \int_0^1 tdt = 1.$$

c. Aplicând definiţia, obţinem:

$$\int_\Gamma |x-y|\, ds = \int_0^\pi |\,|\cos t| - \sin t\,|\, dt = 4(\sqrt{2}-1).$$

11. Să se calculeze lungimea L a arcului de parabolă
$x = \frac{p}{2} - \frac{y^2}{2p}$, $y \in [-p, p]$.
Soluţie
Cu parametrizarea

$$y(t) = t,\ x(t) = \frac{p}{2} - \frac{t^2}{2p}, t \in [-p, p\,],$$

avem:

$$L = \int_\Gamma ds = \int_{-p}^{p} \sqrt{1 + \frac{t^2}{p^2}} dt = \frac{2}{p}\int_0^p \sqrt{t^2+p^2}\, dt =$$

$$= \frac{2}{p}\int_0^p \frac{t^2+p^2}{\sqrt{t^2+p^2}}\, dt = 2p\int_0^p \frac{dt}{\sqrt{t^2+p^2}} + \frac{2}{p}\int_0^p \frac{t^2}{\sqrt{t^2+p^2}}\, dt =$$

$$= 4p\ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \frac{2}{p}\int_0^p t\cdot \frac{t}{\sqrt{t^2+p^2}}\, dt =$$

$$= 4p\ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \frac{2}{p}\left(t\sqrt{t^2+p^2}|_0^p - \int_0^p \sqrt{t^2+p^2}\, dt\right).$$

Rezultă:

$$L = p\left(\sqrt{2} + 2\ln(1+\sqrt{2})\right).$$

12. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al unui arc de cerc de rază R şi de măsură $\alpha \in (0, \pi)$, presupus omogen.
Soluţie
Coordonatele centrului de greutate G ale unei curbe plane Γ omogene sunt:

$$x_G = \frac{1}{L}\int_\Gamma xds,\ y_G = \frac{1}{L}\int_\Gamma ds,$$

unde L este lungimea firului. Considerăm originea axelor de coordonate în centrul cercului şi fie A şi B două puncte simetrice faţă de axa Ox cu măsura

arcului AB egală cu α.
Cu parametrizarea $x(t) = R\cos t$, $y(t) = R\sin t$, $t \in (-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2})$, obţinem:

$$x_G = \frac{1}{\alpha}\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} R\cos t dt = \frac{2R}{\alpha}\sin\frac{\alpha}{2},\ y_G = 0.$$

13. Să se calculeze masa firului material Γ de ecuaţii parametrice:

$$x(t) = t,\ y(t) = \frac{1}{2}t^2,\ z(t) = \frac{1}{3}t^3,\ t \in [0,1],$$

şi având densitatea $F(x,y,z) = \sqrt{2y}$.
Soluţie
Conform formulei masei:

$$\mathrm{M} = \int_\Gamma F(x,y,z)ds = \int_\Gamma \sqrt{2y}\, ds = \int_0^1 \sqrt{t^2\left(1+t^2+t^4\right)}\, dt =$$

$$= \int_0^1 t\sqrt{1+t^2+t^4}\, dt = \int_0^1 t\sqrt{\left(t^2+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \sqrt{u^2+\frac{3}{4}}\, du =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{u^2+\frac{3}{4}}{\sqrt{u^2+\frac{3}{4}}}\, du = \frac{3}{8}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{du}{\sqrt{u^2+\frac{3}{4}}} + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{u^2}{\sqrt{u^2+\frac{3}{4}}}\, du =$$

$$= \frac{3}{8}\ln\left(u+\sqrt{u^2+\frac{3}{4}}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\, u\sqrt{u^2+\frac{3}{4}}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \sqrt{u^2+\frac{3}{4}}\, du.$$

Ultima integrală este M, deci (după calcule) se obţine:

$$M = \frac{3}{8}\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{4}\left(3\sqrt{3}-1\right).$$

14. Să se calculeze masa şi coordonatele centrului de greutate ale firului material Γ cu parametrizarea:

$$x(t) = t,\ y(t) = \mathrm{ch}t,\ t \in [0,1]$$

şi densitatea $f(x,y)=y$.
Soluţie
Masa firului este:

$$M=\int_\Gamma y ds=\int_0^1 \text{ch}t\sqrt{1+\text{sh}^2t}\,dt=\int_0^1 \text{ch}^2tdt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 (1+\text{ch}2t)\,dt=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\text{sh}2t\right)\Big|_0^1=\frac{1}{4}\,(2+\text{sh}2)\,.$$

Coordonatele centrului de greutate:

$$x_G=\frac{1}{M}\int_0^1 t\,\text{ch}^2tdt=\frac{1}{2M}\int_0^1 (t+t\,\text{ch}2t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2M}\left(\frac{t^2}{2}\Big|_0^1+\frac{1}{2}t\,\text{sh}2t\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 \text{sh}2tdt\right)=\frac{1}{8M}\,(3+2\,\text{sh}2-\text{ch}2)\,.$$

$$y_G=\frac{1}{M}\int_0 \text{ch}^3tdt=\frac{1}{M}\int_0^1\left(1+\text{sh}^2t\right)\,\text{sh}tdt=$$

$$=\frac{1}{M}\left(\text{sh}t+\frac{1}{3}\text{sh}^3t\right)\Big|_0^1=\frac{1}{M}\left(\text{sh}1+\frac{1}{3}\text{sh}^31\right).$$

3.3 Integrale de suprafaţă

15. În fiecare din exemplele următoare se dă o pânză parametrizată $D\ni(u,v)\mapsto\Phi(u,v)=(X(u,v),Y(u,v),Z(u,v))\in R^3$.
Să se calculeze vectorii tangenţi la suprafaţă şi versorul normalei la suprafaţă.
Să se găsească în fiecare caz şi ecuaţia în coordonate carteziene.
a. Sfera; fie $R>0$; $\Phi:[0,\pi]\times[0,2\pi)\mapsto R^3$,

$$\Phi(\theta,\varphi)=(R\sin\theta\cos\varphi,R\sin\theta\sin\varphi,R\cos\theta).$$

b. Paraboloidul; fie $a>0$, $h>0$; $\Phi:[0,h]\times[0,2\pi)\mapsto R^3$,

$$\Phi(u,v)=(au\cos v,au\sin v,u^2).$$

c. Elipsoidul; fie $a>0,b>0,c>0$; $\Phi:[0,\pi]\times[0,2\pi)\mapsto R^3$,

$$\Phi(\theta,\varphi)=(a\sin\theta\cos\varphi,b\sin\theta\sin\varphi,c\cos\theta).$$

d. Conul; fie $h > 0$; $\Phi : [0, 2\pi) \times [0, h] \mapsto R^3$,

$$\Phi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, v).$$

e. Cilindrul; fie $a > 0$, $0 \leq h_1 \leq h_2$; $\Phi : [0, 2\pi) \times [h_1, h_2] \mapsto R^3$,

$$\Phi(\varphi, z) = (a \cos \varphi, a \sin \varphi, z).$$

f. Parametrizare carteziană; fie $D \subset R^2$ şi fie $f : D \mapsto R$, $f \in \mathcal{C}^1(D)$.

$$\Phi : D \mapsto R^3,\ \Phi(x, y) = (x, y, f(x, y)).$$

g. Suprafaţă de rotaţie în jurul axei Oz:
Fie $0 < r_1 < r_2$ şi fie $f : [r_1, r_2] \mapsto R$, $f \in \mathcal{C}^1(D)$.

$$\Phi : [r_1, r_2] \times [0, 2\pi) \mapsto R^3,\ \Phi(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, f(r)).$$

h. Torul; fie $0 < a < b$; $\Phi : [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \mapsto R^3$,

$$\Phi(u, v) = ((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u)\,.$$

Soluţie
Vectorii tangenţi la suprafaţă sunt $\dfrac{\partial \Phi}{\partial u}$ şi $\dfrac{\partial \Phi}{\partial v}$, iar versorul normalei este

$$\frac{1}{\parallel \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \parallel} \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}.$$

16. În continuare, $\omega = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$ este o 2-formă diferenţială iar Σ este imaginea unei pânze parametrizate; să se calculeze integrala de suprafaţă $\displaystyle\int_\Sigma \omega$.
a. $\omega = y dy \wedge dz + z dz \wedge dx + x dx \wedge dy$,
$\Sigma :\ X(u, v) = u \cos v,\ Y(u, v) = u \sin v,\ Z(u, v) = cv$,
$(u, v) \in [a, b] \times [0, 2\pi)$.
b. $\omega = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$,
$\Sigma :\ x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.
c. $\omega = yz dy \wedge dz + zx dz \wedge dx + xy dx \wedge dy$,
$\Sigma :\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.
d. $\omega = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx$,
$\Sigma :\ x^2 + y^2 = z^2,\ z \in [1, 2]$.
e. $\omega = (y + z) dy \wedge dz + (x + y) dx \wedge dy$,
$\Sigma :\ x^2 + y^2 = a^2,\ z \in [0, 1]$.

