I.M. – Curs 1

Aritmetica si Teoria numerelor

Antichitate:

-au aparut nr cu 8 cifre scrise cu hieroglife , pt fiecare unitate de fiecare ordin fiind insiruite ordinele de la st la descrescator.

-erau cunoscute numai nr pozitive fara cifra zero.

- _______||________ operatiile de + si – cu nr nat.

-egiptenii cunosteau fractiile cu numitorul 1. $\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$

-grecii au dat o teorie completa a nr rat. Completata de Eudoxiu cu tratarea proportiilor si rapoartelor.

-in Mesopotamia apar probleme de aproximatie:

$$\sqrt{2}\sim 1+\frac{25}{60}\sim 1{,}41 \qquad \sqrt{3}\sim 1+\frac{45}{90}\sim 1{,}75$$

-apare in faza incipienta th nr. irationale sub forma geom.

-un prim pas in dezv nr irat il reprez Euclid.

$\sqrt{2}$ **nr irat.**

Pp. contrariul => $\exists p,q\in N^*$ **(p,q)=1** $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$ **<=> $2q^2=p^2$ => p par => $\exists$ $p_1\in N^*$ ai $P=2p_1$ (p,q)=1 =>q-impar. $2P_1^2=q^2$ => q par contradictie =>** $\sqrt{2}\notin$ **Q**

-Tectet (sec IV iH) da o teorie sistematica a nr irat si pt prima data a consid nr de forma $\sqrt{\sqrt{a}\sqrt{b}}$

-tot din antichitate se intalnesc studii legate de progresii arit si geom.

-Scoala Pitagora : mediile : h,geom,aritm; metoda falsei pozitii si ec de grI de forma $x+\frac{x}{a}=b$

-Diofant (sec 3 si 4)este cel care reduce ec complicate prin rez unor sist cu mai multe nec la op aritm cu o sg nec.

-notiunea de divizibilitate

-nr prime, impartirea unui nr dat, 2 din nr perfecte :6 si 28, nr prietene: 220, 224 (284?), c.m.m.d.c, c.m.m.m.c

-de la Euclid (sec 3iH)th. Impartirii cu rest in N a=bq+r 0<=r<b

-Th lui Euclid privind infinitatea nr prime

Dem:

N= 1*2*3*…*p(p+1)

N: 1,2,3… => rest 1

- ⇨ **N nu se divide prin nici un nr prim => N prim**

  Deoarece N prim => N>P =>contradct N prim N>p

  N=cel mai mare nr prim contradct => ∍ o infinitate de nr prime.

  -Euclid: forma generala a nr perfecte:

  $N=2^{p-1}(2^p-1)$ unde (2^p-1) nr prim

  -6, 28, 496, 8128 (nr perfecte) nu s-a dems daca ∍ un nr perfect impar.

-Eratostenus – ciurul lui E de obtinere a nr prime ; construirea unui tabel cu nr. 1,…..2 stergand succesiv multiplii 2,………3 atat timp cat $p^2<n$

-nu exista patrate perfecte de forma 3n+2, 4n+2, 4n+3

(Teon din Smirna)

Dems: pp ca $\exists 3n+2=p^2$; $p^2-2=Sm$

$p\equiv 0, \pm 1(mod)$

$p^2\equiv 0,1(mod\ 3)$

$p^2-2\equiv 1,2(mod\ 3)$

$1+2+3+\ldots+\ldots+\frac{n(n+1)}{2}=T_n$ $n\in N^*$ nr Δ nr piramidal

$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ Arhimede

$1+3+\ldots+(2n-1)=n^2$

Orice nr impar este diferit de 2 patrate: $2n+1=(n+1)^2-n^2$

-Nicomob (sec 1-2 iH)

Nr. 1, 3+5, 7+9+11+… sunt cuburi

$p=\frac{n(n+1)}{2}$ **nr triunghiular $S_n= 1+3+\ldots+2p-1$**

$$p^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$S_n-S_{n-1}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{n^2(n-1)^2}{4}=n^3$$

orice patrat este o sume de 2 nr triunghiulare.

$$N^2=\frac{m(m+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}$$

n=m-1

m=N

$2N^2=m(m+1)+m(m-1)=2N^2$

Diofant : putem descompune orice patrat in oricate moduri ca suma de nr nat.

$X^2+y^2=a^2$ are o infinitate de sol in Q

$$x=a\frac{1-q^2}{1+t^2}$$

$$y=\frac{2at}{1+t^2}t\in Q$$

-identitatile lui Lagrange :

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2 + (ad-bc)=(ac-bd)^2-(ad+bc)^2$

Ex: $65=(1^2+2^2)(2^2+3^2)=2^2+8^2=1+64$

-Diofant : Th. Orice nr nat este suma de cel mult 4 patrate.

$X^2+y^2+z^2+t^2=a$ au intotdeauna solutii.

-Probleme de grad superior

- in Mesopotamis antica era cunoscuta rez ec de grIcu ajutorul poz prin echiv. Un sist de ec: $ax=x^2+b$ $\quad x=a/2+z$ $\quad xy-a^2/4-z^2=6$

$xy=b$ $\quad y=a/2-z$ $\quad 2=\sqrt{a^2/2-4}$

x+y=0

-Diofant rez sist de forma $\begin{cases} x+y=a \\ x^n+y^n=b \end{cases}$ **obtinand numai solutii pozitive sau de forma:**

$$\begin{matrix} x+y=a & (x+y)z=a & xy=.... \\ x^n+y^n=b & (y+z)x=b & yz=... \\ & (x+z)y=c & xz=... \end{matrix}$$

- exista in faza incipienta un rezultat al ecuatiei diofantice;

- Scoala Pitagora : rezolvarea ecuatiei $x^2+y^2=z^2$ **, x=2b+1 , y=2p(p+1),** $z=2p^2+2p+1$**;**

- Scoala lui Platon (sec 4 I.Hr) da o solutie completa: $x=k(a^2-b^2)$ **, y=2abk ,** $z=k(a^2+b^2)$**;**

- Diofant rezolva ecuatia de gradul I ax+by+c=0 prin rationamente atitmetice. Ex: 60x+16=13y => y=5x+1$-\frac{5x-3}{13}$ **;** $\frac{5x-3}{13}=k$ **=> 5x=13k+3.**

- Arhimede a propus rezolvarea ecuatiei $x^2=ay^2+1 \; in \; ¢$**; Diofant rezolva** $y=ax^2+bx+c$ **determinand prin rationamente aritmetice o solutie;**

- Diofant a rezolvat ecuatia: $x^2+y^2=a^2+b^2$**.**

Rez: $x=a\cos\theta+b\sin\theta$ **,** $y=a\sin\theta+b\cos\theta$ **,** $t=tg\frac{\theta}{2}$ **,** $x=\frac{a(1-t^2)+2bt}{1+t^2}$ **,** $y=\frac{-2at+b(1-t^2)}{1+t^2}$**.**

- Diofant a dat o solutie ratioanla pentru sistemul $\begin{cases} y^2=\alpha x+a \\ z^2=\beta x+b \end{cases}$**,**

$y^2-z^2=(y+z)(y-z)=(\alpha-\beta)x+a-b$ **,** $y+z=\frac{1}{p}\left[(\alpha-\beta)x+a-b\right]$ **,**

$y-z=\frac{p}{4}\left[\frac{(\alpha-\beta)x+a-b}{p}+p^2\right]$**. Diofant il determina pe p astfel incat sa fie , fie termen liber fie ca coeficient al lui x sa fie nul.**

Texte:

- Euclid „Stihia”:

- **+ aritmetica: cartile: 5,6,7,8,9,10;**
- **+ cartea 5: teoreme referitoare la numere rationale si care sunt datorate lui Eudoxin;**
- **+ 7,8,9: expunerea sistematica a cunostintelor de aritmetica inclusiv teoria numerelor prime, progresii aritmetice si geometrice;**
- **+ 10: numerele irationale si clasificarea lor.**

- Diofant: Aritmitika (tiparita la Paris 1621);

- Boetuss: De institutione arithmeticae (tiparita la Leibzig 1867)

I.M. - CURS 2

<u>Scoala araba si Indiana</u>

-Ariabhat (sec 6) –regulile extragerii radacini patrate si cubice , reg ……

-Brahmagupte (sec 7) spinul patrat magic

4	9	2
3	5	7
8	1	6

-Al horezmi $\Rightarrow$ notiunea de algoritm (sec 9) numeratia pozitionala si aplicatiile corespunzatoare inlocuindu-se aplicatiile dificile care se faceau cu litere romane.
-cifrele , desi se numeau arabe au avut la arabi diverse semne ; a aparut odata cu tiparu.
-Abul Vafa (sec 10) –regulile de calcul cu nr zecimale
-Omar Khaym (sec 11) –teoria nr rationale si notiunea in faza incipita , el adaugand la notiune , de nr real pozitiv .
-Al Kasi (sec 14-15) calculul cu nr zecimale fractionale
-Lucrarile faimosului Leonardo din Pisa (sec 13) –regula de + a fractiilor si criteriile de diviziune prin 2,3,5,9.

<u>Scoala indiana</u>

-Ariabhat-suma patratelor sicuburilor nr rat
-Magavira (sec 9) suma de patrate de termini in ………………

$a^2+(a+r)^2+......+(a+nr)^2=(n+2)a^2+2arS_1+r^2S_2$

$S_1=\sum_{k=1}^{n} k \qquad S_2=\sum_{k=1}^{n} k^2$

-Naraiana (sec 14) a calculului de sume de termeni ce generalizeaza cu triunghiuri , piramide .

$S_n^{(1)}=1+2+3+.....+n=\frac{n(n+1)}{2}$

$S_n^{(2)}= 1+3+6+...+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

$S_n^{(n)}= C_n^n+C_{n+1}^n+….+ C_n^k=C_{m+1}^{n+1}$

$2^n= C^0_n+C_n^1+....+C_n^k+...+C_n^n$

-Cartea lui Baskara (sec 12) =rez in care o ec de gr 2 ax+bx=c intr-un procedeu care este in fond cautarea partiale prin fractii continue
-procedeu ciclic de obt a unei sol partiale a ec in $x^2=ay^2+k$
-in tarile islamice , Tabitibu Kara obtine formarea nr prietene ; el a aratat ca de ce nr de forma

$$\left.\begin{array}{l} p=3\cdot2^n-1 \\ q=3\cdot2^n-1 \\ r=9\cdot2^{2n-1}-1 \end{array}\right\} \text{ prime } \Rightarrow M=2^npq \text{ si } N=2^nr \text{ sunt sisteme}$$

-Al Birum (sec 11) $1+2+2^2+...+2^{n-1}=2^n-1$
-Al Haisam Suma deduceri a sumei

$\sum_{k=1}^{n} k^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n+1)}{30}$

-Al Kaji : $C_m^n=C_{m-1}^{n-1}+C_{n-1}^n$
-Fibanacci : 0,1,1.2.3.5.8.13.21.34……..
$n_0=0$
$n_1=1$

$n_{n+2}=U_n+1+U_n$, $n\in N$

$$n_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

$n_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)$

legea umplerii organice si legea cresteri unui organism care mereu ramane acelasi cu el insusi sist lui Fib .

Sa se gaseasca nr rationale x,y,z in :

$x+y+z+x^2$

$x+y+z+x^2+y^2$

$x+y+z+x^2+y^2+z^2$

sa fie patrate

<u>Rez</u> sol partiala $X=\frac{16}{5}$, $Y=\frac{48}{5}$, $Z=\frac{144}{5}$

<u>Texte</u>

-Beda 'Liber de loquela per gestum digitorum'

-Bosel (1592) Reguli de calcul pe degete

-Albinus –Propositiones ad acuerdos juvens

-Propozitii pt perfectionarea tineretului

-Magavila 'Garita sera sangrata'

Competitiv al esentei alcolului (Paris 1912)

-Abul Vafa 'Kitab fima iahtag itahi minilu al bital' catre practica , cea mai imp ,de aritmetica

-Al Kiraj 'Kitab al kafi fil kitab'

Catre suferinta pt stiinta aritmeticii

-Baskara'Lilavata' Matematica distractiva

-Leonardo din Pisa 'Liber Abaci' –Cartea socotelilor

Perioada renasterii (sf sec 15-17)

-este perioada aparitiei cartilor de matematica, in general compilatii care s-au bucurat de multa popularitate.

1.Aritmetica din Trevisa 1478 :regula de trei simpla, probleme de amestec si aliaj

2.Bamberger Rechenback 1483 : operatiile, fractiile, progresii aritmetice si geometrice

3.Nicolas Chuquet 'Le Triparty en la science des nambre

Stiinta despre numerein 3 parti (Lyon 1481) numere intregi si fractionare , progresii , numere perfecte si prietene, regula de 3 simpla, extragerea radacinii patratice si cubice, ecuatii reduse la ecuatii de gradul 2, exponenti negativi.

4. Y. Widmann « Behend med hubsch rechung auf eivem Kanffmann schaften« Calcul rapid si comod pentru toti ??? : regula de 3 simpla, metoda falsei pozitii, progresii, aria triunghiului in functie de laturi, diametrul cercului inscris in triunghi.

