Societatea de Ştiinţe Matematice din România
Filiala Caraş-Severin

REVISTA DE MATEMATICĂ

A ELEVILOR ŞI PROFESORILOR

DIN JUDEŢUL CARAŞ-SEVERIN

Nr. 28, An X-2009

Editura „Neutrino”
Reşiţa, 2009

Titlul: Revista de matematică a elevilor şi profesorilor din judeţul Caraş-Severin
I.S.S.N. 1584-9481

Mobil: 0741017700
www.neutrino.ro
E-mail: editura@neutrino.ro

CUPRINS

Gânduri din alte timpuri

☼ Lucrurile mari n-au nevoie decât de a fi înfățișate cu simplitate.

(La Bruyère, 1645 – 1696)

☼ Un om de spirit și de bun simț spunea odată despre un doctor plin de gravitate: omul acesta trebuie să fie un mare ignorant, căci răspunde la toate întrebările care i se pun.

(Voltaire, 1694 – 1778)

☼ Dacă prin minune înțelegi un efect a cărui cauză nu o cunoști, atunci totul este o minune.

(Voltair)

☼ Orgoliul celor mici constă în a vorbi totdeauna despre persoana lor, iar al celor mari, de a nu vorbi niciodată.

(Voltaire)

☼ Dezaprob spusele tale, dar voi apăra până la moarte dreptul de a le rosti.

(Voltaire)

☼ Iubește adevărul, dar iartă eroarea.

(Voltaire)

☼ Inspirația este soră bună cu munca ordonată, de toate zilele.

(Baudelaire, 1819 – 1887)

☼ Mijlocul de a fi original: sinceritate absolută.

(Baudelaire)

☼ Fără expresie, frumusețea este, poate, o impostură.

(Balzac, 1799 – 1850)

☼ Munca puțină dă mult amor propriu, în timp ce multă muncă trezește o nețărmurită modestie.

(Balzac)

☼ Respectul este o barieră care ocrotește în mod egal pe cel mare și cel mic; fiecare, de partea lui, se poate privi în față.

(Balzac)

Asupra unor probleme de la O.J.M 2009

Steluța Monea şi Mihai Monea

În data de 7 martie 2009 s-a desfăşurat faza judeţeană a Olimpiadei de Matematică. Problemele propuse precum şi soluțiile din barem sunt probabil cunoscute de toți cititorii; scopul acestei scurte note este de a prezenta alte soluții pentru două dintre problemele date.

Problema 2 (clasa a X-a) Să se determine numerele complexe z_1, z_2, z_3 de acelaşi modul, cu proprietatea că $z_1+z_2+z_3=z_1z_2z_3=1$.

Soluție: Egalitatea fiind simetrică , trebuie determinată doar o soluție restul obținându-se prin permutări. Din $z_1z_2z_3=1$ deducem că numerele au modulul egal cu 1. Apoi avem $z_1+z_2+z_3=1 \Rightarrow z_1+z_3=-z_2+1$. Atunci punctele $A(z_1), B(-z_2), C(z_3)$ şi $D(1)$ sunt vârfurile unui paralelogram înscris în cercul unitate, deci $ABCD$ este dreptunghi. Deducem că $z_1+z_3=-z_2+1=0$ de unde avem $z_2=1$, şi cu $z_1z_3=1$ deducem că $z_1=i, z_3=-i$. □

Problema 4 (clasa a IX-a) Să se determine funcțiile $f:\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ care verifică relația $\dfrac{f(x+y)+f(x)}{2x+f(y)}=\dfrac{2y+f(x)}{f(x+y)+f(y)}$, pentru orice $x, y \in \mathbb{N}^*$.

Soluție: Ca şi în barem, alegem la început $x=y$ care ne conduce la $\dfrac{f(2x)+f(x)}{2x+f(x)}=1$, de unde $f(2x)=2x$, $\forall x \in \mathbb{N}^*$. Pentru $x>y$ avem

$$\frac{f(x+y)+f(x)}{2x+f(y)}=\frac{2y+f(x)}{f(x+y)+f(y)}=\frac{f(x+y)+f(x)-(2y+f(x))}{2x+f(y)-(f(x+y)+f(y))},$$

adică $\dfrac{f(x+y)+f(x)}{2x+f(y)}=\dfrac{f(x+y)-2y}{2x-f(x+y)}$. Datorită definiției lui f deducem că $2y<f(x+y)<2x$. Atunci alegem $y=k, x=k+1$ şi obținem $2k<f(2k+1)<2k+2$, $\forall k \in \mathbb{N}$, ceea ce conduce la $f(2k+1)=2k+1$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Obținem deci $f(n)=n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. □

Profesori, Colegiul Național Decebal, Deva

O aplicație a seriei geometrice în matematicile financiare

Adina Florența Giuclea şi Marius Giuclea

În acest articol vom prezenta o aplicație a seriei geometrice în domeniul matematicilor financiare, mai exact cum se modelează matematic un şir de plăți constante efectuate pe durată nedeterminată(de exemplu o pensie).

Se numeşte progresie geometrică un şir de numere reale al cărui prim termen este nenul, iar fiecare termen începând de la al doilea se obține din precedentul prin înmulțirea cu acelaşi număr constant nenul. Formula termenului general al acestui şir este $b_n=b_1\cdot r^{n-1}$, $n\geq 1$ unde b_1 se numeşte primul termen, iar r rația progresiei.

De exemplu şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, unde $a_n=r^n, r\in\mathbb{R}_+^*$, este o progresie geometrică.

Suma primilor n termeni ai acestei progresii geometrice este dată prin:

$$S_n=\begin{cases}\dfrac{1-r^n}{1-r}, & r\neq 1\\ n, & r=1\end{cases}, \forall n\geq 1.$$

Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale. Suma infinită $a_1+a_2+..+a_n+...$ se numeşte *serie* (numerică) de termen general a_n şi se notează $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Există mai multe situații posibile în teoria sumelor infinite de numere reale, dintre care să menționăm câteva în cele ce urmează:

- dacă $a_n = 1$, $\forall n \geq 1$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + 1 + ...$ deci suma tinde la $+\infty$;

- dacă $a_n = 0$, $\forall n \geq 1$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0 + 0 + ...$, deci suma este 0;

- dacă $a_n = (-1)^n$, $\forall n \geq 1$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = (-1) + 1 + (-1) + ...$ deci suma nu poate fi precizată.

Astfel, pentru a caracteriza diversele cazuri ce apar, se introduc definițiile ce urmează.

Suma finită $S_n = a_1 + a_2 + .. + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $n \geq 1$ se numeşte *sumă parțială* de ordin *n*, asociată seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ iar şirul $(S_n)_{n\geq 1}$ se numeşte *şirul sumelor parțiale* asociat seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Spunem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este *convergentă* dacă şi numai dacă şirul sumelor parțiale $(S_n)_{n\geq 1}$ este *convergent* (adică $\exists \lim_{n\to\infty} S_n \in \mathbb{R}$). În acest caz limita şirului $(S_n)_{n\geq 1}$, notată *S*, se numeşte *suma seriei* şi scriem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se numeşte *divergentă* dacă şi numai dacă şirul sumelor parțiale $(S_n)_{n\geq 1}$ este *divergent* (adică $\lim_{n\to\infty} S_n$ este $+\infty$ sau $-\infty$ ori nu există).

