

11.3 Curvas y parametrizaciones

En esta sección consideraremos las curvas como objetos geométricos en vez de como caminos que siguen partículas en movimiento. Todo el mundo tiene una idea intuitiva de lo que es una curva, pero es difícil dar una definición formal de ella como objeto geométrico (es decir, como una cierta clase de conjunto de puntos) sin utilizar el concepto de representación paramétrica. Para evitar esta dificultad continuaremos considerando las curvas en el espacio tridimensional como el conjunto de puntos cuyas posiciones están dadas por la función vectorial de posición

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad a \leq t \leq b$$

Sin embargo, el parámetro t ya no tiene que representar el tiempo o ninguna otra magnitud física concreta.

Las curvas pueden ser muy extrañas. Por ejemplo, existen curvas continuas que pasan por todos los puntos de un cubo. Es difícil imaginar una curva de ese tipo como un objeto unidimensional. Para evitar estos objetos extraños *supondremos* a partir de ahora que la función $\mathbf{r}(t)$ que define la curva tiene primera derivada, $d\mathbf{r}/dt$, *continua*, y la seguiremos llamando «vector velocidad» y expresándola como $\mathbf{v}(t)$, por analogía con el caso físico en el que t es el tiempo (también continuaremos llamando a $v(t) = |\mathbf{v}(t)|$ «velocidad»). Como veremos posteriormente, esto implica que se puede definir una *longitud de arco* de la curva entre dos puntos cualesquiera correspondientes a valores del parámetro t_1 y t_2 ; si $t_1 < t_2$, dicha longitud de arco es

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} |\mathbf{v}(t)| dt = \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt$$

Desearíamos frecuentemente que $\mathbf{r}(t)$ tenga derivadas de orden superior que también sean continuas. Siempre que sea necesario, supondremos que la «aceleración», $\mathbf{a}(t) = d^2\mathbf{r}/dt^2$, e incluso la tercera derivada, $d^3\mathbf{r}/dt^3$, son continuas. Por supuesto, la mayoría de las curvas que aparecerán en la práctica tendrán parametrizaciones con derivadas de todos los órdenes que serán continuas.

Sin embargo, hay que tener en cuenta que ninguna suposición sobre la continuidad de las derivadas de la función $\mathbf{r}(t)$ es suficiente para garantizar que la curva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ es una curva «suave». Puede no serlo en un punto donde $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (véase el Ejemplo 1 de la Sección 11.1). En la sección siguiente demostraremos que si, además de ser continuo, el vector velocidad $\mathbf{v}(t)$ *nunca se anula*, entonces la curva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ es **suave** en el sentido de tener una tangente que varía de forma continua.

Aunque hemos dicho que una curva es un conjunto de puntos que cumplen una ecuación paramétrica $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, no existe una forma *única* de representar paraméricamente una curva. De la misma forma que los coches pueden viajar por la misma autopista a diferentes velocidades, y parar y arrancar en diferentes sitios, la misma curva puede ser definida mediante diferentes parametrizaciones; de hecho, una curva puede tener infinitas.

Ejemplo 1 Demuestre que todas las funciones vectoriales

$$\mathbf{r}_1(t) = \sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}, \quad (-\pi/2 \leq t \leq \pi/2),$$

$$\mathbf{r}_2(t) = (t-1)\mathbf{i} + \sqrt{2t-t^2}\mathbf{j}, \quad (0 \leq t \leq 2), \quad \text{y}$$

$$\mathbf{r}_3(t) = t\sqrt{2-t^2}\mathbf{i} + (1-t^2)\mathbf{j}, \quad (-1 \leq t \leq 1)$$

representan la misma curva. Describa dicha curva.

Solución Todas las funciones representan puntos en el plano xy . La función $\mathbf{r}_1(t)$ empieza en el punto $(-1, 0)$, cuyo vector de posición es $\mathbf{r}_1(-\pi/2) = -\mathbf{i}$ y termina en el punto $(1, 0)$, cuyo vector de posición

es \mathbf{i} . Está contenida en la mitad del plano xy donde $y \geq 0$ (porque $\cos t \geq 0$ para $(-\pi/2 \leq t \leq \pi/2)$). Finalmente, todos los puntos de la curva están a distancia 1 del origen:

$$|\mathbf{r}_1(t)| = \sqrt{(\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1$$

Por tanto, $\mathbf{r}_1(t)$ representa la semicircunferencia $y = \sqrt{1 - x^2}$ en el plano xy , recorrida de izquierda a derecha.

Las otras dos funciones tienen las mismas propiedades: ambas gráficas están en $y \geq 0$,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_2(0) = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{r}_2(2) = \mathbf{i}, \quad |\mathbf{r}_2(t)| &= \sqrt{(t-1)^2 + 2t - t^2} = 1 \\ \mathbf{r}_3(-1) = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{r}_3(1) = \mathbf{i}, \quad |\mathbf{r}_3(t)| &= \sqrt{t^2(2-t^2) + (1-t^2)^2} = 1 \end{aligned}$$

Por tanto, las tres funciones representan la misma semicircunferencia (véase la Figura 11.8). Por supuesto, las tres parametrizaciones recorren la curva a diferentes velocidades.

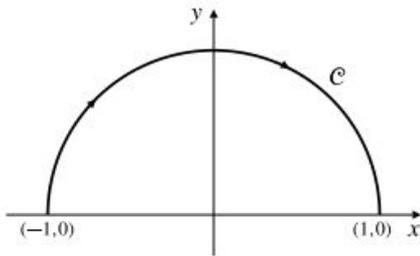


Figura 11.8 En el Ejemplo 1 se muestran tres parametrizaciones de la semicircunferencia c .

La curva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, ($a \leq t \leq b$) se denomina **curva cerrada** si $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$, es decir, si la curva empieza y termina en el mismo punto. La curva c **no se cruza consigo misma** si existe alguna parametrización $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, ($a \leq t \leq b$), de c que sea uno a uno excepto porque los extremos podrían ser el mismo punto:

$$\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_2) \quad a \leq t_1 < t_2 \leq b \Rightarrow t_1 = a \quad y \quad t_2 = b$$

Si una curva es cerrada, pero no se cruza consigo misma, se denomina **curva cerrada simple**. Las circunferencias y las elipses son ejemplos de curvas cerradas simples. Toda parametrización de una curva concreta determina una de dos posibles **orientaciones**, correspondientes a la dirección de la curva en la que el parámetro crece. La Figura 11.9 ilustra estos conceptos. Las tres parametrizaciones de la semicircunferencia del Ejemplo 1 la orientan en el sentido de las agujas del reloj, vista desde un punto por encima del plano xy . Esta orientación se indica mediante las flechas que hay sobre la curva en la Figura 11.8. Esa misma semicircunferencia podría tener la orientación opuesta si se parametrizara, por ejemplo, como

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

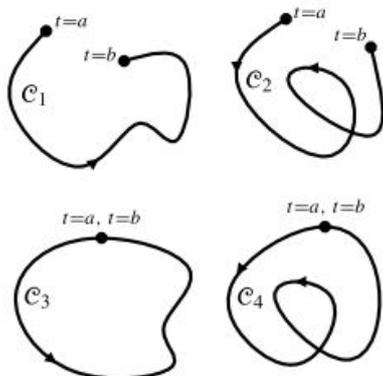


Figura 11.9 Las curvas c_1 y c_3 no se cruzan consigo mismas. Las curvas c_2 y c_4 se cruzan consigo mismas. Las curvas c_1 y c_2 no son cerradas. Las curvas c_3 y c_4 son cerradas. La curva c_3 es una curva cerrada simple.

Parametrización de la curva de intersección de dos superficies

Frecuentemente, una curva se especifica como intersección de dos superficies con ecuaciones cartesianas dadas. Puede ser necesario representar dicha curva mediante ecuaciones paramétricas. No hay una única forma de hacerlo, pero si una de las superficies dadas es un cilindro paralelo a un eje de coordenadas (de modo que su ecuación sea independiente de una de las variables), podemos comenzar parametrizando esa superficie. Los siguientes ejemplos clarifican el método.

Ejemplo 2 Parametrice la curva de intersección del plano $x + 2y + 4z = 4$ con el cilindro elíptico $x^2 + 4y^2 = 4$.

Solución Empezaremos con la ecuación $x^2 + 4y^2 = 4$, que es independiente de z . Se puede parametrizar de muchas formas; una manera cómoda es

$$x = 2 \cos t, \quad y = \sin t, \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

En la ecuación del plano se puede despejar z , por lo que z se puede expresar en función de t

$$z = \frac{1}{4}(4 - x - 2y) = 1 - \frac{1}{2}(\cos t + \sin t)$$

Entonces, las superficies dadas se cruzan formando la curva (véase la Figura 11.10)

$$\mathbf{r} = 2 \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + \left(1 - \frac{\cos t + \sin t}{2}\right) \mathbf{k}, \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

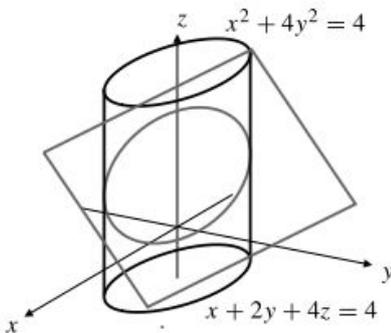


Figura 11.10 La curva de intersección de un plano oblicuo con un cilindro elíptico.

Ejemplo 3 Calcule una representación paramétrica de la curva de intersección de las superficies

$$x^2 + y + z = 2 \quad \text{y} \quad xy + z = 1$$

Solución En este caso ninguna de las ecuaciones es independiente de una variable, pero podemos obtener una tercera ecuación que represente a una superficie que contenga a la curva de intersección de las dos superficies dadas, restando las dos ecuaciones para eliminar la variable z

$$x^2 + y - xy = 1$$

Esta ecuación se puede parametrizar rápidamente. Si, por ejemplo, hacemos $x = t$, entonces

$$t^2 + y(1 - t) = 1, \quad \text{de forma que} \quad y = \frac{1 - t^2}{1 - t} = 1 + t$$

Cualquiera de las ecuaciones dadas se puede utilizar para expresar z en función de t .

$$z = 1 - xy = 1 - t(1 + t) = 1 - t - t^2$$

Por tanto, una posible parametrización de la curva es

$$\mathbf{r} = t \mathbf{i} + (1 + t) \mathbf{j} + (1 - t - t^2) \mathbf{k}$$

Por supuesto, esta respuesta no es única. Se pueden encontrar muchas otras parametrizaciones de la curva, con orientaciones en cualquier dirección.

Longitud de arco

Consideraremos ahora la forma de definir y calcular la longitud de una curva. Sea c una curva continua y acotada, especificada por

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad a \leq t \leq b$$

Subdividamos el intervalo cerrado $[a, b]$ en n subintervalos por los puntos

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$

Los puntos $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}(t_i)$, $(0 \leq i \leq n)$ subdividen c en n arcos. Si se utiliza la longitud de la cuerda $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}|$ como aproximación a la longitud del arco entre \mathbf{r}_{i-1} y \mathbf{r}_i , entonces la suma

$$s_n = \sum_{i=1}^n |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}|$$

es una aproximación a la longitud de c mediante la longitud de una línea poligonal (véase la Figura 11.11). Evidentemente, la longitud de esa aproximación será menor o igual que la longitud real de c . Se dice que c es **rectificable** si existe una constante K tal que $s_n \leq K$ para todo n y toda selección de los puntos t_i . En este caso, el axioma de completitud de los números reales asegura que existirá un valor de K mínimo. Denominaremos a este valor de K **longitud** de c y la representaremos por s .

Sea $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ y $\Delta \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}$. Entonces, s_n se puede expresar de la forma

$$s_n = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\Delta \mathbf{r}_i}{\Delta t_i} \right| \Delta t_i$$

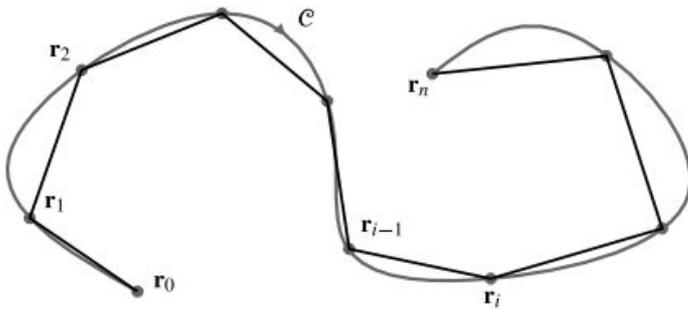


Figura 11.11 Aproximación poligonal a una curva c . La longitud de la línea poligonal no puede superar a la longitud de la curva. En esta figura los puntos de la curva se designan mediante sus vectores de posición, pero el origen y los propios vectores no se muestran.

Si $\mathbf{r}(t)$ tiene derivada continua $\mathbf{v}(t)$, entonces

$$s = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta t_i \rightarrow 0}} s_n = \int_a^b \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt = \int_a^b |\mathbf{v}(t)| dt = \int_a^b v(t) dt$$

En términos cinemáticos, esta fórmula indica que la distancia recorrida por una partícula en movimiento es la integral de su velocidad.

Observación Aunque la fórmula anterior se expresa en función del parámetro t , la longitud de arco, tal como se ha definido anteriormente, es una propiedad estrictamente geométrica de la curva c . Es independiente de la parametrización concreta utilizada para representar a c . Véase el Ejercicio 27 posterior.

Si $s(t)$ es la longitud de arco de la parte de c correspondiente a los valores del parámetro contenidos en $[a, t]$, entonces

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} \int_a^t v(\tau) dt = v(t)$$

de forma que el **elemento longitud de arco** de c se expresa como

$$ds = v(t) dt = \left| \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) \right| dt$$

La longitud de c es la integral de esos elementos longitud de arco; expresamos

$$\int_c ds = \text{longitud de } c = \int_a^b v(t) dt$$

Varias fórmulas familiares de la longitud de arco se deducen de la fórmula anterior utilizando parametrizaciones específicas de curvas. Por ejemplo, el elemento longitud de arco ds de la curva plana cartesiana $y = f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ se obtiene utilizando x como parámetro; en este caso, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + f(x)\mathbf{j}$, por lo que $\mathbf{v} = \mathbf{i} + f'(x)\mathbf{j}$ y

$$ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

De forma similar, el elemento longitud de arco ds de una curva plana en polares $r = g(\theta)$ se puede calcular mediante la parametrización

$$\mathbf{r}(\theta) = g(\theta) \cos \theta \mathbf{i} + g(\theta) \sin \theta \mathbf{j}$$

Y vale

$$ds = \sqrt{(g(\theta) \cos \theta)' ^2 + (g(\theta) \sin \theta)' ^2} d\theta$$

Ejemplo 4 Calcule la longitud de la parte de la **hélice circular**

$$\mathbf{r} = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + bt \mathbf{k}$$

que está entre los puntos $(a, 0, 0)$ y $(a, 0, 2\pi b)$.

Solución Esta curva realiza un movimiento en espiral alrededor del eje z , elevándose mientras gira (véase la Figura 11.12). Está contenida en la superficie del cilindro circular $x^2 + y^2 = a^2$. Tenemos que

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -a \sin t \mathbf{i} + a \cos t \mathbf{j} + b \mathbf{k}$$

$$v = \sqrt{a^2 + b^2}$$

por lo que en función del parámetro t la hélice se recorre a velocidad constante. La longitud pedida s corresponde al intervalo del parámetro $[0, 2\pi]$. Entonces,

$$s = \int_0^{2\pi} v(t) dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2} dt = 2\pi \sqrt{a^2 + b^2}$$

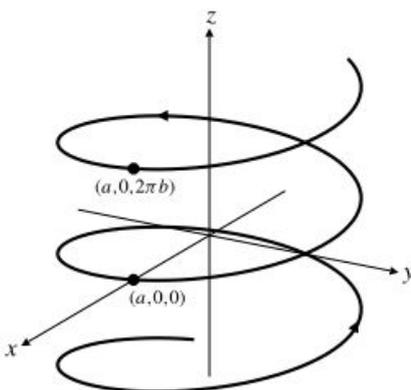


Figura 11.12 La hélice
 $x = a \cos t$
 $y = a \sin t$
 $z = bt$

Curvas suaves por tramos

Como se observó anteriormente, una curva paramétrica c dada por $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ puede no ser suave en los puntos donde $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{0}$. Si hay un número finito de puntos de ese tipo, se dice que la curva es suave por tramos.

En general, una **curva suave por tramos** c está formada por un número finito de arcos suaves, c_1, c_2, \dots, c_k , como se muestra en la Figura 11.13.

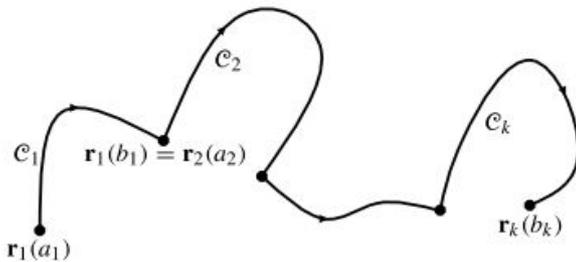


Figura 11.13 Una curva suave por tramos.

En este caso se expresa c como suma de los arcos individuales:

$$c = c_1 + c_2 + \dots + c_k$$

Cada arco c_i posee su propia parametrización

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_i(t), \quad (a_i \leq t \leq b_i)$$

siendo $\mathbf{v}_i = d\mathbf{r}_i/dt \neq \mathbf{0}$ para $a_i < t < b_i$. El hecho de que c_{i+1} debe comenzar en el punto donde termina c_i impone las condiciones

$$\mathbf{r}_{i+1}(a_{i+1}) = \mathbf{r}_i(b_i) \quad \text{para } 1 \leq i \leq k-1$$

Si además $\mathbf{r}_k(b_k) = \mathbf{r}_1(a_1)$, entonces c es una curva suave por tramos cerrada.