5. Pacioli « Suma de arithmaticae geometria proportioni et proportionalita« (Venetia 1494) : probleme de dobanda, contabilitate, ecuatii algebrice de grad superior, relatii metrice, poligoane regulate.
- Cataldi : regula de formare a reduselor ;
- Jhon Wallis : $A_n = a_n A_{n-1} + b_n A_{n-2}$ **,** $B_n = a_n B_{n-1} + b_n B_{n-2}$ **;**
- prima teorema de aproximare a numerelor rationale si irationale prin reduse; Orice numar este cuprins intre 2 numere reduse consecutive.
- Formarea de noi patrate magice: au dat patrate magice: Albrecht Durer, Bachet de Menzirac , Frenvide de Bessy , Antoine Arnaud, Pierre Fermat;
- Leibniz da sistemul binar de numarare ;
<u>Probleme de divizibilitate</u>
Numerele lui Wallis.
Frenic de Besic (1676) : daca exprimam laturile unui triunghi dreptunghic prin numere intregi din $\mathbb{N}^*$ **, un numar este divizibil prin 4 si altul prin 5;**
Numerele lui Fermat (1603-1655)
- 1640 : a emis mica th a lui Fermat
- $F_n = 2^{2^n} + 1$**; exista sau nu o infinitate de numere Fermat? (problema nerezolvata nici pana astazi)**
- Marin Aerseine : sa se determine valorile lui n pentru care $2^n - 1$ **(problema nerezolvata inca) este prim;**
-Studiul ecuatiilor nedeterminat;
- Fermat: orice nr prim de forma 4n+1 poate fi reprezentat ca o suma de 2 patrate;
- Descartes: orice nr prim de forma 4n-1 nu este suma de 2 patrate:
- Fermat: orice nr prim de forma 8n+1, 8n+5 este reprezentabil sub forma $x^2 + 2y^2$ **;**
- Fermat gaseste o solutie particulara pt ecuatia lui Pell prin metoda cascadei;
-Brouncker dezvolta pe $\sqrt{2}$ **in fractie continua regulata infinita si observa o periodicitate;**
-Fermat rezolva:

+ $x^3 + a = y^2$
+ $ax^4 + bx^3 + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4 = z^2$
+ $\begin{cases} x = 2y^2 - 1 \\ x^2 = 2z^2 - 1 \end{cases}$

+ are $x^n + y^n = z^n$ **solutii in** $\mathbb{C}$ **?**

I.M. - Curs 3
SEC XVIII:
- Jean Biot "Elements d'arithmetique Paris 1787 2 vol";
- Sylvester Lacroix "Traite d'arithmetique Paris 1790";
- C. Wolf "Elementa matheseos universal 1705 Halle 2 vol ";
- semnele actuale ale aritmeticii au fost stabilite de Euler;
- Catoldi adauga numerele perfecte vol 13,17,19;
- Euler a ridicat numarul perechilor prietene la 60;

- incepe o cercetare a numerelor Merciene prime;
- aceeasi problema pt nr Fermat;
- 1732 – Permat arata ca : $F_n = 2^{2^n} + 1$ **si pt n=5 => 641;**
- apare notiunea de indicator;
- mica th a lui Fermat capata noi solutii;
- Eduard Waring 1770 : $(p-1)! + 1 \equiv 0 (\bmod p)$
- "Th lui Wilson" – conditia necesara si suficienta (este dat un criteriu de primalitate);
- Lagrange da o generalizare: $\forall n \in ¥, \forall p$ **prim avem :** $(x+1)(x+2)...(x+p-1)+1 \equiv x^{p-1} (\bmod p)$**. Pt x=0 avem th lui Wilson. Daca x nu este multiplu de p =>** $(x+1)...(x+p)$ **este multiplu de p;**
- Euler: radacina primitiva.
Def: Un nr a se numeste radacina primitiva daca pentru cel mai ????? exponent avem $a^m - 1 \equiv 0 (\bmod p)$ **si este = p-1 . Euler noteaza** $\Pi(x) = ?w?$ **numerele patratice prime mai mici sau egale cu x.** $\lim_{x\to\infty} \Pi(x) = +\infty$**;**
- conjuncturile lui Euler: 1783 : o progresie aritmetica cu primul termen = 1 contine o infinitate de numere prime $\lim_{x\to\infty} \frac{\Pi(x)}{x} = 0$**;**
- Legendre :

+ a emis o lege asimptotica: $\Pi(x) = \frac{x}{\log x + a}, a = 0.866...$**;**

+ introduce notiunea de parte intreaga 1798. $[x] \le x < [x]+1$ **,** $[a_1 + ... + a_n] \ge [a_1] + ... + [a_n]$**.**

+ cel mai mare exponent α **pt care** $p^\alpha \mid n^p$ **,** $\alpha = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + ...$ **.**

+ multimea de caractere: $\chi(1) = 1, \chi_a = 0, (a,b) = 1$ **;** $\chi(a)\chi(b)a - b \equiv 0(\mathrm{mod}?????)$ **;** $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$**;**

+ toate valorile $\neq 0$ **ale caracterelor sunt radacini de ordinul** $\chi(n)$ **ale unitatii.**

- notiunea de fractie continua, regulata , notiunea de redusa;
- Euler:

+ orice nr rational se dezvolta intr-un nr finit de pasi intr-o fractie continua regulata;

+ orice nr irat se dezvolta intr-un nr finit de pasi intr-o fractie continua regulata infinita;

+ orice nr irational este limita sirului sau de reduse (1737).

- Lordul Brouncker: fractia continua a lui Π **care a fost demonstrata de Euler;**
- Euler: expresia lui $\log 2 = \left[0, \frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{4}{1}, \frac{9}{1}, ...\right]$**,** $\frac{1}{2} = \frac{e+1}{e-1} = [2, 6, 10, ..., 4k+2, ...]$**;**
- H. Lambert
- Lagrange:

+ rezolvarea completa cu ajutorul fractiilor continue a ecuatiei diofantice de gradul II;

+ **determinarea tuturor solutiilor ecuatiei Pell** $x^2 - Dy^2 = 1$ **cu ajutorul fractiilor continue. D nu este patrat perfect.**

Ecuatia Pell a fost studiata de : Arhimede, Diofant, Brahma, Baskara, Fremat, Euler, Legendre, Lagrange

- Euler:

+ $y^2 = ax^2 + bx + c$ **,** $(1) x^2 + dy^2 = k$ **. Conditia necesara si suficienta ca (1) sa admita solutie este ca** $x^2 \equiv d(\bmod k)$ **sa admita solutie. Euler a ajuns aici pornind de la :** $x^2 \equiv m(\bmod p), (m, p) = 1$**;**

+ **comcluzioneaza : pt ca cele 2 congruente sa fie concordante cel putin unul din nr m si p sunt de forma 4t+1; daca ambele sunt de forma 4t+3 ec sunt discordante;**

+ $m^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1(\bmod p)$ **.**

- Legendre:

+ **1798: introduce simbolul Legendre:** $\left(\frac{m}{p}\right) = \pm 1$**, cu rest patratic daca** $\frac{m}{p}$**=1, cu nerest patratic daca** $\frac{m}{p}$**=-1;**

+ **1768: ecuatia polinomiala generala:** $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0 \equiv 0(\bmod p)$ **.**

- Euler:

+ $x^3 + y^3 + z^3 = n^3$ **au solutii in ¢ . Solutii cu un singur parametru:** $x = 16r - r^4$ **,** $y = 8r + r^4$ **,** $z = 16r - 4r^3$ **,** $n = 16 + 2r^3$**;**

+ $x^4 + y^4 + z^4 = n^4$ **ec nu are solutii in ¢ ;**

+ $x^y = y^x$ **nu are solutii in ¢ cu exceptia x=y;** $\begin{cases} x = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \\ y = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t+1} \end{cases}$**;**

Probleme de reprezentare

Sec XVIII

- desc unui m dat intr-o suma de termeni de forma data;

- Bachet: sec XVII : $\forall m, n \in$ ¥ **este o suma de cel mult 4 patrate;**

- Fermat:

+ **oricare ar fi m prim de forma 4t+1 este o suma de patrate cu desc lenica???;**

+ **oricare m prim 8k+2 sau 8k+1 este reprezentabil prin** $x^2 + 2y^2$ **.**

Demonstratiile acestor teoreme au fost date de Euler.

- Euler: Daca un numar 4n+1 este decompozabil el fie nu se descompune in suma de doua patrate fie are mai multe reprezentari de acelasi fel. El da o conditie necesara si suficienta pt ca un numar sa fie unic reprezentabil ca o suma de doua patrate. Ex : $65 = 8^2 + 1^2 = 4^2 + 7^2$ **, 45 nu are nici o descompunere ,** $29 = 2^2 + 5^2$ **descompunere unica.**

- Euler: numerele de forma 6k+1 se pot reprezenta $x^2 + 3y^2$ **.**

- Lagrange:
 + reprezentarea numerelor printr-o forma patratica binara: $n = ax^2 + bxy + cy^2, x, y \in$ ¢ necunoscute;
 + forma echivalenta;
 + face legatura intre posibilitatea reprezentarii si existentei unei solutii de gr II;
- Euler: daca a si b $\in$ ¥* sunt sume de patrate atunci si produsul ab este suma de patrate;
- Th probabilitatii reprezentarii unui m ca o suma de 4 patrate, cel mult , a fost demonstrata riguros de Lagrange;
- Problema lui Waring (1771) : oricare af fi m natural este reprezentabil ca o suma de cel mult 4 puteri de ordin n unde p este un p este un nr ce depinde de n. ex: n=2 => p=4;
- Euler: problema reprezentarii numerelor prin numere prime:
 + oricare ar fi m par ≥ 4 este o suma de 2 numere prime (ipoteza lui Goldbach);
 + oricare ar fi m impar ≥ 7 este o suma de cel mult 3 numere prime.
- 1748 Euler: numarul de reprezentari a unui nr natural n ca o suma de m termeni; legat de acest fapt enunta in 1750 th: numarul descompunerilor unui numar n natural intr-o suma de 2,4,6,… numere naturale difera cu o unitate de numarul descompunerilor intr-o suma de 1,3,5,… numere naturale cu exceptia cand $n = \frac{3n^2 + n}{2}$ cand numarul descompunerilor este acelasi.

Carti fundamentale:
- Opuseula varii argument , Euler , 1746 vol I, 1750 vol II Berlin.
- Legendre , Essai sur la theori des nombres 1798, Paris.

Gauss (1777 Brumsvick-1855)
"Discutii matematice" 1801.
- notiunea de $\equiv$. $a \equiv b(\bmod m)$.
- clase de resturi;
- $ax \equiv b(\bmod m)$;
- lema chineza a resturilor;
- $\varphi(n)$ = ind lui Euler si demonstreaza ca $\sum_{d|n} d = n$;
- generalizeaza th lui Wilson;
- reface teorema resturilor de puteri fata de numarul dat;
- $a^m \equiv 1(\bmod p)$;
- arata ca un numar are radacini primitive daca si numai daca are valorile $4, p^\alpha, 2p^\alpha$, p prim >2 , $\alpha \in$ ¥*;
- arata ca daca modulul este prim atunci el admite $\varphi(p-1)$ radacini primitive;
- fiind dat un numar prim p si o radacina prima a lui a, expresiei lui a $\equiv$ q este indicele lui q in baza a.
- calculeaza tabelul de indici pana la 100;
- Iacobi il completeaza pana la 1000;

- studiaza $x^m \equiv a(\bmod p)$, p prim ; arata ca daca d=cmmdc (m,p-1)|a , congruenta are solutie si anume d solutii;
- cerceteaza resturile patratice si reduce $ax^2+bx+c\equiv 0(\bmod p)$ la $z^2\equiv q(\bmod p)$; q se numeste nerest patratic daca congruenta nu are solutii si rest patratic daca are.
- Criteriul lui Gauss: daca (a,p)=1, p prim , p>2 , at $\left(\frac{a}{p}\right)=(-1)^n$,n = nr de elem ale multimii $\left\{a,2a,...,\frac{p-1}{2a}\right\}$ ce dau cele mai mici resturi in raport cu p;
- introduce simbolul lui Iacobi => studiaza daca $p=p_1...p_n$, $\left(\frac{a}{p}\right)=\left(\frac{a}{p_1}\right)...\left(\frac{a}{p_n}\right)$;
- demonstreaza legea reciprocitatii patratice $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=1$;
- procedeul descompunerii in fractii simple;
- August Moebius a introdus functia moebius 1932: $\mu(n)=\begin{cases}-1, n=p_1...p_s\\0, p^2\mid n\end{cases}$, daca n=1 => $\mu(n)$ =1
- th de inversiune a lui Moebius.