Un exemplu important în teoria seriilor numerice este <u>seria geometrică</u>: $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + ..., r \in \mathbb{R}$

În acest caz $a_n = r^n, \forall n \geq 0$ şi

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k = \sum_{n=0}^{n-1} r^k = 1 + r + r^2 + ... + r^{n-1}, \text{ deci}$$

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{1-r^n}{1-r}, & r \neq 1 \\ n, & r = 1 \end{cases}, \forall n \geq 1.$$

Deducem $\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-r}, & r \in (-1,\ 1) \\ +\infty, & r \in [1,\ \infty) \\ \text{nu exista}, & r \in (-\infty,\ -1] \end{cases}$ de unde rezultă că:

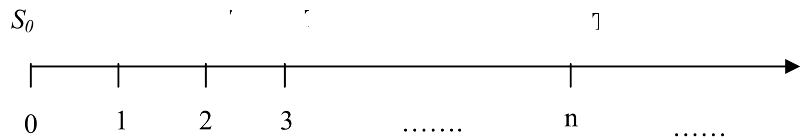
- *seria geometrică este* ***convergentă*** *dacă şi numai dacă* $r \in (-1, 1)$ *având în acest caz suma* $\frac{1}{1-r}$ şi scriem $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$
- *este divergentă când* $r \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

Seria geometrică are aplicații în matematicile financiare, în calculul plăților eşalonate. Termenul de plată reprezintă o operație financiară ce poate fi o plată propriu-zisă, un plasament bancar, un venit, etc. Dacă operațiunea de plată se face la anumite intervale de timp, avem de-a face cu plăți eşalonate, sau rente.

Plățile esalonate se pot clasifica după rata plătită (constante sau variabile), după momentul plății (anticipate-la începutul intervalului de timp sau posticipate-la sfârşitul perioadei), după intervalul la care se face plata (anuale, semestriale, trimestriale, lunare). Plățile eşalonate anuale se numesc *anuități*. Una din cele mai cunoscute plăți constante este *pensia*, care fiind plătită pe durata nedeterminată (în perpetuitate), nu poate fi modelată matematic precum o sumă finită de plăți. Vom considera în continuare, pentru claritatea expunerii, cazul anuităților perpetue. Pentru cazul general, al unor plăți corespunzătoare unei durate de timp arbitrare, modelarea este analoagă cu condiția aflării dobânzii unitare aferente acelei perioade de timp.

<u>Calculul valorii actuale a unui şir de anuități perpetue</u>

Ce sumă S_0 (valoarea actuală) trebuie depusă în momentul $t = 0$ pentru a putea primi în perpetuitate, o sumă constantă *T*, la sfârşitul fiecărui an, dacă dobânda unitară anuală este *i* (procentul anual/100)?



În acest context modelul matematic al plăților în perpetuitate este un şir numeric constant cu valoarea *T*. Cum plățile sunt la momente diferite de timp, valoarea actuală S_0 se calculează ca fiind suma valorilor actuale corespunzătoare acestor plăți.

In cazul unei operațiuni financiare pe durată mai mare de un an (cum este şi cazul de față) se aplică în general dobânda compusă. După un an, în regim de dobândă compusă, valoarea finală a unei sume inițiale *VA* va fi $VF = VA\left(1+i\right)$ iar după *k* ani vom avea formula

$VF = VA\left(1+i\right)^k, \forall k \in \mathbb{N}^*$.Ca urmare, în regim de dobândă compusă, valoarea actuală a unei sume *T* plătită după *k* ani este $\frac{T}{(1+i)^k}, \forall k \in \mathbb{N}^*$.

Aşadar $S_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T}{(1+i)^k} = \frac{T}{1+i} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+i}\right)^k$ şi,cum $i > 0$ rezultă că $r = \frac{1}{1+i} \in \left(0,1\right)$, deci suntem în ipoteza când seria geometrică este convergentă. Aplicând formula $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$ obținem

$$S_0 = \frac{T}{1+i} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{1+i}} = \frac{T}{1+i} \cdot \frac{1+i}{i} = \frac{T}{i}.$$

BIBLIOGRAFIE:

1. Gheorghe Cenuşă şi colectiv - Matematici pentru economişti, Editura Cison, Bucureşti, 2006.
2. Ion Purcaru, Oana Purcaru – Introducere în matematici financiare. Modele şi formule, Editura Economică, 2008.

Profesoară, Colegiul Tehnic „Dimitrie Leonida", Bucureşti
Profesor, Academia de Studii Economice, Bucureşti

Metode de rezolvare a problemelor de coliniaritate

Petru Augustin şi Ioan Septimiu Dinulică

Numim coliniaritate poziționarea a două sau mai multe puncte pe aceeaşi dreaptă.În continuarea definiției dorim să prezentăm câteva din cele mai folosite metode de demonstrare a coliniarității,la nivel gimnazial:

a)Demonstrarea coliniarității folosind teorema reciprocă a unghiurilor opuse la vârf

Dacă punctul A este situat pe dreapta EF ,iar punctele B şi C sunt situate în semiplane diferite față de EF şi $\measuredangle BAF \equiv \measuredangle CAE$ atunci punctele A, B, C sunt coliniare.

b)Demonstrarea coliniarității cu ajutorul unghiulul alungit (unghiuri adiacente suplementare)

Dacă punctele A şi B sunt situate de o parte şi de alta a dreptei CD astfel încât $m(\measuredangle ACD) + m(\measuredangle DCB) = 180^o$, atunci punctele A, B, C sunt coliniare.

c)Demonstrarea coliniarității prin identificarea unei drepte ce conține punctele respective

Dacă punctele A, B, C aparțin unei drepte unice (bisectoare,mediatoare etc.) ele sunt coliniare.

d)Demonstrarea coliniarității folosind postulatul lui euclid (axioma paralelelor)

Dacă dreptele AB şi BC sunt paralele cu o dreaptă d atunci, în baza postulatului lui Euclid, punctele A, B, C sunt coliniare.

e)Demonstrarea coliniarității folosind axioma de construcție a unghiului

Dacă B şi C sunt în acelaşi semiplan determinat de dreapta AD şi $\measuredangle DAB \equiv \measuredangle DAC$,atunci A, B, C sunt coliniare

f)**Demonstrarea coliniarității punctelor A, B, C arătând că $AB + BC = AC$.**

Mai departe prezentăm câteva probleme pentru a ilustra folosirea fiecăreia dintre metodele expuse anterior.

a)Demonstrarea coliniarității folosind teorema reciprocă a unghiurilor opuse la vârf

1) *Se consideră patrulaterul $ABCD$ şi E mijlocul lui $[AB]$,iar R mijlocul lui $[CD]$.Prin E se duc EF paralelă la BC şi EQ paralelă la AD , iar prin vârfurile C şi D se duce câte o paralelă la AB .Obţinem paralelogramele $BCFE$ şi $AEQD$. Să se arate că vârfurile F şi Q ale acestor paralelograme sunt coliniare cu R .*

Soluţie: $BCFE$ este paralelogram,deci $[CF]\equiv[BE]$ (1).

