GEOMETRIE

1. Relații metrice în triunghiul oarecare

1.1. Teoreme ale bisectoarelor

Teorema 1.1.1. (Teorema bisectoarei interioare)

Fie triunghiul ABC, (AD bisectoarea interioară a unghiului A şi D∈(BC), atunci:

$$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}.$$

Demonstrație. Ducem prin B o paralelă la AD care întâlneşte pe CA în M. Aplicăm teorema lui Thales în triunghiul CBM şi obținem:

$$\frac{DB}{DC}=\frac{AM}{AC} \tag{1}$$

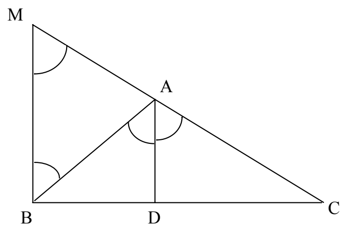
(AD fiind bisectoarea interioară a unghiului A, avem că $\angle CAD \equiv \angle BAD$, dar $\angle BAD \equiv \angle ABM$ (alterne interne) şi $\angle BMA \equiv \angle DAC$ (corespondente). Deci $\angle BMA \equiv \angle ABM$. Obținem astfel că triunghiul ABM este isoscel cu

$$AM=AB \tag{2}$$

Din relațiile (1) şi (2) obținem că $\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}$, şi astfel teorema este demonstrată.

Din $\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}$ obținem $\frac{DB+DC}{DC}=\frac{AB+AC}{AC}$ sau $\frac{BC}{DC}=\frac{AB+AC}{AC}$, de unde $DC=\frac{BC\cdot AC}{AB+AC}$, care se mai scrie

$$DC=\frac{ab}{b+c} \tag{3}$$



Atunci $BD=BC-DC=a-\frac{ab}{b+c}=\frac{ac}{b+c}$, deci

$$DB=\frac{ac}{b+c} \tag{4}$$

Observație. Pentru un plus de precizie se poate numi aceasta "prima teoremă a bisectoarei interioare".

Teorema 1.1.2. (Teorema reciprocă a teoremei bisectoarei interioare)

Fie triunghiul ABC, $D \in (BC)$ astfel încât $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$, atunci (AD este bisectoarea interioară a unghiului $\angle A$.

Demonstrație. Facem aceeaşi construcție ca la teorema directă, adică ducem prin B o paralelă la AD care întâlneşte pe CA în M. Din ipoteză avem că

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \tag{1}$$

Fiindcă AD||MB obținem

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AM}{AC} \tag{2}$$

Din (1) şi (2) obținem AB=AM, deci triunghiul AMB este isoscel cu

$$\angle ABM \equiv \angle BMA \tag{3}$$

Din paralelism avem:

$$\angle MBA \equiv \angle BAD \text{ (alterne interne)} \tag{4}$$

şi

$$\angle BMA \equiv \angle DAC \text{ (corespondente)} \tag{5}$$

Din relațiile (3), (4), (5) obținem că $\angle BAD \equiv \angle DAC$, adică (AD este bisectoarea interioară a unghiului A.

Teorema 1.1.3. (Teorema bisectoarei exterioare)

Fie triunghiul ABC cu $AB \neq AC$. Dacă (AE este bisectoarea exterioară a unghiului $\angle A$, $E \in BC$, atunci $\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$.

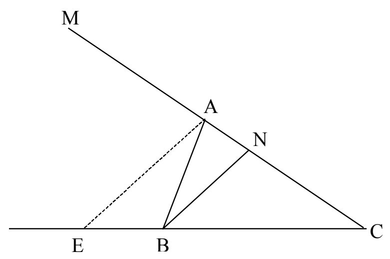
Demonstrație. Ducem prin punctul B o paralelă la AE care întâlneşte pe AC în N. Aplicăm teorema lui Thales în triunghiul CAE:

$$\frac{EB}{EC} = \frac{AN}{AC} \tag{1}$$

Din paralelism obținem $\angle ANB \equiv \angle MAE$ (corespondente), $\angle ABN \equiv \angle EAB$ (alterne interne). Din ipoteză avem că $\angle MAE \equiv \angle EAB$, deci $\angle ANB \equiv \angle ABN$, adică triunghiul ABN este isoscel cu

$$(AB) \equiv (AN) \tag{2}$$

Din (1) şi (2) obținem: $\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$ şi teorema este demonstrată.



Din $\frac{\text{EB}}{\text{EC}}=\frac{\text{AB}}{\text{AC}}$ obținem (în ipoteza AC>AB)

$$\frac{\text{EB}}{\text{EC}-\text{EB}}=\frac{\text{AB}}{\text{AC}-\text{AB}} \Leftrightarrow \frac{\text{EB}}{\text{BC}}=\frac{\text{AB}}{\text{AC}-\text{AB}}$$

de unde $\text{EB}=\frac{\text{BC}\cdot\text{AB}}{\text{AC}-\text{AB}}$, care se mai scrie $\text{EB}=\frac{a\cdot c}{b-c}$. Atunci

$$\text{EC}=\text{EB}+\text{BC}=\frac{ac}{b-c}+a=\frac{ac+ab-ac}{b-c}=\frac{ab}{b-c}$$

Deci $\text{EC}=\frac{ab}{b-c}$.

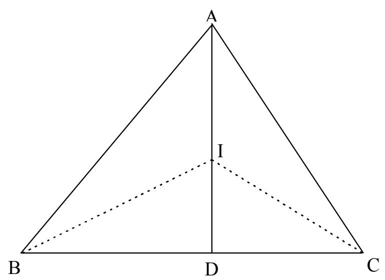
Observații. 1) Condiția AB≠AC din teorema bisectoarei exterioare este esențială deoarece dacă AB=AC atunci bisectoarea exterioară a unghiului A este paralelă cu BC, deci nu mai există E.

2) Teorema bisectoarei exterioare a fost demonstrată de Pappus.

3) Un plus de precizie cere să numim această teoremă drept "prima a bisectoarei exterioare".

Aplicație. Dacă I este centrul cercului înscris în ΔABC şi $\{D\}=AI\cap BC$ are loc relația: $\frac{\text{ID}}{\text{IA}}=\frac{a}{b+c}$.

Demonstrație. Cu teorema bisectoarei în ΔABD obținem: $\frac{\text{ID}}{\text{IA}}=\frac{\text{BD}}{\text{BA}}$, dar $\text{BD}=\frac{ac}{b+c}$, atunci $\frac{\text{ID}}{\text{IA}}=\frac{ac}{b+c}\cdot\frac{1}{c}$, deci $\frac{\text{ID}}{\text{IA}}=\frac{a}{b+c}$.



Teorema 1.1.4. (Teorema reciprocă a teoremei bisectoarei exterioare)
Fie triunghiul ABC şi $E \in BC \setminus [BC]$ astfel încât

$$\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}, \qquad (1)$$

atunci (AE este bisectoarea exterioară a unghiului $\angle A$.
Demonstrație. Trebuie ca $AB \neq AC$, deoarece dacă $AB=AC$, din (1) ar rezulta $EB=EC$, relație imposibilă din cauza poziției lui E pe BC. Facem aceeaşi construcție ca la teorema bisectoarei exterioare, adică ducem prin B o paralelă la AE care întâlneşte pe CA în N. Cu teorema lui Thales în triunghiul CAE obținem: $\frac{EB}{EC} = \frac{AN}{AC}$, iar din ipoteză $\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$, deci $AN=AB$, adică ΔABN este isoscel cu $\angle ABN \equiv \angle ANB$. Dar $\angle ABN \equiv \angle EAB$ şi $\angle ANB \equiv \angle MAE$, deci $\angle EAB \equiv \angle MAE$, relație ce asigură că (AE este bisectoarea exterioară a unghiului $\angle A$.

1.2. Teorema lui Pitagora generalizată

Teorema lui Pitagora din triunghiul dreptunghic admite o generalizare pentru triunghiul oarecare.