I.M. - Curs 4

Gauss cerceteaza in 1801 pr lui Lagrange de reprezentare a nr intregi printr-o forma aritmeticapatratica binara: $n=ax^2+bxy+cy^2$ (1). Dc n reprez prin (1), at este reprezentabila prin orice forma echivalenta cu ea: $x=\alpha x'+\beta y'$, $y=\gamma x'+\delta y'$, $\alpha\delta-\beta\gamma=1$. Cauchy in 1818: orice nr natural este suma a cel mult 3 nr triunghiulare, a cel mult 4 patrate, a cel mult 5 nr pentagonale, a cel mult 6 nr hexagonale. Gauss: 8n+3 este o suma de 3 patrate impare. Liouville: existenta unui nr natural n ai orice nr natural sa se descompuna in cel mult n puteri de grad dat. Dirichlet rezolva cazul n=5, iar Lame n=7. Eduard Kumer (1810 - 1893):
$\frac{1}{n!}+\frac{B_1}{1!(n-1)!}+\frac{B_2}{2!(n-2)}+.....+\frac{B_{n-1}}{(n-1)!1!}=0$, $B_{2k+1}=0, B_1=\frac{1}{2}, B_2=\frac{1}{6}$........ **Dc p nr prim si dc nici unul din urmatorii coef B_2, B_4,…,B_{p-3} nu se divid la 3 at pt n=p, ec lui Fermat nu are solutie.descopera nr ideale (idealele)**
Gauss: pct laticeale $\mathbf{Z}[i]=\{z/z=a+ib, a,b\in\mathbf{Z}, i=\sqrt{-1}\}$ dem ca $(\mathbf{Z}[i],+,*)\, inel \Rightarrow$ permit dezvolatarea ulterioara a corpurilor simetrice s.n. <u>pct laticeale,</u> pct de coordonate intregi
<u>Teorema</u>: fie f(n) o fct poz si cont $\forall n\in[a,b]$ nr de pct laticeale det de axa Ox si graf fct= $\sum\limits_{0\le x\le n}[f[x]]$
Gauss a aratat ca un pct laticale din int unui cerc de raza R este $N(r)=\bar{u}^{\,r^2+O(r)}$

Dirichlet: pt $\forall$ nr reale si poz $\alpha si\varepsilon, \varepsilon > 1$ **at** $\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{b\zeta}$

Liouville:1849:pt $\forall$ nr alg real α de grad n aputem alege un nr compelx depiunzand de α ai pt$\forall$ nr rational $\frac{a}{b} \Rightarrow \left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \geq \frac{c}{b^n}$

Nr care nu satisfac ac rel sn nr Liouville.

Introduce not de nr transcendent: fie $\alpha \in R.dcpt \forall nsic \in R, > 0, \exists ofctrationala \frac{a}{b} \neq \alpha ai \left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{c}{b^n}$ **at α transcendent.**

Sec 19-20: analiza logica a not fundam si introd urm axiome scrise de logicieni:

Peamo:1891: nr nat pe bz axiomelor

Hilbert:1900: operatii cu nr intrgi (gr 1 si2 sunt axiomele de inel, gr3:axiomele de grup)

A1: a, b, at, a>b sau a<b

A2: a>b, b>c at a>c

A3: a>b at a+b>b+c

A4: a>b, c>0 at ac>bc

Gr4:axiome de continuitate 1. Arhimede , a, b$\in \mathbb{R}^+, a > b, \exists n \in \mathbb{N}^* aib > na$

2. Ax de integritatae: nu este posibil sa adaugam sist de nr ….sist de entitati ai sist rezultat sa fie valabile axiomele de gr1-4i-e extensiile nu… axiomele

Dedekind:1872:taietura Dedekind: consideram mt ordonata m pct unei drepte. Introducem o taietura prin submt A si B, distincte, nevide si disfunct numite clase si care satisfac cond: $m = A \cup BsiA \in A, B \in AsiAprecedepeB$

Principiul Diriclet:pt oricare pereche (A,B) exista m un pct P care este sau ultimul pct din calsa A sauu primul pct din clasa B. Exista pct care nu sunt nici ultimul pct din clasa A nici primul din classa B deci introducem nr irat.

Probleme de divizibilitate: teoria alg a nr, teoria analitica a nr, teoria computationala a nr (cel mai mare nr prim), nu cunoastem nr perfecte, s-au extins retelele denr prime, apar noi nr Fermat prime.

Teorem alui waring: pt un nr k natural, exista n apartinand mt nr nat ai sirul $1^k, 2^k, ..., m^k$ **sa form o bz de ord n a sirului de nr nat.**

Not cu g(k) nr cu propr ca suma a cel mult g(k) nr ie n=g(k).

H. Hardy

J Littlewood

I Vinogredav

Snirelman

Rezultate profunde de distributie a nr prime:Riemann: $S(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \Rightarrow S = \gamma + it, 0 \leq \gamma \leq 1$

Diriclet: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ **,** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\xi(s)}$

Carti:

1. **Louise Francoeur „Cours complete des mathematiques" **

2. charles briot-lecans d'aritmetique
3. forkas boyai-aritmitika eleye1830
4. victor buniakovski-aritmetika-1844
5. gauss-discusiones aritmetiques-1801

I.M. - CURS 5

- **1873 Hermit „e"**
- **1882 Lindemann „Π"**
- **Schneider**
- **Walt Schmit**

Noțiuni aproximare diofantică:

- **Hurwitz:** $\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}b^2}$
- **Borel**
- **Vahlen:** $\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{\sqrt{2}b^2}$
- **Humbert:** $\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{\sqrt{8}b^2}$
- **G.Sudan: criterii de transcendență cu ajutorul teoriei mulțimilor**
- **N.Negoescu (Univ. Iaşi)**

Teoria punctelor laticeale:

- **Sierpinski**
- **Steinhauss**
- **Edmond Laundan**
- **Ranmajan**
- **Mordell**
- **Dan Barbilian (1895-1961)**
- **G.Sudan (1899-1977): 1948-1949 – curs la Fac de Mat Buc.**
- **Cucurezeanu, Luca, Ghica**

Cărți:

G.Peano:"Formulare de mathematiques" (5 vol), Paris 1895-1908
K.Weistrass:"Die Elemente der Arithmetik"
Emil Lucas:"Theorie des rombres", Paris, 1891
Eugen Cahen:"Theories des membres"(3 vol.), Paris, 1914-1924
R.Caramichael:"Theory of numbers", London, 1914
Leonard Dickson:"Introduction to the Theory of numbers", Chicago, 1931
I.Vinagrodov:"Bazele T.N.", Moscova, 1948
H.Hasee:"Lecții asupra T.N.", Berlin, 1950

Cărți de cercetare:

Paul Bachmann:"Zahler Theory"
P.Peano:"Aritmeticae principii"
H.Minkovski:"Geometrie der Zahler", 1986
Oscar Perron:"Lecții despre Teoria fracțiilor continue", 1913

Paul Bachmann, Berlin, 1919
L.Mordell: „Diophantine equations"
G.Sudan:"Geometrizarea fracțiilor continue", Bucureşti, 1950

<u>ALGEBRA</u>

Evul mediu

- **calculul algebric şi rezolvarea ecuațiilor patratice**
- **contribuția esențială adusă de arabi este crearea algebrei şi trigonometriei pe baza geometriei greceşti**
- **numerele negative au fost introduse de indieni**
- **Brahmagupta dă reguli de adunare şi scădere cu numere pozitive şi negative**
- **regula algebrică de rezolvare a ecuației de gradul doi**
- **semnalează identități algebrice**
- **unele reguli de raționalizare a unităților unor expresii**
- **Baskara (sec.XII)**
- **Dezvoltă notația simbolică**
- **Dă reguli de împărțire şi înmulțire cu numere algebrice şi cu numere iraționale**
- **Descompune radicali suprapuşi**
- **Raționalizează numitori**
- **Determină două rădăcini când sunt pozitive pt.ec.de gr.2**
- **Al.Horezumi**
- **Reguli de trecere a termenilor dintr-o parte în alta**
- **Reguli de reducere a termenilor asemenea**
- **Simplificarea fracțiilor**
- **Aducerea la forma canonică**
- **Rezolvarea ecuațiilor algebrice cu una din formulele:**
    - $ax^2 = b$
    - $ax^2 = bx$
    - $ax^2 + bc = c$
    - $ax^2 + c = bx$
    - $ax^2 = bx + c$

    pentru fiecare aplică altă regulă de rezolvare
- **Omar Kayam(sec.XI)**
- **Defineşte algebra – ştiința rezolvării ecuațiilor**
- **Încearcă să rezolve ecuația de gr.3**
- **Al.Kasi (sec.XIV-XV)**
- **Reguli de calcul cu exponenți şi radicali**
- **Calculează aproximativ rădăcini de ordin n cu formula:** $\sqrt[n]{a+r} \approx a + \frac{r}{(a+1)^n - a^n}$

- **prin iterarea rezultatului şi evaluarea erorilor calculate cu 5 zecimale exacte $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ de care avea nevoie pentru calculul numeric muchiilor poliedrelor regulate**
- **calculează pe π cu 17 zecimale exacte**
- **Al.Kalasachi(sec.XV)**
- **Dă un sistem dezvoltat de simboluri**
- **Europeni: Fibonacci(sec.XIII)**
- **Dă o nouă interpretare numerelor negative**
- **Ecuația de gradul 3 nu este în general rezolvabilă prin radical de ord.2**
- **I.Neworarimus(sec.XIII)**
- **Utilizează literele în loc de numerele cunoscute**
- **R.Swinshead**
- **A calculat suma seriei:** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = 2$

  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... = 1$

  $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... = \frac{1}{2}$

  $\frac{1}{2^3} + ... = \frac{1}{2^2}$

  ………..

  relația cerută
- **Megavira(sec.IX)**
- **Considera ecuații reductibile la gr.2 de forma:** $ax + bx^2 + c(ax + bx^2) = d$
- **Beskara(sec.XII)**
- **Rezolvă:** $x^3 + 12 = 6x^2 + 35$ **şi** $(x-3)^3 = 27$
- **Abu Kamil(sec.IX-X): r ezolvă sistemul:** $\begin{cases} x + y + z = 10 \\ xz = y^2 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$
- **Al.Kasi:** $x = \frac{9 + x^3}{p}$ **rezolvată prin aproximații.**
- **Fibonacci rezolvă sistemul:**
- $\begin{cases} x + \frac{a_1}{b_1} y = y + \frac{a_2}{b_2} z = z + \frac{a_3}{b_3} x = s \\ x = \dfrac{1 - \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2}}{1 + \frac{a_1 a_2 a_3}{b_1 b_2 b_3}} s \end{cases}$

Renaşterea:(şi sec.XVII)

- **semnul „=” este dat de Roberth Recorde**
- **semnul „+” este dat de Widmann**

- **semnul „*” este dat de Wiliam Oughtred, 1631-1657**
- **semnul „,” – Wiliams**
- **„ a^n ” – Descartes, 1637**
- **„ $\sqrt{\ }$ ” – Stifel, 1544**
- **„ $x^{-n} = x^{\frac{1}{n}}$ - John Walles, 1657**
- **„( )” – Schlussel, 1608**
- **„ < > „, Harriot, 1631**
- **„ $+\infty$ ” – Wallis**
- **cifrele au căpătat forma actuală în sec.XV-XVI, de la primele cărți tipărite**
- **cifra „ 0 „ – sec. XVII**
- **1696 – Wallis scrie f. generală a unui polinom de gr.4:** $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$
- **se dezvoltă calculul algebric**
- **F.Viette, în cartea sa arată forma binomului şi generalizări ale sale**
- **Foloseşte metode ingenioase de rezolvare a ec.şi sistemelor reductibile la ec. de gr.2: ex.** $x^2 - y^2 = b^2$
- **Descompune în factori liniari polinomul de gr.2, 3, 4 şi a scris relațiile între rădăcini şi coeficienți pt. rădăcinile pozitive**
- **Rezolvarea ec.de gr.3 este legată de trisecțiunea unghiului(faimoasa problemă a triciclității)**
- **J.Neper, în 1614 a inventat logaritmii**
- **Progresiile aritmetice şi geometrice**
- **Formule uzuale cu logaritmi şi logaritmi în bază e**
- **Briggs – 1623 dă tabele de logaritmi în baza 10**
- **T.Harriot (1560-1621): introduce inegalități în algebră**

  $a^3 + b^3 > ab(a+)$

  $(a+b+c)^3 > 2abc\ , a,b,c \in \Re, disticte$,

  $(a+b)^3 > ab(a+b)$

  $(a+b)(a^2 - ab + b^{2)} > (a+b)(ab)$

  $(a+b)(a-b)^2 > 0$

  $(a+b+c)^3 > 27abc$

  $\frac{a+b+c}{3} > \sqrt[3]{abc}$
- **Girard**
- **consideră rădăcinile negative şi complexe ale unei ecuații**
- **foloseşte transformarea $x \to \frac{x}{k}$ pentru micşorarea coeficienților unei ecuații**
- **Pierre Herigone:** $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

  $C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}$
- **Pascal:** $C_p^p + C_{p+1}^p + ... + C_p^n = C_{n+1}^{p+1}$