Din paralelogramul $AEQD$ obţinem $[EA]\equiv[QD]$(2).Cum E este mijlocul segmentului $[AB]$,obţinem $[BE]\equiv[EA]$(3).Din (1), (2) şi (3) rezultă că $[CF]\equiv[QD]$(4).Punctul R este mijlocul lui $[CD]$, deci $[CR]\equiv[DR]$ (5). Mai avem că $CF \parallel BA \parallel QD$,deci $CF \parallel QD$,atunci CD este secantă,deci $\measuredangle FCR \equiv \measuredangle QDR$ (6),alterne interne.Din (4),(5) şi (6) obţinem că triunghiurile CFR şi DQR sunt congruente(LUL).Rezultă că $\measuredangle FCR \equiv \measuredangle QRD$ şi cum F şi Q sunt de o parte şi de alta a dreptei CD, rezultă că punctele C,R,Q sunt coliniare.

2)Se consideră trei puncte diferite B,O,C pe dreapta d astfel încât $BO=OC$ şi punctele D şi E ,situate pe (OB),respectiv pe(OC) ,astfel încât $EC\equiv BD$ .Se consideră în semiplane diferite faţă de dreapta d punctele P şi Q astfel încât $PB=QC$ şi $PE=QD$ .Demonstraţi că punctele P,O,Q sunt coliniare.

(OJ Caraş-Severin,2009)

Soluţie:

Cum $BO=OC$ şi $BD=EC$,se obţine că $DO=EO$ .Atunci $\triangle PBE \equiv \triangle QCD$ (L.L.L.),de unde avem $\measuredangle PBO \equiv \measuredangle QCO$ $\Rightarrow \triangle PBO \equiv \triangle QCO$ (L.U.L.),din care avem că $\triangle POB \equiv \triangle QOC$,iar punctele B,O,Q sunt coliniare $\Rightarrow$ punctele P,O,Q sunt coliniare.

b) Demonstrarea coliniarităţii cu ajutorul unghiului alungit (unghiuri adiacente suplementare)

1)*Pe laturile consecutive AB şi BC ale pătratului $ABCD$ se construiesc triunghiurile echilaterale ABE şi BCF ,primul interior şi al doilea exterior pătratului.Să se arate că punctele D,E,F sunt coliniare.*

Soluţie:

Fiindcă triunghiul ABC este echilateral, $m(\measuredangle BAE)=60^\circ$ şi atunci $m(\measuredangle DAE)=90^\circ-60^\circ=30^\circ$ .Triunghiul ADE este isoscel,cu $(AD)\equiv(AE)$, şi atunci $m(\measuredangle ADE)=m(\measuredangle AED)=(180^\circ-30^\circ):2=75^\circ$ .Triunghiul EBF este drepunghic deoarece $m(\measuredangle FBC)+m(\measuredangle CBF)=30^\circ+60^\circ=90^\circ$. Fiindcă $(EB)\equiv(EF)$,triunghiul EBF este dreptunghic isoscel.Atunci $m(\measuredangle BEF)=45^\circ$ .Deci

$m(\measuredangle DEF)=m(\measuredangle DEA)+m(\measuredangle AEB)+m(\measuredangle BEF)$

$=75^\circ+60^\circ+30^\circ=180^\circ$,adică punctele D,E,F sunt coliniare.

2)*Fie triunghiul ABC un tringhi dreptunghic în A şi un punct $M\in(BC)$ .Se consideră punctele N şi P astfel încât semidreptele* $[AB$ şi $[AC$ sunt bisectoarele unghiurilor $\measuredangle NAM$, respectiv , $\measuredangle MAP$. Arătaţi că punctele P,A,N sunt coliniare.

Soluţie:

Cum semidreapta $[AB$ este bisectoarea $\measuredangle NAM$ $\Rightarrow m(\measuredangle NAB)=m(\measuredangle BAM)$ .Analog se obţine $m(\measuredangle MAC)=m(\measuredangle CAP)$. Atunci

$m(\measuredangle NAP)=m(\measuredangle NAM)+m(\measuredangle MAP)$

$=2\cdot m(\measuredangle BAM)+2\cdot m(\measuredangle MAC)$ $=2\cdot[m(\measuredangle BAM)+m(\measuredangle MAC)]$

$=2\cdot m(\measuredangle BAC)=2\cdot 90^\circ=180^\circ$, adică punctele M,A,P sunt coliniare.

c)Demonstrarea coliniarităţii prin identificarea unei drepte ce conţine punctele respective

1) *În triunghiul ABC cu m $m(\measuredangle B)=2\cdot m(\measuredangle C)$,notăm cu I intersecţia bisectoarelor $[BB'$ ′ şi $[AA'$, $B'\in(AC)$), $A'\in(BC)$.*

Perpendiculara din B pe AA' intersectează perpendiculara din B' pe BC în D. Să se demonstreze că punctele I, D, C sunt coliniare.
Soluție:
Din $m(\measuredangle B) = 2 \cdot m(\measuredangle C)$ rezultă $m(\measuredangle A'BB') = m(\measuredangle C)$, deci triunghiul $B'BC$ este isoscel şi atunci $[B'D$ va fi bisectoarea $\measuredangle BB'C$ .Unghiul $\measuredangle BA'A$ este exterior triunghiului $AA'C$ şi deci $m(\measuredangle BA'A) = m(\measuredangle C) + \frac{m(\measuredangle A)}{2}$ (1).Unghiul $\measuredangle BIA'$ este exterior triunghiului ABI .Deci

$$m(\measuredangle BIA') = m(\measuredangle BA'A) = m(\measuredangle IBA) + m(\measuredangle IAB) = m(\measuredangle C) + \frac{m(\measuredangle A)}{2}$$

(2). Din (1) şi (2) rezultă că triunghiul BIA' este isoscel.Atunci înălțimea $[BD]$ a triunghiului IBA' este şi bisectoare. Deci punctul D este punctul de intersecție a bisectoarelor $[BD$ şi $[B'D$ ale unghiurilor triunghiului $B'BC$ .Fiindcă $[CI$ este bisectoarea $\measuredangle C$ ea conține şi punctul D ,deci punctele C, D, I sunt coliniare. □

2)*Se dă triunghiul isoscel ΔABC cu $[AB] \equiv [AC]$ .Pe laturile $[AB]$ şi $[AC]$ se construiesc triunghiurile echilaterale $\triangle ABD$ şi $\triangle ACE$ .Fie $(M) = BD \cap CE$ şi $(N) = CD \cap BE$. Arătați că punctele A, N, M sunt coliniare.*
Soluție: a)Triunghiul ΔMBC este isoscel,deci $[MB] \equiv [MC]$ (1),$[DM] \equiv [EM]$(2) şi $\measuredangle DMC \equiv \measuredangle EMB$ (3).Din (1),(2)şi(3) avem că $\Delta DMC \equiv \Delta EMB$ (L.U.L) $\measuredangle EBM \equiv \measuredangle DCM$,din care rezultă că $\measuredangle ABE \equiv \measuredangle ACD$ .Fie S punctul de intersecție al dreptelor AB şi DC şi fie Q punctul de intersecție al dreptelor AC şi BE .Triunghiul $\triangle ABQ \equiv \triangle ACS$ (U.L.U) $\Rightarrow [AS] \equiv [AQ]$ şi că $[BC] \equiv [QS]$. Cum $\measuredangle ABC \equiv \measuredangle ACB$ şi $\measuredangle ABE \equiv \measuredangle ACD$