La longitud de una curva suave por tramos $c = c_1 + c_2 + \dots + c_k$ es la suma de las longitudes de los arcos que la componen:

$$\text{longitud de } c = \sum_{i=1}^k \int_{a_i}^{b_i} \left| \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right| dt$$

Parametrización mediante la longitud de arco

La selección de un parámetro particular para especificar una curva dada dependerá generalmente del problema en el que surge la curva: no hay una «forma correcta» de parametrizar una curva. Sin embargo, existe un parámetro que es «natural», en el sentido de que surge de la geometría (forma y tamaño) de la propia curva y no del sistema de coordenadas en el que se exprese la ecuación de dicha curva. Este parámetro es la *longitud de arco* medida desde algún punto particular (el *punto inicial*) de la curva. El vector de posición de un punto arbitrario P sobre la curva se puede especificar en función de la longitud del arco s de dicha curva desde el punto inicial P_0 hasta P ,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$$

Esta ecuación se denomina **parametrización mediante la longitud de arco** o **parametrización intrínseca** de la curva. Como $ds = v(t) dt$ para cualquier parametrización $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, en el caso de parametrización mediante la longitud de arco tenemos que $ds = v(s) ds$. Por tanto, $v(s) = 1$; una curva parametrizada en función de la longitud de arco se recorre con velocidad unidad. Aunque raramente es fácil (y en general es imposible) obtener explícitamente $\mathbf{r}(s)$ cuando la curva se expresa en función de algún otro parámetro, las curvas suaves siempre admiten esta parametrización (véase el Ejercicio 28 posterior), que será de utilidad cuando desarrollemos en la sección

siguiente los fundamentos de la *geometría diferencial* de las curvas en el espacio tridimensional.

Supongamos que una curva se especifica en función de un parámetro arbitrario t . Si la longitud del arco en el intervalo de valores del parámetro $[t_0, t]$,

$$s = s(t) = \int_{t_0}^t \left| \frac{d}{dt} \mathbf{r}(\tau) \right| d\tau$$

se puede calcular explícitamente, y si se puede despejar t explícitamente en la ecuación $s = s(t)$ como función de s ($t = t(s)$), entonces la curva se puede volver a parametrizar mediante la longitud de arco sustituyendo t en la parametrización original:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t(s))$$

Ejemplo 5 Parametrice la hélice circular

$$\mathbf{r} = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + bt \mathbf{k}$$

en función de la longitud de arco medida desde el punto $(a, 0, 0)$ en la dirección de t creciente (véase la Figura 11.12).

Solución El punto inicial corresponde a $t = 0$. Como se muestra en el Ejemplo 4, tenemos que $ds/dt = \sqrt{a^2 + b^2}$, por lo que

$$s = s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} t$$

Por tanto, $t = s/\sqrt{a^2 + b^2}$ y la parametrización mediante la longitud de arco es

$$\mathbf{r}(s) = a \cos \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \mathbf{i} + a \sin \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \mathbf{j} + \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \mathbf{k}$$

Ejercicios 11.3

En los Ejercicios 1-4, calcule la parametrización requerida de la parte que está en el primer cuadrante del arco de circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$.

1. En función de la coordenada y , con orientación en sentido contrario al de las agujas del reloj.
2. En función de la coordenada x , con orientación en el sentido de las agujas del reloj.
3. En función del ángulo que forma la tangente y el eje x positivo, con orientación en sentido contrario al de las agujas del reloj.
4. En función de la longitud medida desde $(0, a)$, con orientación en el sentido de las agujas del reloj.
5. Los cilindros $z = x^2$ y $z = 4y^2$ se cortan en dos curvas, una de las cuales pasa por el punto $(2, -1, 4)$. Obtenga una parametrización de dicha curva utilizando $t = y$ como parámetro.
6. El plano $x + y + z = 1$ corta al cilindro $z = x^2$ formando una parábola. Parametrice dicha parábola utilizando $t = x$ como parámetro.

En los Ejercicios 7-10, parametrice las curvas de intersección de las superficies dadas. *Nota:* Las respuestas no son únicas.

7. $x^2 + y^2 = 9$ y $z = x + y$
8. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y $x + y = 1$
9. $z = x^2 + y^2$ y $2x - 4y - z - 1 = 0$
10. $yz + x = 1$ y $xz - x = 1$
11. El plano $z = 1 + x$ corta al cono $z^2 = x^2 + y^2$ formando una parábola. Intente parametrizar dicha parábola utilizando como parámetro: (a) $t = x$, (b) $t = y$ y (c) $t = z$.
¿Cuál de estas posibilidades de selección de t produce una parametrización que representa toda la parábola? ¿Qué es dicha parametrización? ¿Qué sucede con las otras dos posibilidades?
12. El plano $x + y + z = 1$ corta a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ formando una circunferencia \mathcal{C} . Calcule el centro \mathbf{r}_0 y el radio r de \mathcal{C} . Calcule

también dos vectores unitarios perpendiculares $\hat{\mathbf{v}}_1$ y $\hat{\mathbf{v}}_2$ paralelos al plano de c . (Sugerencia: Para concretar, demuestre que $\hat{\mathbf{v}}_1 = (\mathbf{i} - \mathbf{j})/\sqrt{2}$ es uno de esos vectores; obtenga después un segundo vector que sea perpendicular a $\hat{\mathbf{v}}_1$). Utilice sus resultados para construir una parametrización de c .

- 13.** Calcule la longitud de la curva $\mathbf{r} = t^2\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ desde $t = 0$ hasta $t = 1$.
- 14.** ¿Para qué valores del parámetro λ la longitud $s(T)$ de la curva $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + \lambda t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ ($0 \leq t \leq T$) se expresa como $s(T) = T + T^3$?
- 15.** Exprese la longitud de la curva $\mathbf{r} = at^2\mathbf{i} + bt\mathbf{j} + ct\ln t\mathbf{k}$ ($1 \leq t \leq T$), en forma de integral definida. Evalúe la integral si $b^2 = 4ac$.
- 16.** Describa la curva paramétrica c dada por

$$x = a \cos t \operatorname{sen} t, \quad y = a \operatorname{sen}^2 t, \quad z = bt$$
 ¿Cuál es la longitud de c entre $t = 0$ y $t = T > 0$?
- 17.** Calcule la longitud de la hélice cónica $\mathbf{r} = t \cos t \mathbf{i} + t \operatorname{sen} t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$). ¿Por qué se denomina a esta curva hélice cónica?
- 18.** Describa la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con el cilindro elíptico $x^2 + 2z^2 = 1$. Calcule la longitud total de la curva de intersección.
- 19.** Sea c la curva $x = e^t \cos t$, $y = e^t \operatorname{sen} t$, $z = t$ entre $t = 0$ y $t = 2\pi$. Calcule la longitud de c .
- 20.** Calcule la longitud de la curva suave por tramos $\mathbf{r} = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$, ($-1 \leq t \leq 2$).
- 21.** Describa la curva suave por tramos $c = c_1 + c_2$, siendo $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}$, ($0 \leq t \leq 1$) y $\mathbf{r}_2(t) = (1 - t)\mathbf{i} + (1 + t)\mathbf{j}$, ($0 \leq t \leq 1$).
- *22.** Un cable de longitud L y sección cruzada circular de radio a se enrolla sin solapamiento alrededor de un

carrete cilíndrico de radio b , de forma que las vueltas contiguas se tocan entre sí. ¿Qué longitud del cilindro es cubierta por el cable?

En los Ejercicios 23-26, vuelva a parametrizar la curva dada, en la misma orientación, en función de su longitud de arco medida desde el punto donde $t = 0$.

23. $\mathbf{r} = At\mathbf{i} + Bt\mathbf{j} + Ct\mathbf{k}$ ($A^2 + B^2 + C^2 > 0$)

24. $\mathbf{r} = e^t\mathbf{i} + \sqrt{2}t\mathbf{j} - e^{-t}\mathbf{k}$

***25.** $\mathbf{r} = a \cos^3 t \mathbf{i} + a \operatorname{sen}^3 t \mathbf{j} + b \cos 2t \mathbf{k}$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$)

***26.** $\mathbf{r} = 3t \cos t \mathbf{i} + 3t \operatorname{sen} t \mathbf{j} + 2\sqrt{2}t^{3/2}\mathbf{k}$

- 27.** Sean $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1(t)$, ($a \leq t \leq b$), y $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2(u)$, ($c \leq u \leq d$), dos parametrizaciones de la misma curva c , siendo cada una de ellas uno a uno en su dominio y con la misma orientación (de forma que $\mathbf{r}_1(a) = \mathbf{r}_2(c)$ y $\mathbf{r}_1(b) = \mathbf{r}_2(d)$). Entonces, para todo t en el intervalo $[a, b]$ existe un único $u = u(t)$ tal que $\mathbf{r}_2(u(t)) = \mathbf{r}_1(t)$. Demuestre que

$$\int_a^b \left| \frac{d}{dt} \mathbf{r}_1(t) \right| dt = \int_c^d \left| \frac{d}{du} \mathbf{r}_2(u) \right| du$$

y, por tanto, que la longitud de c es independiente de la parametrización.

- *28.** Si la curva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ tiene una velocidad $\mathbf{v}(t)$ continua que no se anula en el intervalo $[a, b]$, y si t_0 es un punto del intervalo $[a, b]$, demuestre que la función

$$s = g(t) = \int_{t_0}^t |\mathbf{v}(u)| du$$

es creciente en el intervalo $[a, b]$ y, por tanto, tiene inversa:

$$t = g^{-1}(s) \Leftrightarrow s = g(t)$$

A partir de aquí, demuestre que la curva se puede parametrizar en función de su longitud de arco medida desde $\mathbf{r}(t_0)$.

11.4 Curvatura, torsión y sistema de referencia de Frenet

En esta sección presentaremos algunas nuevas funciones escalares y vectoriales asociadas a una curva c . Las más importantes son la curvatura y la torsión de la curva, y un trío de vectores mutuamente perpendiculares, con orientación derecha, que forman una base que se denomina sistema de referencia de Frenet. La curvatura mide la velocidad con la que cambia una curva (alejándose de su tangente) en cualquier punto. La torsión mide la velocidad con que la curva se tuerce (fuera del plano en el que está evolucionando) en cualquier punto.

El vector tangente unitario

El vector velocidad $\mathbf{v}(t) = d\mathbf{r}/dt$ es tangente a la curva paramétrica $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ en el punto $\mathbf{r}(t)$, y apunta en la dirección de la orientación de la curva en dicho punto. Como estamos suponiendo

que $\mathbf{v}(t) \neq \mathbf{0}$, se puede obtener un **vector tangente unitario**, $\hat{\mathbf{T}}(t)$, en $\mathbf{r}(t)$ dividiendo $\mathbf{v}(t)$ por su longitud:

$$\hat{\mathbf{T}}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{v(t)} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \bigg/ \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|$$

Recuérdese que una curva parametrizada en función de su longitud de arco, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, se recorre con velocidad unidad, $v(s) = 1$. En función de la parametrización de la longitud de arco, el vector tangente unitario es

$$\hat{\mathbf{T}}(s) = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

Ejemplo 1 Calcule el vector tangente unitario, $\hat{\mathbf{T}}$, de la hélice circular del Ejemplo 4 de la Sección 11.3, en función de t y del parámetro de longitud de arco s .

Solución En función de t tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + b t \mathbf{k} \\ \mathbf{v}(t) &= -a \sin t \mathbf{i} + a \cos t \mathbf{j} + b \mathbf{k} \\ v(t) &= \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \hat{\mathbf{T}}(t) &= -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin t \mathbf{i} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos t \mathbf{j} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \mathbf{k} \end{aligned}$$

En función del parámetro de longitud de arco (véase el Ejemplo 5 de la Sección 11.3)

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(s) &= a \cos \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \mathbf{i} + a \sin \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \mathbf{j} + \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \mathbf{k} \\ \hat{\mathbf{T}}(s) = \frac{d\mathbf{r}}{ds} &= -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \mathbf{i} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \mathbf{j} \\ &\quad + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \mathbf{k} \end{aligned}$$

Observación Si la curva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ tiene una velocidad continua y distinta de cero $\mathbf{v}(t)$, entonces el vector tangente unitario $\hat{\mathbf{T}}(t)$ es una función continua de t . El ángulo $\theta(t)$ que forman $\hat{\mathbf{T}}(t)$ y cualquier vector unitario fijo $\hat{\mathbf{u}}$ es también continuo en t :

$$\theta(t) = \cos^{-1}(\hat{\mathbf{T}}(t) \cdot \hat{\mathbf{u}})$$

Por tanto, como se dijo anteriormente, la curva es *suave*, en el sentido de que tiene una tangente que varía de forma continua. La velocidad con la que varía esta tangente se cuantifica mediante la curvatura, que presentaremos a continuación.

Curvatura y normal unitaria

En el resto de esta sección consideraremos una curva abstracta \mathcal{C} , parametrizada en función de la longitud de arco, medida desde algún punto de la misma:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$$

En la siguiente sección volveremos a las curvas con parametrizaciones arbitrarias, y aplicaremos los principios desarrollados en esta sección a problemas específicos. Supondremos que las ecuaciones paramétricas de las curvas tienen derivadas continuas hasta tercer orden en los intervalos donde están definidas.

Como tiene longitud unidad, el vector tangente $\hat{\mathbf{T}}(s) = d\mathbf{r}/ds$ cumple $\hat{\mathbf{T}}(s) \cdot \hat{\mathbf{T}}(s) = 1$. Diferenciando esta ecuación con respecto a s se obtiene

$$2\hat{\mathbf{T}}(s) \cdot \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} = 0$$

de modo que $d\hat{\mathbf{T}}/ds$ es perpendicular a $\hat{\mathbf{T}}(s)$.

DEFINICIÓN 1 Curvatura y radio de curvatura

La **curvatura** de c en el punto $\mathbf{r}(s)$ es la longitud de $d\hat{\mathbf{T}}/ds$ en dicho punto. Se indica como κ , la letra griega «kappa»:

$$\kappa(s) = \left| \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} \right|$$

El **radio de curvatura**, que se indica como ρ , la letra griega «rho», es el inverso de la curvatura:

$$\rho(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$$

Como veremos posteriormente, la curvatura de c en $\mathbf{r}(s)$ mide la velocidad de giro de la tangente a la curva en dicho punto. El radio de curvatura es el radio de la circunferencia que mejor aproxima en el punto $\mathbf{r}(s)$ la curva de c cerca de dicho punto.

De acuerdo con esta definición, $\kappa(s) \geq 0$ en toda la curva c . Si $\kappa(s) \neq 0$, se puede dividir $d\hat{\mathbf{T}}/ds$ por su longitud, $\kappa(s)$, y obtener un vector unitario $\hat{\mathbf{N}}(s)$ en la misma dirección. Este vector unitario se denomina **normal principal unitaria** a c en $\mathbf{r}(s)$ o, más comúnmente, sólo **normal unitaria**:

$$\hat{\mathbf{N}}(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} = \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} \left/ \left| \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} \right| \right.$$

Nótese que $\hat{\mathbf{N}}(s)$ es perpendicular a c en $\mathbf{r}(s)$, y apunta en la dirección en la que $\hat{\mathbf{T}}$, y por tanto c , está girando. La normal principal no está definida en los puntos donde la curvatura $\kappa(s)$ es cero. Por ejemplo, una recta no tiene normal principal. La Figura 11.14(a) muestra $\hat{\mathbf{T}}$ y $\hat{\mathbf{N}}$ en un punto de una curva típica.

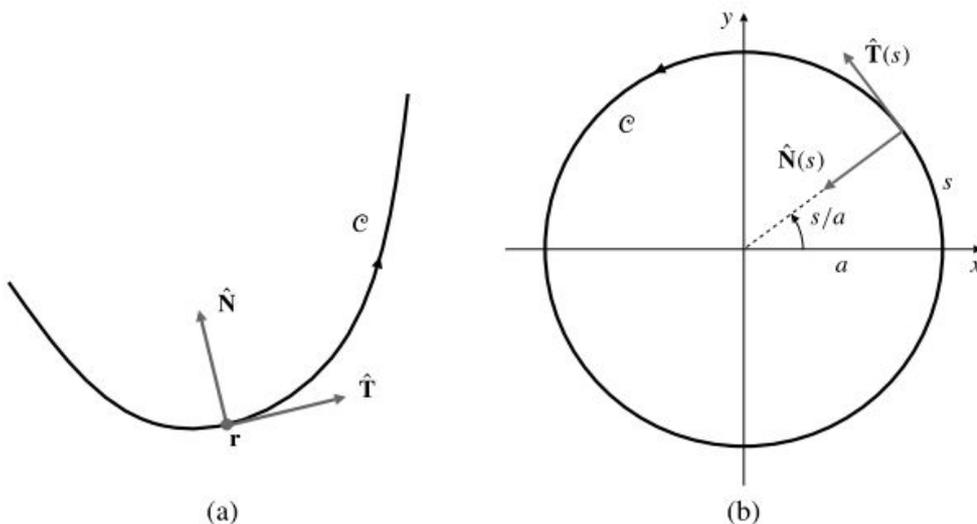


Figura 11.14
 (a) Los vectores tangente unitario y normal principal de una curva.
 (b) Los vectores tangente unitario y normal principal de una circunferencia.

Ejemplo 2 Sea $a > 0$. Demuestre que la curva \mathcal{C} dada por

$$\mathbf{r} = a \cos\left(\frac{s}{a}\right)\mathbf{i} + a \sin\left(\frac{s}{a}\right)\mathbf{j}$$

es una circunferencia en el plano xy de radio a y centro el origen, y que está parametrizada en función de la longitud de arco. Calcule la curvatura, el radio de curvatura, y los vectores tangente unitario y normal principal en todo punto de \mathcal{C} .

Solución Como

$$|\mathbf{r}(s)| = a \sqrt{\left(\cos\left(\frac{s}{a}\right)\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{s}{a}\right)\right)^2} = a$$

\mathcal{C} es de hecho una circunferencia de radio a centrada en el origen en el plano xy . Como la velocidad es

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right| = \left|-\sin\left(\frac{s}{a}\right)\mathbf{i} + \cos\left(\frac{s}{a}\right)\mathbf{j}\right| = 1$$

el parámetro s debe representar la longitud de arco. Por tanto, el vector tangente unitario es

$$\hat{\mathbf{T}}(s) = -\sin\left(\frac{s}{a}\right)\mathbf{i} + \cos\left(\frac{s}{a}\right)\mathbf{j}$$

Entonces,

$$\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} = -\frac{1}{a}\cos\left(\frac{s}{a}\right)\mathbf{i} - \frac{1}{a}\sin\left(\frac{s}{a}\right)\mathbf{j}$$

y la curvatura y el radio de curvatura en $\mathbf{r}(s)$ son

$$\kappa(s) = \left|\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds}\right| = \frac{1}{a}, \quad \rho(s) = \frac{1}{\kappa(s)} = a$$

Finalmente, la normal principal unitaria es

$$\hat{\mathbf{N}}(s) = -\cos\left(\frac{s}{a}\right)\mathbf{i} - \sin\left(\frac{s}{a}\right)\mathbf{j} = -\frac{1}{a}\mathbf{r}(s)$$

Nótese que la curvatura y el radio de curvatura son constantes; este último es de hecho el radio de la circunferencia. La circunferencia y sus vectores tangente unitario y normal en una posición típica se muestran en la Figura 11.14(b). Nótese que $\hat{\mathbf{N}}$ apunta hacia el centro de la circunferencia.