  $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$
- **folosind inducția**

- **Hudle: condiția necesară şi suficientă pentru ca** x_0 **rădăcină multiplă de grad r:** $\begin{matrix} f(x_0)=f'(x_0)=...=f^{r-1}(x_0)=0 \\ f^{r}(x_0)\neq 0 \end{matrix}$
- **I.Newton: formula binomului** $(a+b)^n =.....$
- **Formula de recurență pentru calculul sumei puterilor unei ecuații algebrice**
  $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n=0$
- $x_1, x_2,... x_n : S_p = x_1^p + x_2^p + ... + x_n^p$
  $a_0S_{n+p}+a_1S_{n+p-1}+...+a_{n-1}S_{p+1}+a_nS_p=0,..p=0,1,2,...$
- **Leibniz: dă soluția rezolvării unui sistem liniar folosind rădăcini duble**
- **Ecuația de gradul 3**
- **Scipione del Ferra**
- **Nicola Fontana**
- **Cardano**
- **Hudle(1657)**
- **Luigi Ferrari: ecuația de gr.4**
- $\begin{cases} x^4 + 4p^2 x 8q + x4r = 0 \\ y^3 + 2p^2 q(p^2 - r)q + q^2 = 0x^4 + 4p^2 x 8q + x4r = 0 \\ x = \pm\sqrt{y_1} \pm \sqrt{y_2} \pm \sqrt{y_3} \end{cases}$
- **rezolvarea ec. de gr.3**
- **Rafaelo Bombelli: cazul inductibil, i-a convins pe matematicieni de utilitatea şi utilizarea lui C.**
- **Metode de uz prin aproximații**
- **Stevin: un polinom f pt. care f(a)f(b)<0 are o rădăcină în (a,b), micşorând intervalul ne apropiem de rădăcini**
- **Descartes: nr. rădăcini pozitive ale unei ecuații algebrice este cel mult egal cu numărul variațiilor şi diferă de acesta printr-un număr par**
- $x \to -x$**, o limită a rădăcinii negative**
- **I.Newton(1707) dă o metodă de determinare a marginilor rădăcinii unei ecuații algebrice**
- **Metoda tangentei:** $x_{1+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
- **Rolle (1690): dă o tehnică de separare a rădăcinii unei ecuații între două rădăcini, reale şi consecutive ale ec.f(x)=0, avem un număr impar de rădăcini ale ec.f'(x)=0**
- **Teoria seriilor şi şirurilor:**

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}*\frac{4k+3}{2^{k+1}}=\frac{5}{3}$$

- $$1+\frac{1}{2}(1+\frac{3}{4})+\frac{1}{4}(1+\frac{3}{8})+\frac{1}{8}(1+\frac{3}{16})+...=$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{8}(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+...)=2+\frac{3}{8}*\frac{4}{3}=\frac{5}{2}$$

- **Viette** $\frac{2}{4}=\sqrt{a}\sqrt{a\sqrt{a}\sqrt{a+a\sqrt{a+a\sqrt{a}+......a}}}=\frac{1}{2}$
- **Cavcliei:** $\lim_{n\to\infty}\frac{1^r+2^r+...+n^r}{n^{r+1}}=\frac{1}{r+1}$
- **Tacqnet: a dedus riguros suma termenilor progresiei geometrice prin trecere la limită**

$$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}*\frac{3}{2}*\frac{3}{4}*\frac{5}{4}*\frac{5}{6}*\frac{6}{7}*\frac{7}{8}*\frac{9}{8}*...$$

- **Wallis:** $\sqrt{\frac{2}{4}}\lim_{n\to\infty}\frac{2*4*6*2*n}{1*3*5*...2(n-1)}\backslash\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

$$\frac{2}{4}=\lim_{n\to\infty}n(1-\frac{1}{2n^2})$$

I.M. - Curs 6

Probleme de astronomie

- Mercator: $\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...$

- Mengoli: (1650) demonstreaza divergenta seriei armonice:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$$

- $arctg(x)=x-\frac{x^3}{5}+\frac{x^5}{5}-...$ **;**

- $|x|<1$ **se integreaza** $\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+...$

- Newton : $(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+...$

$$\arcsin x=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{2^3*5}x^5+...$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{\sqrt{5}}{2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1*3}{2^3}x^4-...$$

$$\frac{\pi}{2}=1+\frac{2}{2^3*3}+\frac{3}{2^7*5}+\frac{5}{2^{10}*5}$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...$$

$$\sin x=1-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...$$

$e^x = y + 1 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$

$x = \log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} - \ldots = (a_0 - 1 + a_1 x + \ldots) - \frac{1}{2}(a_0 - 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)^2 + \frac{1}{3}(a_0 + a_1 x + \ldots)^3 + \ldots$

$\Rightarrow a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{6}, \ldots$

- Seki Kova : dezvoltarea in serii a functiilor arcsin(x),arcsin(x^2),pi cu 24 de zecimale;

- Leibniz_1672=> seria $\frac{\pi}{4}$;

Caz particular din dezvoltarea lui arctg(x) $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$

Extinde la seria numerica alternala $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 \ldots$ **este suficient ca termenul general sa descreasca si sa tinda la 0 pt ca seria alternala sa fie convergenta.**

- Bernoulli $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ **,** $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

(1713) polinoamele $P_n(x) = 1^n + 2^n + \ldots + (x-1)^n, n \in \mathbb{N}$ **satisfac** $P_n(x+1) = P_n(x) = x^n$**.**

Dezvoltarea $\frac{e^x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \sum (-1)^{n-1} \frac{B_n}{(2n)!} x^{2n}$ **unde:** B_n **sunt numerele lui Bernoulli.**

$x = \left(1 + B_1 x + \frac{B_2}{2!} x^2 + \ldots + \frac{B_n}{n!} x^n + \ldots\right)\left(x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots\right)$

Pt n=2 => $B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}$

$\frac{x}{2} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = 1 + \frac{B_2}{2!} x^2 + \ldots$

$-\frac{x}{2} \frac{e^{-x} + 1}{e^{-x} - 1} = -\frac{x}{2} \frac{1 + e^x}{1 - e^x} = \frac{x}{2} \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$

$B_3 = B_5 = \ldots = 0$

$B_2 = -\frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}$

Carti:

<u>Cardano</u>: "Ars magna sine de regulis algebricae"(1545)
<u>Viette:</u> "Introducere in arta calculului"(1591)
<u>Neper</u>: "Mirific logorithorum canonis descriptio"(1614)
<u>Girard:</u> "Inventions nouvelles en l'algebre"(1629)
<u>Hanriot</u>: "Artis analiticae praxis"(1631 Londra)
<u>Oughtred</u>: "Clovis matematicae"(1631)
<u>Wallace:</u> "Tratise of algebra"(1636)
<u>Rolle:</u> "Traite d'algebre"(1690 Paris)
<u>Newton</u>: "Arithmetica universalis" (1707)

I.M. – Curs 7

Abraham Moivre – 1697 – formula de ridicare a unui polinom la o putere arbitrara

$$(a+b+c+...+l)^n = \sum \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!} a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} ... l^{\lambda} \ \ cu\ \alpha+\beta+\gamma+...+\lambda = n$$

Cohin MacLanin: H ≤ G ≤ A, H media armonica, G media geometrica, A media armonica

Euler: - notatii pentru R, π, i, f(x)

- calculeaza e cu 23 zecimale si π cu 100 zecimale

Sec XVIII in algebra: secolul determinantilor – au fost pusi sub forma moderna

Cramer 1750: rezolvarea unui sistem liniar de 3 ecuatii cu 3 necunoscute

Lagrange: dezvoltarea dupa mai multe linii si coloane

Laplace – 1771 – notiunea de determinant de ordin general

Orice determinant este suma celor C_m^n produse algebrice corespunzatoare

Schimbarea a 2 linii implica schimbarea semnului determinantului obtinut

Vandermont: $V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$

Lagrange: determinat reciproc: inlocuirea elementelor cu determinantii complementilor algebrici este egal cu patratul determinantului

Laplace: $\begin{vmatrix} a_{11-s} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22-s} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn-s} \end{vmatrix} = 0$

Euler – 1771 – determinati ortogolnali

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1 \\ a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3 = a_2a_2 + b_2b_2 + c_2c_2 = 0 \end{matrix}$$

Regula: Fie B=|b_{ij}| determinat de ordin n cu elementele primei diagonale egale cu 1, iar celelalte elemente sunt stramb simetrice, i.e. $b_{ij} + b_{ji} = 0$, $b_{ij} = 1$.

Daca b_{ij} este complementul algebric al lui b_{ji} atunci $a_{ii} = \frac{2B_{ii}-1}{B},\ a_{ij} = \frac{2B_{ij}}{B}, i \neq j \Rightarrow$ **ca |a_{ij}| este ortogonal**

Formule patratice in 2 variabile au fost introduse de Lagrange in 1773

$$f(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

$$f(x,y,z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2$$

$$x = \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y'$$

$$y = \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y'$$

$$f(x',y',z') = a_{11}'x'^2 + a_{12}'x'y' + a_{22}'y'^2$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ a_{21}' & a_{22}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Waring – 1779 si Lagrange – 1795 au dat formula clasica de interpolare a unei functii prin polinoame $x_0, …, x_n$

$A_0 = f(x_0), …, A_n = f(x_n)$

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n} A_i \frac{(x-x_0)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)}$$

D'Alembert: z=a+ib pt z ∈ C

Moivre – stabileste ca $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

$$\sqrt[n]{r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}=\sqrt[n]{r}\left(\frac{\cos\theta+2k\pi}{n}+i\frac{\sin\theta+2k\pi}{n}\right), k=\overline{0.n}$$

Cotes: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, $z = r^{i\theta}$

Suber – 1740 -

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \qquad \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...$$

$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \qquad \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...$$

Vie Riccati – 1757 – functii trigonometrice hiperbolice

$$ch\,x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}; \quad sh\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

$$ch(x+y)=ch\,x\,ch\,y+sh\,x\,sh\,y$$

$$(ch(x))'=sh\,x; \quad (sh(x))'=ch\,x$$

Euler: consideram logaritmi din numerele negative aratand ca sunt complexe; x > 0

$\log(-x) = \log x + i\pi$

$\log(-1) = \log e^{i\pi} = i\pi$

1749 – $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y) \Rightarrow \log(x + iy) = \log\sqrt{x^2+y^2} + i\,\mathrm{arctg}\, y/x \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{arctg}\, y/x = 1/2i \log\frac{(x+iy)}{x-iy}$

$\log[r(\cos\theta + i\sin\theta)] = \log r + i(\theta+2k\pi)$, k = 0, 1, 2, …

Euler – 1761 – $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ se reduce la $y^3 + k = 0$ prin substitutia

$x=\frac{z_1-yz_2}{1-y}$, **z_1, z_2 radacinile ecuatiei rezolvente**

$f'^2 - 2/q\, f' f'' = (p^2 - 3q)z^2 + (pq - qr)z + q^2 - 3pr = 0$

A Cagnoli: $x^3 - px + q = 0$

$\cos\theta = -1/2 \cdot q/s^2$, $s = \sqrt{-\frac{p}{3}}$

$x_1 = 2s\cos\theta/3$

$x_2 = -2s\cos(\pi/3 + \theta)$

$x_3 = -2s\cos(2\pi/3 + \theta/3)$

Euler: x = u + v + w aplica lui $x^4 + px^2 + qx + r = 0$

$Y^3 + p/2 \cdot y^2 + (p^2 - 4r)/12 \cdot y - 2/64 = 0$

$$x=\pm\sqrt{y_1}\pm\sqrt{y_2}\pm\sqrt{y_3}$$

$$\pm\sqrt{y_1y_2y_3}=-\frac{9}{8}$$

Lagrange: se da o rezolvare prin permutari

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon\ |\ v_1 = x_1 + q\,x_2 + q^2 x_3\\ \varepsilon^2\ |\ v_1 = x_1 + q^2 x_2 + q^2 x_3\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} v_1 v_2 = p^2 - 3q\\ v_1 + v_3 = p + 3\\ v_1^3 + v_2^3 = -2\beta^3 + q\,p - 27r\end{cases}$$

$$z^2 + \left(-2\beta^3 + q\,p - 27r\right)z + \left(p^2 - 3q\right) = 0$$

$$x_1 = \frac{1}{3}\left(-p + v_1 + v_2\right)$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(-p + \varepsilon^2 v_1 + \varepsilon v_2\right)$$

$$x_3 = \frac{1}{3}\left(-p + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2\right)$$

Euler: numarul de radacini al unei ecuatiii algebrice este egal cu gradul ei
C. Mac Lorin – 1729 – pentru orice ecuatie algebrica cu coeficienti in P, radacinile sunt in numar par
Th. Bezout si asezarea ei sub forma schemei Horner
Bezout: c.m.m.d.c. a 2 polinoame, polinoame prime intre ele
Bezout: un sistem de m ecuatii de n necunoscute de grad n_1, …, n_m cu n_1 x n_2 x … x n_m solutii
Bezout – 1764- eliminare a necunoscutelor intre 2 polinoame cu acelasi grad n => discriminantul

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ *radacini*

$$\sum x_1 = -\frac{a_1}{a_0}; \quad \sum x_1 x_2 = -\frac{a_2}{a_1}; \quad \sum (x_1 \ldots x_n) = (-1)\frac{a_n}{a_0}$$