Teorema 1.2.1. Într-un triunghi oarecare pătratul lungimii unei laturi este egal cu suma pătratelor lungimilor celorlalte două laturi din care se scade sau se adună dublul produsului lungimii uneia dintre aceste laturi cu lungimea proiecției celeilalte pe ea

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2 \cdot CB \cdot CD \qquad (1)$$

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 + 2 \cdot CB \cdot CD \qquad (2)$$

Demonstrație. Fie ABC un triunghi şi D proiecția lui A pe BC. Din triunghiurile ABD şi ACD dreptunghice în D obținem:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2, \quad AC^2 = AD^2 + DC^2$$

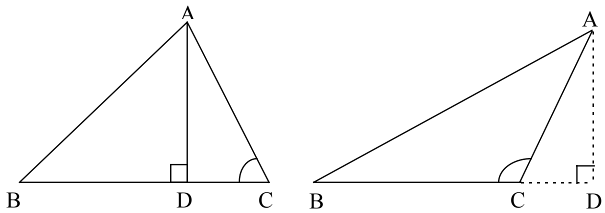
1) Dacă $m(\angle C) < 90°$ atunci trebuie să arătăm că:

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2 \cdot CB \cdot CD \qquad (1)$$

Avem BD=|BC-CD|. Într-adevăr dacă m(∠B)<90° atunci D∈[BC] şi BD=BC-CD. Dacă m(∠B)=90° D coincide cu B şi avem BD=0=BC-BC. Dacă m(∠B)>90°, B∈(CD) şi BD=DC-BC=|BC-DC|. Avem deci

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 = AD^2 + (BC - CD)^2 =$$

$$= (AD^2 + DC^2) + BC^2 - 2BC \cdot CD = CA^2 + CB^2 - 2 \cdot CB \cdot CD$$



2) Dacă m(∠C)>90° trebuie să demonstrăm că:

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 + 2 \cdot CB \cdot CD$$

În acest caz avem BD=BC+CD şi obţinem:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 = AD^2 + (BC + CD)^2 =$$

$$= (AD^2 + DC^2) + BC^2 + 2BC \cdot CD = CA^2 + CB^2 + 2CB \cdot CD$$

Observaţii. 1) Semnul din faţa dublului produs este influenţat numai de unghiul opus laturii pe care o calculăm.

2) Enunţul teoremei lui Pitagora generalizată nu prevede drept caz special alternativa m(∠C)=90° în care funcţionează teorema lui Pitagora propriu zisă: $AB^2 = CA^2 + CB^2$. Acest caz poate fi inclus, relaţiile (1) sau (2) conservându-şi valabilitatea.

3) Teorema lui Pitagora generalizată ne ajută să facem o demonstraţie rapidă a reciprocei teoremei lui Pitagora.

4) Teorema lui Pitagora generalizată şi reciproca teoremei lui Pitagora ne permit să precizăm (după măsura unghiurilor) felul triunghiului: obtuzunghic, ascuţitunghic, dreptunghic.

1.3. Teorema lui Stewart

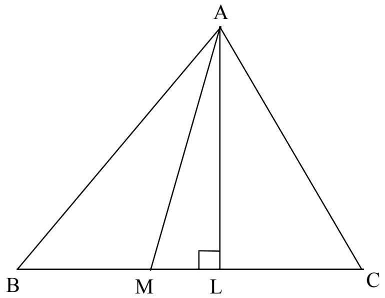
Teorema 1.3.1. Fie M un punct pe latura [BC] a unui triunghi ABC. Are loc relaţia:

$$AM^2 \cdot BC = AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot MB - BC \cdot BM \cdot CM \qquad (1)$$

Demonstraţie. Fie L proiecţia punctului A pe BC. Aplicăm teorema lui Pitagora generalizată în triunghiurile ACM şi AMB. Obţinem:

$$AC^2 = AM^2 + MC^2 - 2MC \cdot ML \mid \cdot BM$$

$$AB^2 = AM^2 + MB^2 + 2BM \cdot ML \,|\cdot MC$$



Dacă înmulțim cele două egalități, prima cu BM, iar a doua cu MC şi le adunăm membru cu membru se va reduce termenul 2MC·BM·ML şi obținem:

$$AC^2 \cdot BM + AB^2 \cdot MC = AM^2 \cdot BM + MC^2 \cdot BM + AM^2 \cdot MC + MB^2 \cdot MC \Leftrightarrow$$

$$AC^2 \cdot BM + AB^2 \cdot MC = AM^2(BM + MC) + MC^2 \cdot BM + MB^2 \cdot MC \Leftrightarrow$$

$$AC^2 \cdot BM + AB^2 \cdot MC = AM^2 \cdot BC + MC \cdot BM(MC + MB) \Leftrightarrow$$

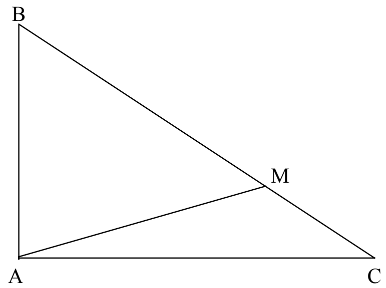
$$AC^2 \cdot BM + AB^2 \cdot MC = AM^2 \cdot BC + MC \cdot BM \cdot BC \Leftrightarrow$$

$$AM^2 \cdot BC = AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot BM - BC \cdot BM \cdot MC$$

adică obținem relația de demonstrat.

1.4. Teorema lui Van Aubel în triunghiul dreptunghic

Teorema 1.4.1. Dacă M este un punct oarecare pe ipotenuza [BC] a unui triunghi dreptunghic ABC, are loc relația:



$$MC^2 \cdot AB^2 + MB^2 \cdot AC^2 = AM^2 \cdot BC^2 \qquad (1^*)$$

Demonstrație. Aplicăm teorema lui Stewart:

$$AM^2 \cdot BC = AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot BM - BC \cdot BM \cdot MC \qquad (1)$$

Înmulțim relația (1) cu MC şi obținem:

$$AM^2 \cdot BC \cdot MC = AB^2 \cdot MC^2 + AC^2 \cdot BM \cdot MC - BC \cdot BM \cdot MC^2 \qquad (2)$$

Înmulțim relația (1) cu MB şi obținem:

$$AM^2 \cdot BC \cdot MB = AB^2 \cdot MC \cdot MB + AC^2 \cdot BM^2 - BC \cdot BM^2 \cdot MC \qquad (3)$$

Adunăm membru cu membru relațiile (2) şi (3) şi grupând, obținem:

$$AM^2 \cdot BC \cdot (MC + MB) = AB^2 \cdot MC^2 + AC^2 \cdot BM^2 +$$
$$+ AB^2 \cdot MC \cdot MB + AC^2 \cdot MB \cdot MC - BC \cdot BM \cdot MC(MC + MB)$$

sau

$$AM^2 \cdot BC^2 = AB^2 \cdot MC^2 + AC^2 \cdot BM^2 + MC \cdot MB(AB^2 + AC^2) -$$
$$- BC^2 \cdot BM \cdot MC \tag{4}$$

Dar $AB^2 + AC^2 = BC^2$ şi atunci (4) devine

$$AM^2 \cdot BC^2 = AB^2 \cdot MC^2 + AC^2 \cdot BM^2 + MC \cdot MB \cdot BC^2 - BC^2 \cdot BM \cdot MC$$

deci $AM^2 \cdot BC^2 = AB^2 \cdot MC^2 + AC^2 \cdot BM^2$.

Corolar 1.4.1. Pătratul lungimii bisectoarei este medie armonică între pătratele lungimilor segmentelor determinate de ea pe ipotenuză.

Dacă AM este bisectoare atunci

$$AM^2 = \frac{2MB^2 \cdot MC^2}{MB^2 + MC^2}.$$

Cu teorema bisectoarei obținem $\frac{AB}{AC} = \frac{MB}{MC}$, de unde $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{MB^2}{MC^2}$ sau

$$AB^2 \cdot MC^2 = AC^2 \cdot MB^2 \tag{5}$$

Cu (5) relația lui Van Aubel (1*) se mai scrie

$$2AB^2 \cdot MC^2 = BC^2 \cdot MA^2 \Leftrightarrow 2AB^2 \cdot MC^2 = (AB^2 + AC^2) \cdot MA^2$$

sau

$$\frac{2}{MA^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{AB^2 \cdot MC^2} \Leftrightarrow \frac{2}{AM^2} = \frac{AB^2}{AB^2 \cdot MC^2} + \frac{AC^2}{AB^2 \cdot MC^2} \Leftrightarrow$$
$$\frac{2}{AM^2} = \frac{1}{MC^2} + \frac{AC^2}{AC^2 \cdot MB^2} \Leftrightarrow \frac{2}{AM^2} = \frac{1}{MC^2} + \frac{1}{MB^2}$$

deci $AM^2 = \frac{2MB^2 \cdot MC^2}{MC^2 + MB^2}$.

Corolar 1.4.2. Dacă triunghiul ABC este dreptunghic isoscel, avem:

$$MA^2 = \frac{MB^2 + MC^2}{2}$$

Dacă AB=AC relația (1*) devine:

$$AB^2(MC^2 + MB^2) = AM^2 \cdot 2AB^2 \quad (AB^2 + AB^2 = BC^2)$$

sau $AM^2 = \frac{MC^2 + MB^2}{2}$.

1.5. Calculul lungimii bisectoarelor interioare

Teorema 1.5.1. Fie ABC un triunghi şi [AD bisectoarea interioară a unghiului $\angle$BAC, cu D$\in$(BC). Atunci $\mathrm{AD}^2 = \dfrac{4bc}{(b+c)^2}\cdot p(p-a)$ sau $\mathrm{AD} = \dfrac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$ (unde $p = \dfrac{a+b+c}{2}$) sau $l_a = \dfrac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$.