Observación Se puede hacer otra observación sobre el ejemplo anterior. El vector de posición $\mathbf{r}(s)$ forma un ángulo $\theta = s/a$ con el eje x positivo. Por tanto, $\hat{\mathbf{T}}(s)$ forma el mismo ángulo con el eje x positivo. Por esta razón, la velocidad de rotación de $\hat{\mathbf{T}}$ con respecto a s es

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{a} = \kappa$$

Es decir, κ es la velocidad con la que $\hat{\mathbf{T}}$ gira (medida con respecto a la longitud de arco). Esta observación se puede aplicar a cualquier curva general suave.

TEOREMA 2 La curvatura es la velocidad de giro del vector tangente unitario

Sea $\kappa > 0$ en un intervalo que contiene a s , y sea $\Delta\theta$ el ángulo que forman $\hat{\mathbf{T}}(s + \Delta s)$ y $\hat{\mathbf{T}}(s)$, los vectores tangentes unitarios en dos puntos cercanos de la curva. Entonces,

$$\kappa(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right|$$

DEMOSTRACIÓN Sea $\Delta\hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{T}}(s + \Delta s) - \hat{\mathbf{T}}(s)$. Como $\hat{\mathbf{T}}(s)$ y $\hat{\mathbf{T}}(s + \Delta s)$ son vectores unitarios, $|\Delta\hat{\mathbf{T}}/\Delta\theta|$ es la razón entre la longitud de una cuerda y la longitud del arco correspondiente en una circunferencia de radio 1 (véase la Figura 11.15). Entonces,

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\hat{\mathbf{T}}}{\Delta\theta} \right| = 1 \quad \text{y}$$

$$\kappa(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\hat{\mathbf{T}}}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\hat{\mathbf{T}}}{\Delta\theta} \right| \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right|$$

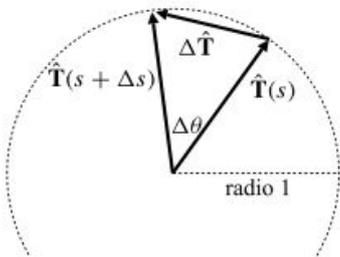


Figura 11.15 $|\Delta\hat{\mathbf{T}}| \approx |\Delta\theta|$ para valores pequeños de $|\Delta s|$.

La tangente unitaria $\hat{\mathbf{T}}$ y la normal unitaria $\hat{\mathbf{N}}$ en un punto $\mathbf{r}(s)$ de una curva \mathcal{C} pueden considerarse con su origen en ese punto. Son perpendiculares, y $\hat{\mathbf{N}}$ apunta en la dirección en la que gira $\hat{\mathbf{T}}(s)$ cuando s aumenta. El plano que pasa por $\mathbf{r}(s)$ y contiene los vectores $\hat{\mathbf{T}}(s)$ y $\hat{\mathbf{N}}(s)$ se denomina **plano osculante** de \mathcal{C} en $\mathbf{r}(s)$ (del latín *osculum*, que significa *beso*). En una *curva plana*, como la circunferencia del Ejemplo 2, el plano osculante es el plano que contiene a la curva. En el caso más general de curvas tridimensionales, el plano osculante varía de un punto a otro; en un punto cualquiera es el plano más cercano que contiene a la parte de la curva que está alrededor de dicho punto. El plano osculante no está definido en los puntos donde $\kappa(s) = 0$, aunque si esos puntos están aislados, algunas veces se puede definir como el límite de los planos osculantes en los puntos vecinos.

Suponiendo todavía que $\kappa(s) \neq 0$, sea

$$\mathbf{r}_c(s) = \mathbf{r}(s) + \rho(s)\hat{\mathbf{N}}(s)$$

Para cada valor de s , el punto cuyo vector de posición es $\mathbf{r}_c(s)$ está en el plano osculante de \mathcal{C} en $\mathbf{r}(s)$, en la parte cóncava de \mathcal{C} , y a una distancia $\rho(s)$ de $\mathbf{r}(s)$. Se denomina **centro de curvatura** de \mathcal{C} en el punto $\mathbf{r}(s)$. La circunferencia en el plano osculante cuyo centro es el centro de curvatura y su radio es igual al radio de curvatura $\rho(s)$ se denomina **circunferencia osculante** de \mathcal{C} en $\mathbf{r}(s)$. De todas las circunferencias que pasan por el punto $\mathbf{r}(s)$, la circunferencia osculante es aquella que mejor describe el comportamiento de \mathcal{C} cerca de dicho punto. Por supuesto, la circunferencia osculante de una circunferencia en cualquier punto es la misma circunferencia. La Figura 11.16 muestra un ejemplo típico de circunferencia osculante.

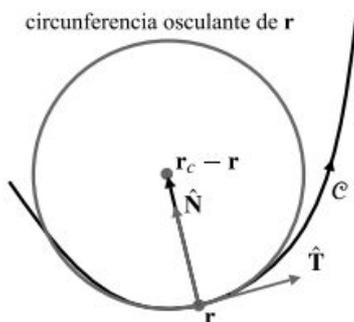


Figura 11.16 Circunferencia osculante.

Torsión y binormal, fórmulas de Frenet-Serret

En todo punto $\mathbf{r}(s)$ de la curva \mathcal{C} donde $\hat{\mathbf{T}}$ y $\hat{\mathbf{N}}$ estén definidos, se define un tercer vector unitario, denominado **binormal unitario** $\hat{\mathbf{B}}$, mediante la fórmula

$$\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{T}} \times \hat{\mathbf{N}}$$

Nótese que $\hat{\mathbf{B}}(s)$ es normal al plano osculante de \mathcal{C} en $\mathbf{r}(s)$; si \mathcal{C} es una curva plana, entonces $\hat{\mathbf{B}}$ es un vector constante, independiente de s en cualquier intervalo donde $\kappa(s) \neq 0$. En todo punto $\mathbf{r}(s)$ de \mathcal{C} , los tres vectores $\{\hat{\mathbf{T}}, \hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{B}}\}$ constituyen una base de vectores unitarios mutuamente perpendiculares orientada a la derecha, como la base estándar $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ (véase la Figura 11.17). Esta base se denomina **sistema de referencia de Frenet** de \mathcal{C} en el punto $\mathbf{r}(s)$. Nótese que

$$\hat{\mathbf{B}} \times \hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{N}} \text{ y } \hat{\mathbf{N}} \times \hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{T}}$$

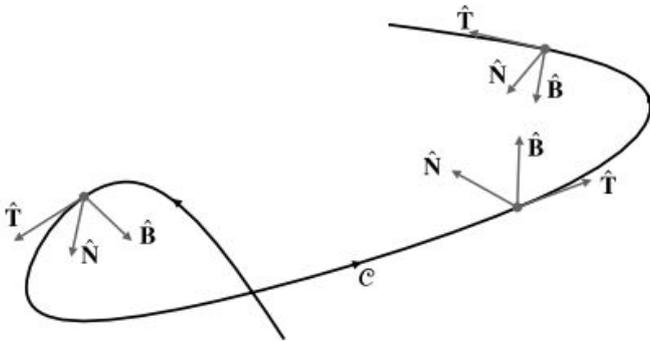


Figura 11.17 El sistema de referencia de Frenet $\{\hat{\mathbf{T}}, \hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{B}}\}$ en algunos puntos de \mathcal{C} .

Como $1 = \hat{\mathbf{B}}(s) \cdot \hat{\mathbf{B}}(s)$, entonces $\hat{\mathbf{B}}(s) \cdot (d\hat{\mathbf{B}}/ds) = 0$ y $d\hat{\mathbf{B}}/ds$ es perpendicular a $\hat{\mathbf{B}}(s)$. Además, diferenciando $\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{T}} \times \hat{\mathbf{N}}$ se obtiene

$$\frac{d\hat{\mathbf{B}}}{ds} = \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} \times \hat{\mathbf{N}} + \hat{\mathbf{T}} \times \frac{d\hat{\mathbf{N}}}{ds} = \kappa \hat{\mathbf{N}} \times \hat{\mathbf{N}} + \hat{\mathbf{T}} \times \frac{d\hat{\mathbf{N}}}{ds} = \hat{\mathbf{T}} \times \frac{d\hat{\mathbf{N}}}{ds}$$

Por tanto, $d\hat{\mathbf{B}}/ds$ es también perpendicular a $\hat{\mathbf{T}}$. Como es perpendicular a $\hat{\mathbf{T}}$ y $\hat{\mathbf{B}}$, $d\hat{\mathbf{B}}/ds$ debe ser paralelo a $\hat{\mathbf{N}}$. Este hecho es la base de nuestra definición de torsión.

DEFINICIÓN 2 Torsión

En cualquier intervalo donde $\kappa(s) \neq 0$, existe una función $\tau(s)$ tal que

$$\frac{d\hat{\mathbf{B}}}{ds} = -\tau(s)\hat{\mathbf{N}}(s)$$

El número $\tau(s)$ se denomina **torsión** de \mathcal{C} en $\mathbf{r}(s)$.

La torsión mide el grado de retorcimiento que tiene una curva en las proximidades de un punto, es decir, mide cuánto se aleja la curva de ser plana. Puede ser positiva o negativa, en función de su orientación a la izquierda o la derecha. Presentaremos un ejemplo posteriormente en esta sección.

El Teorema 2 tiene un análogo para la torsión, y la demostración es similar. Establece que el valor absoluto de la torsión, $|\tau(s)|$, en un punto $\mathbf{r}(s)$ de la curva \mathcal{C} es la velocidad de giro de la binormal unitaria:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \psi}{\Delta s} \right| = |\tau(s)|$$

siendo $\Delta \psi$ el ángulo que forman $\hat{\mathbf{B}}(s + \Delta s)$ y $\hat{\mathbf{B}}(s)$.

Ejemplo 3 (La hélice circular.) Como se indicó en el Ejemplo 5 de la Sección 11.3, la ecuación paramétrica

$$\mathbf{r}(s) = a \cos(cs)\mathbf{i} + a \sin(cs)\mathbf{j} + bcs\mathbf{k}, \quad \text{siendo } c = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

representa una hélice circular sobre la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, y parametrizada en función de la longitud de arco. Supongamos que $a > 0$. Calcule las funciones de curvatura y de torsión $\kappa(s)$ y $\tau(s)$ de esta hélice y también los vectores unitarios que forman el sistema de referencia de Frenet en todo punto $\mathbf{r}(s)$ ante dicha hélice.

Solución En el Ejemplo 1 calculamos el vector tangente unitario, cuyo valor era

$$\hat{\mathbf{T}}(s) = -a \sin(cs)\mathbf{i} + a \cos(cs)\mathbf{j} + b\mathbf{k}$$

Diferenciando de nuevo se llega a

$$\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} = -ac^2 \cos(cs)\mathbf{i} - ac^2 \sin(cs)\mathbf{j}$$

de forma que la curvatura de la hélice es

$$\kappa(s) = \left| \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} \right| = ac^2 = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

y el vector normal unitario es

$$\hat{\mathbf{N}}(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} = -\cos(cs)\mathbf{i} - \sin(cs)\mathbf{j}$$

Ahora tenemos

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{B}}(s) &= \hat{\mathbf{T}}(s) \times \hat{\mathbf{N}}(s) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a \sin(cs) & a \cos(cs) & b \\ -\cos(cs) & -\sin(cs) & 0 \end{vmatrix} \\ &= b \sin(cs)\mathbf{i} - b \cos(cs)\mathbf{j} + a\mathbf{k} \end{aligned}$$

Diferenciando esta fórmula se llega a

$$\frac{d\hat{\mathbf{B}}}{ds} = bc^2 \cos(cs)\mathbf{i} + bc^2 \sin(cs)\mathbf{j} = -bc^2 \hat{\mathbf{N}}(s)$$

Por tanto, la torsión es

$$\tau(s) = -(-bc^2) = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

Observación Obsérvese que la curvatura $\kappa(s)$ y la torsión $\tau(s)$ son constantes (es decir, independientes de s) para el caso de la hélice circular. En el ejemplo anterior, $\tau > 0$ (suponiendo que $b > 0$). Esto corresponde al hecho de que la hélice está orientada a la derecha (véase la Figura 11.12). Si rodeamos la hélice con la mano derecha de forma que los dedos apunten en la dirección de s creciente (en sentido contrario al de las agujas del reloj, mirando hacia abajo desde el eje z positivo), entonces el pulgar apuntará también en la dirección axial correspondiente a s creciente (en dirección hacia arriba). Si hubiéramos partido de una hélice orientada a la izquierda, tal como

$$\mathbf{r} = a \sin t\mathbf{i} + a \cos t\mathbf{j} + bt\mathbf{k} \quad (a, b > 0)$$

habríamos obtenido $\tau = -b/(a^2 + b^2)$.

Utilizando las fórmulas $d\hat{\mathbf{T}}/ds = \kappa\hat{\mathbf{N}}$ y $d\hat{\mathbf{B}}/ds = -\tau\hat{\mathbf{N}}$, se puede calcular también $d\hat{\mathbf{N}}/ds$:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\mathbf{N}}}{ds} &= \frac{d}{ds} (\hat{\mathbf{B}} \times \hat{\mathbf{T}}) = \frac{d\hat{\mathbf{B}}}{ds} \times \hat{\mathbf{T}} + \hat{\mathbf{B}} \times \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} \\ &= -\tau\hat{\mathbf{N}} \times \hat{\mathbf{T}} + \kappa\hat{\mathbf{B}} \times \hat{\mathbf{N}} = -\kappa\hat{\mathbf{T}} + \tau\hat{\mathbf{B}} \end{aligned}$$

Juntas, las tres fórmulas

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} &= \kappa\hat{\mathbf{N}} \\ \frac{d\hat{\mathbf{N}}}{ds} &= -\kappa\hat{\mathbf{T}} + \tau\hat{\mathbf{B}} \\ \frac{d\hat{\mathbf{B}}}{ds} &= -\tau\hat{\mathbf{N}}\end{aligned}$$

se conocen con el nombre de **fórmulas de Frenet-Serret** (véase la Figura 11.18). Son de importancia fundamental en la teoría de curvas. Estas fórmulas se pueden expresar en forma matricial de la siguiente forma:

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{T}} \\ \hat{\mathbf{N}} \\ \hat{\mathbf{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{T}} \\ \hat{\mathbf{N}} \\ \hat{\mathbf{B}} \end{pmatrix}$$

Utilizando las fórmulas de Frenet-Serret se puede demostrar que la forma de una curva con curvatura distinta de cero queda completamente determinada por sus funciones de curvatura y de torsión $\kappa(s)$ y $\tau(s)$.

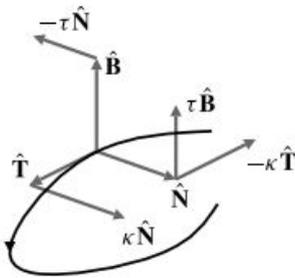


Figura 11.18 $\hat{\mathbf{T}}$, $\hat{\mathbf{N}}$ y $\hat{\mathbf{B}}$, y sus direcciones de cambio.

TEOREMA 3 Teorema fundamental de las curvas en el espacio

Sean c_1 y c_2 dos curvas, ambas con la misma función de curvatura distinta de cero $\kappa(s)$ y con la misma función de torsión $\tau(s)$. Entonces las curvas son congruentes. Esto quiere decir que una de ellas se puede mover rígidamente (mediante traslaciones y rotaciones) de forma que sea haga coincidir exactamente con la otra.

DEMOSTRACIÓN Es necesario que $\kappa \neq 0$ porque $\hat{\mathbf{N}}$ y $\hat{\mathbf{B}}$ no están definidas donde $\kappa = 0$. Movamos rígidamente c_2 de forma que su punto inicial coincida con el punto inicial de c_1 , y de forma que los sistemas de referencia de Frenet de ambas curvas coincidan en ese punto. Sean $\hat{\mathbf{T}}_1, \hat{\mathbf{T}}_2, \hat{\mathbf{N}}_1, \hat{\mathbf{N}}_2, \hat{\mathbf{B}}_1$ y $\hat{\mathbf{B}}_2$ las tangentes unitarias, las normales y las binormales de las dos curvas.

$$f(s) = \hat{\mathbf{T}}_1(s) \cdot \hat{\mathbf{T}}_2(s) + \hat{\mathbf{N}}_1(s) \cdot \hat{\mathbf{N}}_2(s) + \hat{\mathbf{B}}_1(s) \cdot \hat{\mathbf{B}}_2(s)$$

Calculamos la derivada de $f(s)$ utilizando la Regla del Producto y las fórmulas de Frenet-Serret:

$$\begin{aligned}f'(s) &= \hat{\mathbf{T}}_1' \cdot \hat{\mathbf{T}}_2 + \hat{\mathbf{T}}_1 \cdot \hat{\mathbf{T}}_2' + \hat{\mathbf{N}}_1' \cdot \hat{\mathbf{N}}_2 + \hat{\mathbf{N}}_1 \cdot \hat{\mathbf{N}}_2' + \hat{\mathbf{B}}_1' \cdot \hat{\mathbf{B}}_2 + \hat{\mathbf{B}}_1 \cdot \hat{\mathbf{B}}_2' \\ &= \kappa\hat{\mathbf{N}}_1 \cdot \hat{\mathbf{T}}_2 + \kappa\hat{\mathbf{T}}_1 \cdot \hat{\mathbf{N}}_2 - \kappa\hat{\mathbf{T}}_1 \cdot \hat{\mathbf{N}}_2 + \tau\hat{\mathbf{B}}_1 \cdot \hat{\mathbf{N}}_2 - \kappa\hat{\mathbf{N}}_1 \cdot \hat{\mathbf{T}}_2 \\ &\quad + \tau\hat{\mathbf{N}}_1 \cdot \hat{\mathbf{B}}_2 - \tau\hat{\mathbf{N}}_1 \cdot \hat{\mathbf{B}}_2 - \tau\hat{\mathbf{B}}_1 \cdot \hat{\mathbf{N}}_2 \\ &= 0\end{aligned}$$

Por tanto, $f(s)$ es constante. Como los sistemas de referencia coinciden en $s = 0$, la constante debe ser concretamente 3:

$$\hat{\mathbf{T}}_1(s) \cdot \hat{\mathbf{T}}_2(s) + \hat{\mathbf{N}}_1(s) \cdot \hat{\mathbf{N}}_2(s) + \hat{\mathbf{B}}_1(s) \cdot \hat{\mathbf{B}}_2(s) = 3$$

Sin embargo, ninguno de los productos escalares puede ser mayor que 1 porque los factores son vectores unitarios. Por tanto, todos los productos escalares deben ser iguales a 1. En particular, $\hat{\mathbf{T}}_1(s) \cdot \hat{\mathbf{T}}_2(s) = 1$ para todo s ; entonces,

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{ds} = \hat{\mathbf{T}}_1(s) = \hat{\mathbf{T}}_2(s) = \frac{d\mathbf{r}_2}{ds}$$

Integrando con respecto a s y utilizando el hecho de que las dos curvas empiezan en el mismo punto cuando $s = 0$, se obtiene $\mathbf{r}_1(s) = \mathbf{r}_2(s)$ para todo s , como queríamos demostrar.