Soluţie
Aplicăm definiţia integralei de suprafaţă de speţa a doua.
a. Iacobienii:

$$\frac{D(Y,Z)}{D(u,v)} = c\sin v,\ \frac{D(Z,X)}{D(u,v)} = -c\cos v,\ \frac{D(X,Y)}{D(u,v)} = u,$$

şi deci:

$$\int_{\Sigma} \omega = \int_a^b du \int_0^{2\pi} \left(cu\sin^2 v - c^2 v\cos v + u^2\cos v\right) dv = \frac{1}{2}\pi c\left(b^2 - a^2\right)$$

b. Parametrizăm sfera de centru O şi rază R:

$$X(\theta,\varphi) = R\sin\theta\cos\varphi,\ Y(\theta,\varphi) = R\sin\theta\sin\varphi,\ Z(\theta,\varphi) = R\cos\theta,$$

domeniul parametrizării $(\theta,\varphi) \in D = [0,\pi] \times [0,2\pi)$.

$$\frac{D(Y,Z)}{D(\theta,\varphi)} = R^2\sin^2\theta\cos\varphi,$$
$$\frac{D(Z,X)}{D(\theta,\varphi)} = R^2\sin^2\theta\sin\varphi,$$
$$\frac{D(X,Y)}{D(\theta,\varphi)} = R^2\sin\theta\cos\theta$$

Rezultă $\int_{\Sigma} \omega = 4\pi R^3$.
c. Parametrizarea canonică a elipsoidului este:

$$X(\theta,\varphi) = aR\sin\theta\cos\varphi,\ Y(\theta,\varphi) = bR\sin\theta\sin\varphi,\ Z(\theta,\varphi) = cR\cos\theta,$$
$$\theta \in [0,\pi],\ \varphi \in [0,2\pi).$$

În continuare calculul este asemănător cu cel de la punctul anterior.
d. Parametrizarea canonică a conului este:

$$X(u,v) = v\cos u,\ Y(u,v) = v\sin u,\ Z(u,v) = v,$$
$$(u,v) \in D = [0,2\pi) \times [1,2].$$

Iacobienii:

$$\frac{D(Y,Z)}{D(u,v)} = v\cos u,\ \frac{D(Z,X)}{D(u,v)} = v\sin u,\ \frac{D(X,Y)}{D(u,v)} = -v.$$

Rezultă integrala:

$$\int_{\Sigma} \omega = \int \int_{D} \left(v^2 \cos^2 u + v^2 \sin^2 u\right) dudv = \frac{14}{3}\pi.$$

e. Parametrizarea canonică a cilindrului este: $(\varphi, z) \in D = [0, 2\pi) \times [0, 1]$,

$$X(\varphi, z) = a \cos \varphi,\ Y(\varphi, z) = a \sin \varphi,\ Z(\varphi, z) = z, .$$

Iacobienii:

$$\frac{D(Y, Z)}{D(\varphi, z)} = a \cos \varphi,\ \frac{D(Z, X)}{D(\varphi, z)} = a \sin \varphi,\ \frac{D(X, Y)}{D(\varphi, z)} = 0.$$

Rezultă integrala:

$$\int_{\Sigma} \omega = \int \int_{D} (a \sin \varphi + z)\ a \cos \varphi\ d\varphi dz = 0.$$

17. Să se calculeze integralele de suprafaţă:
a. $\displaystyle\int_{\Sigma} xzdy \wedge dz + yzdz \wedge dx + (x + y)dx \wedge dy,$
$\Sigma = \{(x, y, z)\,;\, x^2 + y^2 = a^2, x > 0, y > 0, 0 < z < h\}.$
b. $\displaystyle\int_{\Sigma} xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy,$
$\Sigma = \{(x, y, z)\,;\, x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x > 0, y > 0, z > 0\}.$
Soluţie
a. Parametrizarea lui Σ (o submulţime a unui cilindru) este:

$$X(\varphi, z) = a \cos \varphi, Y(\varphi, z) = a \sin \varphi,\ Z(\varphi, z) = z,$$

domeniul parametrizării fiind $(\varphi, z) \in D = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, h)$. Rezultă:

$$\int_{\Sigma} xzdy \wedge dz + yzdz \wedge dx + (x + y)dx \wedge dy = \int \int_{D} a^2 zd\varphi dz = \frac{a^2 h^2}{4}\pi.$$

b. Porţiunea de sferă Σ are parametrizarea:

$$X(\theta, \varphi) = R \sin \theta \cos \varphi, Y(\theta, \varphi) = R \sin \theta \sin \varphi,\ Z(\theta, \varphi) = R \cos \theta,$$

domeniul parametrizării $(\theta, \varphi) \in D = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2})$.
În continuare calculul este similar cu cel din exerciţiul anterior (punctul b).

18. Să se calculeze integrala de suprafaţă de prima speţă

$$\int_{\Sigma} F(x,y,z)d\sigma$$

în următoarele cazuri:
a. $F(x,y,z)=|xyz|$, $\Sigma:\ z^2=x^2+y^2,\ z\in[0,1]$.
b. $F(x,y,z)=y\sqrt{z}$, $\Sigma:\ x^2+y^2=6z,\ z\in[0,2]$.
c. $F(x,y,z)=z^2$, $\Sigma=\{(x,y,z)\,;\,z=\sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2-6y\leq 0.\}$.
Soluţie
Se aplică definiţia integralei de suprafaţă de prima speţă.
a. Parametrizarea carteziană a conului este:

$$z=f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2},\ D=\{(x,y)\,;\,x^2+y^2\leq 1\}.$$

Rezultă:

$$\int_{\Sigma}|xyz|d\sigma=\int\int_D |xy|\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy=$$

$$=\sqrt{2}\int\int_D |xy|\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\frac{4\sqrt{2}}{5}.$$

b. Parametrizarea carteziană a paraboloidului este:

$$z=f(x,y)=\frac{1}{6}(x^2+y^2),\ D=\{(x,y)\in R^2\ |\ x^2+y^2\leq\ 12\}.$$

Rezultă:

$$\int_{\Sigma} y\sqrt{z}d\sigma=\int\int_D y\sqrt{\frac{1}{6}(x^2+y^2)}\ \sqrt{1+\frac{1}{9}(x^2+y^2)}\,dxdy=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{12}}\rho^3\sqrt{1+\frac{\rho^2}{9}}\ \sin\varphi=0.$$

c. Cu parametrizarea carteziană

$$z=\sqrt{x^2+y^2},\ (x,y)\in D=\{(x,y)\ |\ x^2+y^2\leq 6y\}.$$

rezultă:

$$\int_{\Sigma} z^2 d\sigma=\int\int_D (x^2+y^2)dxdy=$$

$$=\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{6\sin\varphi}\rho^3 d\rho=\frac{243}{2}\pi.$$

19. Să se calculeze ariile suprafeţelor:
a. sfera de rază R.
b. conul $z^2 = x^2 + y^2,\ z \in [0, h]$.
c. paraboloidul $z = x^2 + y^2,\ z \in [0, h]$.
Soluţii
a. Parametrizarea canonică a sferei este:

$$X(\theta, \varphi) = R \sin\theta \cos\varphi,\ Y(\theta, \varphi) = R \sin\theta \sin\varphi,\ Z(\theta, \varphi) = R \cos\theta,$$

domeniul parametrizării $(\theta, \varphi) \in D = [0, \pi] \times [0, 2\pi)$.
Notând $\Phi(\theta, \varphi) = (X(\theta, \varphi), Y(\theta, \varphi), Z(\theta, \varphi))$, rezultă:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} =$$

$$= (R \cos\theta \cos\varphi, R \cos\theta \sin\varphi, -R \sin\theta) \times (-R \sin\theta \sin\varphi, R \sin\theta \cos\varphi, 0) =$$

$$= \left(R^2 \sin^2\theta \cos\varphi, R^2 \sin^2\theta \sin\varphi, R^2 \sin\theta \cos\theta\right).$$

Elementul de suprafaţă este:

$$\| \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \| = R^2 \sin\theta.$$

Rezultă aria sferei S_R

$$\int_{S_R} d\sigma = \int\int_D r^2 \sin\theta \, d\theta d\varphi = 4\pi R^2.$$

b. Parametrizarea carteziană a conului este:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2},\ (x, y) \in D = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leq h^2\}.$$

Rezultă aria conului C_h:

$$\int_{C_h} d\sigma = \int\int_D \sqrt{2} dxdy = \sqrt{2}\pi h^2.$$

c. Parametrizarea carteziană a paraboloidului este:

$$z = x^2 + y^2,\ (x, y) \in D = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leq h\}.$$

Rezultă aria paraboloidului P_h:

$$\int_{P_h} d\sigma = \int\int_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dxdy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{h}} \rho\sqrt{1+4\rho^2}d\rho = \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{(1+4h)^3}-1\right).$$

20. Să se calculeze aria $\mathcal{A}$ a suprafeţei Σ în următoarele cazuri:
a. $\Sigma: \ 2z = 4 - x^2 - y^2, \ z \in [0,1]$.
b. Σ este submulţimea de pe sfera $x^2+y^2+z^2=1$, situată în interiorul conului $x^2+y^2=z^2$.
c. Σ este submulţimea de pe sfera $x^2+y^2+z^2=R^2$, situată în interiorul cilindrului $x^2+y^2-Ry=0$.
d. Σ este submulţimea de pe paraboloidul $z=x^2+y^2$ situată în interiorul cilindrului $x^2+y^2=2y$.
e. Σ este torul.

Soluţie

Aria suprafeţei Σ este $\mathcal{A} = \int_\Sigma d\sigma$.

a. $\mathcal{A} = \int\int_D \sqrt{1+x^2+y^2}dxdy, \ D = \{(x,y)\,;\, 2 \le x^2+y^2 \le 4\}$.

b. $\mathcal{A} = 2\int\int_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy, \ D = \{(x,y) \in R^2 \mid x^2+y^2 \le \frac{1}{2}\}$.

c. $\mathcal{A} = 2\int\int_D \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy, \ D = \{(x,y)\,;\, x^2+y^2 \le Ry\}$.

d. $\mathcal{A} = \int\int_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy, \ D = \{(x,y)\,;\, x^2+y^2 \le 2y\}$.

e. $\mathcal{A} = \int\int_D (a+b\cos u)dudv, \ D = [0,2\pi]\times[0,2\pi]$.

21. Să se calculeze fluxul câmpului de vectori $\overline{V}$ prin suprafaţa Σ în următoarele cazuri:
a. $\overline{V} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}, \ \Sigma: \ z^2 = x^2+y^2, z \in [0,1]$.
b. $\overline{V} = y\overline{i} - x\overline{j} + z^2\overline{k}, \ \Sigma: \ z = x^2+y^2, \ z \in [0,1]$.
c. $\overline{V} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(y\overline{i} - x\overline{j} + \overline{k}\right), \ \Sigma: \ z = 4-x^2-y^2, \ z \in [0,1]$.