$\Rightarrow \measuredangle EBC \equiv \measuredangle DCB$. Atunci $\triangle NBC$ este isoscel,deci $[NB] \equiv [NC]$ şi cum $[BQ] \equiv [CS]$ $\Rightarrow [NQ] \equiv [NS]$ .Obținem $\triangle ANS \equiv \triangle ANC$ (L.L.L) $\Rightarrow \measuredangle BAN \equiv \measuredangle CAN$ $\Rightarrow [AN$ este bisectoarea unghiului $\measuredangle BAC$ .Se obține $\triangle ABM \equiv \triangle ACM$ (L.L.L) $\Rightarrow \measuredangle BAM \equiv \measuredangle CAM$ $\Rightarrow [AM$ este bisectoarea $\measuredangle BAC$, adică punctele A, N, M sunt coliniare.

d)Demonstrarea coliniaritații folosind postulatul lui Euclid (axioma paralelelor)

1) *În triunghiul ABC punctele B' şi C' sunt mijloacele segmentelor $[AC]$, respectiv $[BC]$. Dacă L este simetricul lui B față de B' şi T simetricul lui C față de C', să se demonstreze că punctele T, A, L sunt coliniare.*
Soluție:
În patrulaterul $ACBT$ diagonalele $[AB]$ şi $[TC]$ se taie în părți congruente, rezultă că $ACBT$ este parallelogram, deci $AT \parallel BC$ (1).Si diagonalele patrulaterului $ABCL$ se înjumătățesc şi deci $ABCL$ este paralelogram.Atunci $AL \parallel BC$ (2).Din (1) şi (2) ținând seamă de postulatul lui Euclid obținem că punctele T, A, L sunt coliniare. □

2) *În triunghiul oarecare ABC fie M, N, P mijloacele laturilor $[BC],[CA]$,respectiv $[AB]$. Notăm cu R simetricul vărfului A față de mijlocul lui $[MN]$ .Să se demonstreze că punctele P, M, R sunt coliniare.*
Soluție:
Fie Q mijlocul segmentului $[MN]$ .Rezultă $[MQ] \equiv [NQ]$ .Punctul R fiind simetricul vârfului a față de punctul Q rezultă că punctele A, Q, R sunt coliniare şi, în consecință, $[AQ] \equiv [RQ]$ şi $\measuredangle AQN \equiv \measuredangle RQM$ (unghiuri opuse la vârf). Avem $\triangle AQN \equiv \triangle RQM$ $\Rightarrow \measuredangle NAQ \equiv \measuredangle MRO$ $\Rightarrow AN \parallel MR$ sau $AC \parallel MR$ (1).Cum M şi P sunt mijloacele laturilor $[BC]$ şi $[BA]$ rezultă că $[MP]$ este linie mijlocie în $\triangle ABC$, deci $MP \parallel AC$ (2). Din

(1), (2) şi axioma paralelelor rezultă că dreptele MR şi MP sunt identice, deci punctele P, M, R sunt coliniare.

e)Demonstrarea coliniarității folosind axioma de construcție a unghiului

1) *Fie $\triangle ABC$ un triunghi oarecare în care mediana AM, $M \in BC$ este perpendiculară pe dreapta AC, notăm cu N mijlocul segmentului (AM) şi ducem $(NX \perp AB$ şi $(MY \perp BC$, iar $(D) = (NX \cap (MY$. Să se demonstreze că punctele D, A, C sunt coliniare.*

Soluție :

Fie $MP \| AB$, $P \in [AC]$. Rezultă $[MP]$ este linie mijlocie în $\triangle ABC$, însă $DN \perp AB \Rightarrow DN \perp MP$ (1). Segmentul $[PN]$ fiind linie mijlocie în $\triangle MAC \Rightarrow PN \| BC$, însă $BC \perp DM \Rightarrow [PN] \perp [DM]$ (2). Din (1) şi (2) rezultă N este ortocentrul $\triangle DMP$, deci $MN \perp DP$ şi $MN \perp AP$, rezultă punctele D, A, C sunt coliniare. □

În continuare vă propunem spre rezolvare următoarele probleme:

1) *Să se demonstreze că într-un trapez mijloacele laturilor paralele şi intersecția diagonalelor sunt trei puncte coliniare.*

2) *Pe ipotenuza (BC) a triunghiului dreptunghic $\triangle ABC$ se consideră un punct arbitrar D. Fie K şi P simetricele lui D față de AB, respectiv, AC. Să se demonstreze că punctele K, A, P sunt coliniare.*

3) *Se consideră un triunghi $\triangle ABC$. Prin C se duce paralela la dreapta AB şi prin B se duce paralela la dreapta AC. Mediana dusă din vârful C intersectează paralela din B la AC în C', iar mediana dusă din vârful B intersectează paralela din C la AB în B'. Să se demonstreze că punctele C', A, B' sunt coliniare.*

4) *Se consideră triunghiul $\triangle ABC$ şi punctele D, E, F mijloacele laturilor $[AB], [BC]$, respectiv $[CA]$. Fie $M \in (EF$ astfel încât $[EF] \equiv [FM]$ şi $N \in (CD$ astfel încât $[CD] \equiv [DN]$. Demonstrați că punctele A, M, N sunt coliniare.*

5) *Se consideră triunghiul ascuțitunghic $\triangle ABC$ şi $[AD$ bisectoarea unghiului $\measuredangle BAC$, $D \in BC$. Fie E şi F simetricele lui D față de dreptele AB, respectiv AC, iar I intersecția paralelei prin E la AC cu paralela prin F la AB. Notăm cu P şi M intersecțiile dreptei ED cu dreptele AB, respectiv FI, prin Q şi N intersecțiile dreptei FD cu dreptele AC, respectiv EI. Arătați că punctele A, D, I sunt coliniare.*

6) *Se dă triunghiul $\triangle ABC$ ($[AB] \equiv [AC]$). Pe prelungirile laturii $[BC]$ se iau punctele D şi E astfel încât $C \in (BD)$, $B \in (EC)$ şi $[BD] \equiv [CE]$, iar pe (AB) şi (AC) se consideră punctele P şi Q astfel ca $[AP] \equiv [AQ]$. Să se demonstreze că dacă $(PE) \cap (QD) = \{M\}$ şi N este mijlocul segmentului $[BC]$, atunci punctele A, M, N sunt coliniare.*

7) *Perpendicularele În punctul A pe laturile congruente $[AB]$ şi $[AC]$ ale triunghiului isoscel $\triangle ABC$ intersectează latura $[BC]$ în punctele N, respectic M. Fie P piciorul perpendicularei duse din B pe AM şi Q piciorul perpendicularei duse din C pe AN. Dacă $PB \cap QC = \{S\}$ şi $QB \cap PC = \{T\}$, arătați că punctele A, T, S sunt coliniare.*

BIBLIOGRAFIE:

[1]V. Pop-Matematica pentru grupele de performanță, Ed.Dacia Educațional, 2004.
[2]A. Bălăucă-Aritmetică Algebră Geometrie, Ed. Taida 2007.
[3]D. Linț şi M. Linț-Performanță în matematică, Ed. Corvin Deva, 2009.