Demonstrație. Din teorema bisectoarei avem că $\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = \dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}$, care se mai scrie $\dfrac{c}{b} = \dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}$, de unde obținem: $\dfrac{c+b}{b} = \dfrac{\mathrm{BD}+\mathrm{DC}}{\mathrm{DC}} \Leftrightarrow \dfrac{c+b}{b} = \dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{DC}}$, de unde $\mathrm{DC} = \dfrac{ab}{b+c}$. Atunci $\mathrm{BD} = \mathrm{BC} - \mathrm{DC} = a - \dfrac{ab}{b+c} = \dfrac{ac}{b+c}$. Deci $\mathrm{BD} = \dfrac{ac}{b+c}$. Vom scrie relația lui Stewart pentru cazul când M este în D. Obținem:

$$\mathrm{DA}^2\cdot\mathrm{BC} = \mathrm{AB}^2\cdot\mathrm{DC} + \mathrm{AC}^2\cdot\mathrm{BD} - \mathrm{BC}\cdot\mathrm{BD}\cdot\mathrm{DC}$$

Înlocuind pe BC cu a, AB cu c, AC cu b şi DC cu $\dfrac{ab}{b+c}$, iar BD cu $\dfrac{ac}{b+c}$ obținem:

$$\mathrm{AD}^2\cdot a = c^2\cdot\frac{ab}{b+c} + b^2\cdot\frac{ac}{b+c} - a\cdot\frac{ac}{b+c}\cdot\frac{ab}{b+c},$$

de unde

$$\mathrm{AD}^2 = c^2\frac{b}{b+c} + b^2\frac{c}{b+c} - a^2\frac{bc}{(b+c)^2},$$

care se mai scrie:

$$\mathrm{AD}^2 = \frac{bc}{b+c}\left(c+b-\frac{a^2}{b+c}\right) = \frac{bc}{b+c}\left[\frac{(b+c)^2-a^2}{b+c}\right] =$$

$$= \frac{bc}{b+c}\cdot\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{b+c} = \frac{bc}{(b+c)^2}\cdot 2p(2p-2a)$$

(Am ținut seama că $2p = a+b+c$ şi atunci $2p-2a = b+c-a$).

Deci $\mathrm{AD}^2 = \dfrac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2}$, adică relația de demonstrat.

1.6. Calculul lungimii înălțimilor unui triunghi

Teorema 1.6.1. Dacă ABC este un triunghi oarecare avem

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

unde h_a este înălţimea corespunzătoare laturii a, iar $p=\dfrac{a+b+c}{2}$.

Demonstraţie. În triunghiul ABC, ducem înălţimea AA' (h_a). Dintre cele două unghiuri B şi C cel puţin unul este ascuţit. Să presupunem că acesta este B. Cu teorema lui Pitagora generalizată obţinem:

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{BC}^2+\mathrm{AC}^2-2\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{A'C},$$

de unde obţinem:

$$2\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{A'C}=\mathrm{BC}^2+\mathrm{AC}^2-\mathrm{AB}^2 \Leftrightarrow \mathrm{A'C}=\frac{\mathrm{BC}^2+\mathrm{AC}^2-\mathrm{AB}^2}{2\mathrm{BC}},$$

care se mai scrie $\mathrm{A'C}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a}$.

Din triunghiul dreptunghic AA'C (m(∠A')=90°) cu teorema lui Pitagora obţinem:

$$AA'^2=AC^2-A'C^2=b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)^2=$$

$$=\left(b-\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)\left(b+\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)=$$

$$=\frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2a}\cdot\frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2a}=$$

$$=\frac{[c^2-(a^2+b^2-2ab)]}{2a}\cdot\left[\frac{(a+b)^2-c^2}{2a}\right]=$$

$$=\frac{c^2-(a-b)^2}{2a}\cdot\frac{(a+b-c)(a+b+c)}{2a}=$$

$$=\frac{(c+a-b)(c-a+b)(a+b-c)(a+b+c)}{4a^2}=$$

$$=\frac{(2p-2b)(2p-2a)(2p-2c)2p}{4a^2}=\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2}$$

$$(2p-2a=b+c-a,\quad 2p-2b=a-b+c,\quad 2p-2c=a+b-c)$$

Deci $\mathrm{AA'}^2=\dfrac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2}$, de unde

$$\mathrm{AA'}=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

adică tocmai relaţia de demonstrat.

1.7. Teorema medianei

Teorema 1.7.1. Într-un triunghi ABC avem relația:

$$m_a^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}, \qquad (1)$$

unde a=BC, b=CA, c=AB, m_a=AA', A' este mijlocul lui [BC].

Demonstrație. Scriem relația lui Stewart în cazul când M este mijlocul A' al segmentului [BC]. Obținem:

$$\mathrm{A'A^2 \cdot BC = AB^2 \cdot A'C + AC^2 \cdot A'B - BC \cdot BA' \cdot CA'} \Leftrightarrow$$

$$m_a^2 \cdot a = c^2 \cdot \frac{a}{2} + b^2 \cdot \frac{a}{2} - a \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \Leftrightarrow$$

$$m_a^2 = \frac{2(c^2+b^2)-a^2}{4},$$

adică relația de demonstrat.

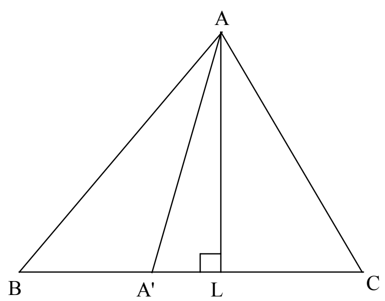


Fig. 1.

Probleme rezolvate

R1.7.1. În orice triunghi suma pătratelor lungimilor medianelor este trei pătrimi din suma pătratelor lungimilor laturilor, adică:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2) \qquad (2)$$

Demonstrație. Din relația (1) și analoagele obținem:

$$m_a^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}, \quad m_b^2 = \frac{2(a^2+c^2)-b^2}{4}, \quad m_c^2 = \frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4}.$$

Atunci

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4} + \frac{2(a^2+c^2)-b^2}{4} + \frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4} =$$

$$= \frac{2b^2+2c^2-a^2+2a^2+2c^2-b^2+2a^2+2b^2-c^2}{4} = \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{4}.$$

R1.7.2. Dacă G este punctul de concurență a medianelor AA', BB', CC' al triunghiului ABC, să se demonstreze relația:

$$(\mathrm{GA}-\mathrm{GA'})\cdot \mathrm{AA'}+(\mathrm{GB}-\mathrm{GB'})\cdot \mathrm{BB'}+(\mathrm{GC}-\mathrm{GC'})\cdot \mathrm{CC'}=\frac{a^2+b^2+c^2}{4}$$

Soluție. Ținem seama că centrul de greutate al unui triunghi se găsește la $\frac{2}{3}$ de vârf și la $\frac{1}{3}$ de bază, adică $\mathrm{GA}=\frac{2}{3}m_a$, $\mathrm{GA'}=\frac{1}{3}m_a$, $\mathrm{GB}=\frac{2}{3}m_b$, $\mathrm{GB'}=\frac{1}{2}m_b$, $\mathrm{GC}=\frac{2}{3}m_c$, $\mathrm{GC'}=\frac{1}{3}m_c$, relația de demonstrat devine:

$$\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)m_a^2+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)m_b^2+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)m_c^2=\frac{m_a^2+m_b^2+m_c^2}{3}=$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)=\frac{a^2+b^2+c^2}{4}.$$

Am ținut seama că $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$.

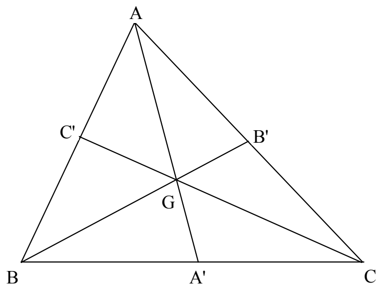


Fig. 2.

R1.7.3. Într-un triunghi dreptunghic cu lungimile catetelor *b* și *c* și lungimea ipotenuzei *a* avem relația

$$m_b^2+m_c^2=\frac{5a^2}{4} \tag{4}$$

Demonstrație. Într-un triunghi dreptunghic mediana m_a corespunzătoare ipotenuzei *a*are lungimea $\frac{a}{2}$. Atunci folosind relația

$$m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

și ținând seama că $b^2+c^2=a^2$ (teorema lui Pitagora), obținem:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + a^2),$$

de unde

$$m_b^2 + m_c^2 = \frac{5a^2}{4}, \tag{5}$$

iar dacă triunghiul este dreptunghic isoscel relația (4) devine $2m_b^2 = \frac{5a^2}{4}$, de unde $m_b^2 = \frac{5a^2}{8}$.

R1.7.4. Triunghiul cu două mediane congruente este isoscel.

Soluție. Din $m_a = m_b \Rightarrow m_a^2 = m_b^2$ sau

$$\frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4},$$

care se mai scrie $2b^2 + 2c^2 - a^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2$, de unde $3a^2 = 3b^2$, deci $a = b$.

R1.7.5. Diferența pătratelor lungimilor a două laturi ale unui triunghi este egală cu dublul produs dintre lungimea laturii a treia şi lungimea proiecției medianei corespunzătoare pe acea latură.