Soluţie

Fluxul câmpului de vectori $\overline{V}$ prin suprafaţa Σ în raport cu normala $\overline{n}$ este, prin definiţie, $\mathcal{F}_\Sigma(\overline{V}) = \int_\Sigma \overline{V}\overline{n}d\sigma$, $\overline{n}$ fiind versorul normalei la suprafaţa Σ.
Dacă $\Phi: D \mapsto R^3$ este o parametrizare a lui Σ, atunci fluxul este:

$$\mathcal{F}_\Sigma(\overline{V}) = \int_\Sigma \overline{V}\overline{n}d\sigma = \int\int_D (\overline{V}\circ\Phi)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\times\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)dudv =$$

$$= \int\int_D \left(\overline{V}\circ\Phi, \frac{\partial\Phi}{\partial u}, \frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)dudv,$$

ultima paranteză fiind produsul mixt al vectorilor $\overline{V} \circ \Phi$, $\dfrac{\partial \Phi}{\partial u}$ şi $\dfrac{\partial \Phi}{\partial v}$.
a. Considerând parametrizarea carteziană $z = \sqrt{x^2+y^2}$, obţinem

$$\overline{n} = \frac{1}{\sqrt{2(x^2+y^2)}}\left(-x\overline{i} - y\overline{j} + \sqrt{x^2+y^2}\,\overline{k}\right)$$

şi deci fluxul este 0 deoarece vectorii $\overline{V}$ şi $\overline{n}$ sunt ortogonali.
b. Considerând parametrizarea carteziană

$$z = x^2+y^2,\ D = \{(x,y)\,;\, x^2+y^2 \leq 1\},$$

obţinem:

$$\mathcal{F}_{\Sigma}(\overline{V}) = \int\int_D (x^2+y^2)^2 dxdy = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} \rho^5 d\varphi = \frac{\pi}{3}.$$

c. Cu parametrizarea carteziană

$$z = 4 - x^2 - y^2,\ D = \{(x,y)\,;\, 3 \leq x^2+y^2 \leq 4\},$$

obţinem:

$$\mathcal{F}_{\Sigma}(\overline{V}) = \int\int_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy = \int_{\sqrt{3}}^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi(2-\sqrt{3}).$$

22. Fie $a < b$ două numere reale şi $f, g : [a,b] \mapsto R$ două funcţii continue astfel încât $f(t) \geq 0,\ \forall\, t \in [a,b]$. Fie Γ o curbă (situată in planul $y = 0$) de parametrizare

$$x(t) = f(t),\ y(t) = 0,\ z(t) = g(t)$$

şi fie Σ suprafaţa de rotaţie obţinută prin rotirea curbei Γ în jurul axei Oz. Să se calculeze aria suprafeţei Σ.
Soluţie
Parametrizarea suprafeţei Σ este

$$\Phi(u,v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)),\ (u,v) \in [a,b]\times[0,2\pi]$$

şi deci aria este:

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \int_{\Sigma} d\sigma = \int_0^{2\pi} dv \int_a^b |f(u)|\,\sqrt{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}\; du =$$

$$= 2\pi \int_a^b f(u)\,\sqrt{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}\; du.$$

Abscisa centrului de greutate al curbei (omogene) Γ este

$$x_G = \frac{\int_\Gamma x ds}{\int_\Gamma ds} = \frac{1}{L} \int_a^b f(u)\sqrt{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}\, du,$$

unde, L este lungimea lui Γ. Rezultă deci $\mathcal{A}(\Sigma) = 2\pi L x_G$.

23. Să se calculeze masa şi coordonatele centrului de greutate ale unei semisfere $\mathcal{S}$ de rază R şi având densitatea constantă c.

Soluţie

Masa este dată de formula $M = \displaystyle\int_{\mathcal{S}} c d\sigma$, iar coordonatele centrului de greutate sunt:

$$x_G = \frac{1}{M} \int_{\mathcal{S}} cx\, d\sigma,\ y_G = \frac{1}{M} \int_{\mathcal{S}} cy d\sigma,\ z_G = \frac{1}{M} \int_{\mathcal{S}} cz d\sigma.$$

Considerând semisfera cu centrul în origine şi situată în semiplanul $z > 0$, parametrizarea este:

$$X(\theta, \varphi) = R \sin\theta\, \cos\varphi,$$

$$Y(\theta, \varphi) = R \sin\theta\, \cos\varphi,$$

$$Z(\theta, \varphi) = R \cos\theta,\ (\theta, \varphi) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi].$$

Rezultă:

$$M = \int_{\mathcal{S}} c\, d\sigma = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} cR^2\, \sin\theta\, d\theta = 2\pi R^2 c.$$

Din motive de simetrie (sau calcul direct) rezultă $x_G = y_G = 0$.

$$z_G = \frac{1}{M} \int_{\mathcal{S}} cz\, d\sigma = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} cR^3 \sin\theta\, \cos\theta\, d\theta = \frac{R}{2}.$$

Capitolul 4

Formule integrale

4.1 Noţiuni teoretice

Formula Green-Riemann

Fie $(K, \partial K)$ un compact cu bord orientat inclus în R^2 (orientarea pe ∂K este sensul trigonometric pozitiv) şi fie

$$\alpha = Pdx + Qdy$$

o 1-formă diferenţială de clasă $\mathcal{C}^1$ pe o vecinătate a lui K; atunci:

$$\int_{\partial K} Pdx + Qdy = \int\int_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Dacă $\overline{V} = P\overline{i} + Q\overline{j}$ este câmpul vectorial asociat (în mod canonic) formei diferenţiale α, atunci formula se scrie sub forma:

$$\int_{\partial K} \overline{V} d\overline{r} = \int\int_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

O consecinţă este următoarea formulă pentru arie (notaţiile şi orientarea pe bordul ∂K sunt cele de mai sus):

$$\text{aria}(K) = \frac{1}{2} \int_{\partial K} xdy - ydx.$$

Formula Gauss-Ostrogradski

Fie $K \subset R^3$ un compact cu bord orientat (bordul ∂K orientat după normala exterioară). Atunci, pentru orice 2-formă diferenţială

$$\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$$

de clasă $\mathcal{C}^1$ pe o vecinătate a lui K, are loc egalitatea:

$$\int_{\partial K} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy = \int\int\int_K \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz.$$

Dacă notăm cu $\overline{V} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$ câmpul vectorial asociat (în mod canonic) 2-formei diferenţiale ω, atunci formula de mai sus se scrie:

$$\int_{\partial K} \overline{V}\overline{n} d\sigma = \int\int\int_K \operatorname{div}(\overline{V}) dxdydz,$$

unde, $\overline{n}$ este normala exterioară la ∂K, iar $\operatorname{div}(\overline{V}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ este divergenţa lui $\overline{V}$. Observăm că membrul stâng este fluxul câmpului $\overline{V}$ prin suprafaţa ∂K, de aceea formula Gauss-Ostrogradski se mai numeşte şi formula flux-divergenţă.

Formula lui Stokes

Fie $(\Sigma, \partial\Sigma)$ o suprafaţă bordată orientată (orientarea pe Σ este compatibilă cu orientarea pe bordul $\partial\Sigma$) şi fie $\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$ o 1-formă diferenţială de clasă $\mathcal{C}^1$ pe o vecinătate a lui Σ; atunci:

$$\int_{\partial\Sigma} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy.$$

Dacă $\overline{V} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$ este câmpul vectorial asociat (în mod canonic) formei diferenţiale α, atunci formula lui Stokes se scrie:

$$\int_{\partial\Sigma} \overline{V} d\overline{r} = \int_{\Sigma} (\operatorname{rot}\overline{V})\, \overline{n}\, d\sigma,$$

orientările pe curba (închisă) $\partial\Sigma$ şi pe suprafaţa Σ fiind compatibile.

În exerciţiile care urmează, se subînţelege, atunci când este cazul, că orientările pe curbe şi suprafeţe sunt compatibile, adică sunt îndeplinite ipotezele formulelor de mai sus.

4.2 Formula Green-Riemann

1. Să se calculeze direct şi aplicând formula Green-Riemann integrala curbilinie $\int_\Gamma \alpha$ în următoarele cazuri:
a. $\alpha = y^2dx + xdy$,
Γ este pătratul cu vârfurile $A(0,0), B(2,0), C(2,2), D(0,2)$.
b. $\alpha = ydx + x^2dy$, Γ este cercul cu centrul în origine şi de rază 2.
c. $\alpha = ydx - xdy$, Γ este elipsa de semiaxe a şi b şi de centru O.
Soluţie
Calculul direct al integralelor îl lăsăm ca exerciţiu. Calculăm integralele aplicând formula Green-Riemann; notăm cu K compactul mărginit de Γ.
a. Compactul K este interiorul pătratului:

$$\int y^2dx + xdy = \int\int_K (1-2y)dxdy = \int_0^2 dx \int_0^2 (1-2y)dy = -4.$$

b. Compactul K este discul de centru O şi rază 2; pentru calculul integralei duble folosim coordonatele polare (ρ, φ):

$$\int_\Gamma ydx + x^2dy = \int\int_K (2x-1)dxdy = \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} (2\rho\cos\varphi - 1)\rho d\varphi = -4\pi.$$

c. Compactul K este interiorul elipsei; pentru calculul integralei duble folosim coordonatele polare generalizate:

$$\int_\Gamma ydx - xdy = \int\int_K 2dxdy = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} 2ab\rho d\varphi = 2\pi ab.$$

2. Fie $\alpha = \dfrac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \dfrac{x}{x^2+y^2}\,dy$.
a. Să se calculeze integrala curbilinie $\int_{\mathcal{C}(O,R)} \alpha$, unde, am notat cu $\mathcal{C}(O,R)$ cercul de centru O şi rază $R > 0$.
b. Să se calculeze $\int_\Gamma \alpha$, unde, Γ este o curbă arbitrară închisă astfel încât $O \notin \Gamma$.
Soluţie
a. Să observăm, mai întâi că $\alpha \in \mathcal{C}^1(R^2 \setminus \{O\})$, deci pentru calculul integralei de la punctul a nu se poate aplica formula Green-Riemann. Folosim definiţia integralei curbilinii; parametrizăm cercul:

$$x(t) = R\cos t,\ y(t) = R\sin t,\ t \in [0, 2\pi)$$

şi obţinem:

$$\int_{\mathcal{C}(O,R)} \alpha = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

b. Notăm cu K compactul mărginit de curba Γ. Distingem două cazuri: dacă $O \notin K$ (se poate aplica formula Green-Riemann) sau dacă $O \in K$ (nu se poate aplica formula Green-Riemann).
Presupunem mai întâi că $O \notin K$; atunci:

$$\int_\Gamma \alpha = \int\int_K \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right) dxdy = 0.$$