Observación Una consecuencia del teorema anterior es que toda curva con curvatura constante distinta de cero y con torsión constante debe, de hecho, ser una circunferencia (si la torsión es cero) o una hélice circular (si la torsión es distinta de cero). Véanse los Ejercicios 7 y 8 posteriores.

Ejercicios 11.4

Calcule el vector tangente $\hat{\mathbf{T}}(t)$ en las curvas de los Ejercicios 1-4.

1. $\mathbf{r} = t\mathbf{i} - 2t^2\mathbf{j} + 3t^3\mathbf{k}$

2. $\mathbf{r} = a \sin \omega t \mathbf{i} + a \cos \omega t \mathbf{k}$

3. $\mathbf{r} = \cos t \sin t \mathbf{i} + \sin^2 t \mathbf{j} + \cos t \mathbf{k}$

4. $\mathbf{r} = a \cos t \mathbf{i} + b \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$

5. Demuestre que si $\kappa(s) = 0$ para todo s , entonces la curva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ es una recta.

6. Demuestre que si $\tau(s) = 0$ para todo s , entonces la curva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ es una curva plana. *Sugerencia:* Demuestre que $\mathbf{r}(s)$ está en el plano que pasa por $\mathbf{r}(0)$ y su vector normal es $\hat{\mathbf{B}}(0)$.

7. Demuestre que si $\kappa(s) = C$ es una constante positiva y $\tau(s) = 0$ para todo s , entonces la curva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ es una circunferencia. *Sugerencia:* Obtenga una circunferencia que tenga la curvatura constante dada. Utilice entonces el Teorema 3.

8. Demuestre que si la curvatura $\kappa(s)$ y la torsión $\tau(s)$ son ambas constantes distintas de cero, entonces la curva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ es una hélice circular. *Sugerencia:* Obtenga una hélice que tenga la curvatura y torsión dadas.

11.5 Curvatura y torsión para parametrizaciones generales

Las fórmulas de la curvatura y la torsión desarrolladas anteriormente, así como las de los vectores normal unitario y binormal, no son de mucha utilidad si la curva que se desea analizar no se expresa en función del parámetro de longitud de arco. Consideraremos a continuación la forma de obtener esas cantidades en función de una parametrización general $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Las expresaremos en función del vector velocidad, $\mathbf{v}(t)$, la velocidad, $v(t) = |\mathbf{v}(t)|$ y la aceleración, $\mathbf{a}(t)$. Observemos en primer lugar que

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = v\hat{\mathbf{T}}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \hat{\mathbf{T}} + v \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt} \\ &= \frac{dv}{dt} \hat{\mathbf{T}} + v \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{dt} \hat{\mathbf{T}} + v^2 \kappa \hat{\mathbf{N}} \end{aligned}$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{a} = v \frac{dv}{dt} \hat{\mathbf{T}} \times \hat{\mathbf{T}} + v^3 \kappa \hat{\mathbf{T}} \times \hat{\mathbf{N}} = v^3 \kappa \hat{\mathbf{B}}$$

Nótese que $\hat{\mathbf{B}}$ está en la dirección de $\mathbf{v} \times \mathbf{a}$. A partir de estas fórmulas se pueden obtener fórmulas útiles para $\hat{\mathbf{T}}$, $\hat{\mathbf{B}}$ y κ :

$$\hat{\mathbf{T}} = \frac{\mathbf{v}}{v}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{a}}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}, \quad \kappa = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{v^3}$$

Hay varias formas de calcular $\hat{\mathbf{N}}$. Quizá la más sencilla es

$$\hat{\mathbf{N}} = \hat{\mathbf{B}} \times \hat{\mathbf{T}}$$

Algunas veces puede ser más fácil utilizar $\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt} = \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} = v\kappa\hat{\mathbf{N}}$ para calcular

$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{1}{v\kappa} \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt} = \frac{\rho}{v} \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt} = \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt} \left/ \left| \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt} \right| \right.$$

Queda por calcular la torsión. Obsérvese que

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dv}{dt} \hat{\mathbf{T}} + v^2 \kappa \hat{\mathbf{N}} \right)$$

Esta diferenciación producirá varios términos. El único en el que interviene $\hat{\mathbf{B}}$ es el que procede de evaluar $v^2 \kappa (d\hat{\mathbf{N}}/dt) = v^3 \kappa (d\hat{\mathbf{N}}/ds) = v^3 \kappa (\tau \hat{\mathbf{B}} - \kappa \hat{\mathbf{T}})$. Por tanto,

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \lambda \hat{\mathbf{T}} + \mu \hat{\mathbf{N}} + v^3 \kappa \tau \hat{\mathbf{B}}$$

para ciertos valores de los escalares λ y μ . Como $\mathbf{v} \times \mathbf{a} = v^3 \kappa \hat{\mathbf{B}}$, se deduce que

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt} = (v^3 \kappa)^2 \tau = |\mathbf{v} \times \mathbf{a}|^2 \tau$$

Por consiguiente,

$$\tau = \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \cdot (d\mathbf{a}/dt)}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|^2}$$

Ejemplo 1 Calcule la curvatura, la torsión y el sistema de referencia de Frenet en un punto general de la curva

$$\mathbf{r} = (t + \cos t)\mathbf{i} + (t - \cos t)\mathbf{j} + \sqrt{2} \sin t \mathbf{k}$$

Describa esta curva.

Solución Calcularemos lo que se pide utilizando el procedimiento descrito anteriormente. En primer lugar,

$$\mathbf{v} = (1 - \sin t)\mathbf{i} + (1 + \sin t)\mathbf{j} + \sqrt{2} \cos t \mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} = -\cos t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} - \sqrt{2} \sin t \mathbf{k}$$

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \sin t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j} - \sqrt{2} \cos t \mathbf{k}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times \mathbf{a} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 - \sin t & 1 + \sin t & \sqrt{2} \cos t \\ -\cos t & \cos t & -\sqrt{2} \sin t \end{vmatrix} \\ &= -\sqrt{2}(1 + \sin t)\mathbf{i} - \sqrt{2}(1 - \sin t)\mathbf{j} + 2 \cos t \mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt} &= -\sqrt{2} \operatorname{sen} t(1 + \operatorname{sen} t) + \sqrt{2} \operatorname{sen} t(1 - \operatorname{sen} t) - 2\sqrt{2} \cos^2 t \\
&= -2\sqrt{2} \\
v = |\mathbf{v}| &= \sqrt{2 + 2\operatorname{sen}^2 t + 2\cos^2 t} = 2 \\
|\mathbf{v} \times \mathbf{a}| &= \sqrt{2(2 + 2\operatorname{sen}^2 t) + 4\cos^2 t} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
\kappa &= \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{v^3} = \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \\
\tau &= \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \cdot (d\mathbf{a}/dt)}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|^2} = \frac{-2\sqrt{2}}{(2\sqrt{2})^2} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\
\hat{\mathbf{T}} &= \frac{\mathbf{v}}{v} = \frac{1 - \operatorname{sen} t}{2} \mathbf{i} + \frac{1 + \operatorname{sen} t}{2} \mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \mathbf{k} \\
\hat{\mathbf{B}} &= \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{a}}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|} = -\frac{1 + \operatorname{sen} t}{2} \mathbf{i} - \frac{1 - \operatorname{sen} t}{2} \mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \mathbf{k} \\
\hat{\mathbf{N}} &= \hat{\mathbf{B}} \times \hat{\mathbf{T}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \mathbf{j} - \operatorname{sen} t \mathbf{k}
\end{aligned}$$

Como la curvatura y la torsión son ambas constantes (y, por tanto, son constantes cuando se expresan en función de cualquier parametrización), la curva debe ser una hélice circular por el Teorema 3. Está orientada a la izquierda, ya que $\tau < 0$. Por el Ejemplo 3 de la Sección 11.4, es congruente con la hélice

$$\mathbf{r} = a \cos t \mathbf{i} + a \operatorname{sen} t \mathbf{j} + b t \mathbf{k}$$

suponiendo que $a/(a^2 + b^2) = 1/(2\sqrt{2}) = -b/(a^2 + b^2)$. Resolviendo estas ecuaciones se obtiene $a = \sqrt{2}$ y $b = -\sqrt{2}$, por lo que la hélice está enrollada sobre un cilindro de radio $\sqrt{2}$. El eje de este cilindro es la recta $x = y, z = 0$, como se puede ver examinando las componentes de $\mathbf{r}(t)$.

Ejemplo 2 (Curvatura de la gráfica de una función de una variable) Calcule la curvatura de la curva plana cuya ecuación es $y = f(x)$ en un punto arbitrario $(x, f(x))$ de aquélla.

Solución La gráfica se puede parametrizar: $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + f(x)\mathbf{j}$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \mathbf{i} + f'(x)\mathbf{j} \\
\mathbf{a} &= f''(x)\mathbf{j} \\
\mathbf{v} \times \mathbf{a} &= f''(x)\mathbf{k}
\end{aligned}$$

Por tanto, la curvatura es

$$\kappa(x) = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{v^3} = \frac{|f''(x)|}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}}$$

Aceleración tangencial y normal

En la fórmula de la aceleración obtenida anteriormente en función de la tangente y la normal unitarias,

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \hat{\mathbf{T}} + v^2 \kappa \hat{\mathbf{N}}$$

el término $(dv/dt)\hat{\mathbf{T}}$ se denominó aceleración **tangencial**, y el término $v^2\kappa\hat{\mathbf{N}}$, aceleración **normal** o **centrípeta**. Esta última componente está dirigida hacia el centro de curvatura y su módulo es $v^2\kappa = v^2/\rho$. Los diseñadores de autopistas, ferrocarriles y montañas rusas peraltan las curvas de forma que la resultante de la fuerza centrífuga, $-m(v^2/\rho)\hat{\mathbf{N}}$, y el peso, $-mg\mathbf{k}$, del vehículo sea normal a la superficie a una velocidad deseada.

Ejemplo 3 (Peralte de una curva) Una carretera nivelada sigue la curva $y = x^2$ en el plano horizontal xy . Calcule, en función de x , el ángulo de peralte que hay que aplicar a la carretera (es decir, el ángulo entre la vertical y la normal a la superficie de la carretera) de forma que la resultante de las fuerzas centrífuga y gravitatoria ($-mg\mathbf{k}$) que actúan sobre el vehículo que viaja una velocidad constante v_0 sea siempre normal a la superficie de la carretera.

Solución Por el Ejemplo 2, la ruta que sigue la carretera, $y = x^2$, tiene curvatura

$$\kappa = \frac{|d^2y/dx^2|}{(1 + (dy/dx)^2)^{3/2}} = \frac{2}{(1 + 4x^2)^{3/2}}$$

La componente normal de la aceleración de un vehículo que viaja a velocidad v_0 por la carretera es

$$a_N = v_0^2\kappa = \frac{2v_0^2}{(1 + 4x^2)^{3/2}}$$

Si la carretera está peraltada un ángulo θ (véase la Figura 11.19), entonces la resultante de la fuerza centrífuga $-ma_N\hat{\mathbf{N}}$ y la fuerza gravitatoria $-mg\mathbf{k}$ será normal a la superficie de la carretera si se cumple

$$\tan\theta = \frac{ma_N}{mg}, \quad \text{es decir,} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{2v_0^2}{g(1 + 4x^2)^{3/2}}$$

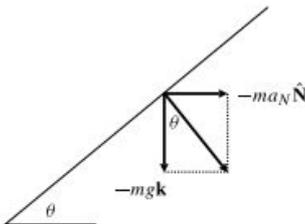


Figura 11.19 Peralte de una curva de una carretera.

Observación La definición de aceleración centrípeta dada anteriormente es coherente con la que se deduce de la presentación de los sistemas de referencia en rotación que se hizo en la Sección 11.2. Si $\mathbf{r}(t)$ es la posición de una partícula móvil en el instante t , podemos ver el movimiento en cualquier instante como una rotación alrededor del centro de curvatura, de forma que la velocidad angular debe ser $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\hat{\mathbf{B}}$. El vector velocidad lineal es $\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_c) = v\hat{\mathbf{T}}$, por lo que la velocidad es $v = \Omega\rho$ y $\boldsymbol{\Omega} = (v/\rho)\hat{\mathbf{B}}$. Como se vio en la Sección 11.2, la aceleración centrípeta es

$$\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_c)) = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = \frac{v^2}{\rho} \hat{\mathbf{B}} \times \hat{\mathbf{T}} = \frac{v^2}{\rho} \hat{\mathbf{N}}$$

Evolutas

El centro de curvatura $\mathbf{r}_c(t)$ de una curva dada puede trazar a su vez otra curva cuando t varía. Esta curva se denomina **evoluta** de la curva dada $\mathbf{r}(t)$.

Ejemplo 4 Calcule la evoluta de la espiral exponencial

$$\mathbf{r} = ae^{-t} \cos t \mathbf{i} + ae^{-t} \sin t \mathbf{j}$$

Solución La curva es una curva plana, por lo que $\tau = 0$. Emplearemos un atajo para calcular la curvatura y la normal unitaria sin calcular $\mathbf{v} \times \mathbf{a}$. Calcularemos primero

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= ae^{-t}(-\cos t + \sin t) \mathbf{i} - (\sin t - \cos t) \mathbf{j} \\ \frac{ds}{dt} &= v = \sqrt{2}ae^{-t} \\ \hat{\mathbf{T}}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-(\cos t + \sin t) \mathbf{i} - (\sin t - \cos t) \mathbf{j}) \\ \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} &= \frac{1}{(ds/dt)} \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt} = \frac{1}{2ae^{-t}}((\sin t - \cos t) \mathbf{i} - (\cos t + \sin t) \mathbf{j}) \\ \kappa(t) &= \left| \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}ae^{-t}} \end{aligned}$$

Se deduce entonces que el radio de curvatura es $\rho(t) = \sqrt{2}ae^{-t}$. Como $d\hat{\mathbf{T}}/ds = \kappa\hat{\mathbf{N}}$, tenemos que $\hat{\mathbf{N}} = \rho(d\hat{\mathbf{T}}/ds)$. El centro de curvatura es

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_c(t) &= \mathbf{r}(t) + \rho(t)\hat{\mathbf{N}}(t) \\ &= \mathbf{r}(t) + \rho^2 \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} \\ &= ae^{-t}(\cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j}) \\ &\quad + 2a^2e^{-2t} \frac{1}{2ae^{-t}}((\sin t - \cos t) \mathbf{i} - (\cos t + \sin t) \mathbf{j}) \\ &= ae^{-t}(\sin t \mathbf{i} - \cos t \mathbf{j}) \\ &= ae^{-t} \left(\cos \left(t - \frac{\pi}{2} \right) \mathbf{i} + \sin \left(t - \frac{\pi}{2} \right) \mathbf{j} \right) \end{aligned}$$

Por tanto, se llega al interesante resultado de que la evoluta de la espiral exponencial es la misma espiral exponencial rotada en el plano 90° en el sentido de las agujas del reloj (véase la Figura 11.20(a)).

Aplicación al diseño de vías (o carreteras)

Los trenes de juguete vienen frecuentemente con dos tipos de secciones de vías: rectas y curvas. Las secciones curvas son arcos de circunferencia de radio R , y la forma total de la vía es como se muestra en la Figura 11.20(b); AB y CD son rectas, y BC y DA son semicircunferencias. La pista parece suave, pero ¿es suficientemente suave?

La vía se mantiene unida por fricción, y de vez en cuando puede salirse cuando el tren pasa. Esto es especialmente probable en los puntos A , B , C y D . Para ver por qué, supongamos que el tren viaja a velocidad constante v . Entonces la aceleración tangencial, $(dv/dt)\hat{\mathbf{T}}$, es cero y la aceleración total es sólo la aceleración centrípeta, $\mathbf{a} = (v^2/\rho)\hat{\mathbf{N}}$. Por tanto, $|\mathbf{a}| = 0$ a lo largo de las secciones rectas, y $|\mathbf{a}| = v^2\kappa = v^2/R$ en las secciones semicirculares. La aceleración es *discontinua* en los puntos A , B , C y D , y la fuerza de reacción que ejerce el tren sobre la vía es también discontinua en esos puntos. Hay un «choque» o «sacudida» cuando el tren entra o sale de la parte curva de la vía. Para evitar esos puntos de tensión, las vías se diseñan de forma que la curvatura varíe de forma continua punto a punto.