Aplicăm teorema lui Pitagora generalizată în triunghiurile ABA' şi ACA' obținem (Fig. 1):

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{A'A}^2 + \mathrm{A'B}^2 + 2\mathrm{A'B} \cdot \mathrm{A'L}$$

şi

$$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{A'A}^2 + \mathrm{A'C}^2 - 2\mathrm{A'C} \cdot \mathrm{A'L},$$

de unde prin scădere membru cu membru obținem:

$$\mathrm{AB}^2 - \mathrm{AC}^2 = 2\mathrm{CB} \cdot \mathrm{A'L}$$

(am ținut seama că A'B=A'C) relație care se mai scrie (fără a restrânge generalitatea considerăm AB>AC)

$$c^2 - b^2 = 2a \cdot \mathrm{A'L} \tag{6}$$

adică:

R1.7.6. Se consideră triunghiul ABC cu mediana AD şi înălțimea AE. Să se demonstreze relația:

$$\mathrm{AB}^2 - \left(\mathrm{AD}^2 + \frac{\mathrm{BC}^2}{4}\right) = \mathrm{BC} \cdot \mathrm{DE}$$

Soluție. În triunghiul ABD cu m(∠ADB)<90°, aplicăm teorema lui Pitagora generalizată:

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{BD}^2 + \mathrm{AD}^2 - 2\mathrm{BD} \cdot \mathrm{DE} \tag{*}$$

Aplicăm aceeaşi teoremă în triunghiul ADC cu m(∠ADC)>90° şi obținem:

$$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{CD}^2 + 2\mathrm{CD} \cdot \mathrm{DE} \tag{**}$$

Adunăm membru cu membru relațiile (*) şi (**) şi obținem:

$$AB^2 + AC^2 = 2BD^2 + 2AD^2 \qquad (***)$$

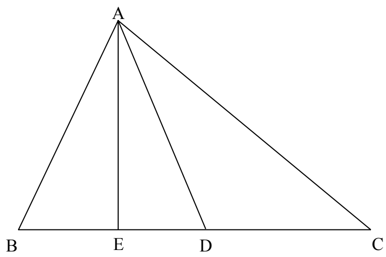


Fig. 3.

Din relația (6) avem:

$$AB^2 - AC^2 = 2BC \cdot ED$$

Adunând membru cu membru ultimele două relații obținem:

$$2AB^2 = 2BD^2 + 2AD^2 + 2BC \cdot ED$$

sau

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 + BC \cdot ED,$$

care se mai scrie:

$$AB^2 - AD^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2 = BC \cdot ED,$$

relație care trebuia demonstrată.

1.8. Teorema lui Leibniz

Teorema 1.8.1. Dacă M este un punct arbitrar în planul triunghiului ABC, iar G este centrul de greutate al triunghiului, are loc relația:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \qquad (1*)$$

Demonstrație. Fie A' mijlocul lui [BC]. Scriem relația lui Stewart pentru triunghiul MAA' şi punctul G∈(AA') şi obținem:

$$MG^2 \cdot AA' = MA^2 \cdot A'G + MA'^2 \cdot AG - AA' \cdot AG \cdot GA'$$

Atunci obținem:

$$MG^2 = \frac{1}{3} \cdot MA^2 + \frac{2}{3} \cdot MA'^2 - \frac{2}{9} AA'^2 \qquad (1)$$

Fiindcă MA' este mediană în triunghiul MBC, avem

$$MA'^2 = \frac{2(MB^2 + MC^2) - BC^2}{4} \qquad (2)$$

Cu (2), relația (1) devine:

$$MG^2 = \frac{1}{3} MA^2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{2(MB^2 + MC^2) - BC^2}{4} - \frac{2}{9} AA'^2,$$

care se mai scrie (prin înmulțirea cu 3)

$$3MG^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 - \frac{BC^2}{2} - \frac{2}{3}AA'^2 \qquad (3)$$

Fiindcă GA' este mediană în triunghiul GBC obținem:

$$GA'^2 = \frac{2(GB^2 + GC^2) - BC^2}{4},$$

de unde

$$BC^2 = 2(GB^2 + GC^2) - 4GA'^2 \qquad (4)$$

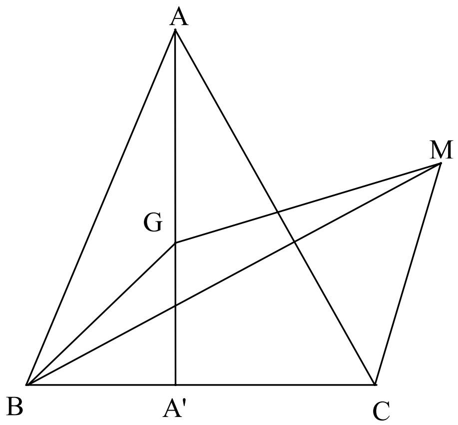


Fig. 4.

Cu (4), relația (3) devine:

$$3MG^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 - GB^2 - GC^2 + 2GA'^2 - \frac{2}{3}AA'^2 \qquad (5)$$

Folosind egalitățile $GA' = \frac{1}{2}GA$ şi $AA' = \frac{3}{2}GA$, relația (5) devine:

$$3MG^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 - GB^2 - GC^2 + 2 \cdot \frac{GA^2}{4} - \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4}GA^2,$$

care se mai scrie

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2,$$

relație ce trebuia demonstrată.

Consecința 1.8.1. Suma pătratelor distanțelor de la M la vârfurile triunghiului este minimă când M coincide cu G.

Fiindcă $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$ şi $GA = \frac{2}{3}m_a$, $GB = \frac{2}{3}m_b$, $GC = \frac{2}{3}m_c$ atunci (1*) devine:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \qquad (6)$$

iar când MG=0 obținem $\mathrm{MA}^2 + \mathrm{MB}^2 + \mathrm{MC}^2 = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$.

Consecința 1.8.2. Dacă M coincide cu centrul cercului circumscris O, atunci

$$\mathrm{OG}^2 = \frac{1}{9}[9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)] \tag{7}$$

Când M coincide cu O avem OA=OB=OC=R, iar (6) devine:

$$\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 + \mathrm{OC}^2 = 3\mathrm{OG}^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2),$$

adică $3R^2 = 3\mathrm{OG}^2 + \dfrac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$, de unde obținem:

$\mathrm{OG}^2 = \dfrac{9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}{9}$, adică relația (7).

Din $\mathrm{OG}^2 \geq 0$ rezultă $9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \geq 0$, de unde $R^2 \geq \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$.

Consecința 1.8.3.

$$\mathrm{OH}^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\mathrm{GH}^2 = \frac{4}{9}[9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)]$$

Se folosesc relațiile OH=3·OG și GH=2·OG. Pentru $\mathrm{OG} = \dfrac{\mathrm{OH}}{3}$, relația (7) devine

$$\frac{\mathrm{OH}^2}{9} = \frac{1}{9}[9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)],$$

de unde

$$\mathrm{OH}^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \tag{8}$$

Cu GH=2·OG, adică $\mathrm{OG} = \dfrac{\mathrm{GH}}{2}$, relația (7) devine

$$\frac{\mathrm{GH}^2}{4} = \frac{1}{9}[9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)],$$

de unde

$$\mathrm{GH}^2 = \frac{4}{9}[9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)]$$

Consecința 1.8.4. Dacă O_9 este centrul cercului lui Euler avem

$$O_9G^2 = \frac{1}{36}[9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)]$$

Avem relația $GO_9 = \frac{OH}{6}$, de unde $OH^2 = 36 \cdot GO_9^2$ iar din (8) obținem:

$$36GO_9^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2),$$

de unde

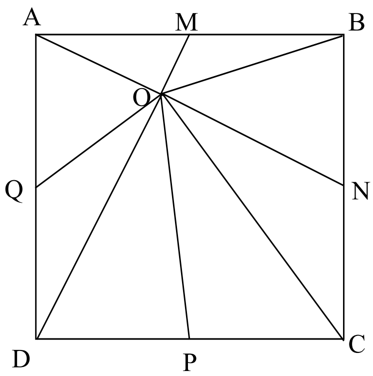
$$GO_9^2 = \frac{9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}{36}.$$

1.9. Aplicații

1.9.1. Fie A, B, C, D vârfurile unui pătrat şi M, N, P, Q mijloacele laturilor lui. Să se demonstreze că, dacă O este un punct oarecare din planul pătratului, atunci expresia:

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 - (OM^2 + ON^2 + OP^2 + OQ^2)$$

are ca valoare aria pătratului.