Presupunem acum că $O \in K$; fie $R > 0$ astfel încât $\mathcal{C}(O,R)$ este inclus în interiorul lui K. Notăm cu $D(O,R)$ discul deschis de centru O şi rază R. Fie A compactul $A = K \setminus D(O,R)$. Bordul orientat al lui A este reuniunea $\partial A = \Gamma \cup \mathcal{C}(O,R)$, sensul pe cerc fiind sensul trigonometric negativ. Deoarece $O \notin A$, avem:

$$\int_{\partial A} \alpha = \int\int_A 0dxdy = 0.$$

Rezultă:

$$\int_\Gamma \alpha = \int_{\mathcal{C}(O,R)} \alpha = 2\pi.$$

3. Fie $\alpha = \dfrac{x-y}{x^2+y^2}\,dx + \dfrac{x+y}{x^2+y^2}\,dy$. Să se calculeze integrala curbilinie $\int_\Gamma \alpha$, unde Γ este o curbă arbitrară închisă cu $O \notin \Gamma$.

Soluţie

Observăm că α este o 1-formă diferenţială închisă. În continuare aplicăm raţionamentul de la exerciţiul precedent.

4. Să se calculeze următoarele integrale curbilinii direct şi aplicând formula Green-Riemann:

a. $\int_\Gamma e^{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\,(-ydx + xdy)$, $\Gamma = \{(x,y) \mid \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\}$.

b. $\int_\Gamma xydx + \dfrac{x^2}{2}dy$,

$\Gamma = \{(x,y) \mid x^2+y^2 = 1, x \leq 0 \leq y\} \cup \{(x,y) \mid x+y = -1, x \leq 0, y \leq 0\}$.

Soluţie

Pentru calculul direct se parametrizează cele două curbe şi se aplică definiţia integralei curbilinii. Vom calcula acum integralele cu ajutorul formulei Green-Riemann.

a. Elipsa Γ este închisă iar 1-forma diferenţială este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe R^2, deci putem aplica formula Green-Riemann (notăm K mulţimea compactă mărginită de Γ):

$$\int_\Gamma e^{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}(-ydx+xdy)=\int\int_K 2e^{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\left(1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy,$$

integrala dublă calculându-se cu coordonate polare generalizate.

b. Curba Γ nu este închisă, deci nu putem aplica direct formula Green-Riemann. Fie $A(0,-1)$ şi $B(0,1)$ şi fie $[AB]$ segmentul orientat (de la A către B) determinat de aceste puncte. Fie $\Lambda=\Gamma\cup[AB]$; atunci Λ este o curbă închisă şi deci, aplicând formula Green-Riemann, obţinem (notăm cu K compactul mărginit de Λ):

$$\int_\Lambda xydx+\frac{x^2}{2}dy=\int\int_K 0dxdy=0.$$

Rezultă deci:

$$\int_\Gamma xydx+\frac{x^2}{2}dy=-\int_{[AB]}xydx+\frac{x^2}{2}dy=0,$$

ultima integrală curbilinie calculându-se imediat cu definiţia.

5. Să se calculeze aria mulţimii mărginite de curba Γ în următoarele cazuri:

a. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $(a>0,\ b>0)$.

b. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$.

Soluţie

Aria mulţimii mărginite de curba Γ este $\mathcal{A}=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Gamma xdy-ydx$.

a. Cu parametrizarea $x(t)=a\cos t$, $y(t)=b\sin t$, $t\in[0,2\pi)$, obţinem:

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}\int_\Gamma ab\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)dt=\pi ab.$$

b. Cu parametrizarea $x(t)=\cos^3 t$, $y(t)=\sin^3 t$, $t\in[0,2\pi)$, obţinem:

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}\int_\Gamma xdy-ydx=\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 tdt=\frac{3}{8}\pi.$$

6. a. Fie $\rho = \rho(t)$, $t \in [a, b]$ ecuaţia în coordonate polare a unei curbe închise Γ. Să se demonstreze că aria interiorului lui Γ este $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_a^b \rho^2(t)dt$. Fie $a > 0$, $b > 0$; să se calculeze ariile mulţimilor mărginite de curbele de ecuaţii (în coordonate polare):
b. $\rho(t) = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}}$, $t \in [0, 2\pi]$.
c. $\rho(t) = a(1 + \cos t)$, $t \in [0, \pi]$.
Soluţie
a. Cu parametrizarea $x(t) = \rho(t)\cos t$, $y(t) = \rho(t)\sin t$, $t \in [a, b]$, obţinem:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_\Gamma xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_a^b \rho^2(t)dt.$$

b. $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}dt = 2a^2b^2\int_0^\infty \frac{du}{a^2u^2 + b^2} = \pi ab.$
c. Analog.

7. Să se calculeze circulaţia câmpului de vectori $\overline{V}$ pe curba Γ în cazurile:
a. $\overline{V} = y^2\overline{i} + xy\overline{j}$,
$\Gamma = \{(x, y); x^2 + y^2 = 1, y > 0\} \cup \{(x, y); y = x^2 - 1, y \leq 0\}$.
b. $\overline{V} = e^x \cos y\overline{i} - e^x \sin y\overline{j}$.
Γ este o curbă arbitrară conţinută în semiplanul superior care uneşte punctele $A(1, 0)$ şi $B(-1, 0)$, sensul fiind de la A către B.
Soluţie
a. Vom aplica formula Green-Riemann; notând cu K interiorul curbei Γ, obţinem:

$$\int_\Gamma \overline{V}d\overline{r} = \int\int_K -ydxdy = -\int_{-1}^1 dx\int_{x^2-1}^{\sqrt{1-x^2}} ydy.$$

b. Curba nu este închisă; fie $[BA]$ segmentul orientat (de la B către A) şi fie curba închisă $\Lambda = \Gamma \cup [BA]$. Calculăm circulaţia lui $\overline{V}$ pe curba Λ cu ajutorul formulei Green-Riemann (notăm cu K compactul mărginit de Λ):

$$\int_\Lambda \overline{V}d\overline{r} = \int\int_K 0dxdy = 0,$$

deci circulaţia pe curba Γ este egală cu circulaţia pe segmentul orientat $[AB]$:

$$\int_\Gamma \overline{V}d\overline{r} = \int_{[AB]} \overline{V}d\overline{r} = -\int_0^1 e^t dt = 1 - e.$$

8. Fie $a < b$, fie $\gamma : [a,b] \mapsto R^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, un drum parametrizat închis $(\gamma(a) = \gamma(b))$, orientat în sens trigonometric pozitiv şi fie K compactul mărginit de imaginea lui γ. Într-un punct arbitrar $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, considerăm vectorul normal la γ, $\overline{n}(t) = (y'(t), -x'(t))$. Să se demonstreze că pentru orice câmp de vectori $\overline{V}$ de clasă $\mathcal{C}^1$ pe o vecinătate a lui K, avem:

$$\int_a^b \overline{V}(\gamma(t))\overline{n}(t)dt = \int\int_K \operatorname{div}(\overline{V})dxdy.$$

Soluţie
Din definiţia integralei curbilinii, rezultă:

$$\int_a^b \overline{V}(\gamma(t))\overline{n}(t)dt = \int_\gamma Pdy - Qdx.$$

Aplicând ultimei integrale curbilinii formula Green-Riemann, obţinem:

$$\int_a^b \overline{V}(\gamma(t))\overline{n}(t)dt = \int_\gamma Pdy - Qdx =$$

$$= \int\int_K \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdy = \int\int_K \operatorname{div}(\overline{V})dxdy.$$

9. Formula de medie pentru funcţii armonice
O funcţie $f : U \subseteq R^2 \mapsto R$ se numeşte armonică pe U dacă

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \,\text{pe}\, U.$$

Fie f o funcţie armonică pe discul unitate. Atunci:

$$f((0,0)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho\cos t, \rho\sin t)dt,\ \forall \rho \in (0,1),$$

egalitate numită formula de medie pentru funcţii armonice.
Soluţie
Fie $\rho \in (0,1)$ şi fie

$$g(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho\cos t, \rho\sin t)dt.$$

Vom demonstra că funcţia g este constantă.
Pentru aceasta, calculăm derivata sa:

$$g'(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos t, \rho\sin t)\cos t + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos t, \rho\sin t)\sin t\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi\rho}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos t, \rho\sin t), \frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos t, \rho\sin t)\right)\cdot(\rho\cos t, \rho\sin t)\, dt.$$

Vom aplica acum rezultatul exerciţiului 8 de mai sus.
Vectorul $\overline{n} = (\rho\cos t, \rho\sin t)$ este vectorul normal (exterior) la cercul de centru O şi rază ρ, iar câmpul vectorial $\overline{V} = \frac{\partial f}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\bar{j}$. Obţinem (notăm cu K discul de centru O şi rază ρ):

$$g'(\rho) = \frac{1}{2\pi\rho}\int\int_K \Delta f\, dxdy = 0.$$

Rezultă deci că funcţia g este constantă pe intervalul $(0,1)$; în consecinţă, avem:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho\cos t, \rho\sin t)dt = g(\rho) = \lim_{\rho\to 0} g(\rho) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f((0,0)) = f((0,0)).$$