Giround: $S_n = x_1^m + x_2^m + \ldots + x_n^m$
Newton: m ≥ n (functie de recurenta)
Cramer – 1750 – orice functie simetrica de radacini se exprima in functii simetrice fundamentale ca un polinom
Vandermont: orice functie simetrica este catul a 2 functii simetrice
Waring: procedeu general de exprimare a functiilor simetrice de radacini
Fourier – 1796 – regula lui Descartes si Roll
Daca f(x) functie de grad n cu coeficienti in R, f(x), f(x)’, …, $f(x)^{(n)}$

Mac Lorin: Fie $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n=0$ ecuatie algebrica cu coeficienti R, $a_0 > 0$. daca N = max {$|a_0|$, $|a_1|$, ..., $|a_n|$}, o margine suplimentara a radacinilor va fi $1+N/a_0$

Lagrange : notam cu n – r gradul II a 2 termeni negativi si da valoarea $1+\sqrt[n]{\frac{N}{a_0}}$ marginea superioara a radacinilor
Ruffini – 1799 – regula de calcul cu privire la zecimalele unei radacini
Lagrange – 1806 – calculeaza aproximarea radacinilor unei ecuatii cu ajutorul functiilor continue. Evalueaza eroarea cu th lui Dirichlet

$$\left|\alpha-\frac{A_n}{B_n}\right|<\frac{n+r}{B_n^2}$$

Moivre: ecuatii reciproce de grad general si de grad 4. Ecuatii binomiale $x^n = 1$ au fost descompuse in factori ireductibili pt : n =10 de Euler, n = 11 Vandermont, n =12 Euler (intr-o extinsie a metodei sale)
Lagrange : metoda de rezolvare pentru un numar n prim
$\varepsilon^1, \varepsilon^2, ..., \varepsilon^{n-1}$ radacini a acuatiei
daca $x = \varepsilon^a$,radacinile le notam cu $\theta x = x^a = \varepsilon^a$

$$\theta^2 = \theta(ax) = x^a = \varepsilon^a$$

$$\theta^4 x = x^a = (x^n)^a = 1 \text{ (formeaza un ciclu)}$$

Daca stim $\varepsilon \neq 1$ => celelalte radacini sunt puterile ei succesive => ecuatiile intre radacinile carora exista o relatie rationala pot sa fie rezolvate prin radicali
Radacinile rezolventului sunt puteri ale expresiei liniare intre radacinile ecuatiei si puterile radacinilor ecuatiei de acelasi grad => opinia imposibilitatii rezolvate prin radicali a ecuatiilor de grad $n \geq 5$ (Lagrange si Ruffini)

I.M. – Curs 8

Cauchy red form patratice la forma canonica
1826-in f can $\rho_1x_1^2+...+\rho_nx_n^n coef\, \rho_1...\rho_n$ sunt rad ec sec deduse din discriminantul formei.
Dc avem 2 forme:

F=$\sum_{i,j}a_{ij}x_ix_j$ si g=$\sum_{i.j}b_{ij}x_ix_j$ putem sa le reducem simultan printr=o transf ortogonala si ia formele: f=$\sum_{i=1}^{n}x_i^2$ si g=$\sum_{i=1}^{n}k_ix_i^2$ unde ki sunt rad ec secndare (seculare?)S $|a_j+kb_{ij}|=0$
J Sylvester=1850: introduce not de rang al unei forme = rangul matricei aij a formei, rangul este ..la o substituire unica si el da nr patratelor independente i^n care putem sa desc forma singulara- se obt cand desc i^n , suma de patrate , acel lucru este realizabil cu un nr de patrate mai mici decat ordinul ei si egal cu nr variabileleor.
Legea de injectie: indiferent de substitutia unica fol, diversele sume de patrate cu coef poz si neg raman aceleasi.
Signatura unei forme p-q(p-poz, q-neg), este un invariant fata de transformarile liniare.
Jacabbi: 1857: for aliniara

$\rho = \sum_{i,j} a_j x_i y_j$ printr-o substitutie liniara se reduce la tipul $\sum_i x_i y_j$ cu coef poz si neg si este analog cu formele patratice drept cat part.

O forma f(x_1, …,x_n)=$\sum a_{i_1 i_2 \ldots i_n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n}, i = \overline{1,n}$ de det $\Lambda = |\alpha_{ij}| \neq 0$ pe care o numim transformare proiectiva, at R se reproduce „* cu o fct ρ de coef icienti α_{ij} al transformarii".

Dc ρ lipseste din R at el sn invariant absolut.

Otto Hesse: 1844: da un procedeu de obt a covariatiilor unei forme de gr n.

Boole 1843: dem ca forma polara $\sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = f(x, y)$ si iteratiile sale sunt invarianti absoluti ai formei.

1850: Hermite: det covariatiei formelor adjuncte numiti contrvariati ai formei.

Sylvester: introduce forma universala: $\sum_{i=1}^{n} x_i n_i$, unde x_i f propie, n_i=f adjuncta.

Forma binara patratica: $f(x_1, x_2) = a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2$. D = 2(a0a2-a1^2).

$f(x_1, x_2) = a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2$, $g(x_1, x_2) = b_0 x_1^2 + 2b_1 x_1 x_2 + b_2 x_2^2$ det un fascicul: $f + \lambda g$. D=D_{11} + 2$D_{12}\lambda$ + $D_{22}\lambda^2$. D_{12} = a_0b_2-2a_1b_1+a_2b_0. Anularea lui D_{12}=conditia ca perechile de radacini f(x,1) = 0 si g(x,1) = 0 sa se separeu armonic. Un alt covariant:

Y=(a_0b_1 – a_1b_0)x_1^2 + (a_0b_2 – a_2b_0)x_1x_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)x_2^2. $f^2 = -\frac{1}{2}(D_{12}g^2 - 2D_{12}fg + D_{22}f^2)$.

$D_{12}^2(\alpha - 1)^2 - D_{11}D_{22}(\alpha + 1)^2 = 0$ are ca radacina val $\alpha si \frac{1}{\alpha}$ ale raportului ananumeric al perehilor de radacini f=0, g=0.

1835:Jacobi rad ec $y = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}$ trans proiectiva reducem studiul f(x)=0 fata de intervalul (α, β) al stud ec transformate $\tau(y) = 0$

Boole f binare 3 si 4

Cauchy 1835- covariatii

Hermite- f termale

Nr complexe si cuaterniani

Teroia lor a fost def in prim ajum a sec19 Gauss 1832: interpretarea geom a op cu nr compexe si a considerat mt $\mathbf{Z}[i] = \{z \in C / z = a + ib, a, b \in R\}$, Z-inelul lui Gauss, introduce pe Z[i] o teorie a divizibilitatii.

G. bellovitis 1835=reprezentarea vectoriala a ac nr.

Cumer extinde not de nr creand teoria idealelor 1844- intr nr compelexe de forma z= a_1+$a_2\varepsilon$ +…+$a_n\varepsilon^{n-1}$, unde ε^n=1,$a_i \in$ i .aarata ca mt ac nr este inchisa fdata de + si* si constitie un corp.

F Eisenstein: z=a+bε , ε^3=1, ε^2=-(1+ε), mt ac nr este un corp peste R.

W Hamilton:1837: nr coplexe ca perechi de nr reale (a. b) si introduce reg de calcul cu ac.

1844: cuaternionii=mt de nr complexe cu 4 unitati E, I, J, K, pt care este valabila reg asociativa si starmb comutativa.

	E	**I**	**J**	**K**
E	**E**	**I**	**J**	**K**
I	**-I**	**-E**	**K**	**-J**
J	**-J**	**-K**	**-E**	**I**
K	**-I**	**J**	**-I**	**-E**

cuaternionii: au au furnizt 1 ex de mt necomutativa
-mt lor este corp fata de op considerate. Ac nr sn ipercomplexe.
Cayleay a reprez matricial nr ipercomplexe .
Grossmann:1844- extinde calculul cuaternionilor lui Hamilton in n unit fiind initiator al calculuilui pluriovectorial.
Abel a dem ca orice ec algebrica de gr n>=5 nu poate fi rez prin radicali.
Teorema: dc ec f(x)=0 este verificata de o rad a ec inductibile g(x)=0, at f(x) este verif de toate rad ec inductibile.
Gauss 1801- putem rez in rad de ord 2 sau redxuctibila la ord 2 ec binome $x^n=1$ unde n= nr prim de forma $2^{2p}+1$.
1798: dem th fund a algebrei, orice polinom cu coeficienti complecşi admite o rad (ex. mt C este algebric inchisa)
1821: Cauchy a dat o noua met de det a marginilor rad unei ec:
fie n=nr coef neg ai pol f(x) si $a_1'..a_n'$ val lor absoluta. Cel mai mare dintre nr:
$\left(r\frac{a_1'}{a2}\right),\left(r\frac{a_2'}{a2}\right)^{\frac{1}{2}}...r'\left(r\frac{a_r'}{a_r}\right)^{\frac{1}{r}}$ **este o margine sup rad ec f(x)=0.**
-procedeu de interpretare
-met de det a fct simetrice de rad ale unei ec alg.

Charles Sturm- da i met de aflare a rad reale lae unei ec pe un interval (a, b), generalizand met lui Fourrier (1829).
Lioville: o baza teoretica a met iterativa pt rez numerica aec de forma x=f(x) unde |f'(x)| <=λ <1- o met de eval a erorilor
Teoria grupurilor de substitutii a fost data de Cauchy in 1815, substitutie = op de permutare la alta,
Nr elem constituie gr substitutiei
Notatie:
Matrice pe linii dupa cum urmeaza: linia 1 b c d a
Linia 2 a b c d
Substitutia identica este substitutia care lasa elem pe lic.
……

o substtutie circulara inter 2 elem sn tranzpozitei : oricce substit este decompozabila in mai multe transpozitii sau in nr par sau in nr imop rezulta substitutii pare sau impare. Substitutiile S^0=I este substitutia identica.
$S^a=S^b$ dc a identi c =1826
Rufinii: Teorema: ordinul unei substitutii este cmmnc al ordinelor ciclurilor in care se descompune.
Substitutii asemenea = substitutii care au acelasi elem , se desc in aceleasi nr de cicluri cu acelasi nr de elemente.
Transformare= trecerea de la o substitutie la una asemenea.
Grup=mt de substitutii care au propr ca prod sol a 2 subst oarecare ale mt aparttot mt.
Ordinul de grup=nr de substitutii dif pe care acest grup le contine.
Grup ciclic=grup format din puterrile aceleaisi substitutii ordinul sau coincizand cu ordinul substitutiei.
Cauchy: ordinul oricarei substitutii inclusa grup G este divizor al ordinului grupului.
Substitutiile de n litere cu ordinul n! Si sn ordinul simetric
Substitutiile pare cu n!/2 elem sn grup altern. (Camille Jordan)
Subgrup (divizor): dc toate substitutiile unui grup Γ apartine unui grup G, Γ sn subgrup (sau divizor). Divizor al luj G-dat de Galois.
Subgrup al lui G – dat de Sophus Lie 1874
Cauchy: grupul alternativ este subgrup ak lui G invariat in G, G' sn subgrup normal al lui G(divizor normal al lui G).
Terema: Cauchy: oricare grup finit este izomorf cu un grup de substitutie
Teoria lui Galois:1846: a facut leg intre teoria ec alg si teoria substitutiilor. El arata ca oricarei ec ii corespunde un grup de substitutii (grupul lui Galois)de unde numele dxe teoria lui Gallois pt teoria de rz a ecuatiilor algebrice, el aratand ca oricare ecuatie de grad>4 nu este rezolvabila prin radicali.
Cauchy: not de indice.
Teorrma: dc Γ subgrup al unui grup de ord ρ , G at el este un divizor al ordinului grupului G.
Lagrange : ordinul unui grup de ord n este divizor al lui n!
Abel 1826: pt n=5 exista un singur grup de indice 5 si anume grupul format din substitutiile care lasa fix o lista det si le permuta pe celelalte in 4! Moduri posibile.
Joseph Bertrand: generalizeaza pt oricare n>4 si arata ca in afara de fct alterante exista fct invariante in grup cu mai putin de n valori. El emite urmatoarea lema: pt n nat, n>7, intre a/2 si a-2 exista cel putin un nr prim
Gallois: descomp unui pol f(x) in factori cu coef rat. El dem:
Ec de gr n:
$F(x)=a_0x^n+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$ ai apartine lui Q.
Rad x1, …, xn sunt distincte
V(x1…xn), N=n!, ia val dif.

S1=1 s2, …sn cele n! Substitutii asupra lui x1,…xn, V1=V, V2..Vn cele N val pe care le ia V prin substitutiile ei.

∅(y)=(y-V1)(y-V2)…(y-Vn) au coef fct rat si simetrice.

∅(y)=0 sn rezolventa lui Galois. Ec resp sn normala adica rad se expr rat prin una din ele.

Teorema(Gallois) orice fct F(x1..xn) de rad ale ec date se expr rat printr-o rad oarecare Vi a rezolventului. In particular orice rad a ec date este o fct rat de o rad oarecare a rezolventei. Galois --> este complet rezolvata dc se stie o rad a rezolventei.