Demonstrație. Aplicăm teorema medianei în triunghiurile: AOB, BOC, COD, DOA şi obținem:

$$OM^2 = \frac{2(OA^2 + OB^2) - AB^2}{4}, \quad ON^2 = \frac{2(OB^2 + OC^2) - BC^2}{4}$$

$$OP^2 = \frac{2(OC^2 + OD^2) - CD^2}{4}, \quad OQ^2 = \frac{2(OD^2 + OA^2) - AD^2}{4}$$

Adunând membru cu membru cele patru relații de mai sus obținem:

$$4(OM^2 + ON^2 + OP^2 + OQ^2) = 4(OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2) - 4AB^2$$

(am ținut seama că AB=BC=CD=DA), de unde obținem

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 - OM^2 + ON^2 + OP^2 + OQ^2 = AB^2,$$

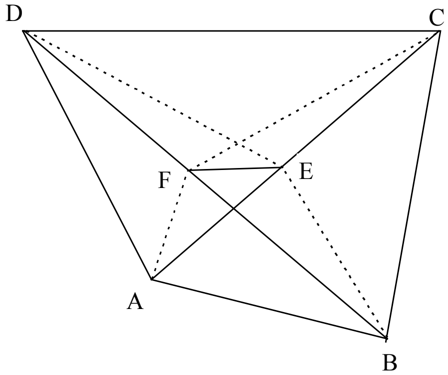
adică relația cerută.

Teorema 1.9.2. (Teorema lui Euler pentru patrulater)

În orice patrulater ABCD suma pătratelor lungimilor laturilor este egală cu suma pătratelor lungimilor diagonalelor plus de patru ori pătratul segmentului care uneşte mijloacele diagonalelor, adică

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BC^2 + 4EF^2 \qquad (1^*)$$

unde [AC] şi [BD] sunt diagonalele patrulaterului ABCD, iar E este mijlocul lui [AC], F este mijlocul lui [BD].



Demonstrație. Cu teorema medianei în triunghiul ABC obținem:

$$BE^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - AC^2}{4}$$

Din triunghiul ADC cu aceeaşi teoremă obținem:

$$DE^2 = \frac{2(AD^2 + DC^2) - AC^2}{4}$$

Din triunghiurile ABD şi CBD, pentru medianele [AF] şi [CF] avem relațiile:

$$AF^2 = \frac{2(AD^2 + AB^2) - BD^2}{4}, \quad CF^2 = \frac{2(CD^2 + CB^2) - DB^2}{4}$$

Adunând membru cu membru cele patru relații de mai sus obținem:

$$BE^2 + DE^2 + AF^2 + CF^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 - \frac{AC^2}{2} - \frac{BD^2}{2} \qquad (1)$$

Aplicăm teorema medianei în triunghiurile BED şi AFC şi obținem

$$EF^2 = \frac{2(BE^2 + DE^2) - BD^2}{4}, \quad EF^2 = \frac{2(AF^2 + CF^2) - AC^2}{4}$$

de unde

$$BE^2 + DE^2 = 2EF^2 + \frac{BD^2}{2} \qquad (2)$$

şi

$$AF^2 + CF^2 = 2EF^2 + \frac{AC^2}{2} \qquad (3)$$

Folosind relațiile (2) şi (3), relația (1) devine:

$$2EF^2 + \frac{BD^2}{2} + 2EF^2 + \frac{AC^2}{2} = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 - \frac{AC^2}{2} - \frac{BD^2}{2},$$

relație echivalentă cu

$$4EF^2 + AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2,$$

adică tocmai relația de demonstrat.

Cazuri particulare

1) ABCD – paralelogram (mijloacele diagonalelor coincid). Deci EF=0. Atunci (1*) devine

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2,$$

relație care se mai scrie $2(AB^2 + BC^2) = AC^2 + BD^2$ deci:

În orice paralelogram suma pătratelor lungimilor laturilor este egală cu suma pătratelor lungimilor diagonalelor.

2) ABCD – trapez cu bazele AB şi CD (AB>CD). Atunci $EF = \frac{AB - DC}{2}$ şi (1*) devine

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4\left(\frac{AB - DC}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$AC^2 + BD^2 = BC^2 + CD^2 + 2AB \cdot DC,$$

deci

Într-un trapez suma pătratelor lungimilor diagonalelor este egală cu suma pătratelor lungimilor laturilor neparalele plus de două ori produsul lungimilor bazelor.

3) ABCD este dreptunghi.

Atunci relația (1*) devine

$$2(AB^2 + BC^2) = 2AC^2 \quad \text{sau} \quad AB^2 + BC^2 = AC^2$$

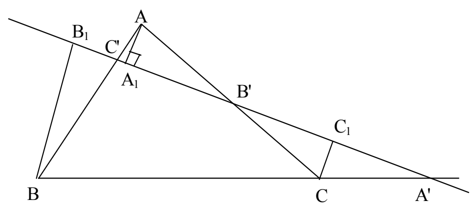
adică obținem teorema lui Pitagora.

1.10. Teorema lui Menelaus

Teorema 1.10.1. Fie ABC un triunghi A', B', C' trei puncte astfel încât A'∈BC, B'∈CA, C'∈AB. Dacă punctele A', B', C' sunt coliniare, atunci are loc relația:

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$$

Demonstrație. 1) Transversala C'A' intersectează două laturi şi prelungirea celeilalte laturi a triunghiului.



Proiectăm vârfurile triunghiului ABC pe dreapta A'C', şi obţinem punctele A_1, B_1, C_1.

Fiindcă $CC_1 \| BB_1$ rezultă că $\Delta A'BB_1 \sim \Delta A'CC_1$. Atunci obţinem:

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{BB_1}{CC_1} \quad (1)$$

Triunghiurile CC_1B' şi AA_1B' sunt asemenea ($CC_1 \| AA_1$) şi atunci

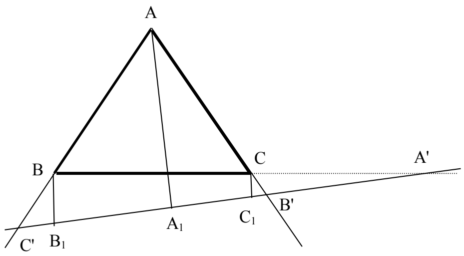
$$\frac{B'C}{B'A} = \frac{CC_1}{AA_1} \quad (2)$$

Şi triunghiurile $AC'A_1$ şi $BC'B_1$ sunt asemenea ($AA_1 \| BB_1$) şi avem:

$$\frac{C'A}{C'B} = \frac{AA_1}{BB_1} \quad (3)$$

Înmulţind relaţiile (1), (2) şi (3) membru cu membru şi simplificând, obţinem: $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$.

2) Transversala C'A' intersectează prelungirile laturilor triunghiului ABC.



Proiectăm vârfurile triunghiului ABC pe dreapta A'C' şi obţinem respectiv punctele A_1, B_1, C_1.

Fiindcă $CC_1 \| BB_1$, triunghiurile $A'BB_1$ şi $A'CC_1$ sunt asemenea. Atunci are loc relaţia:

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{BB_1}{CC_1} \quad (1)$$

Din asemănarea triunghiurilor $B'CC_1$ şi $B'AA_1$ ($CC_1 \| AA_1$) obţinem:

$$\frac{B'C}{B'A} = \frac{CC_1}{AA_1} \quad (2)$$

Acum din asemănarea triunghiurilor $C'AA_1$ şi $C'BB_1$ ($AA_1 \| BB_1$) rezultă că:

$$\frac{C'A}{C'B} = \frac{AA_1}{BB_1} \quad (3)$$

Prin înmulţirea relaţiilor (1), (2) şi (3) membru cu membru şi după simplificări, obţinem: $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$, adică relaţia ce trebuia demonstrată.

Teorema 1.10.2. (Reciproca teoremei lui Menelaus)

Considerăm un triunghi ABC şi punctele A'∈BC, B'∈AC, C'∈AB. Dacă două dintre punctele A', B', C' sunt situate pe două laturi ale triunghiului, iar al treilea punct este situat pe prelungirea celei de-a treia laturi sau că toate punctele A', B', C' sunt pe prelungirile laturilor triunghiului şi are loc relaţia:

$$\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}=1 \tag{1}$$

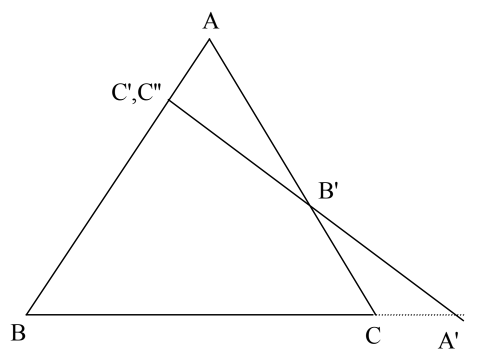
atunci punctele A', B', C' sunt coliniare.

Demonstraţie. Considerăm cazul când două puncte sunt pe laturi şi celălalt pe prelungirea celei de-a treia laturi. Presupunem că dreapta A'B' intersectează latura [AB] în punctul C"≠C'. Aplicăm teorema lui Menelaus pentru punctele A', B', C". Obţinem:

$$\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C''A}{C''B}=1 \tag{2}$$

Din relaţiile (1) şi (2) obţinem:

$$\frac{C'A}{C'B}=\frac{C''A}{C''B}$$

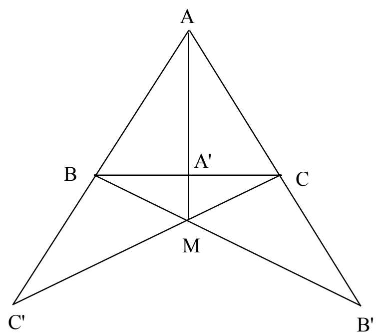


Fiindcă există un singur punct interior unui segment care împarte segmentul într-un raport dat, rezultă că punctul C" coincide cu C', adică punctele A', B', C' sunt coliniare.