4.3 Formula Gauss-Ostrogradski

10. Să se calculeze integrala de suprafaţă $\int_\Sigma \omega$ în următoarele cazuri:
a. $\omega = x^2dy\wedge dz - 2xydz\wedge dx + z^3dx\wedge dy$.
$\Sigma = \{(x,y,z)\,;\, x^2+y^2+z^2 = 9\}$.
b. $\omega = yzdy\wedge dz - (x+z)dz\wedge dx + (x^2+y^2+3z)dx\wedge dy$.
$\Sigma = \{(x,y,z); x^2+y^2 = 4-2z, z\geq 1\}\cup\{(x,y,z); x^2+y^2\leq 4-2z, z=1\}$.
c. $\omega = x(z+3)dy\wedge dz + yzdz\wedge dx - (z+z^2)dx\wedge dy$.
$\Sigma = \{(x,y,z); x^2+y^2+z^2 = 1,\ z\geq 0\}$.
Soluţie
a. Fie $K = \{(x,y,z); x^2+y^2+z^2\leq 9\}$;
aplicând formula Gauss-Ostrogradski (sunt verificate ipotezele), obţinem:

$$\int_\Sigma x^2dy\wedge dz - 2xydz\wedge dx + z^3dx\wedge dy = \int\int\int_K 3z^2dxdydz,$$

integrala triplă calculându-se folosind coordonate sferice.
b. Fie K compactul mărginit de suprafaţa (închisă) Σ şi fie
$D = \{(x,y);\ x^2+y^2\leq 2\}$ proiecţia lui K pe planul xOy; aplicând formula Gauss-Ostrogradski, obţinem:

$$\int_\Sigma \omega = \int\int\int_K 3dxdydz = 3\int\int_D dxdy\int_1^{2-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dz.$$

c. Suprafaţa Σ nu este închisă, deci formula Gauss-Ostrogradski nu se poate aplica.
Fie $D = \{(x, y, z)\,;\, x^2 + y^2 \leq 1,\, z = 0\}$ şi fie $S = \Sigma \cup D$, orientată cu normala exterioară (pe D normala este $-\overline{k}$). Fie K compactul al cărui bord (orientat) este suprafaţa (închisă) S. Aplicând formula Gauss-Ostrogradski, obţinem:

$$\int_S x(z+3)dy \wedge dz + yzdz \wedge dx - (z+z^2)dx \wedge dy = \int\int\int_K 2dxdydz = \frac{4\pi}{3}.$$

Rezultă deci:

$$\int_\Sigma x(z+3)dy \wedge dz + yzdz \wedge dx - (z+z^2)dx \wedge dy =$$

$$= \frac{4\pi}{3} - \int_D x(z+3)dy \wedge dz + yzdz \wedge dx - (z+z^2)dx \wedge dy.$$

Calculând ultima integrală de suprafaţă cu definiţia, obţinem:

$$\int_D x(z+3)dy \wedge dz + yzdz \wedge dx - (z+z^2)dx \wedge dy = -\int\int_D 0dxdy = 0,$$

şi deci $\int_\Sigma \omega = \frac{4\pi^3}{3}$.

11. Să se calculeze integrala de suprafaţă $\int_\Sigma \omega$ direct şi folosind formula Gauss-Ostrogradski în următoarele cazuri:
a. $\omega = x(y-z)dy \wedge dz + y(z-x)dz \wedge dx + z(x-y)dx \wedge dy$.
$\Sigma = \{(x, y, z)\,;\, z = 1 - x^2 - y^2, z > 0\} \cup \{(x, y, z)\ x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$.
b. $\omega = x^2(y-z)dy \wedge dz + y^2(z-x)dz \wedge dx + z^2(x-y)dx \wedge dy$.
$\Sigma = \{(x, y, z); z^2 = x^2 + y^2, 0 < z \leq 1\}$.
Soluţie
Analog cu exerciţiul anterior; în cazul b trebuie să reunim la Σ discul $D = \{(x, y, z); x^2 + y^2 \leq 1, z = 1\}$, orientat după normala $\overline{k}$. Obţinem $\int_\Sigma \omega = -\int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} \rho^2(\cos\varphi - \sin\varphi)d\varphi = 0.$

12. Fie a, b, c trei numere strict pozitive. Să se calculeze fluxul câmpului vectorial:

$$\overline{V} = x(xy + az)\overline{i} - y(xy - az)\overline{j} + z^3\overline{k}$$

prin suprafaţa Σ de ecuaţie:

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Soluţie
Ecuaţia suprafeţei Σ se poate scrie sub forma echivalentă:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}},$$

deci $z\in[-c,c]$. Intersecţiile suprafeţei Σ cu plane orizontale ($z=$ constant) sunt elipsele $S(z)$ de ecuaţii:

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt[4]{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt[4]{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}=1.$$

Semiaxele acestor elipse sunt

$$a\sqrt[4]{1-\frac{z^2}{c^2}}\ \text{ şi }\ b\sqrt[4]{1-\frac{z^2}{c^2}}.$$

Fie $D(z)$ mulţimea (din planul orizontal $z=$ constant) mărginită de elipsa $S(z)$; atunci aria lui $D(z)$ este:

$$\mathcal{A}(z)=\pi ab\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}.$$

Pentru calculul fluxului se poate aplica formula Gauss-Ostrogradski; fie $\overline{n}$ normala exterioară la Σ şi fie Ω compactul mărginit de Σ; atunci:

$$\int_\Sigma \overline{V}\overline{n}\,d\sigma=\int\int\int_\Omega \operatorname{div}(\overline{V})\,dxdydz=\int_{-c}^{c}dz\int\int_{D(z)}(2az+3z^2)\,dxdy=$$

$$=\pi ab\int_{-c}^{c}(2az+3z^2)\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\,dz=3\pi ab\int_{-c}^{c}z^2\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\,dz=$$

$$=6\pi ab\int_0^c z^2\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}dz=6\pi ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(c\sin t)^2\sqrt{1-\sin^2 t}\;c\cos t\,dt=$$

$$=\frac{3}{2}\pi abc^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\,dt=\frac{3}{8}\pi^2abc^3.$$

13. Legea lui Gauss
Pentru orice $q>0$, considerăm câmpul scalar

$$f(x,y,z)=\frac{q}{4\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{q}{4\pi r}$$

şi fie câmpul de gradienţi:

$$\overline{E} = -\mathrm{grad} f.$$

Câmpul scalar f reprezintă potenţialul electric (sau potenţial Newtonian) asociat sarcinei electrice q plasate în O, iar $\overline{E}$ este câmpul electric generat (sau câmp Newtonian).
a. Să se expliciteze $\overline{E}$ şi să se demonstreze că este câmp solenoidal, adică: $\mathrm{div}\overline{E} = 0$.
b. Să se demonstreze că fluxul câmpului $\overline{E}$ prin orice suprafaţă închisă ce nu conţine originea în interior este nul.
c. Să se demonstreze că fluxul câmpului $\overline{E}$ prin orice suprafaţă închisă ce conţine originea în interior este q, (legea lui Gauss).
Soluţie
a. Putem calcula $\overline{E}$ direct cu definiţia, sau aplicând proprietăţile gradientului; obţinem:

$$\overline{E} = -\mathrm{grad} f = \frac{q}{4\pi}\frac{\overline{r}}{r^3}.$$

Arătăm acum că $\overline{E}$ este solenoidal:

$$\mathrm{div}\overline{E} = -\mathrm{grad}(\mathrm{div} f) = -\Delta f = \frac{q}{4\pi r^6}\Big(3r^3 - 3r(x^2+y^2+z^2)\Big) = 0.$$

b. Fie Σ o suprafaţă închisă ce nu conţine originea în interior. Deoarece câmpul electric $\overline{E}$ este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $R^3 \setminus \{O\}$, sunt îndeplinite ipotezele formulei Gauss-Ostrogradski şi deci, (notăm cu K compactul mărginit de Σ şi cu $\overline{n}$ versorul normalei exterioare la Σ), obţinem:

$$\mathcal{F}_\Sigma(\overline{E}) = \int_\Sigma \overline{E}\,\overline{n} d\sigma = \int\int\int_K \mathrm{div}\overline{E} dxdydz = 0.$$

c. Fie acum Σ o suprafaţă închisă ce conţine originea în interior. Deoarece $\overline{E}$ nu este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe compactul K mărginit de Σ, ($\overline{E}$ nefiind de clasă $\mathcal{C}^1$ în origine), nu putem aplica formula Gauss-Ostrogradski pentru a calcula fluxul lui $\overline{E}$ prin Σ. Fie $R > 0$ astfel încât sfera de centru O şi rază R (notată în continuare cu S), să fie inclusă în interiorul lui Σ. Fie suprafaţa (închisă) $\Sigma_1 = \Sigma \cup S$, orientată după normala exterioară (deci pe S este normala interioară la sferă). Fie K_1 mulţimea compactă mărginită de Σ_1. Deoarece $O \notin K_1$, fluxul lui $\overline{E}$ prin Σ_1 este nul (conform (b)). Rezultă că fluxul lui $\overline{E}$ prin Σ este egal cu fluxul lui $\overline{E}$ prin S (orientată după normala exterioară $\overline{n} = \dfrac{\overline{r}}{R}$ la sferă):

$$\mathcal{F}_\Sigma(\overline{E}) = \int_S \overline{E}\,\overline{n} d\sigma = \frac{q}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta = q.$$

14. Fie $n \in N$ şi fie $q_\imath > 0$, $\forall \imath \in \{1, 2, .., n\}$. Fie $A_\imath$, $\imath \in \{1, 2, .., n\}$, n puncte în R^3 de coordonate $(x_\imath, y_\imath, z_\imath)$. Notăm cu $\overline{r_\imath}$ vectorul de poziţie al punctului $A_\imath$. Potenţialul electric generat de sarcinile electrice $q_\imath$ plasate în punctele $A_\imath$ este

$$f(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \sum_{\imath=1}^{n} \frac{q_\imath}{\| \overline{r} - \overline{r_\imath} \|},$$

unde, $\| \cdot \|$ este norma euclidiană în R^3. Fie $\overline{E} = -\mathrm{grad} f$ câmpul electric asociat potenţialului f. Să se demonstreze că fluxul câmpului electric $\overline{E}$ printr-o suprafaţă arbitrară închisă ce conţine toate punctele $A_\imath$ în interiorul ei este egal cu $\sum_{\imath=1}^{n} q_\imath$.