Elevi, Liceul Pedagogic „C. D.Loga" Caransebeş

Etapa județeană a Olimpiadei de matematică
7 martie 2009

Gazdă : Liceul Teoretic Traian Lalescu Reşiţa.
Subiecte : la clasele V – VI au fost propuse de Comisia Județeană, la clasele VII – XII de către Comisia Națională ; nivel de dificultate : cel cu care ne-am obişnuit (punctajele vorbesc de la sine). Toate acestea se găsesc la adresa www.neutrino.ro
Premii:

Premiul	*Nume,prenume elev*	*Clasa*	*Şcoala*
I	**Ciobanu Anca**	5	Gen. 2 Reşiţa
II	**Neaţu Monica**	5	Gen. 2 Reşiţa
III	Rus Daniel	5	Gen. 8 Reşiţa
m	Balmez Andrada Ioana	5	Romul Ladea Oraviţa
m	Semenescu Raluca	5	Lic.CDLoga Caransebeş
I	**Ştefănescu Andrei**	6	Gen.1 Oţelu - Roşu
II	**Ciulu Miruna**	**6**	**Gen. 6 Reşiţa**
III	Dinulică Petru Augustin	6	Lic.CDLoga Caransebeş
m	Dinulică Ioan Septimiu	6	Lic.CDLoga Caransebeş
m	Pîrvu Ancuţa Iulia	6	Romul Ladea Oraviţa
I	**Ţeudan Adina**	7	Gen. 2 Reşiţa
II	Orbulescu Dan Ionel	7	Lic.T.Doda Caransebeş
III	Colonescu Radu	7	Lic.D.Tietz Reşiţa
m	Ban Ioana	7	Lic.CDLoga Caransebeş
m	Lazăr Silviu	7	Gen. 9 Reşiţa
I	**Krocoş Lorena Maria**	8	Gen.1 Oţelu - Roşu
II	**Meşter Amalia**	8	Gen. 2 Reşiţa
III	Epure Iasmina Dana	8	Mathias Hammer Anina
m	Stoicănescu Gelu	8	Lic.T.Doda Caransebeş
m	Tabugan Dana	8	Lic. Hercules
I	**Mocanu Ioana**	9	Lic.T.Doda Caransebeş
II	**Semenescu Anca**	9	Lic.CDLoga Caransebeş
III	Uţă Robert	9	Grup Moldova Nouă
m	Bugariu Răzvan	9	Grup Oţelu – Roşu
m	Nemeş Adina	9	Lic.Traian Lalescu Reşiţa
I	**Zanfir Cristian**	10	Lic.T.Doda Caransebeş
II	**Meşter Sergiu**	10	Lic.Traian Lalescu Reşiţa
III	Budurean Cristina	10	Lic.T.Doda Caransebeş
m	Cotoranu Mirela	10	Lic.Traian Vuia Reşiţa
m	Prunar Victor	10	Lic.T.Doda Caransebeş
I	**Stăniloiu Ovidiu**	11	Lic.Tata Oancea Bocşa
II	Ionaşcu Marian	11	Lic.Traian Vuia Reşiţa
III	Borlovan Călin	11	Lic.T.Doda Caransebeş
m	Cotoranu Florin	11	Lic.Traian Vuia Reşiţa
m	Olariu Sebastian	11	Lic.T.Doda Caransebeş
I	**Unguraş Dragoş**	12	Grup Oţelu – Roşu
II	Pîrvu Cătălin	12	Grup Moldova – Nouă
III	Tişcă Mihaela	12	Lic.Traian Lalescu Reşiţa
m	Gavriliu Constantina	12	Lic.T.Doda Caransebeş
m	Iliescu Marcel	12	Lic.CDLoga Caransebeş

Prezentăm în continuare şi pe cei mai buni dintre elevii care au participat în aceeaşi zi la etapa judeţeană a Concursului de matematică aplicată ***Adolf Haimovici :***

Premiu	*Nume,prenume elev*	*Clasa*	*Şcoala*
I	Zărnescu Antonia	9	Lic.Gen.Dragalina Oraviţa
II	Pană Alexandra Mirela	9	Lic.Gen.Dragalina Oraviţa
III	Moldovan Teodora	9	Lic.Traian Lalescu Reşiţa
m	Furdui Vasile Gabriel	9	Lic.Economic Reşiţa
I	Magheţi Florin Nicuşor	10	Lic.Economic Reşiţa
II	Cîrstoiu Loredana	10	Grup Agricol Oraviţa
III	Vinţ Geanina	10	Grup Agricol Oraviţa
m	Silianovici Alin	10	Grup Oţelu – Roşu
I	Norocel Alina	11	Grup Oţelu – Roşu
II	Azzola Francesca	11	Grup Oţelu – Roşu
III	Păpălan Amalia	11	Grup Constr. Montaj Reşiţa
m	Tihon Beatrice	11	Lic.Economic Reşiţa
I	Matei Petruţa Maria	12	Grup Oţelu – Roşu
II	Maftei Dana Roxana	12	Grup Oţelu – Roşu
III	Drăghia Bojincă Ioan	12	Grup A.Popp Reşiţa
m	Suru Andreea Georgeta	12	Grup A.Popp Reşiţa

Etapa județeană a Concursului interdisciplinar “Plus minus Poezie »

Rezultate :

Premiu	Nume, prenume	Clasa	Şcoala	Punctaj
I	**Balmez Andrada**	**5**	**Romul Ladea Oravița**	**132**
II	**Murgu Teodora**	**5**	**Romul Ladea Oravița**	**127**
III	Ciobanu Anca	5	Gen.nr.2 Reşița	119
m	Stanciu Ana	5	Lic.Hercules	114
m	Gaiță Nadine	5	Gen.nr.9 Reşița	113
I	**Ciulu Miruna**	**6**	**Gen.nr.6 Reşița**	**138**
II	**Gheorghişan Călin**	**6**	**Romul Ladea Oravița**	**126**
III	Dănilă Mădălina	6	Romul Ladea Oravița	122
m	Dinulică Septimiu	6	Lic.C.D.Loga Caransebeş	120
m	Dinulică Augustin	6	Lic.C.D.Loga Caransebeş	115

Concursul interjudețean Traian Lalescu, Arad, 2009

Rezultate :

Premiu	Nume,prenume elev	Clasa	Şcoala
I	**Ciobanu Anca**	5	Gen.nr.2 Reşița
M	Balmez Andrada	5	Romul Ladea Oravița
M	Ciulu Miruna	6	Gen. 6 Reşița
M	Ştefănescu Andrei	6	Gen.1 Oțelu - Roşu
M	Dinulică Petru Augustin	6	Lic.CDLoga Caransebeş
M	Dinulică Ioan Septimiu	6	Lic.CDLoga Caransebeş
M	Lazăr Silviu	7	Gen.nr.9 Reşița
MS	Stoicănescu Gelu	8	Lic.T.Doda Caransebeş
M	Zanfir Cristian	10	Lic.T.Doda Caransebeş
M	Stăniloiu Ovidiu	11	Lic.Tata Oancea Bocşa
M	Unguraş Dragoş	12	Grup Oțelu – Roşu

Matematică la malul mării
Etapa națională a Olimpiadei de matematică, 12 – 16 aprilie 2009 Neptun – Mangalia

Ovidiu Bădescu

Victoria mare a lui Poli împotriva Craiovei prevestea o națională plină de reuşite, de trăiri frumoase şi de amintiri de neuitat. Dacă băieții de la Poli au fost cei mai buni, noi de ce nu am fi? era parcă întrebarea ce plutea deasupra tuturor.