1.11. Teorema lui Van Aubel

Teorema 1.11.1. Fie ABC un triunghi şi punctele A'∈(BC), B'∈CA, C'∈AB. Dacă dreptele AA', BB', CC' sunt concurente într-un punct M atunci are loc relaţia:

$$\frac{B'A}{B'C}+\frac{C'A}{C'B}=\frac{MA}{MA'}$$



Demonstrație. Aplicăm teorema lui Menelaus pentru triunghiul AA'C şi transversala BB'. Obținem:

$$\frac{BA'}{BC} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{MA}{MA'} = 1 \qquad (1)$$

Din relația (1) obținem:

$$\frac{B'A}{B'C} = \frac{BA'}{BC} \cdot \frac{MA}{MA'} \qquad (2)$$

Aplicăm acum teorema lui Menelaus pentru triunghiul AA'B şi transversala CC'. Obținem:

$$\frac{CB}{CA'} \cdot \frac{MA'}{MA} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1,$$

de unde rezultă că

$$\frac{C'A}{C'B} = \frac{CA'}{CB} \cdot \frac{MA}{MA'} \qquad (3)$$

Adunând relațiile (2) şi (3) membru cu membru obținem:

$$\frac{B'A}{B'C} + \frac{C'A}{C'B} = \frac{MA}{MA'}\left(\frac{BA'+CA'}{BC}\right),$$

de unde

$$\frac{B'A}{B'C} + \frac{C'A}{C'B} = \frac{MA}{MA'}.$$

1.12. Teorema lui Ceva

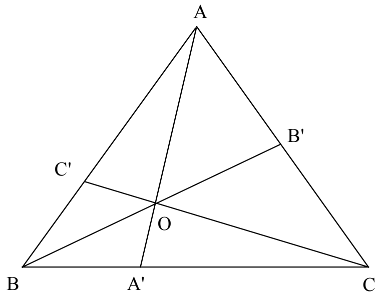
Teorema 1.12.1. (Teorema lui Ceva)

Se consideră triunghiul ABC şi punctele $A'\in BC$, $B'\in CA$, $C'\in AB$. Dacă dreptele AA', BB', CC' sunt concurente, atunci

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$$

Demonstrație. 1) Considerăm punctul O de intersecție al dreptelor AA', BB', CC' ca fiind situat în interiorul triunghiului. Considerăm triunghiul BCC' şi transversala AA'. Cu teorema lui Menelaus obținem:

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{OC}{OC'} \cdot \frac{AC'}{AB} = 1 \qquad (1)$$



Aplicăm acum teorema lui Menelaus pentru triunghiul AC'C şi transversala BB'. Obținem:

$$\frac{OC'}{OC} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{BA}{BC'} = 1 \qquad (2)$$

Înmulțind membru cu membru relațiile (1) şi (2) şi simplificând obținem: $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$, adică relația ce trebuia demonstrată.

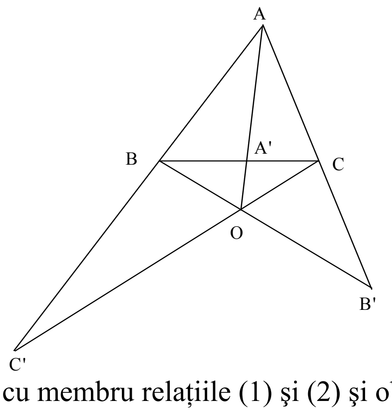
2) Considerăm punctul de intersecție al dreptelor AA', BB', CC' ca fiind O şi care este situat în exteriorul triunghiului ABC.

Aplicăm teorema lui Menelaus pentru triunghiul AA'B şi transversala COC'. Obținem:

$$\frac{CB}{CA'} \cdot \frac{OA'}{OA} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1 \qquad (1)$$

Aplicăm acum teorema lui Menelaus pentru triunghiul AA'C şi transversala BOB'. Obținem:

$$\frac{BA'}{BC} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{OA}{OA'} = 1 \qquad (2)$$



Înmulțim membru cu membru relațiile (1) şi (2) şi obținem după simplificări

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$$

Teorema 1.12.2. (Reciproca teoremei lui Ceva)

Dacă pe laturile unui triunghi ABC considerăm punctele A', B', C' ($A'\in BC$, $B'\in CA$, $C'\in AB$) toate pe laturi sau unul pe laturi şi celelalte două pe prelungiri, astfel încât să avem relaţia:

$$\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}=1$$

atunci dreptele AA', BB', CC' sunt concurente.

Demonstraţie. Presupunem că dreptele AA', BB', CC' nu sunt concurente. Fie $AA'\cap BB'=\{O\}$ şi $CO\cap AB=\{C''\}$, $C'\neq C''$. Din teorema lui Ceva obţinem

$$\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C''A}{C''B}=1 \qquad (1)$$

Din ipoteză avem

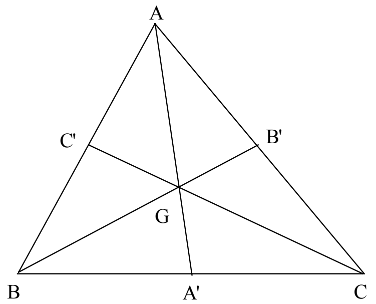
$$\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}=1 \qquad (2)$$

Din relaţiile (1) şi (2) rezultă C' este identic cu C''.

1.13. Concurenţa liniilor importante în triunghi

1.13.1. Medianele unui triunghi sunt concurente în punctul G (centrul de greutate al triunghiului).

Demonstraţie. Fie AA', BB', CC' medianele triunghiului ABC. Atunci A', B', C' sunt mijloacele laturilor [BC], [CA] şi respectiv [AB].



Aplicăm reciproca teoremei lui Ceva şi obţinem:

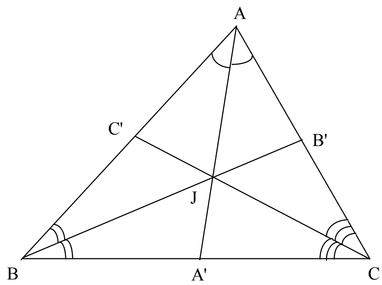
$$\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}=1,$$

adică medianele sunt concurente.

1.13.2. Bisectoarele interioare ale unghiurilor unui triunghi sunt concurente în I (centrul cercului înscris).

Demonstraţie. Cu teorema bisectoarei interioare obţinem:

$$\frac{A'B}{A'C}=\frac{AB}{AC},\quad \frac{B'C}{B'A}=\frac{BC}{BA}\quad \text{şi}\quad \frac{C'A}{C'B}=\frac{CA}{CB}.$$



Prin înmulțirea relațiilor de mai sus membru cu membru obținem:

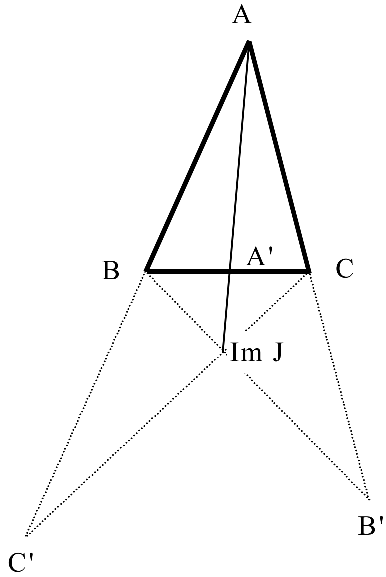
$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{BA} \cdot \frac{CA}{CB} = 1,$$

de unde conform reciprocei teoremei lui Ceva obținem că bisectoarele interioare ale unghiurilor unui triunghi sunt concurente.

1.13.3. Bisectoarele exterioare a două unghiuri a unui triunghi sunt concurente cu bisectoarea interioară a celui de-al treilea unghi într-un punct I_a (centrul cercului exînscris).

Demonstrație. Cu teorema bisectoarei interioare pentru AA' obținem:

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{AB}{AC}$$



Cu teorema bisectoarei exterioare pentru BB' şi CC' obținem:

$$\frac{B'C}{B'A} = \frac{BC}{BA} \quad \text{şi} \quad \frac{C'A}{C'B} = \frac{CA}{CB}$$

Înmulțind membru cu membru cele trei relații de mai sus obținem:

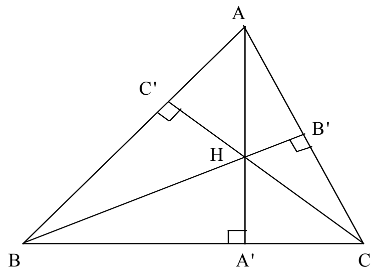
$$\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{BC}{BA}\cdot\frac{CA}{CB}=1$$

de unde conform reciprocei teoremei lui Ceva rezultă că cele două bisectoare exterioare şi bisectoarea interioară sunt concurente în I_a.