Soluţie

Se aplică raţionamentul din exerciţiul anterior.

15. Legea lui Arhimede

Considerăm un recipient (conţinut în semispaţiul $z < 0$) în care s-a turnat un lichid având densitatea constantă c.

Scufundăm în lichid un corp pe care îl asimilăm cu un compact cu bord orientat $(K, \partial K)$. Presupunând că presiunea exercitată de lichid asupra corpului scufundat creşte proporţional cu adâncimea, obţinem pentru câmpul presiunilor formula $\overline{V} = cz\overline{k}$. Forţa ascensională pe care lichidul o exercită asupra corpului scufundat este, prin definiţie, egală cu fluxul câmpului presiunilor prin suprafaţa (bordul) ∂K, în raport cu normala exterioară, $\overline{n}$. Aplicând formula Gauss-Ostrogradski, obţinem:

$$\mathcal{F}_{\partial K}(\overline{V}) = \int_{\partial K} \overline{V}\, \overline{n} d\sigma =$$

$$= \int\int\int_K \mathrm{div} \overline{V}\, dxdydz = \int\int\int_K c dxdydz = c\, \mathrm{vol}(K),$$

adică forţa ascensională este egală cu masa lichidului dezlocuit de corpul scufundat.

16. Fie Σ o suprafaţă închisă şi fie K compactul mărginit de Σ. Să se demonstreze că:

$$\frac{1}{3} \int_\Sigma \overline{r}\, \overline{n} d\sigma = \mathrm{vol}\,(K)\,,$$

unde, $\overline{n}$ este normala exterioară la Σ.
Soluţie
Se aplică formula Gauss-Ostrogradski:

$$\frac{1}{3}\int_{\Sigma}\overline{r}\,\overline{n}d\sigma=\frac{1}{3}\int\int\int_{K}\operatorname{div}(\overline{r})\,dxdydz=\int\int\int_{K}\,dxdydz=\operatorname{vol}(K).$$

17. Fie câmpul vectorial $\overline{V}=\overline{r}+\dfrac{\overline{k}\,\overline{r}}{r^4}\,\overline{r}$ şi fie suprafaţa

$$\Sigma=\{(x,y,z);z=3-x^2-y^2,1\le z\}\cup\{(x,y,z);x^2+y^2\le 2,z=1\}.$$

Să se calculeze fluxul lui $\overline{V}$ prin Σ (orientată după normala exterioară).
Soluţie
Se aplică formula Gauss-Ostrogradski; pentru aceasta, calculăm

$$\operatorname{div}\overline{V}=\operatorname{div}\left(\overline{r}+\frac{\overline{k}\,\overline{r}}{r^4}\overline{r}\right)=3+\left(\frac{\overline{k}\,\overline{r}}{r^4}\right)\operatorname{div}\overline{r}+\overline{r}\operatorname{grad}\left(\frac{\overline{k}\,\overline{r}}{r^4}\right)=$$

$$=3+3\frac{\overline{k}\,\overline{r}}{r^4}+\overline{r}\left(\frac{1}{r^4}\operatorname{grad}(\overline{k}\,\overline{r})+(\overline{k}\,\overline{r})\operatorname{grad}r^{-4}\right)=$$

$$=3+3\frac{\overline{k}\,\overline{r}}{r^4}+\overline{r}\left(\frac{\overline{k}}{r^4}-4\frac{(\overline{k}\,\overline{r})}{r^6}\overline{r}\right)=3.$$

Notând cu K compactul mărginit de suprafaţa Σ, rezultă:

$$\mathcal{F}_{\Sigma}(\overline{V})=\int_{\Sigma}\overline{V}\,\overline{n}d\sigma=\int\int\int_{K}3dxdydz=3\operatorname{vol}(K).$$

18. Să se calculeze fluxul câmpului vectorial $\overline{V}=\dfrac{1}{r}\,(\overline{r}\times\overline{k})$ prin:
a. O suprafaţă închisă arbitrară ce nu conţine originea în interior.
b. Sfera de centru O şi rază R.
Soluţie
a. În primul caz se poate aplica formula Gauss-Ostrogradski; fluxul este nul deoarece $\operatorname{div}\overline{V}=0$.
b. În cazul al doilea, fluxul se calculează cu definiţia integralei de suprafaţă (nu sunt îndeplinite ipotezele formulei Gauss-Ostrogradski); şi în acest caz fluxul este tot 0 deoarece vectorii $\overline{V}$ şi normala exterioară la sferă sunt ortogonali.

19. Formulele lui Green
Fie $(K, \partial K)$ un compact cu bord orientat din R^3. Fie $\overline{n}$ normala exterioară la ∂K şi fie f, g două funcţii de clasă $\mathcal{C}^2$ pe o vecinătate a lui K. Să se demonstreze formulele lui Green:
a. $\displaystyle\int_{\partial K} f\,(\mathrm{grad} g)\,\overline{n}\,d\sigma = \int\int\int_K \Big(f\,\Delta g + (\mathrm{grad} f)(\mathrm{grad} g)\Big)\,dxdydz.$
b. $\displaystyle\int_{\partial K} \Big(f\,(\mathrm{grad} g)\;-\;g\,(\mathrm{grad} f)\Big)\,\overline{n}\,d\sigma = \int\int\int_K \Big(f\,\Delta g - g\,\Delta f\Big)dxdydz.$
Soluţie
a. Pentru prima formulă se aplică formula Gauss-Ostrogradski câmpului de vectori $\overline{V} = f\,\mathrm{grad} g$:

$$\int_{\partial K} f\,(\mathrm{grad} g)\,\overline{n}\,d\sigma = \int\int\int_K \mathrm{div}(f\,\mathrm{grad} g)\,dxdydz =$$

$$= \int\int\int_K \Big(f\,\mathrm{div}(\mathrm{grad} g) + (\mathrm{grad} g)\,(\mathrm{grad} f)\Big)\,dxdydz =$$

$$= \int\int\int_K \Big(f\Delta g + (\mathrm{grad} g)\,(\mathrm{grad} f)\Big)\,dxdydz.$$

b. A doua formulă rezultă direct din prima.

20. Fie $(K, \partial K)$ un compact cu bord orientat din R^3 şi fie $\overline{n}$ versorul normalei exterioare la suprafaţa ∂K. Fie h o funcţie armonică pe o vecinătate a lui K şi fie $\dfrac{dh}{d\overline{n}}$ derivata după direcţia $\overline{n}$ a lui h. Să se demonstreze egalităţile:
a. $\displaystyle\int_{\partial K} \frac{dh}{d\overline{n}}\,d\sigma = 0.$
b. $\displaystyle\int_{\partial K} h\,\frac{dh}{d\overline{n}}\,d\sigma = \int\int\int_K \|\;\mathrm{grad} h\;\|^2\,dxdydz.$
Soluţie
a. Se aplică prima formulă a lui Green pentru: $f = 1$ şi $g = h$; o altă metodă este de a aplica formula Gauss-Ostrogradski câmpului $\overline{V} = \mathrm{grad} h$:

$$\int_{\partial K} \frac{dh}{d\overline{n}}\,d\sigma = \int_{\partial K} (\mathrm{grad} h)\,\overline{n}\,d\sigma =$$

$$= \int\int\int_K \mathrm{div}(\mathrm{grad} h)\,dxdydz = \int\int\int_K \Delta h = 0.$$

b. Se aplică a doua formulă a lui Green pentru $f = g = h$; o altă metodă constă în a aplica formula Gauss-Ostrogradski pentru $\overline{V} = h\,\mathrm{grad} h$:

$$\int_{\partial K} h\,\frac{dh}{d\overline{n}}\,d\sigma = \int\int\int_K h\,\mathrm{grad} h\,\overline{n}\,d\sigma =$$

$$= \int\int\int_K \mathrm{div}(h\,\mathrm{grad}h)\; dxdydz =$$

$$= \int\int\int_K \Big(h\,\mathrm{div}(\mathrm{grad}h) + (\mathrm{grad}h)\,(\mathrm{grad}h) \Big)\; dxdydz =$$

$$= \int\int\int_K \Big(h\,\Delta g + \parallel \mathrm{grad}h \parallel^2 \Big)\; dxdydz = \int\int\int_K \parallel \mathrm{grad}h \parallel^2\; dxdydz.$$

4.4 Formula lui Stokes

21. Să se calculeze, folosind formula lui Stokes, integrala curbilinie $\displaystyle\int_\Gamma \alpha$ în următoarele cazuri:
a. $\alpha = (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$.
$\Gamma : z = x^2 + y^2,\ z = 1$.
b. $\alpha = ydx + zdy + xdz$,
$\Gamma : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + y + z = 0$.
Soluţie
a. Fie suprafaţa $\Sigma = \{(x,y,z); z = x^2 + y^2 + z^2, z \leq 1\}$; atunci Γ este bordul lui Σ şi aplicând formula lui Stokes obţinem (lăsăm ca exerciţiu verificarea compatibilităţii orientărilor):

$$\int_\Gamma (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz = \int_\Sigma -2(dy \wedge dz + dz \wedge dx + dx \wedge dy) =$$

$$= -2 \int\int_D (-2x - 2y + 1)dxdy,$$

unde D este discul unitate.
b. Fie θ unghiul făcut de planul $x + y + z = 0$ cu planul xOy; atunci:

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}) \cdot \bar{k} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Intersecţia dintre sferă şi plan este un cerc mare al sferei, notat Γ. Considerăm drept suprafaţă Σ porţiunea din planul $x + y + z = 0$ situată în interiorul sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Evident, aria lui Σ este π. Fie D proiecţia lui Σ pe planul xOy. Aria lui D (care este interiorul unei elipse) este:

$$\mathrm{aria}(D) = \mathrm{aria}(\Sigma) \cdot \cos\theta = \pi\,\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Rezultă:

$$\int_\Gamma ydx + zdy + xdz = -\int_\Sigma (dy \wedge dz + dz \wedge dx + dx \wedge dy) =$$

$$= -\int\int_D 3dxdy = -3\,\text{aria}(D) = -\sqrt{3}\pi.$$

22. Să se calculeze circulaţia câmpului vectorial

$$\overline{V} = (y^2 + z^2)\overline{i} + (x^2 + z^2)\overline{j} + (x^2 + y^2)\overline{k}$$

pe curba $\Gamma : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $ax + by + cz = 0$.
Soluţie
Curba Γ este un cerc mare al sferei (intersecţia sferei cu un plan ce trece prin centrul sferei); considerăm drept suprafaţă Σ oricare din cele două semisfere determinate de plan pe sferă. Aplicând formula lui Stokes, obţinem:

$$\int_\Gamma \overline{V}\, d\overline{r} = \int_\Sigma (\text{rot}\overline{V})\, \overline{n}\, d\sigma =$$

$$= \int_\Sigma (2(y-z)\overline{i} + 2(z-x)\overline{j} + 2(x-y)\overline{k}) \cdot \frac{1}{R}(x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k})\, d\sigma = 0,$$

deoarece versorul normalei (exterioare) la sferă, $\overline{n} = \frac{1}{R}\overline{r}$ şi rot$\overline{V}$ sunt perpendiculari.