Carti fundamentele:

1. **Serret „Cours d'algebre superiore"**
2. **Bellevies „consideratii asupra algebrei"**
3. **Bouquet, Brio „le cours d'algebre. Le cours de trigonometrie."paris**

Cercetare

Cauchy- Analyse algebrique

Abel Oeuvre completes

Jacabi Opuscula matematica –2vol Berlin 1846+Galois Oeuvre mathematique – Paris1897

CaYleY Collected matematical papers.

I.M. – Curs 9

L. Kronecker – 1866 – introduce notatia $|a_{ij}|$ pentru determinant

– procedeu pentru determinarea rangului unei matrici

Rouche – 1875 – T: Conditie necesara si suficienta ca un sistem (m, n) sa fie compatibil este ca toti determinantii caracteristici sa fie nuli

Frobenius – 1876 – T: rang (A) = rang ($\overline{A}$); $\overline{A}$ = matricea extinsa

W. Clifford – 1878 – numere duale : x = x' + e + x''ε, unde e si ε satisfac regulile obisnuite de "+", iar regula de " · " este data de tabelul

·	e	ε
e	e	ε
ε	ε	0

- **multimea numerelor duale este un corp comultativ**

<u>Teoria formelor</u>

Hermite – 1854 – formele hermitiene

f = $\sum a_{ij} x_i \overline{x_j}$, $\overline{x_j}$ conjugatul lui x_i, a_{ij}, $a_{ij} \in$ C conjugate

– da si legea de inertie a acestor forme

Alte contributii: Clebsch, Gordan

Ostrogradski – 1856 – metode de rezolvare a unei ecuatii despre care se stie ca admite radacini multiple

Hermite – generalizeaza problema de interpolare Lagranje

– polinomul de interpolare Hermite cu noduri multiple

Laguere – seria de polinoame Laguere

Fie $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$

$L_i(x)=a_0x^{n-i}+a_1x^{n-i-1}+...+a_{n-i+1}x+a_{n-i}$ **unde** $L_o(x)=f(n),\ i=\overline{0,n}$ **si**

$L_p(x)=xL_{p-1}(x)+\alpha p,\ p=\overline{1,n}$

$g(x)=x^{n-1}L_n(a)+x^{n-2}L_{n-1}(a)+...+xL_2(a)+L_1(a)$

- **procedeu de determinare a marginilor superioare ale unei ecuatii f(x)=0 => val. Pt care toate polinoamele Laguere sunt pozitive**
- **succesiunea de polinoame Laguere => determina numarul de radacini reale ale lui f(x) intr-un interval dat**

Capelli – conditia necesara si suficienta ca 2 polinoame F(x) si F_1(x) de grade m si n sa aiba un cmmdc de grad p. Acesta este determinantul Sylvester de grad m+n-p, sau determinantul Bezout de rang m-p.

Picard: a transformat metoda iteratiei in metoda generala de rezolvare a ecuatiilor

<u>Algebra moderna</u>

C. Jordan – 1870 – T: conditia necesara si suficienta pentru ca o ecuatie sa fie rezolubila in $\sqrt[2]{}$ **este ca factorii de compozitie a grupului Galois atasat sa fie numere prime**

Holden – 1889 – Grupurile factor nu depind de succesiunea factorilor

Kronecker – 1853 – Orice ecuatie rezolubila algebric de grad prim p este abeliana cand se stie un numar r, r este radacina unei ecuatii abeliene de grad p-1

Hermite – Daca o ecuatie de grad prim p este rezolubila algebric, ecuatiile de grad p-1 formata prin : cu un factor liniar apartine tot clasei ecuatiilor abeliene

Sylow – 1872 – Daca ordinul n al unui grup finit este divizibil prin puterea k a unui numar prim p atunci grupul s.n. subgrup de ordin p^k

S. Lie – 1888 – Creeaza teoria grupurilor continue de transformari:

Teorema: Orice grup abstract este izomorf cu un grup de transformari

<u>Alte contributii in teoria grupurilor</u>

Buruside, L. Bianchi, Cartan, Wedderburn, Weil, Dan Barbilian, Pavel Alexandrov, A. Speiser, Krull, Pontriaghin, Chevalley, Zassenhaus

Formele patrate intregi si numerele complexe intregi care formeaza o structura asemanatoare Z-ului

Dedekind – introduce notiunea de corp algebric

– se dezvolta teoria algebrelor

Frobenius – T: corpul numerelor reale, C(complexe) si algebra cuaternarilor sunt singurele algebre asociative si cu divizori de ordin finit peste R

Contributii: Steinitz, Dixon, Emy Noether, Wedderburn

Hamilton – 1852 – din teoria cuaternarilor s-a dezvoltat calculul vectorial, operatii aritmetice de asociativitate, comutativitate, distributivitate, simetrie

- notiunile relatie, congruenta, asemanare

- notiunile de spatiu vectorial, n-dimensional

- teoria matricilor Caylley: polinom caracteristic al caruigrad este egal cu gradul determinantului $\varphi(\lambda)=|A-\lambda I|$

- identitatea Caylley – Hamilton

Grossman – 1855 – considera matricile ca

Ghibbs fiind operatori
Sylvester – functii de matrici
Jordan – aduce matricile la forma normala
<u>Algebra liniara</u>
Stefan Banach
<u>Teoria multimilor</u>
Canter – 1872 – operatii cu multimi, puterea unei multimi, puncte limita, puncte izolate, multime derivata, multimi inchise, dense, separate, perfecte, aderenta, cardinalul unei multimi, multimi numarabile, X_0, continum unei multimi ($2^{X_0} = c$)
$X_0 < c$ => ipoteza continuumului
Canter: Multimea tuturor functiilor reale are puterea $2^c \neq c$ => c^c (al 3-lea numar transfinit)
- multimea triatica
- relatiile lui Boule
Morgan – demonstraza 2 egalitati si foloseste pentru demonstrarea principiului dualitatii
P. Dubois Raymond – existenta multimilor nicaieri dense
Jordan – 1822 – notiuni de masura
Alte contributii: Hanssedorf, Bord, Zerwile, Sierpinski, Bernays, Bernstein
<u>Prima jumatate a secolului XIX</u>
- se extind proprietatile determinantilor
Gauss – 1801 – introduce notiunile de ordin, elemente, linii, coloane, diagonala principala, secundara, regula de dezvoltare dupa o linie, coloana, generalizeaza in 1841 determinantul Vandermont
Jacobi – 1841 – valoarea unui determinant nu se schimba daca adaugam la elementele unei linii elementele liniei inmultite cu un factor
Sylvester – 1851 –notiunea de matrice
Cauchy : regula de inmultire a determinantilor si o regula de inmultire a 2 matrici
K. Weierstrass – 1858 – daca ecuatia secundara are o radacina multipla de ordin k, determinantul are rangul de ordin n – k si reciproc
Cauchy : D' = D^{n-1} se numeste reciprocul lui D
Jacobi – 1841 – daca M, M' sunt minori de ordin n omologi si D si D' avem D' = D^{n-1}
$\overline{M}$, $\overline{M}$ complementul algebric al lui M
In 1827 un determinant stramb simetric de ordin impar este nul
n=3 $D = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$ **(inmultim cu -1 fiecare linie) => D' = -D**

Dar D' =D => D =0

Cauchy – 1848 – determinat stramb simetric de ordin par este patratul unui polinom – determinanti ortogonali
Jacobi – un determinant ortogonal de ordin n are valoarea ± 1 si depinde de $\frac{n(n-1)}{2}$ parametri independenti

Euler : un determinant ortogonal este corespunzator unei deplasari sau transformari ortogonale pe care o scriem astfel

$$x_i^{'} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n,\ i = \overline{1,n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^{'2}$$

Caybey : a exprimat o transformare ortogonala cu ajutorul celor $\frac{n(n-1)}{2}$ **parametri**

Jacobi : demonstraza ca un sistem omogen de n ecuatii cu n necunoscute si col ≠ sol banala daca matricea sistemului cu rangul ≤ n-1. Necunoscutele sistemului sunt proportionale cu siruri de ordin n-1

$$a_1x + b_1y + c_1z = a_2x + b_2y + c_2z + a_3x + b_3y + c_3z = 0$$

pentru a avea solutie trebuie ca $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

Presupunem 2 ecuatii independente : $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}$$

$$f(x_1 ... x_n) = \sum_{i,j}^{n} a_{ij} X_i X_j \quad (a_{ij} = a_{ji})$$

Gauss – 1801 – deneralizeaza procedeul lui Lagrange de descompunere in suma de patrate

Wolyni : forma, grad, ordin, discriminat, fara sederivata partiala

Forma polara : $f(x, y) = y_1 f_1(x) + y_2 f_2(x) + ... + y_n f_n(x) = \sum a_{ij} x_i x_j$

Forma adjuncta : $\varphi(u_1 ... u_n) = \sum_{ij} a_{ij} u_i u_j = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & u_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} & u_n \\ u_1 & u_2 & ... & u_n & 0 \end{matrix} \right\| \sum a_{ij} X_i X_j$

I.M. - CURS 10

1. **P.Aleksandrov: “Vedenie v teorii grupp”**
2. **G.Birkoff: „A survey of modern algebra“**

3. **Teodor Angheluță: „Curs de algebră superioară“, 2 vol., Timişoara, 1941-4945**
4. **Al.Kurosi: „Teoria Grup”, Moscova, 1944**
5. **I.Gelfired: „Lecții pe biniernii algebra”, 1948, Moscova**
6. **O.Onicescu şi Galbar: „Algebră”, 1948, Bucureşti**
7. **A.Maltev: „Asnovi linieri algebra”, 1948, Moscova**
8. **E.Borel: „Elements de la theorie des exemples”, Paris, 1949**
9. **D. Fadeev: „Sbornik zadaci pa vişei algebra”, Moscova, 1949**
10. **P.Alexandrov: „Vedenie vi destia teorii, nogest”, Moscova, 1949**
11. **I.Novoselov: „Algebra i elementarni funcții”, Moscova, 1952**

Cărți de cercetare

1. **Hermite: „Theorie des equationes modulaires”, Paris, 1859**
2. **H.Hankel: „Theorie der complex zahlensepsten”, (teoria sistemelor numerelor complexe), Leibzig, 1867**
3. **Camille Jendan: „Traste des substitutiones et desequations algebriques”, Paris, 1970**
4. **R.Dedekind: „Stetitientend irrationales zabren”, 1972**
5. **W.Grbles: „Elements of vector analysi”, New Haven, 1861**
6. **Sophus Lie: „ Theorie the transformationes gruppen”, 3 vol. 1888-1893**
7. **Ely carton: „Structure des gruppes transformationes finite „, Lion, 1894**
8. **Burnside: „Theory of groups of finite order”, Cambridge, 1897**
9. **K. Runge: „Proxis der Gleiching”, Leibzig, 1900**
10. **Bachner: „Introduction to higher algebra”**
11. **Fublini: „Teoria der grupp discontinue”, 1908**
12. **P.Montee: „Leccons sue les serees de pobynones a una variable complexe”, Paris, 1910**
13. **D.Hilbert: „Theorie des corp set des numbers algebriques”, Paris, 1913**
14. **O.Perron: „Irationalzahlen”, Berlin, 1921**
15. **Veblen: „Invariants of quadratic differential form”, Londra, 1927**
16. **V. Sierpinski: „Lecons surlesnumbers transfinites”, 1928, Paris**
17. **E. Steinitz: „Algebraiske theorie derkorpes”, Berlin, 1930**
18. **O.Scherere, e.Sperner: „Vobesungen inker matrizen”, Berlin, 1932**

Geometria preeuclidiană

În papirusurile egiptene, erau calculate corect ariile: triunghiului, paralelogramului. $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^3 \neq 3,16$

- **La caldeeni: calculul razei arc înscris unui cerc**
- **devine ştiimță datorită grecilor**

- **Tales din Milet (sec.VI, i.c): Teoria figurilor asemenea, unghi înscris într-un semicerc e unghi drept, egalitatea triunghiurilor, măsurarea înălțimii unui edificiu prin măsurarea umbrei sale, d(x,y), unde y nu este accesibil**
- **Şcoala lui Pitagora (sec.VI, i.H): relații între catetele şi ipotenuza unui triunghi dreptunghic, acoperirea planului cu triunghiuri echilaterale, suma unghiurilor unui triunghi, construirea pentagonului şi a decagonului regulat, înscrise în cerc, folosind împărțirea razei în raport mediu,**
- **noțiunea de raport mediu: Fie AB un segment împărțit de un punct M, AM=AB*MB, AM=x,** $x^2 + ax - a^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{2}(-1+\sqrt{5})$
- **poliedre regulate: tetraedru, octaedru, dodecaedru, icosaedru (după nr.fețelor)**
- **Hipocrate (sec.V, i.H.): arată că ariile cercurilor sunt proporționale cu pătratul diametrelor**
- **Aria figurilor formate de unele arce de cerc**
- **Teorema lui Pitagora generalizată:** $AB^2 = BC^2 + AC^2 \pm 2BC * DC$**, D-piciorul înălțimii din A**
- **Democrit (sec.V-IV i.H): o piramidă este congruentă cu o treime dintr-o prismă de aceeaşi bază şi h.**
- **Platon(sec.IV): a dat importanță definițiilor clare şi a noțiunilor**
- **Perfecționează construcțiile geometrice cu rigla şi compasul**
- **A descoperit poligoane semiregulate**
- **Eudoxius(IV, i.H): raportul volumelor a două sfere=raportul cuburilor diametrelor**
- **Demonstrează formula cercului şi a volumului piramidei**
- **Aristotel: suma unghiurilor exterioare ale oricărui poligon convex plan este egală cu 4 unghiuri drepte**
- **Cărți ale lui Euclid: (sec.III): 13 cărți:**
  - **1. Dreaptă, triunghiuri, paralele, paralelograme, relații metrice în triunghiul dreptunghic**
  - **expunere geometrică a unor identități algebrice**
  - **consacrată cercului**
  - **construcțiile poligoanelor regulate**
  - **asemănarea figurilor**
  - **teoreme asupra dreptelor şi planelor, relația de volum în legătură cu paralelipipedele**
  - **probleme, relații de comparare a volumelor referitoare la piramidă, cilindru, sferă**
  - **probleme metrice, referitoare la poligoanele regulate**
- **teorema unghiului exterior unui triunghi: este mai mare decât oricare din unghiurile adiacente**
- **teorema triunghiului isoscel: dacă un triunghi are două laturi egale, are şi două unghiuri egale şi reciproc**