Şi astfel, aşteptând pe Ovidiu(Stăniloiu) să ajungă din Bocşa, pe cei doi Meşteri(Amalia şi Sergiu) să li se termine meciul, întâlnind pentru prima dată pe Adina(Țeudan) în față la LTL, am pornit plini de speranțe către Olimpiada Națională de matematică, 2009. În gara din Caransebeş i-am găsit pe Lorena(Krocoş), pe Ioana(Mocanu), pe Anca (Semenescu), pe Cristi(Zanfir), pe Dragoş(Unguraş) şi pe al nostru lucidrag, prof. Lucian Dragomir, membru în Comisia Națională.

Călătorie obositoare, dimineața la 5 stăteam zgribuliți la Mac, în Gara de Nord, însă în jurul orei 2 am ajuns în Neptun. Spre plăcuta surpriză a tuturora, cazarea atât a elevilor cât şi a profesorilor însoțitori a fost la hotel şi e primul semn că inteligența merită respectată aşa cum se cuvine.

Şi, cum dragii noştri elevi ştiu să pună profesorii la strâmtoreală, promisiunea smulsă mie era ca, în situația în care se obțin mai mult de trei premii la națională(adică să depăşim performanța de anul trecut), să intru în mare. Bineînțeles că o asemenea performanță merita sărbătorită, iar dacă ei considerau răceala mea o sărbătoare, nu aveam cum să mă opun.

A doua zi, concursul, subiectele grele ca de obicei, parcă şi mai grele atunci când ai speranțe. Îi aşteptam la ieşirea din liceu, Cristi încrezător, Ovidiu cu speranțe, Dragoş aşteptând rezultatul corecturii. Fetele sceptice, însă niciodată nu ştii cât de mult şi mai ales cât de bine au făcut ceilalți. Rezultatele urmau să fie afişate abia marți după-amiază.

Închiriind un microbuz(numai în România poți ieşi mult mai ieftin închiriind decât călătorind cu autobuzele acelei rute), după-amiaza acelei zile am vizitat Constanța şi bineînțeles, ne-am făcut provizii. Marți dimineața, obosiți după ziua de luni(sau poate după noaptea care a urmat), olimpicii noştrii abia reuşeau să se urnească. Nu e simplu să participi la o națională, cam asta trebuia să deduc din privirile lor rugătoare. Şi, tot în această dimineață am reuşit să plec de la masă nemâncat căci, una din dragele eleve era aşa somnoroasă încât la orice îi spuneam la telefon, răspundea : « Da de ce ?«.

Deşi am fost de nenumărate ori la mare, niciodată nu am ajuns la monumentul de la Adamclisi(biserica lui Dumnezeu) şi vă spun, merită tot efortul. L-am văzut în toată splendoarea lui, situat pe cea mai înaltă cotă din Dobrogea(peste 150 m altitudine), se vede de la mare distanţă, era un monument care să arate puterea şi supremaţia romanilor construit pentru a cinsti eroii războiului din 101-102 şi care avea, asemeni Columnei lui Traian, sculptate scene de luptă.

La întoarcere, o surpriză şi mai plăcută, Peştera Sfântului Apostol Andrei, primul propovăduitor al Bunei Vestiri pe pământ românesc. Fără să îţi dai seama, păşind pe acele dale de legende te cuprinde un fior, şi simţi tot felul de întrebări privitoare la credinţa proprie. De piatră de ai fi şi linişte acelei peşteri, pietrele dăltuite şi pline de rugăciune, lipsa oricărui semnal de celular, ecoul crucii incizate aici te aduc mai aproape de Dumnezeu, sau cel puţin te fac să crezi asta.

Cu paşi sfioşi, cu privirea pierdută în depărtare ieşim din acest tărâm de basm şi ne îndreptăm către casă. Intram în febra rezultatelor, deja telefoanele începeau să sune, reveneam, din păcate, la civilizaţie. Şi...rezultatele sunt foarte foarte bune, **Ovidiu** şi **Cristi** cu siguranţă vor lua medalii şi...surpriză, **Adina** la prima ei medalie de bronz. Şi...foarte foarte aproape, o neatenţie pe care probabil o va visa toată viaţa, Dragoş Unguraş a rata, din cauza unui punct(aţi auzit bine, un punct doar) medalia de bonz. Felicitări acestui băiat care an de an a participat la naţională şi care de la anul va fi student. Îl aşteptăm printre noi şi la Olimpiada de la anul, vizitele prietenilor sunt oricând binevenite.

Bucurie pe de o parte, lacrimi ascunse dincolo, nicidecum nepăsare... hotărâri luate pentru viitor, muncă mai multă, seriozitate maximă... Este extraordinar să fii premiant la Naţională dar este minunat şi doar să ajungi acolo, aşadar toţi aceşti copii merită felicitaţi. Este de fapt plăcerea drumului de a ajunge până acolo, e plăcerea pe care ar trebui să o descoperiţi rezolvând probleme. Nu e aşa de important dacă aţi fost primul pe judeţ sau la un concurs, e important dacă aţi fi ştiut să rezolvaţi acele probleme, dacă aveţi minte capabilă să facă tot felul de corelaţii, de a vă îmbunătăţi inteligenţa pe care vi-a dat-o Dumnezeu. La anul, naţionala va avea loc la Iaşi, iar prezenţa voastră acolo depinde de?

Credem că răspunsul îl va găsi fiecare, este *aproape* suficient să îl caute...

Probleme rezolvate din RMCS nr.26

Clasa a IV-a

IV.121 Suma a trei numere este 1940. Aflaţi numerele ştiind că diferenţa dintre primele două este egală cu suma ultimelor două numere, adică 837.

Inst. Mariana Mitrică, Reşiţa

Răspuns: 1103, 266 şi 571. □

IV.122 La un magazin s-au adus globuleţe roşii, galbene şi verzi, numărul lor fiind egal cu cel mai mare număr par scris cu trei cifre distincte.
Determinaţi numărul globuleţelor de fiecare culoare ştiind că 597 globuleţe nu sunt verzi, iar numărul globuleţelor galbene este egal cu cel mai mic număr de trei cifre consecutive a căror sumă este 9.

Inst. Mariana Mitrică, Reşiţa

Răspuns: 363 roşii, 389 verzi, 234 galbene. □

IV.123 Trei saci cu cartofi şi cinci saci cu varză cântăresc împreună 235 kg. Ştiind că un sac cu varză cântăreşte cu 9 kg mai puţin decât un sac cu cartofi, aflaţi cât cântăreşte un sac de fiecare fel.

Inst. Mariana Mitrică, Reşiţa

Răspuns: 26 kg sacul cu varză, 35 kg unul cu cartofi. □

IV.124 Suma vârstelor a trei nepoţi este cu un sfert de veac mai mică decât a bunicului.Dacă vârsta acestuia reprezintă un număr impar scris cu două cifre consecutive a căror sumă este 13, iar nepotul cel mic a împlinit un deceniu, determinaţi vârsta celorlalţi nepoţi care sunt gemeni.

Inst. Mariana Mitrică, Reşiţa

Răspuns: gemenii au câte 15 ani. □

IV.125 Andrei şi Karina au rezolvat împreună 22 de probleme.Dacă Andrei ar fi rezolvat de 6 ori mai multe probleme, ar fi avut rezolvate de 5 ori mai multe decât a rezolvat Karina.Câte probleme a rezolvat fiecare ?