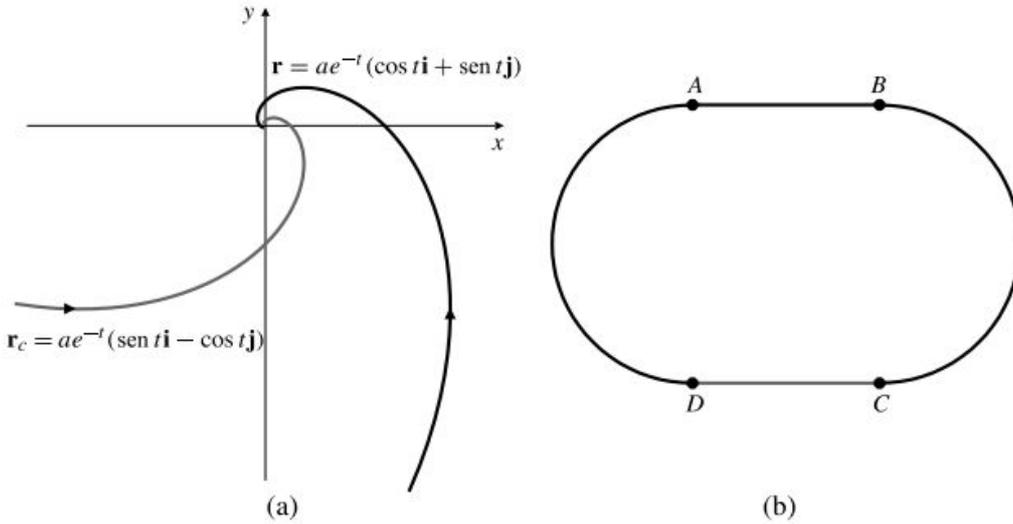


Figura 11.20

- (a) La evoluta de una espiral exponencial es otra espiral exponencial.
- (b) Forma de la vía de un tren de juguete.

Ejemplo 5 Se desea unir una vía existente en la dirección del eje x negativo con otra que sigue la dirección $y = x - 1, x \geq 2$. Se desea que la unión sea suave mediante una curva de transición $y = f(x), 0 \leq x \leq 2$, siendo $f(x)$ un polinomio de grado tan pequeño como sea posible. Calcule $f(x)$ de forma que un tren que se mueva por la vía no experimente discontinuidades de la aceleración en los puntos de unión.

Solución La situación se muestra en la Figura 11.21. El polinomio $f(x)$ se debe escoger de forma que la vía sea continua, tenga pendiente continua y tenga curvatura continua en $x = 0$ y $x = 2$. Como la curvatura de $y = f(x)$ es

$$\kappa = |f''(x)|(1 + (f'(x))^2)^{-3/2}$$

sólo tenemos que conseguir que f, f' y f'' tomen los mismos valores en $x = 0$ y $x = 2$ que en las secciones rectas:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, & f'(0) &= 0, & f''(0) &= 0, \\ f(2) &= 1, & f'(2) &= 1, & f''(2) &= 0 \end{aligned}$$

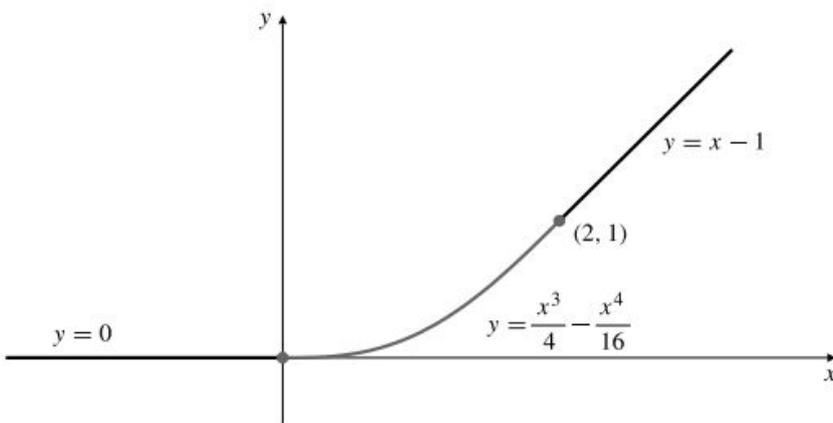


Figura 11.21 Unión de dos vías rectas mediante una vía curva.

Esas seis condiciones independientes sugieren que se debe probar con un polinomio de grado 5 con seis coeficientes arbitrarios:

$$\begin{aligned} f(x) &= A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 \\ f'(x) &= B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4 \\ f''(x) &= 2C + 6Dx + 12Ex^2 + 20Fx^3 \end{aligned}$$

Las tres condiciones en $x = 0$ implican que $A = B = C = 0$. Las de $x = 2$ implican que

$$8D + 16E + 32F = f(2) = 1$$

$$12D + 32E + 80F = f'(2) = 1$$

$$12D + 48E + 160F = f''(2) = 0$$

La solución de este sistema es $D = 1/4$, $E = -1/16$ y $F = 0$, por lo que debemos utilizar $f(x) = (x^3/4) - (x^4/16)$.

Observación Los diseñadores de carreteras y de vías de ferrocarril no utilizan en general curvas polinómicas en las transiciones. Se utilizan habitualmente otras clases de curvas denominadas **clotoides** o **lemniscatas** (véase el Ejercicio 7 en los Ejercicios de repaso al final de este capítulo).

Cálculos con Maple

El tipo de cálculos realizados en esta sección con curvas bastante simples puede ser muy tedioso con curvas más complicadas. Como es habitual, Maple puede acudir al rescate. Antes de la incorporación del paquete VectorCalculus en Maple 8, que introdujo una verdadera estructura de datos vector, la definición de una función vectorial tenía truco: había que hacer algo como

```
> R := [t -> f(t), t -> g(t), t -> h(t)];
```

en vez de la construcción más obvia

```
> R := t -> [f(t), g(t), h(t)];
```

porque en este último caso no se consideraba que la función R fuera vectorial, aun cuando sus valores fueran vectores.

En lo que sigue supondremos que los paquetes LinearAlgebra y VectorCalculus han sido cargados (en ese orden):

```
> with(LinearAlgebra): with(VectorCalculus):
```

Así podríamos definir una función vectorial que representara una hélice circular:

```
> R := t -> <a*cos(t), a*sin(t), b*t>;
```

La salida de esta definición (que omitiremos) puede parecer al principio un poco críptica; dice que R está definida como un procedimiento «VectorCalculus-<>» cuyos argumentos son tres procedimientos «VectorCalculus-*» correspondientes a los productos que representan las tres componentes de R . Llamando a la función se generan los resultados esperados.

```
> R(t); R(Pi);
```

$$a \cos(t) e_x + a \sin(t) e_y + b t e_z \\ - a e_x + b \pi e_z$$

Las funciones vector velocidad, aceleración y velocidad se pueden definir ahora en la forma obvia, y utilizar los resultados para calcular esas magnitudes en cualquier punto:

```
> V := t -> diff(R(t), t): A := t -> diff(V(t), t):
```

```
> V := t -> Norm(V(t), 2):
```

```
> V(t); A(t); v(t);
```

$$- a \sin(t) e_x + a \cos(t) e_y + b e_z \\ - a \cos(t) e_x - a \sin(t) e_y \\ \sqrt{|a \sin(t)|^2 + |a \cos(t)|^2 + |b|^2}$$

Ningún intento de simplificar la última expresión surtirá mucho efecto a menos que le digamos a Maple que a y b son números reales. De hecho, es útil a efectos de simplificación decir a Maple que a , b y t son reales, con lo que evitamos que Maple nos caliente la cabeza colocando una tilde (\sim) detrás de cada una de esas variables en todas las salidas posteriores. Esto lo podemos hacer así:

```
> assume(a::real, b::real, t::real);
> interface(showassumed=0);
> simplify(v(t));
```

$$\sqrt{b^2 + a^2}$$

El paquete VectorCalculus tiene una función denominada TNBFrame, cuya salida es una lista de funciones para generar los vectores tangente unitaria, normal principal y binormal $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$ y $\mathbf{B}(t)$. Podemos utilizar los componentes de esta lista para definir cada vector:

```
> T := TNBFrame(R, t) [1]: T(t);
```

$$-\frac{a \operatorname{sen}(t)}{\sqrt{b^2 + a^2}} e_x + \frac{a \operatorname{cos}(t)}{\sqrt{b^2 + a^2}} e_y + \frac{b}{\sqrt{b^2 + a^2}} e_z$$

```
> N := TNBFrame(R, t) [2]: N(t);
```

$$-\frac{a \operatorname{cos}(t)}{|a|} e_x - \frac{a \operatorname{sen}(t)}{|a|} e_y$$

```
> B := TNBFrame(R, t) [3]: B(t);
```

$$\frac{b \operatorname{sen}(t)}{\sqrt{b^2 + a^2}|a|} e_x - \frac{b \operatorname{cos}(t)}{\sqrt{b^2 + a^2}|a|} e_y + \left(\frac{a^2 \operatorname{sen}(t)^2}{\sqrt{b^2 + a^2}|a|} + \frac{a^2 \operatorname{cos}(t)^2}{\sqrt{b^2 + a^2}|a|} \right) e_z$$

```
> simplify(%);
```

$$\frac{b \operatorname{sen}(t)}{\sqrt{a^2 + a^2}|a|} e_x - \frac{b a \operatorname{cos}(t)}{\sqrt{b^2 + a^2}|a|} e_y + \frac{|a|}{\sqrt{b^2 + a^2}} e_z$$

VectorCalculus también define las funciones Curvature y Torsion, que se pueden utilizar como sigue:

```
> simplify(Curvature(R, t) (t));
```

$$\frac{|a|}{\sqrt{b^2 + a^2}}$$

```
> simplify(Torsion(R, t) (t));
```

$$\frac{|b|}{\sqrt{b^2 + a^2}}$$

La torsión es errónea si $b < 0$; en este caso la torsión debería ser negativa. De hecho, el resultado anterior podría hacer falsa la tercera fórmula de Frenet-Serret, como podemos ver así:

```
> Simplify(diff(B(t), t) + tau*N(t));
```

$$\frac{a \operatorname{cos}(t) (b - \tau \sqrt{b^2 + a^2})}{\sqrt{b^2 + a^2}|a|} e_x + \frac{a \operatorname{sen}(t) (b - \tau \sqrt{b^2 + a^2})}{\sqrt{b^2 + a^2}|a|} e_y$$

que debe ser $\mathbf{0}$, pero sólo lo será si $\tau = b/\sqrt{b^2 + a^2}$. Se comunicó este error a MapleSoft, y se ha corregido en Maple 10.

Ejercicios 11.5

En los Ejercicios 1-4, calcule los radios de curvatura de las curvas en los puntos indicados.

1. $y = x^2$ en $x = 0$ y en $x = \sqrt{2}$
2. $y = \cos x$ en $x = 0$ y en $x = \pi/2$
3. $\mathbf{r} = 2t\mathbf{i} + (1/t)\mathbf{j} - 2t\mathbf{k}$ en $(2, 1, -2)$
4. $\mathbf{r} = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ en el punto donde $t = 1$

Calcule los sistemas de referencia de Frenet $\{\hat{\mathbf{T}}, \hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{B}}\}$ para las curvas de los Ejercicios 5 y 6 en los puntos indicados.

5. $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$ en $(1, 1, 2)$
6. $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ en $(1, 1, 1)$

En los Ejercicios 7 y 8, calcule los vectores tangente unitario, normal y binormal, y la curvatura y la torsión en un punto general de las curvas dadas.

$$7. \mathbf{r} = t\mathbf{i} + \frac{t^2}{2}\mathbf{j} + \frac{t^3}{3}\mathbf{k}$$

$$8. \mathbf{r} = e^t(\cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

9. Calcule la curvatura y la torsión de la curva paramétrica

$$x = 2 + \sqrt{2}\cos t, \quad y = 1 - \sin t, \quad z = 3 + \sin t$$

en un punto arbitrario t . ¿Qué curva es?

10. Una partícula se mueve siguiendo la curva plana $y = \sin x$, en la dirección de x creciente, con velocidad horizontal constante $dx/dt = k$. Calcule las componentes tangencial y normal de la aceleración de la partícula cuando está en la posición x .
11. Calcule la tangente unitaria, la normal y la binormal, y la curvatura y torsión de la curva

$$\mathbf{r} = \sin t \cos t \mathbf{i} + \sin^2 t \mathbf{j} + \cos t \mathbf{k}$$

en los puntos (a) $t = 0$ y (b) $t = \pi/4$.

12. Una partícula se mueve siguiendo un camino elíptico en el plano xy , de forma que su posición en el instante t es $\mathbf{r} = a \cos t \mathbf{i} + b \sin t \mathbf{j}$. Calcule las componentes tangencial y normal de su aceleración en el instante t . ¿En qué puntos es cero su aceleración tangencial?
13. Calcule los valores máximo y mínimo de la curvatura de la elipse $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, siendo $a > b > 0$.
14. Una cuenta de masa m se desliza sin rozamiento por un hilo curvo con la forma $y = x^2$, bajo la influencia de la fuerza gravitatoria $-mg\mathbf{j}$. Cuando pasa por el punto $(1, 1)$, la velocidad de la cuenta es v . Calcule, en ese instante, el módulo de su aceleración normal y la tasa de cambio de su velocidad.

15. Calcule la curvatura de la curva plana $y = e^x$ en x . Obtenga la ecuación de la evolva de esta curva.

16. Demuestre que la curvatura de la gráfica polar plana $r = f(\theta)$ en un punto genérico θ es

$$\kappa(\theta) = \frac{|2(f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2 - f(\theta)f''(\theta)|}{[(f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2]^{3/2}}$$

17. Calcule la curvatura de la cardioide $r = a(1 - \cos \theta)$.
- *18. Obtenga la curva $\mathbf{r} = r(t)$ para la que $\kappa(t) = 1$ y $\tau(t) = 1$ para todo t , y $\mathbf{r}(0) = \hat{\mathbf{T}}(0) = \mathbf{i}$, $\hat{\mathbf{N}}(0) = \mathbf{j}$ y $\hat{\mathbf{B}}(0) = \mathbf{k}$.

19. Suponga que la curva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ cumple $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{c} \times \mathbf{r}(t)$,

siendo \mathbf{c} un vector constante. Demuestre que esa curva es la circunferencia en la que el plano que pasa por $\mathbf{r}(0)$ y es normal a \mathbf{c} corta a una esfera de radio $|\mathbf{r}(0)|$ centrada en el origen.

20. Calcule la evolva de la hélice circular

$$\mathbf{r} = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + bt \mathbf{k}$$

21. Calcule la evolva de la parábola $y = x^2$.
22. Calcule la evolva de la elipse $x = 2 \cos t$, $y = \sin t$.
23. Calcule el polinomio de grado mínimo $f(x)$, tal que una vía que siga la curva $y = f(x)$, desde $x = -1$ hasta $x = 1$, se una con segmentos rectos existentes $y = -1$, $x \leq -1$ e $y = 1$, $x \geq 1$ de forma lo suficientemente suave para que un tren que se mueva a velocidad constante no experimente discontinuidades de la aceleración en los puntos de unión.
- *24. Ayude a los fabricantes de trenes de juguete. Diseñe un segmento de vía $y = f(x)$, $-1 \leq x \leq 0$ para producir una unión libre de tensiones entre una sección de vía recta $y = 1$, $x \leq -1$, y una sección en forma de arco semicircular $x^2 + y^2 = 1$, $x \geq 0$.
- *25. Si la posición \mathbf{r} , la velocidad \mathbf{v} y la aceleración \mathbf{a} de una partícula en movimiento cumplen $\mathbf{a}(t) = \lambda(t)\mathbf{r}(t) + \mu(t)\mathbf{v}(t)$, siendo $\lambda(t)$ y $\mu(t)$ funciones escalares del tiempo t , y si $\mathbf{v} \times \mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, demuestre que el camino que sigue una partícula está contenido en un plano.

En los Ejercicios 26-31 utilice Maple. Asegúrese de cargar los paquetes LinearAlgebra y VectorCalculus.

En los Ejercicios 26-29, determine las funciones de curvatura y de torsión de las curvas dadas. Debido al problema con la función Torsion en algunas versiones del paquete VectorCalculus (como se ha indicado al final de esta sección), es preferible utilizar las fórmulas procedentes de las derivadas de la posición para determinar la torsión, y

probablemente también la curvatura. Intente describir las curvas.

26. $\mathbf{r}(t) = \cos(t)\mathbf{i} + 2\sin(t)\mathbf{j} + \cos(t)\mathbf{k}$ ¿Por qué no debe sorprendernos el valor de la torsión? ¿Cuánto valen las curvaturas máxima y mínima? Describa la curva.



27. $\mathbf{r}(t) = (t - \sin t)\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ ¿Son continuas la curvatura y la torsión para todo t ?



28. $\mathbf{r}(t) = \cos(t)\cos(2t)\mathbf{i} + \cos(t)\sin(2t)\mathbf{j} + \sin(t)\mathbf{k}$ Demuestre que la curva está sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. ¿Cuál es el mínimo valor de su curvatura?



29. $\mathbf{r}(t) = (t + \cos t)\mathbf{i} + (t + \sin t)\mathbf{j} + (1 + t - \cos t)\mathbf{k}$



En los Ejercicios 30 y 31, defina nuevas funciones de Maple para calcular los valores requeridos. Suponga que se han cargado los paquetes LinearAlgebra y VectorCalculus.



30. La función $\text{evolute}(\mathbf{R})(t)$, cuyo valor en \mathbf{R} es la función cuyo valor en t es el vector de posición del centro de curvatura de la curva \mathbf{R} , en el punto $\mathbf{R}(t)$.



31. La función $\text{tanline}(\mathbf{R})(t, u)$, cuyo valor en \mathbf{R} es una función, cuyo valor en (t, u) es el vector de posición del punto de la tangente a la curva \mathbf{R} , en un valor de t situado a una distancia u de $\mathbf{R}(t)$, en la dirección de t creciente.

11.6 Leyes de Kepler del movimiento planetario

El matemático y astrónomo alemán Johannes Kepler (1571-1630) fue estudiante y colega del astrónomo danés Tycho Brahe (1546-1601). Tras una vida de observación de las posiciones de los planetas sin la ayuda del telescopio, Brahe recopiló una gran cantidad de datos, que Kepler analizó. Aunque Nicolás Copérnico (1473-1543) había postulado que la tierra y los otros planetas se movían alrededor del sol, el clima religioso y filosófico de Europa a finales del siglo XVI favorecía todavía la explicación del movimiento de los cuerpos celestes mediante órbitas circulares alrededor de la tierra. Se sabía que planetas como Marte podían no moverse en órbitas circulares centradas en la tierra, pero se habían propuesto modelos en los que su movimiento estaba compuesto por otras circunferencias (epiciclos), cuyos centros se movían sobre circunferencias centradas en la tierra.