1.13.4. Înălţimile unui triunghi sunt concurente în punctul H (ortocentrul triunghiului).

Demonstraţie. Fie AA', BB', CC' înălţimile triunghiului ABC. Din asemănarea triunghiurilor A'AB şi C'CB obţinem:

$$\frac{A'B}{C'B}=\frac{AB}{BC} \tag{1}$$



Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice BB'C şi AA'C obţinem:

$$\frac{B'C}{A'C}=\frac{BC}{AC} \tag{2}$$

Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice C'CA şi B'BA obţinem:

$$\frac{C'A}{B'A}=\frac{AC}{AB} \tag{3}$$

Din relaţiile (1), (2) şi (3) prin înmulţire membru cu membru obţinem:

$$\frac{A'B}{C'B}\cdot\frac{B'C}{A'C}\cdot\frac{C'A}{B'A}=\frac{AB}{BC}\cdot\frac{BC}{AC}\cdot\frac{AC}{AB}=1,$$

care se mai scrie:

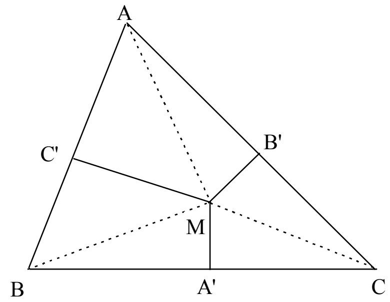
$$\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}=1$$

şi conform reciprocei teoremei lui Ceva, înălţimile AA', BB', CC' sunt concurente.

1.14. Lema lui Carnot şi aplicaţii

Teorema 1.14.1 (Lema lui Carnot). Fie triunghiul ABC şi punctele $A'\in BC$, $B'\in CA$, $C'\in AB$. Perpendicularele în A', B', C' pe BC, CA, respectiv AB sunt concurente dacă şi numai dacă

$$A'B^2-A'C^2+B'C^2-B'A^2+C'A^2-C'B^2=0 \tag{*}$$



Demonstrație. Presupunem că cele trei perpendiculare sunt concurente într-un punct M. Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghice MBA', MCA', MCB', AB'M, AMC', BMC' şi obținem relațiile:

$$A'B^2 = BM^2 - MA'^2, \quad A'C^2 = CM^2 - MA'^2$$
$$B'C^2 = CM^2 - MB'^2, \quad B'A^2 = AM^2 - MB'^2$$
$$C'A^2 = AM^2 - MC'^2, \quad C'B^2 = BM^2 - MC'^2$$

Scăzând a doua relație din prima obținem:

$$A'B^2 - A'C^2 = BM^2 - CM^2 \tag{1}$$

Scăzând a patra relație din a treia obținem

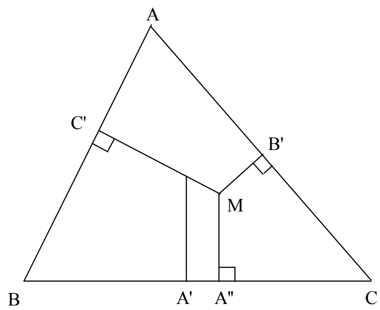
$$B'C^2 - B'A^2 = CM^2 - AM^2 \tag{2}$$

Scăzând a şasea relație din a cincea obținem

$$C'A^2 - C'B^2 = AM^2 - BM^2 \tag{3}$$

Adunând membru cu membru relațiile (1), (2), (3) obținem relația (*).

Reciproc, presupunem că are loc relația din enunț şi prin reducere la absurd presupunem că cele trei perpendiculare nu sunt concurente. Fie M punctul de intersecție al perpendicularelor din B' şi C' pe laturile corespunzătoare şi A'' piciorul perpendicularei din M pe BC.



Din ipoteză avem:

$$A'B^2 - A'C^2 + B'C^2 - B'A^2 + C'A^2 - C'B^2 = 0$$

Cu teorema directă avem

$$A''B^2 - A''C^2 + B'C^2 - B'A^2 + C'A^2 - C'B^2 = 0$$

Scăzând relațiile de mai sus obținem:

$$A'B^2 - A''B^2 - A'C^2 + A''C^2 = 0 \Leftrightarrow A'B^2 - A'C^2 = A''B^2 - A''C^2 \Leftrightarrow$$

$$(A'B - A'C)(A'B + A'C) = (A''B - A''C)(A''B + A''C) \Leftrightarrow$$
$$(A'B - A'C) \cdot BC = (A''B - A''C) \cdot BC \Leftrightarrow$$
$$A'B - A''B = A'C - A''C \Leftrightarrow -A'A'' = A'A'' \Leftrightarrow$$
$$A'A'' = 0 \Leftrightarrow A' = A''.$$

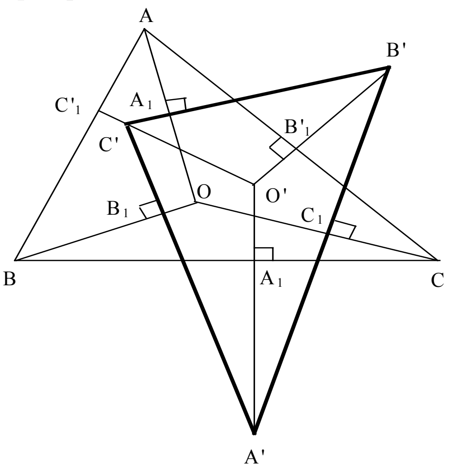
Observație. Relația (*) poate fi utilizată în rezolvarea unor probleme care cer demonstrarea concurenței unor drepte.

Corolar 1.14.1. Pentru cazul când MA', MB', MC' sunt mediatoarele laturilor concurența este evidentă şi are loc relația (*).

1.15. Teorema triunghiurilor ortologice

Teorema 1.15.1. Fie ABC şi A'B'C' două triunghiuri situate în acelaşi plan. Să se demonstreze că dacă perpendicularele din A, B, C pe laturile [B'C'], [C'A'], [A'B'] sunt concurente atunci şi perpendicularele din A', B', C' pe laturile [BC], [CA], [AB] sunt concurente. (Cele două triunghiuri se numesc ortologice.)

Demonstrație. Fie A_1, B_1, C_1 picioarele perpendicularelor coborâte din A, B, C pe laturile [B'C'], [C'A'], [A'B'] şi $A_1^{'}, B_1^{'}, C_1^{'}$ picioarele perpendicularelor coborâte din A', B', C' pe [BC], [CA], [AB].



Cu lema lui Carnot avem:

$$A_1B'^2 - A_1C'^2 + B_1C'^2 - B_1A'^2 + C_1A'^2 - C_1B'^2 = 0 \qquad (1^*)$$

Cu teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice $AB'A_1$ şi $AC'A_1$ obținem

$$A_1B'^2 = AB'^2 - AA_1^2 \quad \text{şi} \quad A_1C'^2 = AC'^2 - AA_1^2$$

de unde prin scădere membru cu membru devine

$$A_1B'^2 - A_1C'^2 = AB'^2 - AC'^2 \qquad (1)$$

În triunghiurile dreptunghice BB_1C' şi BB_1A', cu teorema lui Pitagora obținem:

$$B_1C'^2 = BC'^2 - BB_1^2 \quad \text{şi} \quad B_1A'^2 = BA'^2 - BB_1^2$$

de unde prin scădere obținem:

$$B_1C'^2 - B_1A'^2 = BC'^2 - BA'^2 \qquad (2)$$

Din triunghiurile $A'CC_1$ şi $B'CC_1$ obţinem:

$$C_1A'^2 = CA'^2 - CC_1^2 \quad \text{şi} \quad C_1B'^2 = B'C^2 - CC_1^2$$

de unde prin scădere rezultă că

$$C_1A'^2 - C_1B'^2 = CA'^2 - CB'^2 \qquad (3)$$

Din relaţiile (1*), (1), (2), (3) obţinem prin adunare

$$AB'^2 - AC'^2 + BC'^2 - BA'^2 + CA'^2 - CB'^2 = 0 \qquad (4)$$

Însă

$$A_1^{'}B^2 - A_1^{'}C^2 = A'B^2 - A'C^2 \qquad (5)$$

$$B_1^{'}C^2 - B_1^{'}A^2 = B'C^2 - B'A^2, \quad C_1^{'}A^2 - C_1^{'}B^2 = C'A^2 - C'B^2$$

Din relaţiile (4) şi (5) rezultă că

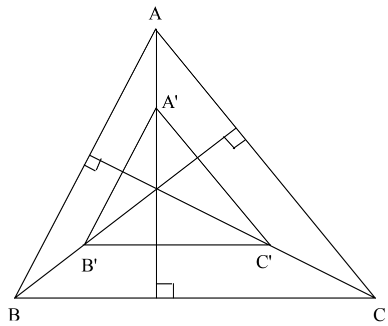
$$A_1^{'}B^2 - A_1^{'}C^2 + B_1^{'}C^2 - B_1A^2 + C_1^{'}A^2 - C_1^{'}B^2 = 0$$

deci perpendicularele din A', B', C' pe [BC], [CA], [AB] sunt concurente.