Dan Emil Bugariu, elev, Oţelu – Roşu

Răspuns: Karina a rezolvat 12 probleme, iar Andrei doar 10. □

IV.126 Găsiţi ce numere trebuie puse în locul semnelor $\square, \Delta, \bigcirc$ astfel încât să fie adevărate egalităţile : $\square+\Delta+\bigcirc=20$, $\bigcirc-\Delta=5$ şi $\square-\bigcirc=1$.

Prof. Adriana şi Lucian Dragomir, Oţelu - Roşu

Răspuns: în cerculeţ: 8, în pătrăţel 9, iar în triunghi : 3. □

IV.127 Ana , Ion şi părinţii lor au împreună 55 de ani .Copiii sunt gemeni , iar vârstele părinţilor sunt reprezentate de numere consecutive .Când s-a născut Ana,mama sa avea 21 de ani . Câţi ani are fiecare ?

Inst.Robertha Oprea , Reşiţa

Răspuns: Ana are 3 ani, mama are 24 de ani, iar tata are 25 de ani. □

IV.128 Pentru o sală de sport s-au cumpărat corzi, panglici şi mingi.Ştiind că 114 nu sunt panglici, 121 nu sunt corzi, iar 83 nu sunt mingi, află numărul obiectelor din fiecare fel care s-au cumpărat.

Inv. Elisaveta Vlăduț,Reşița

Răspuns: 45 panglici, 38 corzi, 76 de mingi. □

IV.129 Vrăjitoarea cea rea a furat şcolarului parantezele şi semnele operațiilor . Faceți ca egalitățile următoare să fie adevărate .

5 5 5 5 5 5=0
5 5 5 5 5 5=1
5 5 5 5 5 5=6

Inst. Grațiela Pinoşanu, Reşița

Răspuns: a) $5+5+5-5-5-5=0$ sau $5-5+5-5+5-5=0$;
b) $5+5-5-5+5:5=1$ sau $(5-5+5-5+5):5=1$;
c) $(5+5):5-5:5+5=6$. □

Clasa a V-a

V.121 Fie numerele $A=7\cdot3^{2008}$ şi $B=5\cdot3^{2006}$. Arătați că restul împărțirii lui A la B este cubul unui număr natural.(enunț corectat)

Prof. Marian Bădoi, Oravița

Soluție: $7\cdot3^{2008}=7\cdot9\cdot3^{2006}=\left(5\cdot3^{2006}\right)\cdot12+3^{2007}$.Aşadar câtul împărțirii este $C=12$, iar restul este $r=3^{2007}<5\cdot3^{2006}$, adică $r=\left(3^{669}\right)^3$.

V.122 a) Aflați un număr natural x ştiind că $1+3+5+7+...+x=10000$
b) Scrieți numărul $A=2009+(2+4+6+...4012+4014)$ ca sumă a două pătrate perfecte.
.

Prof. Marian Bădoi, Oravița

Răspuns: a) suma are n termeni, cu $x=2n+1$; avem astfel $(1+2n-1)\cdot n=20000$, de unde $n^2=10000\Rightarrow n=100\Rightarrow x=199$. b) $A=2009+2\cdot(1+2+3+...+2007)=2009+2008\cdot2007=$
$=1+2008+2008\cdot2007=1^2+2008^2$. De remarcat că aceasta nu este singura posibilitate !□

V.123 Scrieți numărul $10^{2009}+9$ ca sumă de numere naturale consecutive.

Prof. Ramona Călin, Reşița

Soluție: Metoda 1: $10^{2009}+9=1\underbrace{00...0}_{2008\text{ cifre}}9=5\underbrace{00...0}_{2007\text{ cifre}}4+5\underbrace{00...0}_{2007\text{ cifre}}5$;

Metoda 2: $10^{2005}+5=10\cdot10^{2004}+5=\left(10^{2004}+5\right)+\left(10^{2004}+4\right)+\left(10^{2004}+3\right)+\left(10^{2004}+2\right)+$
$+\left(10^{2004}+1\right)+10^{2004}+\left(10^{2004}-1\right)+\left(10^{2004}-2\right)+\left(10^{2004}-3\right)+\left(10^{2004}-4\right)$

V.124 a) Să se determine numărul natural a ştiind că există $n\in\mathbb{N}$ pentru care $3^n=a$ şi $27^{n+1}=9\cdot81$; b) Să se determine $n\in\mathbb{N}$ pentru care $3^{n+2}=27^n$; c) Să se determine $n\in\mathbb{N}$ pentru care 3^n-1 şi 3^n+1 sunt numere prime .

Prof. Carina şi Sebastian Corîci, Caransebeş

Răspuns: a) $a=3$; b) $n=1$; c) pentru orice n nenul, numerele sunt pare, deci nu pot fi simultan prime; pentru $n=0$ numerele nu sunt prime, aşadar nu există $n\in\mathbb{N}$ care satisface enunțul. □

V.125 Să se determine numărul $\overline{abcde}$ pentru care $\overline{abcde}=9\cdot\overline{ab}\cdot\overline{cde}$.

Prof. Aurel Doboşan, Lugoj

Răspuns: 14112. □

V.126 Să se găsească numărul prim care împărțit la 6 dă câtul 14.

Prof. D.M.Bătinețu – Giurgiu, Bucureşti

Soluție: Cu teorema împărțirii cu rest avem $p=6\cdot14+r, r\in\{0,1,2,3,4,5\}$.Imediat avem că $p=89$. □

V.127 Zmeul din poveşti are 33 de capete. Fii împăratului verde încearcă să-l răpună.Dacă fiul cel mic îi taie 3 capete zmeului, acestuia îi cresc la loc 7 capete, dacă cel mijlociu taie 6 capete, zmeului îi cresc la loc doar 4 capete, iar dacă fiul cel mare taie 9 dintre capete, zmeului îi cresc 3 capete în loc. Evident, zmeul este răpus dacă rămâne fără niciun cap. Este posibil ca zmeul să fie răpus?

Prof. Adriana şi Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Soluție: studiați primul articol din revista precedentă (RMCS 27/2009).□

V.128 Determinați numerele naturale a,b,c, $a<b<c$ pentru care $\overline{abc}$ este număr prim şi $n=\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}$ este pătrat perfect.

Prof. Adriana şi Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Soluție: $n=11(a+b+c)\Rightarrow a+b+c=11\cdot k^2$; cum $a+b+c\le27\Rightarrow k=1$ şi se ajunge imediat la $a=1,b=3,c=7$. □

V.129 Se consideră mulțimile $A=\{a,3,2b+1\}$ şi $B=\{a+b,2b,5\}$. Să se determine numerele naturale nenule a şi b pentru care $A\cup B$ are 4 elemente.

Prof. Adriana şi Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Soluție: Remarcăm pentru început că mulțimile au două elemente comune. Se analizează cazurile posibile și se ajunge la: $a=4, b=2$ sau $a=5, b=4$ sau $a=1, b=2$. Corespunzător, avem
$A=\{3,4,5\}, B=\{4,5,6\}$ sau $A=\{3,5,9\}, B=\{5,8,9\}$ sau
$A=\{1,3,5\}, B=\{3,4,5\}$.

Clasa a VI-a

VI.121 Un număr de 2009 puncte ale planului se colorează arbitrar în exact 8 culori. Să se arate că există cel puțin 250 puncte la fel colorate.