- **în două triunghiuri ABC şi A'B'C' cu două laturi: AB şi A'B' congruente, la fel şi AC şi A'C', unghiul A mai mare ca A', determină BC mai mare ca B'C'**
- **problema paralelogramului dată de Euclid: dacă prin M ducem paralele QR şi PN la laturi, atunci paralelogramele PDRM şi QMNB sunt echivalente**
- **cateta este Mg între ip. şi proiecția ei pe ip.**
- **reciproca teoremei lui Pitagora**
- **construcția geometrică a ec.** $a(a-x)=x^2$ **unui pătrat congruent cu un poligon**
- **înălțimea unui triunghi dreptunghic este Mg între segmentul determinat pe ipotenuză**
- **un unghi înscris în cerc are jumătate din măsura arcului**
- **în patrulaterul inscriptibil unghiurile opuse sunt complementare**
- **teorema bisectoarei: bisectoarea taie latura pe care cade în rapot prop.cu laturile adiacente**
- **cazuri de asemănare**
- **construcția pe o latură dată a unei figuri asemenea cu o figură dată**
- **tranzitivitatea asemănării**
- **două figuri asemenea cu o a treia sunt asemenea între ele**
- **generalizarea teoremei lui Pitagora. Se construiesc figuri asemenea pe latura unui triunghi dreptunghic, aria figurii construite pe ipotenuză este suma ariilor figurilor de pe catete**
- **intersecția a două plane perpendiculare pe un alt plan este perpendiculară pe plan**
- **suma unghiurilor fețelor unui poliedru este mai mică decât 4 unghiuri drepte**
- **construcția unui triedru când sunt date fețele**
- **descompunerea prismei triunghiulare în trei piramide drepte**
- **teorema referitoare la poliedre regulate**

I.M. - Curs 11

Euclid-Pitagora generalizeaza figuri asemenea pe figurile unui triunghi,dreptunghi, perpendicularele dintr-un pct pe o dreapta sunt situate intr-un plan ,2 perpendiculare pe acelasi plan sunt || si reciproc , intersectia a 2 plane perpendiculare pe un plan e perpendiculara pe un plan , suma unghiurilor fetelor unui poliedru are 4 unghiuri drepte ,constructia unui unghi triedru cand pe domeniul fetelor,descrierea prismei unui triunghi are 3 piramide echivalente ,orice con e a3-a parte a unui cilindru cu aceiasi baza .
Intr-un poligon regulat ABCDE , diagonalele AC si EB sunt concurente in H rapoartele mediei .Aratati ca HC=BC m(ABE) =m(BCA) $\Rightarrow \frac{AH}{AB}=\frac{AB}{AC}$

$\Delta ABH \approx \Delta ABC$ **;DC=**l_5**=2rsin3b;**$l_5^2=l_6^2+l_{10}^2$**;** $l_{12}=\frac{r}{3}(\sqrt{15}-\sqrt{3})$**;** $l_{20}=\frac{r}{5}(\sqrt{10(5-\sqrt{5})})$**;**

$\sin^2 36-\sin^2 18=\sin 54-\sin 18=\frac{1}{4}$

Hipsicle cartea 14 relateaza despre poligoane shi poliedre regulate.

Asemanari –cartea 15 –continuarea studiului poliedrelor.Teon din Alexandria (sec 4)-adaptare a elementelor lui Euclid dandu-se un constructor poligonal

1.Dublarea cublui :fiind dat un cub cu latura sa se construiasca un cub de volum dublu x= ? ai $x^3=2a^3 \Rightarrow x=a\sqrt{2}$ Hipocrat reduce problema la determinarea a 2 muchii proportionale. $\frac{a}{x}=\frac{x}{x}=\frac{x}{2a}$

2.Construirea cercului :sa se construiasca un patrat echivalent cu un cerc dat.Fie r raza cercului ,x= ?ai $x^2=\Pi r^2 \Rightarrow x=r\sqrt{\Pi}$.Deoarece lungimea cercului e $2\Pi r$,constructia lui Π revie la construirea unui segment de aceeasi lungine cu cea a cercului.

3.Transectiunea unghiului :sa se imparta un unghi cu rigla si compasul in 3 parti egale sin3x=3sinα -4sin$^3\alpha$ Problema revine la construirea solutiei ec $4x^3-3x+a=0$
$a=3\sin\alpha, x=\sin\alpha$

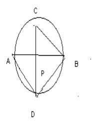
4.Postulatul || (al5-lea) :2 drepte se la acea parte fata de care ,toate de-o parte a secantelor, formeaza unghiuri a caror suma e < decat 2 unghiuri drepte.

Tentatave :Porodom(sec 1 i.Hr)Genuns sec 1,Ptolemeu sec2,Proclus(sec5)

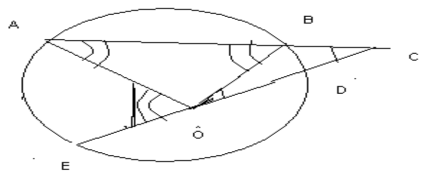
Acest postulat e ≡ cu paralelism(putem duce o singura || unei drepte date)e ⇔ cu suma unghiurilor unui △ echivelent cu « toate pctele situate de aceeasi parte = departate de o dreapta , se afla tot pe o dreapta »

5.Constructia poligoanelor regulate :problema prezinta interes ptr n prim sau putere de nr prim.S-a rezolvat ptr n=3 si n=5

Arhimede (sec 3i.Hr) :concurenta h si medianelor intr-un △printr-un pct P ducem 2 coarde ⊥ intr-un cerc.



$PA^2+PB^2+PC^2+PD^2=const$
$AD^2+BC^2=AC^2+BD^2=const$
Unghiuri complementare ABD si CDB ,deci suma patratelor lor e patratul diametrului cercului.



sa dem ca m(AOF)=3m(BOC)
m(OAB)=m(OBA)=2m(BCO)
m(AOE)=m(OAC)+m(BCO)=3m(BOC)
Fiind data suma a 2 nr $\Re$ a si b cu a<b ∃ un n$\in N$ ai na>b

Determina pe Π cu 2 zecimale exacte

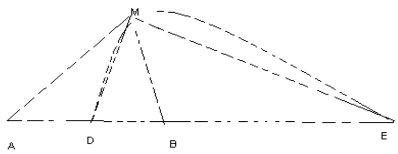
Calculeaza A si V sferei.Arata ca o calota este ⇔ cu un arc a carui raza este raza cercului sferic al bazei A=$\Pi l^2=2\Pi rh$,h=h calotei.Arata ca V sferei =$\frac{2}{3}$V cilindrului circumscris ,A sferei=$\frac{2}{3}$A totala a cilindrului circumscris

Se da o sfera .Sa se sectioneze o sfera printr-un plan ai volumele obtinute sa stea intr-un raport dat .Fie a raza sferei,x distanta de la centru la planul de sectiune .V unuia din calotele obtinute = diferenta dintre sectorul sferic cu baza o calota de h=a-x si un con a catui h=x.Iar patratul razei este a^2-x^2

$\frac{2\Pi a^2(a-x)}{3}-\frac{\Pi(a^2-x^2)x}{3}=\frac{\Pi}{3}(2a^3-3a^2x+x^3)$ **Volumul obtinut este intr-un raport dat fata de V sferei avem :** $x^3-3a^2x+ka^3=0$ **care conduce la construirea radacinilor unei ec de gr3**

Apoloniu(sec3i.Hr)

Multimea pctelor ptr care raportul distantelor la 2 pcte fixe este const este un cerc cu centrul pe dreapta pctelor fixe



$\frac{MA}{MB}=K$ **Bisectoarele int si ext a unghiului AMB sunt** $\perp$ **si taie pe AB in D si E**

$\frac{DA}{DB}=\frac{MA}{MB}=K$ **si** $\frac{EA}{EB}=\frac{MA}{MB}=K$ **Pctele D si E sunt fixe**

Deoarece unghiul DME este drept $\Rightarrow$ **pctul M este situat pe cercul de diametru DE Acest cerc se numeste cercul lui Apoloniu.**

Sa se duca printr-un pct dat o coarda de marime data intr-un cerc dat.A=pctul dat r=raza cercului,ducem coarde de lungime 2l.Coardele de lungime 2l infasoara un cerc concentric de raza $a=\sqrt{r^2-l^2}$ **Ducem tg cercului concentric .l<r,d>a deci problema posibila(admite 1sau 2 sol).Construirea unui cerc tg la 3 cercuri date (problema are cel mult 8 solutii)**

Zenodor(sec2iHr)intriduce figurile de Amax dintre figurile care au acelasi P si reciproc.Dintre toate $\triangle$ **de acelasi P Amax o are** $\triangle$**echilateral.Dintre toate patrulaterele inscriptibile de acelasi P Amax o are patratul** $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ **Heron unde p=const,a,b,c variabile de suma const.Max unui produs de factori de suma const este cand factorii sunt egali.Dintre toate poligoanele izometrice cu acelasi nr de laturi poligoanele regulate au Amax si reciproc.**

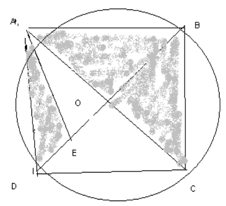
Extinde aceste probleme in spatiu :ptr sfera si poliedre cu aceeasi A laterala.

Hipack(sec2 i.Hr) $3l_9=2r$ **;**$25l_{11}=14r$ **;**l_n**=latura poligonului regualat cu n laturi,r=raza cercului inscris**

Heroc(sec 1-2 iHr)Formula aproximativa a heptagonului regulat $8l_7=7r$**,A rombului in fctie de diagonale,A unui patrulater ortogonal,A ptr** $\triangle$ **,patrulater**

Ptolemeu :intr-un patrulater inscriptibil,produsul diagonalelor=suma produselor laturilor opus

E



AB*CD+AD*BC=AC*BD ,O= $\cap$ **diagonalelor**

$\in BD$ **ai m(DAE)=m(BAO) ;** $\triangle ADE\approx\triangle ABC$ $\frac{AD}{DE}=\frac{AC}{BC}$

$\triangle ABE\approx\triangle ABC\Rightarrow\frac{AB}{BE}=\frac{AC}{DC}$

AC*DE=AD*BC

AC*BE=AB*DC

AC(DE+BE)=AD*BC+AB*CD AC*BD=AD*BC+AB*CD Daca AC = diametru notam $AB=2x$ **si** $AD=2y$

AB=sinx,BC=cosx,AD=siny,DC=cosy,BD=sin(x+y)

T.Ptolemeu : sin(x+y)=sinxcosy+sinycosx. Construieste l_{10} si l_5 regulat si determina pe Π cu 4 zecimale
Procus=suma unghiurilor unui poligon convex S=(2n-4),n=nr laturilor poligonului
Problemede geometrie elementara (Papus)T medianei,T celor 3 $\perp$T privind picioarele bisectoarelor ext sunt colineare,problema centrelor de asemanare a 2 cercuri
Papus :pe laturile ΔABC construim paralelograme arbitrare ABDC,ACFG. FieH= $\cap$ dreptelor DE si FG .Ducem segmente BI si CJ =si || cu AH .Aria BCIJ este = suma A primelor 2 paralelograme.Este o generalizare a T lui Pitagora
Daca taiem un fascicul de 4 cu 2 secante d si d' raportul anarmonic este invariant
Daca ABCD este un patrulater inscris in cerc ,iar M este pe cerc produsul distantelor pctului la 2 laturi opuse patrulaterului este produsul distantelor la celelalte 2 laturi.Studiaza formula figurii data de 6 pcte pe o dreapta $\frac{A'B}{A'C}*\frac{B'C}{B'A}*\frac{C'A}{C'B}=1$ (involutie)
Constructia Δinscris in cerc ale carui laturi trec prin 3 pcte colineare date.