Aplicaţie. Fie ABC un triunghi cu ortocentrul H şi punctele A', B', C' situate respectiv pe dreptele AH, BH, CH. Să se arate că perpendicularele din A, B, C pe B'C', C'A respectiv A'B' sunt concurente.

(Vasile Pop, 1998, Olimpiada jud. Cluj)

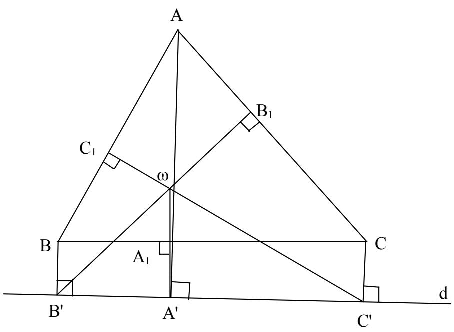
Demonstraţie. Fiindcă perpendicularele din A', B', C' pe BC, CA, AB sunt concurente în H, cu teorema triunghiurilor ortologice obţinem că şi perpendicularele din A, B, C pe B'C', C'A', A'B' sunt concurente.



1.16. Teorema ortopolului

Teorema 1.16.1. Fie ABC un triunghi şi *d* o dreaptă oarecare. Proiectăm vârfurile A, B, C pe *d* în punctele A', B', C'. Perpendicularele coborâte din A', B', C' pe laturile [BC], [CA], [AB] sunt concurente, iar punctul lor de intersecţie ω poartă numele de ortopolul dreptei *d* faţă de triunghiul ABC.

Demonstraţie. Fie A_1, B_1, C_1 picioarele perpendicularelor coborâte din A', B', C' pe laturile triunghiului.



Cu teorema lui Pitagora în triunghiurile $A'A_1B$ şi $A'A_1C$ obţinem:

$$A_1B^2 = A'B^2 - A'A_1^2, \quad A_1C^2 = A'C^2 - A'A_1^2$$

Din aceste două relaţii, prin scădere obţinem:

$$A_1B^2 - A_1C^2 = A'B^2 - A'C^2$$

care se mai scrie:

$$A_1B^2 - A_1C^2 = A'B'^2 + B'B^2 - A'C'^2 - C'C^2 \qquad (1)$$

Analog obţinem:

$$B_1C^2 - B_1A^2 = B'C^2 - B'A^2 = B'C'^2 + CC'^2 - B'A'^2 - AA'^2 \qquad (2)$$

$$C_1A^2 - C_1B^2 = C'A^2 - C'B^2 = C'A'^2 + AA'^2 - C'B'^2 - BB'^2 \qquad (3)$$

Din (1), (2) şi (3) prin adunare obţinem:

$$A_1B^2 - A_1C^2 + B_1C^2 - B_1A^2 + C_1A^2 - C_1B^2 = 0 \Leftrightarrow$$

perpendicularele în A_1, B_1, C_1 pe [BC], [CA], [AB] sunt concurente.

1.17. Teorema sinusurilor

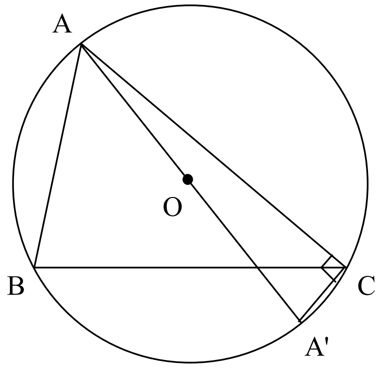
Teorema 1.17.1. (Teorema sinusurilor) Într-un triunghi, raportul dintre o latură şi sinusul unghiului opus este egal cu diametrul cercului circumscris triunghiului sau

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \qquad (*)$$

unde *a, b, c* sunt lungimile laturilor triunghiului ABC iar *R* raza cercului circumscris triunghiului.

Demonstraţie. i) Considerăm cazul triunghiului ascuţitunghic.

Fie O centrul cercului circumscris triunghiului şi A' punctul diametral opus lui A.



În triunghiul dreptunghic ACA' (m(∠ACA')=90°) avem:

$$\sin A' = \frac{AC}{AA'} = \frac{b}{2R},$$

dar ∠AA'C≡∠ABC (subîntind acelaşi arc).

Atunci obținem:

$$\sin B = \frac{b}{2R},$$

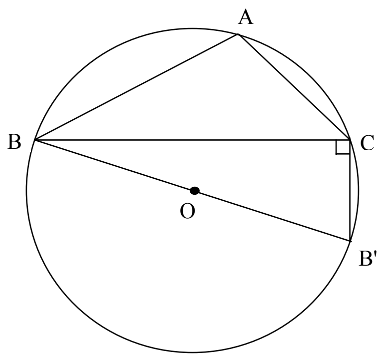
de unde $\frac{b}{\sin B} = 2R$.

Analog obținem: $\frac{a}{\sin A} = 2R$, $\frac{c}{\sin C} = 2R$.

Deci $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

ii) Considerăm cazul triunghiului obtuzunghic. (m(∠A)>90°).

În acest caz punctul O, centrul cercului circumscris este situat în exteriorul triunghiului.



Ducem diametrul BB', atunci m(∠BCB')=90°. În triunghiul BCB' avem

$$\sin B' = \frac{BC}{BB'} = \frac{a}{2R} \qquad (1)$$

Patrulaterul ACB'B fiind inscriptibil rezultă că

$$m(\angle BAC)+m(\angle BB'C)=180°,$$

de unde m(∠BB'C)=180°-m(∠BAC). Atunci obținem:

$$\sin(\angle BB'C)=\sin(180°-A)=\sin A \qquad (2)$$

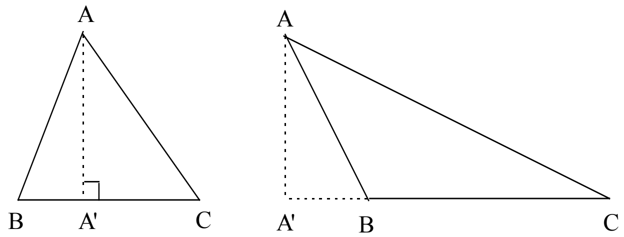
Deci cu (1) şi (2) obținem $\sin A=\dfrac{a}{2R}$, rezultă că $\dfrac{a}{\sin A}=2R$. Celelalte relații se demonstrează ca în cazul precedent. Rezultă că şi în acest caz sunt satisfăcute relațiile (*).

1.18. Teorema cosinusului

Teorema 1.18.1. Considerăm un triunghi oarecare ABC. Vom demonstra mai întâi că între elementele triunghiului avem relația:

$$a=b\cos C+c\cos B \qquad (1)$$

Mai întâi presupunem că unghiurile B şi C sunt ascuțite şi deci piciorul A' al înălțimii coborâte din A este situat între punctele B şi C.



Din triunghiurile dreptunghice AA'B şi AA'C obținem:

$\cos B=\dfrac{BA'}{AB}$, de unde BA'=$c$cosB

$\cos C=\dfrac{A'C}{AC}$, de unde A'C=$b$cosC.

Dar BA'+A'C=a, deci $c$cosB+$b$cosC=a, adică tocmai relația (1).

Dacă unghiul B este obtuz, piciorul A' al înălțimii din A este situat în exteriorul segmentului [BC].

Din triunghiurile dreptunghice AA'B şi AA'C obținem:

$$\cos ABA'=\frac{A'B}{AB},$$

de unde A'B=ABcos(180°-B), sau A'B=$c$cos(180°-B), iar $\cos C=\dfrac{A'C}{AC}$, de unde A'C=$b$cosC.

Dar cos(180°-B)=-cosB şi a=A'C-A'B. Atunci a=$b$cosC+$c$cosB, adică relația (1).

Analog se demonstrează că

$$b = c\cos A + a\cos C \qquad (2)$$

$$c = a\cos B + b\cos A \qquad (3)$$

Înmulțind relația (2) cu b și (3) cu c, adunând membru cu membru obținem:

$$b^2 + c^2 = a(b\cos C + c\cos B) + 2bc\cos A \qquad (4)$$

Ținând seama de (1), relația (4) devine:

$$b^2 + c^2 = a^2 + 2bc\cos A$$

adică

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \qquad (5)$$

relație care poartă numele de teorema cosinusului:

Pătratul lungimii unei laturi a unui triunghi este egal cu suma pătratelor lungimilor celorlalte două laturi minus de două ori produsul lungimilor lor înmulțit cu cosinusul unghiului dintre ele.

Analog cu (5) avem

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \qquad (6)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \qquad (7)$$

Din (5), (6), (7) obținem:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a}{2bc}, \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \qquad (8)$$

Relațiile (8) constituie o modalitate pentru determinarea naturii unui triunghi (ascuțitunghic, dreptunghic sau obtuzunghic).