23. Să se calculeze, folosind formula lui Stokes, integralele:
a. $\displaystyle\int_\Gamma y(y+2z)dx + 2x(y+z)dy + 2xydz$, $\Gamma : z^2 = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 2x$.
b. $\displaystyle\int_\Gamma 2zdx - xdy + xdz$, $\Gamma : z = y + 1$, $x^2 + y^2 = 1$.
Soluţie
a. Integrala este 0.
b. Considerând Σ porţiunea din planul $z = y + 1$ situată în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 = 1$, şi aplicând formula lui Stokes, obţinem:

$$\int_\Gamma 2zdx - xdy + xdz = \int_\Sigma dz \wedge dx - dx \wedge dy = \int\int_D -2dxdy = -2\pi,$$

unde, D este discul unitate (proiecţia suprafeţei Σ pe planul xOy).

24. Să se calculeze direct şi cu formula lui Stokes integrala curbilinie

$$\int_\Gamma (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz,$$

unde Γ este poligonul de intersecţie dintre cubul $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ şi planul $x + y + z = \dfrac{3}{2}$.

Soluţie
Γ este un hexagon regulat. Pentru a calcula integrala cu definiţia trebuie parametrizate laturile hexagonului; de exemplu, latura din planul xOy are parametrizarea:

$$x(t) = t, y(t) = \frac{3}{2} - t, \; t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

Calculăm acum integrala aplicând formula lui Stokes. Fie Σ porţiunea din planul $x + y + z = \dfrac{3}{2}$ situată în interiorul cubului (interiorul hexagonului). Proiecţia lui Σ pe planul xOy este mulţimea

$$D = \{(x, y); \frac{1}{2} \leq x + y \leq \frac{3}{2}, \; 0 \leq x \leq 1, \; 0 \leq y \leq 1\},$$

a cărei arie este $\dfrac{3}{4}$. O parametrizare (carteziană) a suprafeţei Σ este

$$z = \frac{3}{2} - x - y, \; (x, y) \in D.$$

Aplicând formula lui Stokes, obţinem:

$$\int_\Gamma (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz =$$

$$= -2 \int_\Sigma (x + y)dx \wedge dy + (y + z)dy \wedge dz + (z + x)dz \wedge dx =$$

$$= -2 \int\int_D 3dxdy = -6 \,\mathrm{aria}(D) = -\frac{9}{2}.$$

25. Să se calculeze direct şi aplicând formula lui Stokes integrala

$$\int_\Gamma xdx + (x + y)dy + (x + y + z)dz,$$

pe curba Γ de ecuaţii:

$$x^2 + y^2 = R^2, \; z = x + y.$$

Soluţie
Pentru a calcula integrala direct parametrizăm

$$\Gamma : \; x(t) = R\cos t, y(t) = R\sin t, z(t) = R(\cos t + \sin t), t \in [0, 2\pi).$$

Pentru a aplica formula lui Stokes, considerăm suprafaţa Σ porţiunea din planul $z = x+y$ situată în interiorul cilindrului $x^2+y^2 = R^2$. Proiecţia lui Σ pe planul xOy este discul de centru O şi rază R, notat D. O parametrizare carteziană pentru Σ este $z = x+y$, $(x, y) \in D$. Aplicând formula lui Stokes, obţinem:

$$\int_\Gamma xdx + (x+y)dy + (x+y+z)dz = \int_\Sigma dx \wedge dy + dy \wedge dz - dz \wedge dx =$$

$$= \int\int_D dxdy = \pi R^2.$$

26. Să se calculeze circulaţia câmpului de vectori $\overline{V} = \frac{1}{r}(\overline{k} \times \overline{r})$ pe curba $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, unde:
$\Gamma_1 = \{(x, y, z); x^2 + y^2 = 1, z = 0, x > 0, y > 0\}$
$\Gamma_2 = \{(x, y, z); y^2 + z^2 = 1, x = 0, y > 0, z > 0\}$
$\Gamma_3 = \{(x, y, z); z^2 + x^2 = 1, y = 0, z > 0, x > 0\}$.
Soluţie
Vom aplica formula lui Stokes; pentru aceasta, calculăm mai întâi rotorul câmpului $\overline{V}$:

$$\mathrm{rot}\overline{V} = \frac{1}{r}\,\mathrm{rot}(\overline{k} \times \overline{r}) - (\overline{k} \times \overline{r})\mathrm{grad}\frac{1}{r} =$$

$$= \frac{1}{r}\left(\overline{k}\,\mathrm{div}\overline{r} - \overline{r}\,\mathrm{div}\overline{k} + \frac{d\overline{k}}{d\overline{r}} - \frac{d\overline{r}}{d\overline{k}}\right) + (\overline{k} \times \overline{r})\,\frac{\overline{r}}{r^3} = \frac{2\overline{k}}{r}.$$

Fie suprafaţa $\Sigma = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 = 1, x > 0, y > 0, z > 0\}$; evident, bordul lui Σ este Γ. Aplicând formula lui Stokes, obţinem:

$$\int_\Gamma \overline{V}\,d\overline{r} = \int_\Sigma \mathrm{rot}\overline{V}\overline{n}d\sigma,$$

unde, $\overline{n} = \overline{r}$ este versorul normalei exterioare la Σ. Pentru a calcula integrala de suprafaţă, putem folosi atât parametrizarea carteziană cât şi coordonatele sferice; se obţine $\int_\Gamma \overline{V}d\overline{r} = \frac{\pi}{2}$.

27. Fie $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, şi fie punctele $A(a, 0, 0), B(0, b, 0)$ şi $C(0, 0, c)$. Fie Γ reuniunea segmentelor $[AB] \cup [BC] \cup [CA]$ (cu acest sens). Să se calculeze $\int_\Gamma (z-y)dx + (x-z)dy + (y-x)dz$.
Soluţie

Vom calcula integrala aplicând formula lui Stokes (lăsăm ca exerciţiu calculul direct). Fie Σ interiorul triunghiului ABC; obţinem:

$$\int_\Gamma (z-y)dx + (x-z)dy + (y-x)dz = \int_\Sigma 2dx \wedge dy + 2dy \wedge dz + 2dz \wedge dx.$$

Proiecţia lui Σ pe planul xOy este interiorul triunghiului OAB, iar parametrizarea carteziană este

$$z = c\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right).$$

Rezultă:

$$\int_\Gamma (z-y)dx + (x-z)dy + (y-x)dz = 2\int\int_{OAB} \left(\frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1\right) dxdy =$$

$$= ab + bc + ca.$$

28. Fie $\overline{V} = (x^2 + y - 4)\overline{i} + 3xy\overline{j} + (2xz + z^2)\overline{k}$ şi fie semisfera

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 16,\ z \geq 0\}.$$

Să se calculeze fluxul câmpului $\mathrm{rot}\,(\overline{V})$ prin Σ, orientată cu normala exterioară (la sferă).

Soluţie

Fluxul cerut este:

$$\mathcal{F}_\Sigma(\mathrm{rot}(\overline{V})) = \int_\Sigma \mathrm{rot}(\overline{V}) \cdot \overline{n}\, d\sigma,$$

unde, $\overline{n}$ este normala exterioară la Σ. Integrala de suprafaţă se poate calcula atât direct (cu definiţia) cât şi cu formula lui Stokes; pentru aceasta, fie Γ cercul de intersecţie dintre Σ şi planul xOy. Ecuaţiile lui Γ sunt:

$$x^2 + y^2 = 16,\ z = 0.$$

Orientarea pe Γ este orientarea pozitivă a cercului în planul xOy. Aplicând formula lui Stokes, rezultă:

$$\int_\Sigma \mathrm{rot}(\overline{V}) \cdot \overline{n}\, d\sigma = \int_\Gamma \overline{V}\ d\overline{r} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big((16\cos^2 t + 4\sin t - 4)(-4\sin t) + (48\sin t\, \cos^2 t)\Big)\ dt = -16\pi.$$

29. Fie $a > 0$, $b > 0$ şi fie Γ intersecţia cilindrului $x^2 + y^2 = a^2$ cu planul $\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{b} = 1$. Să se calculeze, (aplicând formula lui Stokes), circulaţia câmpului vectorial $\overline{V} = x\,\overline{i} + (y - x)\,\overline{j} + (z - x - y)\,\overline{k}$ de-a lungul curbei Γ (orientarea pe Γ nu este precizată).