I.M - Curs 12
Geometria posteuclidiana (continuare din c11)
Arhimede: conicele cu centru = locul punctelor planului pt care patratul distantei la o dreapta fixa in raport constant cu aria triunghiului construit pe distanta proiectiei punctului la dreapta; determina aria elipsei ($=\pi ab$); conicele se obtineau prin sectiuni facute in con; spirala pt care raza vectoare creste proportional cu unghiul de rotatie, ecuatia spiralei fiind $r = a\theta$; paraboloidul de rotatie, hiperboloidul, elipsoidul de rotatie; determina volumul copitei cilindrice (intersectia a 2 cilindri egali cu axele perpendiculare concurente); a studiat 13 poliedre semiregulate; aria segmentului parabolic; volumul paraboloiduluide rotatie.
Apoloniu: lucrare in 8 capitole (4 in greaca, 3 traduse in araba, 1 pierduta); diametri conjugati, tangente normale, asimptote, polare; daca F si F' sunt focare, $MF + MF' = const$ => elipsa, $MF - MF' = const$ => hiperbola, unde M e un punct mobil pe curba; da ecuatia a 2 diametri conjugati: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; evita sa ia in considerare punctul de la infinit; arata ca exista cel mult 4 puncte pe o conica ale caror normale trec printr-un punct P dat; curba astfel formata s.n. curba lui Apoloniu; daca o tangenta la o conica cu centru taie conica in varfuri in M si M', atunci cercul de diametru MM' trece prin fiecare, adica $\frac{1}{MF}M' = \frac{1}{MF'}M' = const$; tangenta la o hiperbola intersecteaza pe asimptote un triunghi de arie constanta; dintr-un punct al unei hiperbole ducem paralela cu asimptotele, paralelogramul format are arie constanta; o dreapta arbitrara taie o hiperbola in P si Q si asimptotele in X si Y => PX=QY; punctele de contact ale tangentei intr-un punct al hiperbolei e mijlocul segmentului interceptat pe asimptote (MX=MY); prin punctele P si P' ale unei hiperbole ducem 2 drepte paralele ce taie asimptotele in X ,Y si X' ,Y' => $PX \cdot PY = P'X' \cdot P'Y'$; elicea – curba descrisa de un punct M supus unei rotatii de axa

OX si unei translatii paralele cu OZ; conicele focale – locul varfurilor conurilor circulare a caror sectiune e o conica data.
Papus: locul punctelor pt care raportul distantelor la focar si la directoare e constant (punctele unei parabole sunt egal departate de un punct si de o dreapta); construieste un segment de marime data cuprins intr-un unghi dat si trecand printr-un punct dat; elicoid – se duc prin punctele unei elice drepte perpendiculare pe axa si concurente cu ea.
Proclus: daca un segment mobil AB constant se sprijina pe 2 axe perpendiculare, orice punct M al lui descrie o elipsa; daca M e mijlocul lui AB => cerc; daca e in prelungirea segmentului => elipsa.
Diocles: consideram cercul de diametru OA, o secanta mobila dusa prin O taie cercul in N si tangenta din punctul A in P, luam M pe ON a.i. OM=NP, atunci cisoida e multimea punctelor M; cisoida are ecuatia $x(x^2+y^2)=y^2$**.**
Nicomede: consideram un punct O si o dreapta d, P un punct mobil pe d, purtam MP si NP de o parte si de alta a lui OP, atunci multimea punctelor M si N formeaza concoida; ecuatia concoidei este $(x^2+y^2)(x-a)^2=l^2y^2$**, unde l=MP=NP, a=OA, unde** $S(OA,d)=90$ **(l>a => O e nod, l=a => O e punct de intoarcere, l<a => O e punct izolat).**
Eudoxiu: curba numita ipopeda care rezulta din intersectia unei sfere cu un cilindru de rotatie tangent.
Hiparc: proiectia stereografica a sferei pe plan (folosita la intocmirea hartilor).
Perseu: spiricele – curbe care obtin prin sectiuni in tor prin plane perpendiculare cu axa.
Menelau: triunghiurile formate de cercurile mari pe sfera; concurenta medianelor si a bisectoarelor triunghiurilor sferice; 0 < suma laturilor < 2π **;** π **< suma unghiurilor <** 3π**; daca un cerc mare taie laturile unui triunghi sferic ABC in** A', B', C'**, avem relatia** $\frac{\sin A'B}{\sin A'C}\cdot\frac{\sin B'C}{\sin B'A}\cdot\frac{\sin C'A}{\sin C'B}=1$ **(raza sferei e 1).**
Serenus: probleme de maxim si minim la conuri si cilindri.
Ptolemeu: $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$**;** $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$**,** $\cos a=\cos b\cos c,$
$\sin b=\sin a\sin B, tgb=\sin ctgB, tgb=tga\cos C$**.**
Hipocrat: $a^2=b^2c^2-2bc\cos A$**.**

Euclid – „Stihia”, Venetia 1482
Arhimede – „Peri Sferas Ke Kilindru”, Venetia 1543
Apoloniu – „Konika”, cartile 1-4 1537, cartile 5-7 Florenta 1661
Papus – „Sinagogi matematiki”, Bologna 1566
Trigonometria & geometria in evul mediu
In India si Arabia s-a dezvoltat trigonometria din geometria antichitatii.
Ariabhata: – indienii introduc sinusul ca jumatate din coarda.
Habas: arabii introduc celelalte functii trigonometrice.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$tgx = \frac{\sin x}{\cos x}, ctgx = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \cos ecx = \frac{1}{\sin x}$$

Ign Inis: $\cos x + \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$.

Al Kasi: $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

Mirakanta: $arctgx = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \ldots$

Al Habas: $\theta - k\cos\theta = t, \theta_1 = t + k\sin\theta, \theta_2 = t + k\sin\theta_1$.

Al Biruni: teorema sinusurilor; $\sin x = \sin x_0 + (x-x_0)\Delta x_0 + \frac{1}{2}(x-x_0)^2\Delta^2 x_0 + \ldots$

Al Batoni: $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$.

Abul Vafa: $\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin a = c}{\sin C}$ **; tabele prin formule de interpolare.**

Apar tabele trigonometrice.

Baskara: tabelele functiilor.

Al Tusi: expunere completa a trigonometriei.

Muller: expunere completa a trigonometriei cu demonstratii personale.

Brahmagupta – „Brahma sputa sidanta"

Al Tusi – „Cartea patrulaterului", 1260

Al Kasi – „Tratat despre cerc", 1424

Muller – „5 carti despre triunghiuri oarecare", 1464

Mirakanta – „Culegere stiintifica", 1501

Brahmagupta: formulele ariilor S in functie de laturi ale unui patrulater; $S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$, $e^2 = \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}$, $f^2 = \frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}$, $\frac{e}{f} = \frac{ab+cd}{ad+bc}$.

Abul Vafa: probleme de constructie cu rigla si compasul referitoare la cerc.

Al Haisam: problema biliardului circular – determinarea directiei in care trebuie trimis un mobil A dintr-un cerc pt ca dupa reflexii succesive sa revina in A; calculeaza volumul unui obelisc generat de un arc de parabola in rotatie in jurul coardei.

Nemorinus: in proiectie stereografica, cercurile se transforma tot in cercuri.

Kusanus: procedeu de rectificare a arcelor mici.

Muller: avand segmentul AB, determina o dreapta d perpendiculara a.i. $\measuredangle AMB$ **sa fie maxim, M apartine dreptai.**

Baskara: fiind date A, B si un cerc, sa se determine punctului cercului a.i. dupa o reflexie o raza ce porneste din A sa ajunga in B; reduce problema la intersectia conului cu o hiperbola.
Tabit Ibn Cora: latura l a heptagonului regulat inscris in cercul de raza 1 e o radacina a ecuatiei $x^3 + 1 = x^2 + 2x, x = l^2 - 2$.

I.M. - Curs 13

<u>Axioma paralelelor</u>
Al Juhan(sec.9) se fol. In dem. de:
Daca doua drepte formeaza unghiuri corespondente egale cand sunt taiate de o secanta, aceeasi relatie este valabila cand sunt taiate de orice secanta.
Nairizi(sec.9): dem. axiomei admitand existenta unui dreptunghiprop. <=>cu axioma paralelelor.
Al Haisam(sec. 10-11) defineste paralelele ca echidistante (o noua proprietate echivalenta cu axioma).Introduce un patrulater cu trei unghiuri drepte si prin red la absurd dem. ca al patrulea unghi nu este nici ascutit nici obtuz.
Omar Kaiam –se ocupa de aceeasi problema; a aratat k doua drepte perpendiculare pe a treia sunt echidistante⇔postulatul lui Euclid.
Al Tusi (sec. 13) reia demonstratia precedenta. Segmentele determinate de perpendicularele pe o dreapta pana la intersectia cu o alta dreapta se micsoreaza intr-un sens si se maresc in altul.
<u>Texte:</u>
- **Salvasutra=manuscris anonim indian**
- **Constructii a figurilor geometrice : patratul si cercul**
- **Aproximari ale numerelor irationale**
- **Brahmagupta : Brahmasputasidanta(628), tiparita in India in 1903**
- **Abul Vafa: ”Vitab fi mai ichtaj”**
- **Thomas Branhvardimus**

<u>Trigonometria (Renastere si ev mediu)</u>
- rezultatele au aparut la intamplare
- toate formulele erau demonstrate prin rationamente geometrice
- in sec. 17 s-a fixat simbolistica
- denumirea de sinus apare la Gerardo din Cremona iar prescurtarea sin se datoreaza lui Herigonne(1634)
-den. de cosinus a intrat in uz datorita lui Newton(1685), iar prescurtarea de cos dateaza din 1674
-den de tangenta ->1620 Werner
-Werner mai da formule de transformare a sumei in produs:
-sin (mx) = 2*sin(m-1)x * cos(x) – sin(m-2)x
-cos (mx) = 2*cos(m-1)x *cos(x) – cos(m-2)x
Cu ele s-au calculat tabelele numerice plecand de la x =10 secunde

Formulele arcului pe jumatate erau cunoscute de la Ptolemeu dar au fost puse in forma moderna de Ludolph von Peulen:

$$\sin\frac{x}{2} = \sqrt{1 - \frac{\cos x}{2}} \qquad \cos\frac{x}{2} = \sqrt{1 + \frac{\cos x}{2}}$$

-Viete: formulele de transformare a sinusurilor in produse

cosec(x) + ctg(x) = ctg(x/2)

-Snell : $1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} \sin kx = ctg(x/2)$

$$2\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{(2k-1)x}{2} = \cos ec(x/2), x = \frac{\pi}{2n}$$

$$2\sin\frac{x}{2}\sin mx = \cos(m - 1/2)x - \cos(m + 1/2)x$$

A. Cavalieri; procedeu trigonometric de rezolvare a ec de gr2

- **$X^2 + px + q = 0$**

  x1= $\sqrt{q}tg\rho$

  x2= $\sqrt{q}ctg\rho$ **, sin q** $\rho = \frac{2\sqrt{q}}{p}$

-Newton: formule de calcul a arcului multiplu in functie de arcul simplu

$$\sin nx = n\sin x + \frac{n(1-n^2)}{3!}\sin^3 x + \frac{n(1-n^2)}{5!}\sin^5 x + ...$$

-Bernoulli: formule generale ptr sin si cos. In 1722 : formula tangentei sumei arcelor

<u>Aplicatii ale geometriei in trigonometrie</u>

Trigonometria planului.

La teorema lui Pitagora generalizata si la teorema sinusurilor se adauga th. cosinusurilor data de Tuho Brahe (a= b cosC + c cosB)

Viete: th. tangentei: $tg\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}ctg\frac{x}{2}$

Lanchen: tg^2 $\frac{A}{2} = \frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}$

Newton 1707 $\cos((B-C)/2) = \frac{b+c}{2}\sin\frac{A}{2}$

$$\sin\frac{(B-C)}{2} = \frac{b-c}{2}\cos\frac{A}{2}$$

Schlussel: stabileste o corespondenta intre proiectia stereografica intre sfera si plan : $\cos a = \cos b * \cos c + \sin b \sin c \cos a$

Viete :

cosA=cosB*cosC + sinB sinC cosA

$\sin C\cos a = \sin b\cos A + \sin a\sin c\cos B$

$ctgb \sin c = \cos c\cos A + \sin A ctgB$

Neper: descopera o regula pt relatiile in triunghiul sferic dreptunghic

ABC tringhi dreptunghic in A

$$\frac{\pi}{2}-b, \frac{\pi}{2}-c, a, B, C$$

At. cosinusul unuia oarecare este egal cu produsul elementelor adiacente sau produsul celorlalte doua elemente:

$$\cos a = ctgBctgC = \cos b \cos c \sin c$$

$$\cos B = ctga * tgc = \cos b \sin C$$

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b \sin c}$$

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{\sin p \sin(p-a)}{\sin b \sin c}$$

Carti:

- Lanchen: ”Canoni doctrinae triangulorum”;

- Viete: “Canonius mathematicus” Paris;

- Briggs si Bilbrand: ”Trigonometria britannica”;

- Oughtred: “Trigonometria”;

- Caswell: “Trigonometry both plane and sferical”