Las observaciones de Brahe sobre Marte fueron lo suficientemente detalladas como para que Kepler se diera cuenta de que ningún modelo simple basado en circunferencias podría ajustarse lo suficientemente bien a la órbita real. Sin embargo, él fue capaz de ajustar una curva cuadrática más general, una elipse con uno de sus focos en el sol. Basándose en este éxito y en los datos de Brahe sobre otros planetas, formuló las tres siguientes leyes del movimiento planetario:

Leyes de Kepler

- 1.** Los planetas se mueven siguiendo órbitas elípticas con el sol en uno de sus focos.
- 2.** La recta que une el sol con cada planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.
- 3.** Los cuadrados de los periodos de revolución de los planetas alrededor del sol son proporcionales a los cubos de los ejes mayores de sus órbitas.

La formulación de Kepler de la tercera ley dice realmente que los cuadrados de los periodos de revolución de los planetas son proporcionales a los cubos de sus distancias medias al sol. La distancia media de los puntos de una elipse a uno de sus focos es igual al semieje mayor (véase el Ejercicio 17 posterior). Por tanto, las dos formulaciones son equivalentes.

La elección de elipses era razonable, una vez verificado que las circunferencias no funcionaban. Las propiedades de las secciones cónicas se entendían bien, desde que habían sido desarrolladas por el matemático griego Apolonio de Perge sobre el año 200 a. C. No obstante, basándose, como hizo, en observaciones en vez de en la teoría, la formulación que hizo Kepler de sus

leyes sin ninguna explicación causal fue algo realmente notable. Los fundamentos teóricos vinieron más tarde, cuando Newton, con la ayuda de su cálculo recién creado, demostró que las leyes de Kepler implicaban una fuerza gravitatoria proporcional al inverso del cuadrado (véanse los Ejercicios de repaso 14-16 al final de este capítulo). Newton creía que su ley de la gravitación universal implicaba también las leyes de Kepler, pero no fue capaz en sus escritos de dar una demostración que fuera convincente según los estándares actuales².

Más adelante en esta sección, obtendremos las leyes de Kepler a partir de la ley de la gravitación mediante un método ingenioso que explota hasta sus límites la diferenciación vectorial. Sin embargo, primero necesitamos establecer algunos resultados preliminares.

Elipses en coordenadas polares

Las coordenadas polares $[r, \theta]$ de un punto en el plano cuya distancia r al origen sea ε veces su distancia $p - r \cos \theta$ a la recta $x = p$ (véase la Figura 11.22), cumple la ecuación $r = \varepsilon(p - r \cos \theta)$, o, despejando r ,

$$r = \frac{\ell}{1 + \varepsilon \cos \theta}$$

siendo $\ell = \varepsilon p$. Como se observó en las Secciones 8.1 y 8.5, para $0 \leq \varepsilon < 1$, esta ecuación representa una elipse con **excentricidad** ε (que será una circunferencia si $\varepsilon = 0$). Para ver que esto es así, transformemos la ecuación a coordenadas cartesianas:

$$x^2 + y^2 = r^2 = \varepsilon^2(p - r \cos \theta)^2 = \varepsilon^2(p - x)^2 = \varepsilon^2(p^2 - 2px + x^2)$$

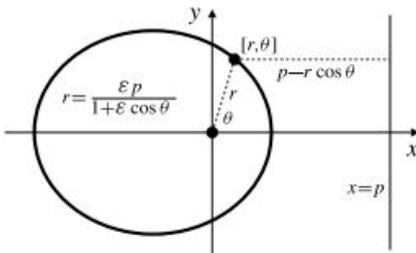


Figura 11.22 Una elipse con foco en el origen, directriz $x = p$ y excentricidad ε .

Realizando algunas transformaciones algebraicas, esta ecuación se puede transformar en

$$\frac{\left(x + \frac{\varepsilon \ell}{1 - \varepsilon^2}\right)^2}{\left(\frac{\ell}{1 - \varepsilon^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\ell}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}\right)^2} = 1$$

que puede reconocerse como una elipse **centrada** en el punto $C = (-c, 0)$, siendo $c = \varepsilon \ell / (1 - \varepsilon^2)$, y semiejes a y b dados por

$$a = \frac{\ell}{1 - \varepsilon^2} \quad \text{(semieje mayor)}$$

$$b = \frac{\ell}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \quad \text{(semieje menor)}$$

² Se pueden encontrar interesantes artículos donde se debate la significación histórica del trabajo de Newton, como los de Robert Weinstock, Curtis Wilson y otros en *The Collage Mathematics Journal*, vol. 25, n.º 3, 1994.

La ecuación cartesiana de la elipse demuestra que la curva es simétrica respecto a las rectas $x = -c$ e $y = 0$ y, por tanto, su segundo foco está en $F = (-2c, 0)$ y tiene una segunda directriz cuya ecuación es $x = -2c - p$ (véase la Figura 11.23). Los extremos del eje mayor son $A = (a - c, 0)$ y $A' = (-a - c, 0)$ y los extremos del eje menor son $B = (-c, b)$ y $B' = (-c, -b)$.

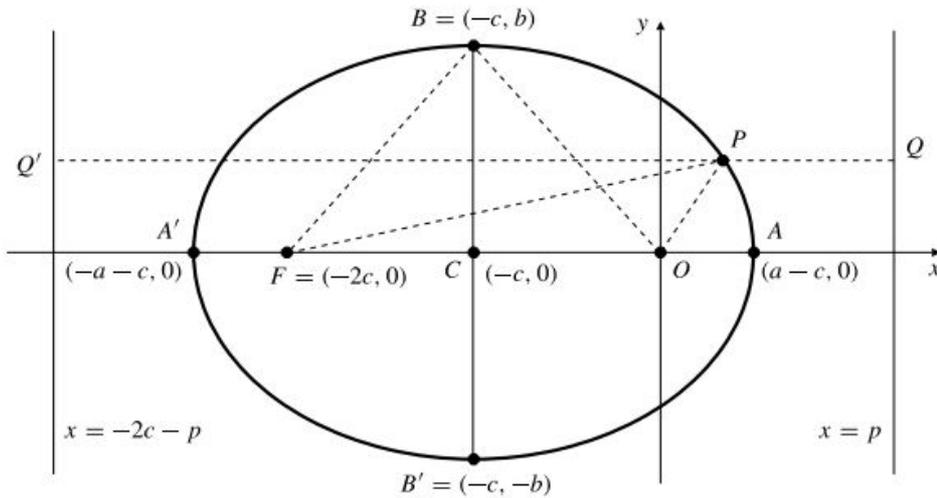


Figura 11.23 La suma de las distancias desde cualquier punto P de la elipse a los dos focos O y F es constante, y vale ϵ veces la distancia entre las directrices.

Si P es un punto cualquiera de la elipse, entonces la distancia OP es ϵ veces la distancia PQ desde P a la directriz derecha. Análogamente, la distancia FP es ϵ veces la distancia $Q'P$ desde P a la directriz izquierda. Por tanto, la suma de los radios focales $OP + FP$ es la constante $\epsilon Q'Q = \epsilon(2c + 2p)$, independientemente de la posición del punto P en la elipse. Cuando P es A o B , la suma es

$$2a = (a - c) + (a + c) = OA + FA = OB + FB = 2\sqrt{b^2 + c^2}$$

Se deduce entonces que

$$a^2 = b^2 + c^2, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{\ell \epsilon}{1 - \epsilon^2} = \epsilon a$$

El número ℓ es el **semi-latus rectum** de la elipse; el latus rectum es la anchura de la elipse medida sobre la línea que pasa por un foco, perpendicular al eje mayor (véase la Figura 11.24).

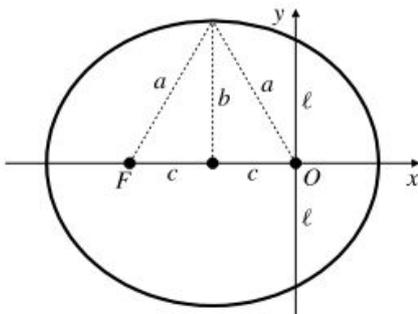


Figura 11.24 Algunos parámetros de una elipse.

Observación La ecuación en polares $r = \ell / (1 + \epsilon \cos \theta)$ representa una curva *acotada* sólo si $\epsilon < 1$; en este caso tenemos que $\ell / (1 + \epsilon) \leq r \leq \ell / (1 - \epsilon)$ para todas las direcciones θ . Si $\epsilon = 1$, la ecuación representa una parábola, y si $\epsilon > 1$, una hipérbola. Es posible que haya objetos que viajen en órbitas parabólicas o hiperbólicas, pero sólo se aproximarán al sol una vez, sin trazar órbitas a su alrededor. Algunos cometas tienen órbitas hiperbólicas.

Componentes polares de la velocidad y la aceleración

Sea $\mathbf{r}(t)$ el vector de posición en el instante t de una partícula P que se mueve en el plano xy . Se forman dos vectores unitarios en P , el vector $\hat{\mathbf{r}}$, que apunta en la dirección del vector de posición \mathbf{r} , y el vector $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, rotado 90° en sentido contrario al de las agujas del reloj desde $\hat{\mathbf{r}}$ (véase la Figura 11.25). Si las coordenadas polares de P son $[r, \theta]$, entonces $\hat{\mathbf{r}}$ apunta en la dirección de r creciente en P , y $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ apunta en la dirección de θ creciente. Evidentemente,

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{r}} &= \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} &= -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}\end{aligned}$$

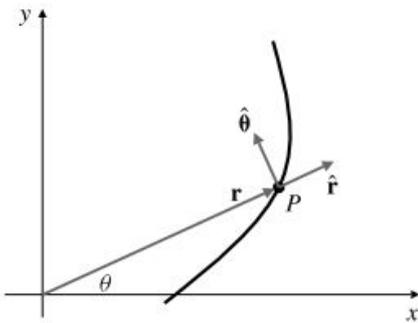


Figura 11.25 Vectores de la base en direcciones crecientes de r y θ .

Nótese que $\hat{\mathbf{r}}$ y $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ no dependen de r , sino sólo de θ :

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad \text{y} \quad \frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{d\theta} = -\hat{\mathbf{r}}$$

La pareja $\{\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}\}$ forma un sistema de referencia (una base) en P , de forma que los vectores del plano se pueden expresar en función de estos dos vectores unitarios. La componente $\hat{\mathbf{r}}$ de un vector se denomina **componente radial** y la componente $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ se denomina **componente transversal**. El sistema de referencia varía de un punto a otro, por lo que debemos recordar que $\hat{\mathbf{r}}$ y $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ son funciones de t . En función de este sistema de referencia móvil, la posición $\mathbf{r}(t)$ de P se puede expresar de forma muy sencilla:

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$$

siendo $r = r(t) = |\mathbf{r}(t)|$ la distancia desde P al origen en el instante t .

Vamos a diferenciar esta ecuación con respecto a t para expresar la velocidad y la aceleración de P con respecto a este sistema de referencia móvil. A lo largo del movimiento, \mathbf{r} se puede ver como una función de θ o de t ; θ es a su vez función de t . Para evitar confusiones, adoptaremos una notación que se utiliza frecuentemente en mecánica, y que recuerda la notación utilizada originalmente por Newton en sus cálculos.

Un punto sobre una magnitud indica la derivada con respecto al tiempo de dicha magnitud. Dos puntos indican la segunda derivada con respecto al tiempo. Así,

$$\dot{u} = du/dt, \quad \text{y} \quad \ddot{u} = d^2u/dt^2$$

Consideremos primero las derivadas con respecto al tiempo de los vectores $\hat{\mathbf{r}}$ y $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Por la Regla de la Cadena, tenemos que

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{r}}} &= \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} &= \frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}\hat{\mathbf{r}}\end{aligned}$$

La velocidad de P es

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}(r\hat{\mathbf{r}}) = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Componentes polares de la velocidad:

La **componente radial de la velocidad** es \dot{r} .

La **componente transversal de la velocidad** es $r\dot{\theta}$.

Como $\hat{\mathbf{r}}$ y $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ son vectores unitarios perpendiculares, la velocidad (escalar) de P se expresa como

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}$$

De forma similar, la aceleración de P se puede expresar en función de sus componentes radial y transversal:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} &= \frac{d}{dt}(\dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}) \\ &= \ddot{r}\hat{\mathbf{r}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\ddot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} - r\dot{\theta}^2\hat{\mathbf{r}} \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned}$$

Componentes polares de la aceleración:

La **componente radial de la aceleración** es $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$.

La **componente transversal de la aceleración** es $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$.

Fuerzas centrales y segunda ley de Kepler

Las coordenadas polares son las más apropiadas para analizar el movimiento debido a una **fuerza central**, que se dirige siempre hacia (o en sentido contrario a) un único punto, el origen: $\mathbf{F} = \lambda(\mathbf{r})\mathbf{r}$, donde el escalar $\lambda(\mathbf{r})$ depende de la posición \mathbf{r} del objeto. Si la velocidad y la aceleración del objeto son $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ y $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$, entonces la Segunda Ley de Newton del Movimiento ($\mathbf{F} = m\mathbf{a}$) dice que \mathbf{a} es paralelo a \mathbf{r} . Por tanto,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

y $\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{h}$, un vector constante que representa el momento angular del objeto por unidad de masa respecto al origen. Esto indica que \mathbf{r} es siempre perpendicular a \mathbf{h} , por lo que el movimiento debido a una fuerza central tiene siempre lugar en un *plano* que pasa por origen y es normal al vector \mathbf{h} .

Si se escoge el eje z en la dirección de \mathbf{h} , y siendo $|\mathbf{h}| = h$, entonces $\mathbf{h} = h\mathbf{k}$ y el camino que sigue el objeto está en el plano xy . En este caso la posición y la velocidad del objeto cumplen

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}} \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Como $\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{k}$, tenemos que

$$h\mathbf{k} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = r\dot{r}\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}} + r^2\dot{\theta}\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = r^2\dot{\theta}\mathbf{k}$$

Por tanto, para cualquier movimiento debido a una fuerza central,

$$r^2\dot{\theta} = h \quad (\text{constante en el camino de movimiento})$$

Esta fórmula es equivalente a la Segunda Ley de Kepler; si $A(t)$ es el área en el plano de movimiento limitada por la órbita y las rectas radiales $\theta = \theta_0$ y $\theta = \theta(t)$, entonces

$$A(t) = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta(t)} r^2 d\theta$$

por lo que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{h}{2}$$

Entonces, el área se barre con una velocidad constante $h/2$, y por tanto se barren áreas iguales en tiempos iguales. Nótese que esta ley no depende del módulo ni de la dirección de la fuerza que actúa sobre el objeto móvil, sino sólo del hecho de que es *central*. También se puede obtener la ecuación $r^2 \dot{\theta} = h$ (constante) directamente del hecho de que la aceleración transversal es cero:

$$\frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = r(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0$$

Ejemplo 1 Un objeto se mueve siguiendo la curva en polares $r = 1/\theta$ bajo la influencia de una fuerza que lo atrae hacia el origen. Si la velocidad del objeto es v_0 en el instante en que $\theta = 1$, calcule el módulo de la aceleración del objeto en cualquier punto de su trayectoria en función de su distancia r al origen.

Solución Como la fuerza es central, sabemos que la aceleración transversal es cero y que $r^2 \dot{\theta} = h$ es constante. Diferenciando la ecuación de la trayectoria con respecto al tiempo y expresando el resultado en función de r , se obtiene

$$\dot{r} = -\frac{1}{\theta^2} \dot{\theta} = -r^2 \frac{h}{r^2} = -h$$

Por tanto, la componente radial de la aceleración es

$$a_r = \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2 = 0 - r \frac{h^2}{r^4} = -\frac{h^2}{r^3}$$

En $\theta = 1$, tenemos que $r = 1$, por lo que $\dot{\theta} = h$. En ese instante el cuadrado de la velocidad es

$$v_0^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 = h^2 + h^2 = 2h^2$$

Por tanto, $h^2 = v_0^2/2$ y, en cualquier punto de su trayectoria, el módulo de la aceleración del objeto es

$$|a_r| = \frac{v_0^2}{2r^3}$$

Obtención de las leyes de Kepler primera y tercera

Los planetas y el sol se mueven alrededor de su centro de masas común. Como el sol es mucho más masivo que los planetas, el centro de masas está muy cercano al centro del sol. Por ejemplo, el centro de masas conjunto del sol y la tierra está en el interior del sol. En el desarrollo que sigue consideraremos que el sol y los planetas son *masas puntuales* y consideraremos también que el sol está fijo en el origen. Más adelante, cuando sea necesario, especificaremos las direcciones de los ejes de coordenadas.

De acuerdo con la ley de la gravitación de Newton, la fuerza que ejerce el sol sobre un planeta de masa m cuyo vector de posición es \mathbf{r} es

$$\mathbf{F} = -\frac{km}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = -\frac{km}{r^3} \mathbf{r}$$

siendo k una constante positiva que depende de la masa del sol, y $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$.

Como se ha observado anteriormente, el hecho de que la fuerza que actúa sobre el planeta esté siempre dirigida hacia el origen implica que $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ es constante. Escogeremos como dirección del eje z la de $\mathbf{r} \times \mathbf{v} = h\mathbf{k}$, por lo que el movimiento se realizará en el plano xy y $r^2\dot{\theta} = h$. Todavía no hemos especificado las direcciones de los ejes x e y , pero lo haremos en breve. Utilizando coordenadas polares en el plano xy , podemos calcular

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\theta} = \frac{\dot{\mathbf{v}}}{\dot{\theta}} = \frac{-\frac{k}{r^2}\hat{\mathbf{r}}}{\frac{h}{r^2}} = -\frac{k}{h}\hat{\mathbf{r}}$$

Como $d\hat{\theta}/d\theta = -\hat{\mathbf{r}}$, podemos integrar la ecuación diferencial anterior para obtener \mathbf{v} :

$$\mathbf{v} = -\frac{k}{h} \int \hat{\mathbf{r}} d\theta = \frac{k}{h} \hat{\theta} + \mathbf{C}$$

siendo \mathbf{C} un vector correspondiente a la constante de integración. Por tanto, hemos demostrado que

$$|\mathbf{v} - \mathbf{C}| = \frac{k}{h}$$

Este resultado, conocido por el nombre de **Teorema de Hamilton**, indica que cuando un planeta se mueve por su órbita, su vector velocidad (cuando se sitúa con su inicio en el origen) traza una circunferencia cuyo centro es un punto C con vector de posición \mathbf{C} . Quizá resulta sorprendente que después de todo haya una circunferencia asociada con la órbita de un planeta. Pero no sólo es el vector de *posición* el que se mueve siguiendo una circunferencia, sino el vector velocidad (véase la Figura 11.26).