Soluţie

Fie Σ porţiunea din planul $\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{b} = 1$ din interiorul cilindrului $x^2 + y^2 = a^2$:

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in R^3 \mid \frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1,\ \ x^2 + y^2 \le a^2\}.$$

Atunci, conform formulei lui Stokes, rezultă:

$$\int_\Gamma \overline{V}\, d\overline{r} = \int_\Sigma \mathrm{rot}(\overline{V}) \cdot \overline{n}\, d\sigma,$$

orientările pe Γ şi Σ fiind compatibile. Parametrizăm cartezian Σ:

$$z = b\left(1 - \frac{x}{a}\right), (x, y) \in D = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \le a^2\}.$$

Rezultă vectorii tangenţi la Σ:

$$\left(1, 0, -\frac{b}{a}\right) \ \text{ şi } \ (0, 1, 0),$$

şi deci versorul normalei la Σ indus de parametrizarea aleasă este $\overline{n} = \dfrac{b}{a}\,\overline{i} + \overline{k}$. Rotorul câmpului $\overline{V}$ este $\mathrm{rot}\overline{V} = -\,\overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$. Rezultă circulaţia:

$$\int_\Gamma \overline{V}\,\overline{r} = \int_\Sigma \mathrm{rot}(\overline{V}) \cdot \overline{n}\, d\sigma = -\pi a^2 \left(1 + \frac{b}{a}\right).$$

30. Fie $(\Sigma, \partial\Sigma)$ o suprafaţă cu bord orientat, fie $\overline{n}$ versorul normalei la Σ şi fie $\overline{c}$ un vector constant. Să se demonstreze că circulaţia câmpului vectorial $\overline{V} = (\overline{c}\,\overline{r})\,\overline{r}$ pe curba $\partial\Sigma$ este egală cu $\displaystyle\int_\Sigma \overline{c}\,(\overline{r} \times \overline{n})\, d\sigma$.

Soluţie

Aplicăm formula lui Stokes:

$$\int_{\partial\Sigma} (\overline{c}\,\overline{r})\,\overline{r}\, d\overline{r} = \int_\Sigma \mathrm{rot}\Big((\overline{c}\,\overline{r})\,\overline{r}\Big)\,\overline{n}\, d\sigma =$$

$$= \int_{\Sigma} \Big((\overline{c}\,\overline{r})\,\mathrm{rot}\overline{r} - \overline{r} \times \mathrm{grad}(\overline{c}\,\overline{r}) \Big)\,\overline{n}\,d\sigma = \int_{\Sigma} (\overline{c} \times \overline{r})\,\overline{n}\,d\sigma = \int_{\Sigma} \overline{c}(\overline{r} \times \overline{n})d\sigma.$$

31. Fie $(\Sigma, \partial\Sigma)$ o suprafaţă cu bord orientat, fie $\overline{n}$ versorul normalei la Σ şi fie f şi g două funcţii de clasă $\mathcal{C}^2$ pe o vecinătate a lui Σ. Să se demonstreze relaţiile:

$$\int_{\partial\Sigma} f\,\mathrm{grad}g\,d\overline{r} = \int_{\Sigma} \Big((\mathrm{grad}f) \times (\mathrm{grad}g) \Big)\,\overline{n}d\sigma.$$

$$\int_{\partial\Sigma} \left(f\frac{\partial g}{\partial x} + g\frac{\partial f}{\partial x} \right) dx + \left(f\frac{\partial g}{\partial y} + g\frac{\partial f}{\partial y} \right) dy + \left(f\frac{\partial g}{\partial z} + g\frac{\partial f}{\partial z} \right) dz = 0.$$

Soluţie

Se aplică formula lui Stokes. Pentru prima egalitate:

$$\int_{\partial\Sigma} f\,\mathrm{grad}\,g\,d\overline{r} = \int_{\Sigma} \mathrm{rot}(f \cdot (\mathrm{grad}\,g)) \cdot \overline{n}\,d\sigma =$$

$$= \int_{\Sigma} \Big(f \cdot \mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,g) - \mathrm{grad}\,g \times\ \mathrm{grad}\,f \Big) \cdot \overline{n}\,d\sigma =$$

$$= \int_{\Sigma} \Big((\mathrm{grad}f) \times (\mathrm{grad}g) \Big)\,\overline{n}d\sigma.$$

Pentru a doua egalitate, calculăm rotorul:

$$\mathrm{rot}\Bigg(\left(f\frac{\partial g}{\partial x} + g\frac{\partial f}{\partial x} \right) \overline{i} + \left(f\frac{\partial g}{\partial y} + g\frac{\partial f}{\partial y} \right) \overline{j} + \left(f\frac{\partial g}{\partial z} + g\frac{\partial f}{\partial z} \right) \overline{k} \Bigg) = 0,$$

deci circulaţia este nulă (s-a folosit teorema de simetrie a lui Schwartz).

32. Fie $(\Sigma, \partial\Sigma)$ o suprafaţă cu bord orientat şi fie $\overline{n}$ versorul normalei la suprafaţa Σ.

a. Dacă f este o funcţie de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $(0, \infty)$, să se calculeze circulaţia câmpului vectorial $\overline{V} = f(r)\overline{r}$ pe curba $\partial\Sigma$.

b. Dacă g este o funcţie de clasă $\mathcal{C}^1$ pe o vecinătate a lui Σ şi $\overline{c}$ este un vector constant, să se demonstreze că circulaţia câmpului de vectori $\overline{W}(x, y, z) = g(x, y, z)\,\overline{c}$ pe curba $\partial\Sigma$ este

$$\int_{\Sigma} \overline{c}\,(\overline{n} \times \mathrm{grad}g)d\sigma.$$

Soluţie

a. Aplicăm formula lui Stokes; pentru aceasta, calculăm

$$\mathrm{rot}\overline{V} = f(r)\,\mathrm{rot}\overline{r} - \overline{r} \times \mathrm{grad}f(r) = -\overline{r} \times \frac{f'(r)}{r}\overline{r} = \overline{0},$$

deci circulaţia este nulă.
b. Aplicăm formula lui Stokes; calculând rotorul câmpului $\overline{W}$, obţinem

$$\mathrm{rot}\overline{W} = -\overline{c} \times \mathrm{grad} g,$$

ceea ce conduce la rezultatul cerut.

33. Fie $(\Sigma, \partial\Sigma)$ o suprafaţă cu bord orientat, fie $f \in \mathcal{C}^1(R)$, $a \in R^3$ şi fie $\overline{V} = (\overline{a}\, \mathrm{grad} f(r))\, \overline{r}$, unde, $\overline{r}$ este vectorul de poziţie. Să se demonstreze:

$$\int_{\partial\Sigma} \overline{V}\; d\overline{r} = \int_{\Sigma} \frac{\overline{a} \times \overline{r}}{r}\, f'(r)\, \overline{n}\; d\sigma,$$

unde, $\overline{n}$ este versorul normalei la Σ.
Soluţie
Se aplică formula lui Stokes:

$$\int_{\partial\Sigma} \overline{V}\; d\overline{r} = \int_{\Sigma} \frac{\overline{a} \times \overline{r}}{r}\, f'(r)\overline{n}\; d\sigma = \int_{\Sigma} \mathrm{rot}\left((\overline{a}\;\, \mathrm{grad} f(r))\, \overline{r}\right)\, \overline{n}\; d\sigma.$$

Calculăm acum rotorul lui $\overline{V}$; pentru aceasta, calculăm mai întâi:

$$\mathrm{grad} f(r) = f'(r)\, \mathrm{grad} r = f'(r)\, \frac{\overline{r}}{r}.$$

Obţinem:

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\left((\,\overline{a}\, \mathrm{grad} f(r)\,)\, \overline{r}\right) &= \mathrm{rot}\left(\frac{(\,\overline{a}\;\overline{r}\,)}{r}\, f'(r)\;\cdot\;\overline{r}\right) = \\
&= \frac{(\overline{a}\;\overline{r})}{r} f'(r)\; \mathrm{rot}\overline{r} - \overline{r} \times\; \mathrm{grad}\left(\frac{(\,\overline{a}\;\overline{r}\,)}{r} f'(r)\right) \\
&= -\overline{r} \times \left(f'(r)\, \mathrm{grad}\left(\frac{(\,\overline{a}\;\overline{r}\,)}{r}\right) + \frac{(\,\overline{a}\,\overline{r}\,)}{r}\, \mathrm{grad} f'(r)\right) = \\
&= -\overline{r} \times \left(f'(r)\, \frac{r\,\overline{a} - (\,\overline{a}\,\overline{r}\,)\;\frac{\overline{r}}{r}}{r^2} + \frac{(\,\overline{a}\;\overline{r}\,)}{r} f''(r)\, \frac{\overline{r}}{r}\right) = \\
&= \frac{f'(r)}{r}\, (\overline{a} \times \overline{r}),
\end{aligned}$$

ceea ce încheie demonstraţia.

Bibliografie

Lucrări teoretice
1. I. Colojoară
Analiză matematică, Ed. Didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1983.
2. R. Courant
Differential and Integral Calculus, vol.1,2, Nordeman Publishing Co, 1945.
3. G.M. Fihtengolţ
Curs de calcul diferenţial şi integral, vol.1,2,3, Ed. Tehnică, 1965.
4. P. Flondor, O. Stănăşilă
Lecţii de analiză matematică, Ed. ALL, 1993.
5. L.V. Kantorovici, G.P. Akilov
Analiză funcţională, Ed. Ştiinţifică şi enciclopedică, 1986
6. M. Olteanu
Curs de analiză funcţională, Ed. Printech 2000.
7. C. P. Niculescu
Fundamentele analizei matematice, Ed. Academiei Române, 1996.
8. W. Rudin
Principles of mathematical analysis, Mc Graw Hill, N.Y. 1964.
9. O. Stănăşilă
Analiză liniară şi geometrie, Ed. ALL, 2000
10. O. Stănăşilă
Matematici speciale, Ed. ALL, 2001.
Culegeri de probleme
11. C.M. Bucur, M. Olteanu, Roxana Vidican
Calcul diferenţial - caiet de seminar, Ed. Printech, 2000.
12. N. Donciu, D. Flondor
Algebră şi analiză matematică, Ed. Did. Ped., Bucureşti, 1979.
13. Ioana Luca, Gh. Oprişan
Matematici avansate, Ed. Printech, 2001.
14. Ana Niţă, Tatiana Stănăşilă
1000 de probleme rezolvate şi exerciţii fundamentale, Ed. ALL, 1997.