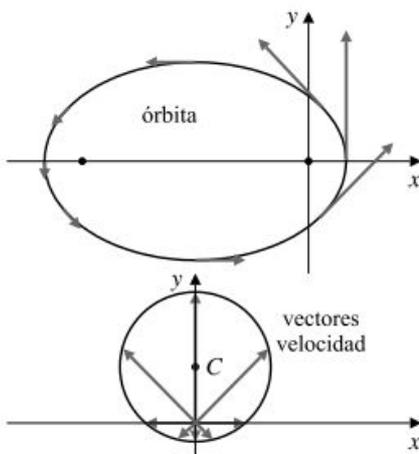


Figura 11.26 Los vectores velocidad definen una circunferencia.

Recuérdese que hasta ahora sólo hemos especificado la posición del origen y la dirección del eje z . Por lo tanto, el plano xy está determinado, pero no lo están las direcciones de los ejes x e y . Escogamos ahora estos ejes en el plano xy de modo que \mathbf{C} esté en la dirección del eje y , será, por ejemplo, $\mathbf{C} = (\varepsilon k/h)\mathbf{j}$, siendo ε una constante positiva. Por consiguiente, tenemos que

$$\mathbf{v} = \frac{k}{h} (\hat{\theta} + \varepsilon\mathbf{j})$$

La posición del eje x queda ahora determinada por el hecho de que los vectores \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} son perpendiculares entre sí y forman una base orientada a la derecha. Calcularemos de nuevo $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$. Recuerdese que $\mathbf{r} = r \cos \theta \mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j}$, y también que $\mathbf{r} = r \hat{\mathbf{r}}$:

$$\begin{aligned} h\mathbf{k} &= \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \frac{k}{h} (r\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} + r\varepsilon \cos \theta \mathbf{i} \times \mathbf{j} + r\varepsilon \sin \theta \mathbf{j} \times \mathbf{i}) \\ &= \frac{k}{h} r(1 + \varepsilon \cos \theta) \mathbf{k} \end{aligned}$$

Por tanto, $h = \frac{kr}{h} (1 + \varepsilon \cos \theta)$ o, despejando r ,

$$r = \frac{h^2/k}{1 + \varepsilon \cos \theta}$$

Ésta es la ecuación en polares de la órbita. Si $\varepsilon < 1$, se trata de una elipse con un foco en el origen (el sol), cuyos parámetros son

Semi-latus rectum:	$\ell = \frac{h^2}{k}$
Senieje mayor:	$a = \frac{h^2}{k(1 - \varepsilon^2)} = \frac{\ell}{1 - \varepsilon^2}$
Senieje menor:	$b = \frac{h^2}{k\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \frac{\ell}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$
Sendistancia focal:	$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{\varepsilon \ell}{1 - \varepsilon^2}$

Hemos deducido la Primera Ley de Kepler. La elección que se ha hecho de los ejes de coordenadas implica que el **perihelio** (el punto de la órbita más cerca del sol) está en el eje x positivo ($\theta = 0$).

Ejemplo 2 La órbita de un planeta tiene excentricidad ε (siendo $0 < \varepsilon < 1$), y su velocidad en el perihelio es v_P . Calcule su velocidad v_A en el **afelio** (el punto de su órbita más lejos del sol).

Solución En el perihelio y en el afelio la velocidad radial del planeta \dot{r} es cero (ya que r es mínimo o máximo), por lo que la velocidad es totalmente transversal. Entonces $v_P = r_P \dot{\theta}_P$ y $v_A = r_A \dot{\theta}_A$. Como $r^2 \dot{\theta} = h$ tiene el mismo valor en todos los puntos de la órbita, tenemos que

$$r_P v_P = r_P^2 \dot{\theta}_P = h = r_A^2 \dot{\theta}_A = r_A v_A$$

La ecuación de la órbita del planeta es

$$r = \frac{\ell}{1 + \varepsilon \cos \theta}$$

por lo que el perihelio corresponde a $\theta = 0$ y el afelio a $\theta = \pi$:

$$r_P = \frac{\ell}{1 + \varepsilon} \quad \text{y} \quad r_A = \frac{\ell}{1 - \varepsilon}$$

Por tanto, $v_A = \frac{r_P}{r_A} v_P = \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} v_P$.

Podemos obtener la Tercera Ley de Kepler a partir de las otras dos de la siguiente forma. Como la línea radial que va desde el sol a un planeta barre área con una velocidad constante de $h/2$, el área total A encerrada por la órbita será $A = (h/2)T$, siendo T el periodo de revolución. El área de una elipse cuyos semiejes son a y b es $A = \pi ab$. Como $b^2 = \ell a = h^2 a/k$, tenemos

$$T^2 = \frac{4}{h^2} A^2 = \frac{4}{h^2} \pi^2 a^2 b^2 = \frac{4\pi^2}{k} a^3$$

Nótese que la expresión final de T^2 no depende de h , que es una constante para la órbita de cualquier planeta, pero varía de un planeta a otro. La constante $4\pi^2/k$ no depende de un planeta en particular (k depende de la masa del sol y una constante gravitatoria universal). Por tanto,

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k} a^3$$

indica que el cuadrado del periodo de un planeta es proporcional al cubo de la longitud, $2a$, del eje mayor de su órbita, y la constante de proporcionalidad es válida para todos los planetas. Esta es la Tercera Ley de Kepler. Los datos astronómicos modernos demuestran que T^2/a^3 varía sólo unas tres centésimas del 1% en los nueve planetas conocidos.

Conservación de la energía

La solución de la ecuación diferencial de segundo orden del movimiento $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$ para obtener la órbita de un planeta requiere dos integraciones. En el desarrollo anterior hemos explotado las propiedades del producto vectorial para facilitar dichas integraciones. Existen procedimientos más tradicionales para obtener las leyes de Kepler, que en general comienzan por separar las componentes radial y transversal de la ecuación del movimiento:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{k}{r^2}, \quad r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$$

Como se ha visto antes, la segunda ecuación anterior implica que $r^2\dot{\theta} = h = \text{constante}$, que es la Segunda Ley de Kepler. Esto se puede utilizar para eliminar θ en la primera ecuación y obtener

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{k}{r^2}$$

Por tanto,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{h^2}{2r^2} \right) = \dot{r} \left(\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} \right) = -\frac{k}{r^2} \dot{r}$$

Si se integra esta ecuación, se obtiene

$$\frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2} \right) - \frac{k}{r} = E$$

que es una ley de **conservación de la energía**. El primer término de la izquierda es $v^2/2$, la energía cinética (por unidad de masa) del planeta. El término $-k/r$ es la energía potencial por unidad de masa. Es difícil integrar esta ecuación para obtener r en función de t . En todo caso, lo que realmente queremos calcular es r en función de θ , de forma que podamos reconocer que hemos obtenido una elipse. Otra forma de obtener este resultado se sugiere en el Ejercicio 18 posterior.

Observación El procedimiento utilizado anteriormente para demostrar las leyes de Kepler demuestra de hecho que si un objeto se mueve bajo la influencia de una fuerza que lo atrae hacia el origen (o que lo repele desde el origen), cuyo módulo sea proporcional al inverso del cuadrado de su distancia al origen, entonces dicho objeto debe moverse en una órbita plana cuya forma debe ser una sección cónica. Si la energía total E definida anteriormente es negativa, entonces la órbita está *acotada* y, por tanto, debe ser una elipse. Si $E = 0$, la órbita es una parábola. Si $E > 0$, la órbita es una hipérbola. Las órbitas hiperbólicas son típicas de las fuerzas repulsivas que pueden aparecer en el caso de atracciones si el objeto tiene suficiente velocidad (superior a la *velocidad de escape*). Como ejemplo, véase el Ejercicio 22 posterior.

Ejercicios 11.6

- 1. (Elipses en polares)** Complete los detalles del cálculo sugerido en el texto para transformar la ecuación en polares de una elipse, $r = \ell / (1 + \varepsilon \cos \theta)$, siendo $0 < \varepsilon < 1$, en coordenadas cartesianas, de forma que muestre explícitamente el centro y los semiejes.

Componentes polares de la velocidad y la aceleración

- 2.** Una partícula se mueve siguiendo una circunferencia cuya ecuación en polares es $r = k$, ($k > 0$). ¿Qué son las componentes radial y transversal de su vector velocidad y de su aceleración? Demuestre que la componente transversal de la aceleración es igual a la velocidad de cambio de la velocidad de la partícula.
- 3.** Calcule las componentes radial y transversal del vector velocidad y de la aceleración de una partícula que se mueve con velocidad unidad siguiendo la espiral exponencial $r = e^\theta$. Expresar sus respuestas en función del ángulo θ .
- 4.** Si una partícula se mueve siguiendo la curva en polares $r = \theta$ bajo la influencia de una fuerza central que la atrae hacia el origen, calcule el módulo de la aceleración en función de r y de la velocidad de la partícula.
- 5.** Un objeto se mueve siguiendo la curva en polares $r = \theta^{-2}$ bajo la influencia de una fuerza que lo atrae hacia el origen. Si la velocidad del objeto es v_0 en el instante en el que $\theta = 1$, calcule el módulo de la aceleración del objeto en cualquier punto de su trayectoria en función de su distancia r al origen.

Deducciones de las leyes de Kepler

- 6.** La distancia media de la tierra al sol es aproximadamente 150 millones de kilómetros. El cometa Halley se acerca a su perihelio (punto más cercano al sol) de su órbita elíptica aproximadamente cada 76 años. Estime el eje mayor de la órbita del cometa Halley.
- 7.** La distancia media de la luna a la tierra es aproximadamente 385.000 km, y su periodo de

revolución alrededor de la tierra es de aproximadamente 27 días (el mes sideral). ¿A qué distancia aproximada del centro de la tierra, y en qué plano, debería situarse un satélite de comunicaciones en órbita circular si debe estar todo el tiempo exactamente sobre la misma posición de la tierra?

- 8.** Un asteroide sigue una órbita circular alrededor del sol. Si su periodo de revolución es T , calcule el radio de su órbita.
- * **9.** Si el asteroide del Ejercicio 8 se detiene instantáneamente en su órbita, caerá hacia el sol. ¿Cuánto tardará en llegar? *Sugerencia:* Esta pregunta se puede responder fácilmente si se piensa que el asteroide está *casí* parado, de forma que sigue una órbita con alta excentricidad, cuyo eje mayor es un poco mayor que el radio de la órbita original circular.
- 10.** Calcule la excentricidad de la órbita de un asteroide si la velocidad de dicho asteroide en el perihelio es el doble de su velocidad en el afelio.
- 11.** Demuestre que la velocidad orbital de un planeta es constante si y sólo si su órbita es circular. *Sugerencia:* Utilice la identidad de conservación de la energía.
- 12.** La distancia de un planeta al sol en su perihelio es el 80% de su distancia en el afelio. Calcule la razón de sus velocidades en el perihelio y en el afelio, y la excentricidad de su órbita.
- * **13.** Como resultado de una colisión, un asteroide cuya órbita inicial era circular alrededor del sol pierde instantáneamente la mitad de su velocidad, de forma que cae en una órbita elíptica cuya máxima distancia al sol es igual al radio de la órbita original circular. Calcule la excentricidad de su nueva órbita.
- 14.** Si las velocidades de un planeta en su perihelio y su afelio son, respectivamente, v_P y v_A , ¿cuál es su velocidad cuando está en los extremos del eje menor de su órbita?

15. ¿Qué fracción de su «año» (es decir, del periodo de su órbita) emplea un planeta en viajar por la mitad de su órbita más cercana al sol? Exprese su respuesta en función de la excentricidad ε de la órbita del planeta.

***16.** Suponga que un planeta viaja con una velocidad de v_0 en el momento en que su distancia al sol es r_0 . Demuestre que el periodo orbital del planeta es

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k}} \left(\frac{2}{r_0} - \frac{v_0^2}{k} \right)^{-3/2}$$

Sugerencia: La magnitud $\frac{k}{r} - \frac{1}{2}v^2$ es constante en todos los puntos de la órbita, como se demostró en el razonamiento sobre la conservación de la energía. Calcule el valor de esta expresión en el perihelio en función del semieje mayor, a .

***17.** La suma de las distancias de un punto P de una elipse ε a sus focos es la constante $2a$, la longitud del eje mayor de la elipse. Utilice este hecho como parte de un argumento *geométrico* para demostrar que la distancia media de los puntos P a un foco de ε es a . Es decir, demuestre que

$$\frac{1}{c(\varepsilon)} \int_{\varepsilon} r \, ds = a$$

siendo $c(\varepsilon)$ la circunferencia de ε , y r la distancia de un punto de ε a un foco.

***18. (Un planteamiento directo de la Primera Ley de Kepler)** El resultado de eliminar θ en las ecuaciones de las componentes radial y transversal de la aceleración de un planeta es

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{k}{r^2}$$

Demuestre el cambio de las variables dependiente e independiente:

$$r(t) = \frac{1}{u(\theta)}, \quad \theta = \theta(t)$$

transforma esta ecuación en una más simple:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{k}{h^2}$$

Demuestre que la solución de esta ecuación es

$$u = \frac{k}{h^2} (1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0))$$

siendo ε y θ_0 constantes. A partir de aquí, demuestre que la órbita es elíptica $\text{sen } |\varepsilon| < 1$.

***19. (¿Qué pasaría si la ley de gravitación dependiera del inverso del cubo?)** Utilice la técnica del Ejercicio 18 para obtener la trayectoria de un objeto de masa unidad atraído hacia el origen por una fuerza de módulo $f(r) = k/r^3$. ¿Existen órbitas que no tiendan a infinito o al origen cuando $t \rightarrow \infty$?

20. Utilice la fórmula de conservación de la energía para demostrar que si $E < 0$ la órbita debe estar acotada; es decir, no puede alejarse arbitrariamente del origen.

***21. (Hiperbolas en polares)** Si $\varepsilon > 1$, entonces la ecuación

$$r = \frac{\ell}{1 + \varepsilon \cos \theta}$$

representa una hipérbola en vez de una elipse. Dibuje dicha hipérbola, calcule su centro y las direcciones de sus asíntotas, y determine su semieje transversal, su semieje conjugado y su semidistancia focal, en función de ℓ y ε .

***22. (Órbitas hiperbólicas)** Un meteoro que procede del infinito sigue una órbita hiperbólica que pasa cerca del sol. A distancias muy grandes del sol, su velocidad es v_∞ . Las asíntotas de su órbita están a una distancia D , medida perpendicularmente desde el sol (véase la Figura 11.27). Demuestre que el ángulo δ de deflexión del meteoro debido a la atracción gravitatoria del sol se expresa como

$$\cot\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{Dv_\infty^2}{k}$$

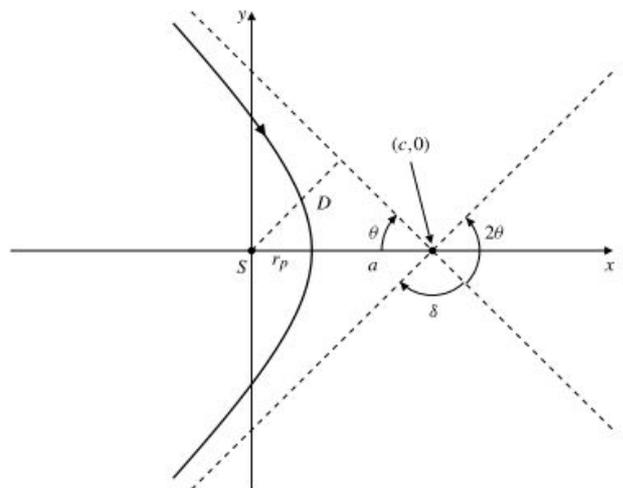


Figura 11.27 Trayectoria de un meteoro.

Sugerencia: Necesitará el resultado del Ejercicio 21. El mismo análisis y, por tanto, los mismos resultados son válidos en el caso de atracción o repulsión electrostática, $f(r) = \pm k/r^2$. La constante k depende de la carga de las dos partículas y r es la distancia entre ellas.

Repaso del capítulo

Ideas clave

- **¿Qué es una función vectorial de una variable real, y por qué representa una curva?**
- **Enuncie la Regla del Producto para la derivada de $\mathbf{u}(t) \cdot (\mathbf{v}(t) \times \mathbf{w}(t))$.**
- **¿Qué significan las siguientes expresiones?**
 - ◇ Velocidad angular ◇ Momento angular
 - ◇ Aceleración centrípeta ◇ Aceleración de Coriolis
 - ◇ Parametrización mediante la longitud de arco
 - ◇ Fuerza central
- **Calcule las siguientes magnitudes asociadas con una curva paramétrica \mathcal{C} con parametrización $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, ($a \leq t \leq b$).**
 - ◇ El vector velocidad $\mathbf{v}(t)$ ◇ La velocidad $v(t)$
 - ◇ La longitud de arco ◇ La aceleración $\mathbf{a}(t)$
 - ◇ La tangente unitaria $\hat{\mathbf{T}}(t)$ ◇ La curvatura $\kappa(t)$
 - ◇ La normal unitaria $\hat{\mathbf{N}}(t)$ ◇ El plano osculante
 - ◇ El radio de curvatura $\rho(t)$ ◇ La torsión $\tau(t)$
 - ◇ La circunferencia osculante ◇ La evoluta
 - ◇ La binormal unitaria $\hat{\mathbf{B}}(t)$ ◇ La aceleración normal
 - ◇ La aceleración tangencial
- **Enuncie las fórmulas de Frenet-Serret.**
- **Enuncie las leyes de Kepler del movimiento planetario.**
- **¿Qué son las componentes radial y transversal del vector velocidad y de la aceleración?**

Ejercicios de repaso

1. Si $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ y $\mathbf{a}(t)$ representan la posición, el vector velocidad y la aceleración en el instante t de una partícula que se mueve en el espacio tridimensional, y si, en todo instante t , \mathbf{a} es perpendicular a \mathbf{r} y \mathbf{v} , demuestre que el vector $\mathbf{r}(t) - t\mathbf{v}(t)$ tiene longitud constante.
2. Describa la curva paramétrica

$$\mathbf{r} = t \cos t \mathbf{i} + t \sin t \mathbf{j} + (2\pi - t) \mathbf{k}$$
 ($0 \leq t \leq 2\pi$), y calcule su longitud.

3. Una partícula se mueve siguiendo la curva de intersección de las superficies $y = x^2$ y $z = 2x^3/3$ con velocidad constante $v = 6$. Se mueve en la dirección de x creciente. Calcule su vector velocidad y su aceleración cuando está en el punto $(1, 1, 2/3)$.
4. Una partícula se mueve siguiendo la curva $y = x^2$ en el plano xy , de forma que en el instante t su velocidad es $v = t$. Calcule su aceleración en el instante $t = 3$, si en ese momento está en el punto $(\sqrt{2}, 2)$.
5. Calcule la curvatura y la torsión en un punto general de la curva $\mathbf{r} = e^t \mathbf{i} + \sqrt{2}t \mathbf{j} + e^{-t} \mathbf{k}$.
6. Una partícula se mueve siguiendo la curva del Ejercicio 5, de forma que en el instante t está en la posición $\mathbf{r}(t)$. Calcule su aceleración normal y su aceleración tangencial en cualquier instante t . ¿Cuál es su velocidad mínima?
7. **(Una curva clotoide)** Las ecuaciones paramétricas de la curva plana \mathcal{C} que se muestra en la Figura 11.28 son

$$x(s) = \int_0^s \cos \frac{kt^2}{2} dt \quad \text{e} \quad y(s) = \int_0^s \sin \frac{kt^2}{2} dt$$

Verifique que s es, de hecho, la longitud de arco en \mathcal{C} medida desde $(0, 0)$, y que la curvatura de \mathcal{C} se expresa como $\kappa(s) = ks$. Como la curvatura cambia realmente con la distancia recorrida sobre la curva, este tipo de curvas, denominadas *clotoides*, resultan de utilidad para unir secciones de pistas o de vías con diferentes curvaturas.

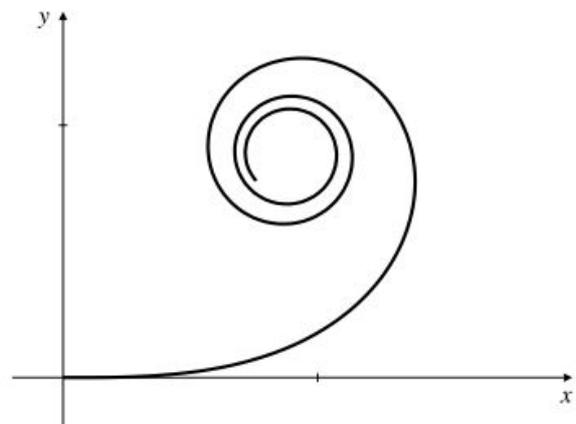


Figura 11.28 Una curva clotoide.

8. Una partícula se mueve siguiendo la curva en polares $r = e^{-\theta}$ con velocidad angular constante en $\dot{\theta} = k$. Expresé su vector velocidad y su aceleración en función de sus componentes radial y transversal, que sólo dependen de la distancia r al origen.

Algunas propiedades de las cicloides

Los Ejercicios 9-12 tratan de la cicloide

$$\mathbf{r} = a(t - \text{sen } t)\mathbf{i} + a(1 - \text{cos } t)\mathbf{j}$$

Recuérdese que esta curva es el camino que sigue un punto de una circunferencia de radio a cuando dicha circunferencia rueda por el eje x .

- 9. Calcule la longitud de arco $s = s(T)$ de la parte de la cicloide que va desde $t = 0$ hasta $t = T \leq 2\pi$.
- 10. Calcule la parametrización mediante longitud de arco $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ del arco $0 \leq t \leq 2\pi$ de la cicloide, siendo s medida desde el punto $(0, 0)$.
- 11. Calcule la *evoluta* de la cicloide, es decir, calcule las ecuaciones paramétricas del centro de curvatura $\mathbf{r} = \mathbf{r}_c(t)$ de la cicloide. Demuestre que la evoluta es la misma cicloide trasladada πa unidades hacia la derecha y $2a$ unidades hacia abajo.

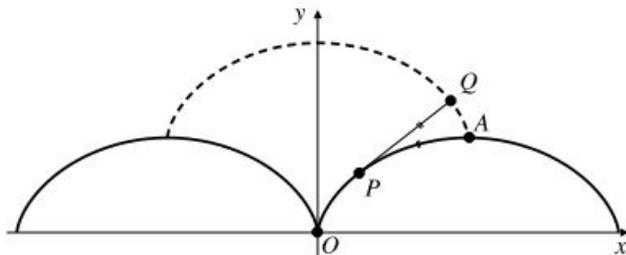


Figura 11.29

- 12. Una cuerda de longitud $4a$ tiene un extremo fijo en el origen y se enrolla siguiendo el arco de la cicloide a la derecha del origen. Como la longitud total de ese arco es $8a$, el extremo libre de la cuerda queda en el punto más alto A de la cicloide. Calcule el camino que sigue el extremo libre Q de la cuerda cuando se desenrolla de la cicloide y se mantiene tensa mientras tanto (véase la Figura 11.29). Si la cuerda deja a la cicloide en el punto P , entonces

$$(\text{arc } OP) + PQ = 4a$$

La trayectoria que sigue el punto Q se denomina *evoluta* de la cicloide. Demuestre que, como la evoluta, la involuta es también una traslación de la cicloide original. De hecho, la cicloide es la evoluta de su involuta.

- 13. Sea P un punto en el espacio tridimensional cuyas coordenadas esféricas son (ρ, ϕ, θ) . Suponga que P no está en el eje z . Obtenga una tríada de vectores unitarios mutuamente perpendiculares, $\{\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{\theta}\}$, en P , en las direcciones de ρ, ϕ y θ crecientes, respectivamente. ¿Está la tríada orientada a la derecha o a la izquierda?

Las leyes de Kepler implican la ley de la gravitación de Newton

En los Ejercicios 14-16, se *supone* que un planeta de masa m se mueve siguiendo una órbita elíptica $r = \ell/(1 + \varepsilon \cos \theta)$, con foco en el origen (el sol), bajo la influencia de una fuerza $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ que depende sólo de la posición del planeta.

- 14. Utilizando la Segunda Ley de Kepler, demuestre que $\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{h}$ es constante y, a partir de aquí, que $r^2 \dot{\theta}$ es constante.
- 15. Utilice la Segunda Ley del Movimiento de Newton $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$ para demostrar que $\mathbf{r} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$. Por tanto, $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ es paralela a \mathbf{r} : $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -f(r)\hat{\mathbf{r}}$ para alguna función escalar $f(r)$, y la componente transversal de $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ es cero.
- 16. Mediante el cálculo directo de la aceleración radial del planeta, demuestre que $f(r) = m\ell^2/(\ell r^2)$, siendo $r = |\mathbf{r}|$. Por tanto, \mathbf{F} es una fuerza de atracción hacia el origen que es proporcional a la masa del planeta, e inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al sol.

Problemas avanzados

- 1. Sea P un punto en la superficie de la tierra situado a 45° de latitud norte. Utilice un sistema de coordenadas con origen en P y con vectores de la base \mathbf{i} y \mathbf{j} apuntando al este y al norte, respectivamente, de forma que \mathbf{k} apunte verticalmente hacia arriba.
 - (a) Expresar la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ de la tierra en función de los vectores de la base en P . ¿Qué es el módulo Ω de $\boldsymbol{\Omega}$ en radianes por segundo?
 - (b) Calcule la aceleración de Coriolis $\mathbf{a}_C = 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}$ de un objeto que cae verticalmente con velocidad v sobre P .
 - (c) Si el objeto de (b) se suelta desde el reposo a una altura de 100 m sobre P , ¿cuándo llega aproximadamente al suelo? Ignore la resistencia del aire, pero no la aceleración de Coriolis. Como la aceleración de Coriolis es mucho menor en módulo que la aceleración gravitatoria, se puede utilizar la velocidad vertical como una buena aproximación de la velocidad real del objeto en cualquier instante durante su caída.
- *2 (El espín de una bola de béisbol) Cuando se lanza una bola con un espín respecto un eje que no es paralelo a su velocidad, experimenta una aceleración lateral debido a las diferencias de rozamiento en sus lados. Esta aceleración de espín se expresa como $\mathbf{a}_s = k\mathbf{S} \times \mathbf{v}$, siendo \mathbf{v} la velocidad de la bola, \mathbf{S} la velocidad angular de su espín y k una constante positiva que depende de la superficie de la bola.

Suponga que una bola para la que $k = 0,001$ se lanza horizontalmente según la dirección del eje x , con una velocidad inicial de 70 ft/s y un espín de 1000 rad/s respecto a su eje vertical. Su velocidad \mathbf{v} debe cumplir

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (0,001)(1000\mathbf{k}) \times \mathbf{v} - 32\mathbf{k} = \mathbf{k} \times \mathbf{v} - 32\mathbf{k} \\ \mathbf{v}(0) = 70\mathbf{i} \end{cases}$$

ya que la aceleración de la gravedad es de 32 pies/s².

- (a) Demuestre que las componentes de $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ cumplen

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = -v_2 & \frac{dv_2}{dt} = v_1 & \frac{dv_3}{dt} = -32 \\ v_1(0) = 70 & v_2(0) = 0 & v_3(0) = 0 \end{cases}$$

- (b) Resuelva esas ecuaciones y calcule la posición de la bola t s tras su lanzamiento. Suponga que se lanza desde el origen en el instante $t = 0$.
- (c) En $t = 1/5$ s, ¿a qué distancia y en qué dirección se habrá desviado la bola de la trayectoria parabólica que habría seguido si se hubiera lanzado sin espín?

***3 (Partículas cargadas en movimiento en campos magnéticos)** Los campos magnéticos ejercen fuerzas sobre las partículas cargadas en movimiento. Si una partícula de masa m y carga q se mueve con velocidad \mathbf{v} en un campo magnético \mathbf{B} , entonces experimenta una fuerza $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, por lo que su velocidad está gobernada por la ecuación

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

En este ejercicio, suponga que el campo magnético es constante y vertical, es decir, $\mathbf{B} = B\mathbf{k}$ (como, por ejemplo, en un tubo de rayos catódicos). Si la velocidad inicial de la partícula en movimiento es \mathbf{v}_0 , su velocidad en el instante t se puede expresar como

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \omega\mathbf{v} \times \mathbf{k}, & \text{siendo } \omega = \frac{qB}{m} \\ \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0 \end{cases}$$

- (a) Demuestre que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{k}$ y $|\mathbf{v}| = |\mathbf{v}_0|$ para todo t .
- (b) Sea $\mathbf{w}(t) = \mathbf{v}(t) - (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}$, de forma que \mathbf{w} es perpendicular a \mathbf{k} para todo t . Demuestre que \mathbf{w} cumple

$$\begin{cases} \frac{d^2\mathbf{w}}{dt^2} = -\omega^2\mathbf{w} \\ \mathbf{w}(0) = \mathbf{v}_0 - (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{k})\mathbf{k} \\ \mathbf{w}'(0) = \omega\mathbf{v}_0 \times \mathbf{k} \end{cases}$$

- (c) Obtenga $\mathbf{w}(t)$ a partir del problema de valor inicial de (b), y a partir de aquí calcule $\mathbf{v}(t)$.
- (d) Calcule el vector de posición $\mathbf{r}(t)$ de la partícula en el instante t , si en el instante $t = 0$ dicha partícula está en el origen. Verifique que la trayectoria de la partícula es, en general, una hélice circular. ¿En qué circunstancias será dicha trayectoria una recta? ¿Y una circunferencia?

***4 (La tautócrona)** Las ecuaciones paramétricas

$$x = a(\theta - \text{sen } \theta) \quad \text{e} \quad y = a(\text{cos } \theta - 1)$$

(para $0 \leq \theta \leq 2\pi$) describen un arco de cicloide seguido por un punto sobre una circunferencia de radio a que rueda por el eje x . Suponga que la curva está formada por un alambre por el que se puede deslizar una cuenta sin rozamiento (véase la Figura 11.30). Si la cuenta se desliza partiendo del reposo bajo la acción de la gravedad, empezando en un punto cuyo valor del parámetro es θ_0 , demuestre que el tiempo que tarda la cuenta en alcanzar el punto más bajo del arco (correspondiente a $\theta = \pi$) es constante, independiente de la posición inicial θ_0 . Es decir, dos cuentas que se suelten simultáneamente desde puntos diferentes del alambre siempre se encontrarán en el punto más bajo. Por esta razón, la cicloide se denomina a veces *tautócrona*, término procedente del griego que significa «tiempo constante». *Sugerencia:* Cuando la cuenta cae desde la altura $y(\theta_0)$ hasta la altura $y(\theta)$ su velocidad es $v = \sqrt{2g(y(\theta_0) - y(\theta))}$ (¿por qué?). El tiempo que tarda la cuenta en llegar al fondo es

$$T = \int_{\theta=\theta_0}^{\theta=\pi} \frac{1}{v} ds$$

siendo ds la longitud de un elemento de arco sobre la cicloide.

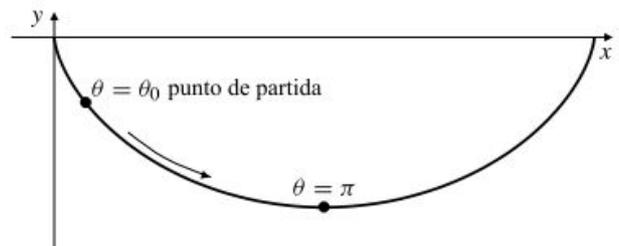


Figura 11.30

***5 (La caída al abismo)** Un parque de atracciones de West Edmonton Mall en Alberta, Canadá, ofrece a los que buscan emociones fuertes probar la caída libre. Consiste en un coche que se mueve por una pista formada por secciones rectas horizontales y verticales unidas por curvas suaves. El coche se lanza desde la parte superior y cae verticalmente bajo la acción de

la gravedad durante $10 - 2\sqrt{2} \approx 7.2$ m antes de entrar en la sección curva en el punto B (véase la Figura 11.31). Cae otros $2\sqrt{2} \approx 2.8$ m mientras traza la curva y entra en la sección horizontal DE a nivel del suelo, donde se aplican los frenos para detener el coche (por tanto, la caída vertical total desde A hasta D o E es de 10 m, cifra, como las otras de este problema, que se ha escogido por conveniencia matemática y no por precisión de ingeniería). A efectos de este problema es útil tomar los ejes coordenados formando un ángulo de 45° con la vertical, de forma que las dos secciones rectas de la pista coincidan con la gráfica de $y = |x|$. En ese caso la sección curva va desde $(-2, 2)$ hasta $(2, 2)$, y se puede considerar simétrica respecto al eje y . Con este sistema de coordenadas, la aceleración gravitatoria está en la dirección de $\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

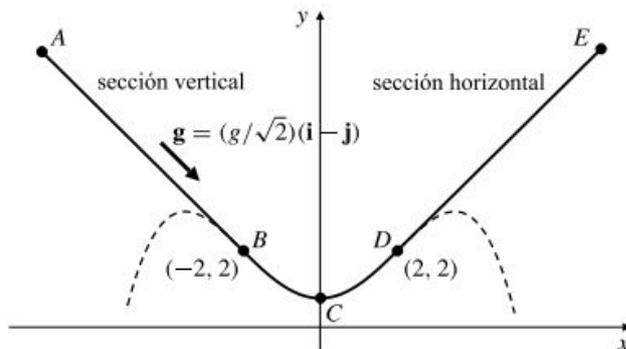


Figura 11.31

- (a) Calcule un polinomio de cuarto grado cuya gráfica se pueda usar para enlazar las dos secciones rectas de la pista sin producir aceleraciones discontinuas en el coche que cae (¿por qué es adecuado un polinomio de cuarto grado?).
- (b) Ignorando el rozamiento y la resistencia del aire, ¿con qué velocidad se estará moviendo el coche cuando entra a la curva en el punto B ? ¿Y cuando deja la curva en el punto D ?

- (c) Calcule el módulo de la aceleración normal y de la aceleración total del coche cuando pasa por el punto C .

***6 (Un problema de caza)** Un zorro y una liebre corren por el plano xy . Ambos corren a la misma velocidad v . La liebre corre por el eje y en dirección de y creciente y parte del origen en el instante $t = 0$. El zorro corre siempre directamente hacia la liebre. En el instante $t = 0$ el zorro está en el punto $(a, 0)$, siendo $a > 0$. Sea $(x(t), y(t))$ la posición del zorro en el instante t .

- (a) Verifique que la pendiente de la tangente a la trayectoria del zorro en el instante t es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(t) - vt}{x(t)}$$

- (b) Demuestre que la ecuación de la trayectoria del zorro cumple

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Sugerencia: Diferencie la ecuación de (a) con respecto a t . Observe que en el miembro izquierdo $(d/dt) = (dx/dt)(d/dx)$.

- (c) Resuelva la ecuación de (b) sustituyendo $u(x) = dy/dx$ y separando variables. Observe que $y = 0$ y $u = 0$ cuando $x = a$.

7. Suponga que la tierra es una esfera perfecta de radio a . Suponga que está situado en un punto en el ecuador cuyas coordenadas esféricas son $(\rho, \phi, \theta) = (a, \pi/2, 0)$, y que viaja por la superficie de la tierra con una velocidad constante v , desplazándose hacia el noreste (45° al este del norte).

- (a) ¿Conseguirá llegar al polo norte? Si es así, ¿cuánto tardará en llegar?
- (b) Calcule las funciones $\phi(t)$ y $\theta(t)$ correspondientes a las coordenadas angulares esféricas de su posición en el instante $t > 0$.
- (c) ¿Cuántas veces cortará su trayectoria al meridiano $\theta = 0$?