Prof. Marian Bădoi, Oravița

Soluție: Presupunem că există cel mult 249 de puncte colorate la fel și astfel am avea în total cel mult $8 \cdot 249 < 2009$ puncte, contradicție. □

VI.122 Se dau unghiurile $\angle A_0OA_1$, $\angle A_1OA_2$, $\angle A_2OA_3$, ... $\angle A_{n-1}OA_n$ de măsuri $\frac{576^\circ}{4}, \frac{576^\circ}{28}, \frac{576^\circ}{70}, \ldots \frac{576^\circ}{n(n+3)}$

Să se determine $n \in \mathbb{N}$ astfel încât punctele A_0, O, A_n să fie coliniare.

Prof. Marian Bădoi, Oravița

Soluție:

$$\frac{576}{4}+\frac{576}{28}+\frac{576}{70}+\ldots\frac{576}{n(n+3)}=180^0 \Leftrightarrow \frac{576}{3}\left(\frac{3}{1\cdot 4}+\frac{3}{4\cdot 7}+\frac{3}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{3}{n(n+3)}\right)=180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \frac{576}{3}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)=180^\circ \Leftrightarrow \frac{576}{3}\left(1-\frac{1}{n+3}\right)=180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \frac{576}{3}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)=180^\circ \Leftrightarrow \frac{n+2}{n+3}=\frac{15}{16} \Leftrightarrow n=13$$

VI.123 Se consideră zece unghiuri în jurul unui punct care verifică simultan condițiile:

i) oricum am lua trei dintre aceste unghiuri, există cel puțin două de aceeași măsură

ii) valoarea cea mai mică a măsurilor celor zece unghiuri este 27°, iar valoarea cea mai mare a măsurilor lor este 45°.

Să se determine măsurile celor zece unghiuri.

Prof. Marina Constantinescu,Tismana

Soluție: Fie x măsura unui unghi oarecare din cele zece unghiuri. Considerăm unghiurile de măsuri $x, 27^\circ, 45^\circ$ aflate în mulțimea celor zece unghiuri. Conform i) se observă că $x=27^\circ$ sau $x=45^\circ$. Deci orice

unghi are măsura 27° sau 45°. Fie n numărul unghiurilor de măsura 27°. Obținem $27^\circ \cdot n + 45^\circ \cdot (10-n) = 360^\circ \Rightarrow n=5$. □

VI.124 Se consideră $S_1=\frac{3}{1\cdot 4}+\frac{3}{4\cdot 7}+\ldots\ldots\ldots+\frac{3}{2005\cdot 2008}$ și $S_2=\frac{4018}{1\cdot 3}+\frac{4018}{3\cdot 5}+\frac{4018}{5\cdot 7}+\ldots\ldots\ldots+\frac{4018}{2007\cdot 2009}$. Să se arate că există $k\in\mathbb{N}$ astfel încât $S_1 \cdot S_2 = k$.

Prof. Ramona Călin, Reșița

Soluție:

$$S_1=\frac{4-1}{1\cdot 4}+\frac{7-4}{4\cdot 7}+\ldots\ldots+\frac{2008-2005}{2005\cdot 2008}=\frac{4}{1\cdot 4}-\ldots\ldots+\frac{2008}{2005\cdot 2008}-\frac{2005}{2005\cdot 2008}=$$

$$=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\ldots\ldots+\frac{1}{2005}-\frac{1}{2008}=1-\frac{1}{2008}=\frac{2007}{2008}.$$

$$S_2=2009\cdot\left(\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 7}+\ldots\ldots+\frac{2}{2007\cdot 2009}\right)=2009\cdot\frac{2008}{2009}=2008$$

Așadar, $k=2007$. □

VI.125 Comparați numerele $a=\frac{2008+10^{274}}{2008+7^{411}}$ și $b=\frac{2009+5^{393}}{2009+2^{655}}$.

Prof. Carina și Sebastian Corîci, Caransebeș

Soluție: $10^{274}=(10^2)^{137}=100^{137}$ și $7^{411}=(7^3)^{137}=343^{137}$, $100<343$ deci prima fracție este subunitară. Analog se arată că a doua este supraunitară. Deci $a<b$. □

VI.126 Tom și Jerry se hotărăsc să se întreacă la un concurs de viteză în proba de 400 m plat.Tom aleargă cu viteza medie de 48 km/h iar Jerry cu viteza medie de 240m/min. Precizați:

a) Cu cât timp ajunge Tom înaintea lui Jerry dacă iau startul deodată ?

b) Ce distanță trebuie să-i acorde Tom lui Jerry în avans, pentru ca să treacă în același timp linia de sosire ?

Prof. Mariana Drăghici, Reșița

Răspuns : a) cu un minut și zece secunde ; b) 280 de metri □

VI.127 În ΔABC, M și N sunt mijloacele laturilor $[AC]$, respectiv $[AB]$, iar E și D simetricele punctelor C și B față de N respectiv M.

Arătați că: a) Punctele *E, A, D* sunt coliniare; b) $DE = 4\cdot MN$

Prof.Loreta Ciulu, Reșița

Soluție: a) Se obține imediat că $\Delta ANE \equiv \Delta BNC$, de unde $AE//BC$; ajungem apoi la $\Delta AMD \equiv \Delta CMB$ şi imediat la $AD//BC$; folosim acum axioma lui Euclid a paralelelor; b) se foloseşte linia mijlocie MN... □

VI.128 Un acvariu plin cu apă, are lungimea de 150 cm, lățimea de 80 cm şi înălțimea de 50 cm.
La ce înălțime ajunge apa dacă din acvariu s-au scos 4 l de apă?

Prof. Marius Şandru, Reşița

Răspuns: 49,(6) cm□

VI.129 Să se determine numărul perechilor ordonate (a,b) de numere naturale pentru care numerele $x=\overline{ab}$ şi $y=\overline{ba}$ satisfac : $\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)\in\mathbb{N}$.

Prof. Adriana şi Lucian Dragomir, Oțelu - Roşu

Soluție: Condiția din enunț conduce la $\frac{32a+23b}{6}=k\in\mathbb{N}$, de unde $32a+23b=6k \Rightarrow b=2p, p\in\{1,2,3,4\}$ .Cum şi a este cifră, analizând cazurile posibile, ajungem la 12 perechi ordonate care satisfac enunțul: $(1,2),(4,2),(7,2),(2,4),(5,4),(8,4),(3,6),(6,6),(9,6),(1,8),(4,8),(7,8)$.

Observația 1 : pentru $p=1$, de exemplu, din $16a+23=3k$, considerând această ecuație modulo3, avem că $a=3m+1, m\in\{0,1,2\}$ .Continuarea nu comportă dificultăți.

Observația 2: condiția din enunț impune următoarele: cifra b să fie număr par, iar suma celor două cifre să fie multiplu de 3; probabil că aceasta conduce la o rezolvare şi mai rapidă.□

Clasa a VII-a

VII.121 Fie O un punct situat în interiorul pătratului $ABCD$ astfel încât $OA=OB$ şi $\widehat{OAB}\equiv\widehat{ODA}$. Să se arate că O este centrul pătratului.

Prof. Marina Constantinescu,Tismana

Soluție: Fie M,N mijloacele laturilor $[AD]$ respectiv $[BC]$. Cum $m\left(\widehat{ADO}\right)+m\left(\widehat{DAO}\right)=90^\circ$ rezultă ΔAOD dreptunghic în O. Cum $\Delta AOD \equiv \Delta BOC\,(L.U.L.)$ deducem că ΔBOC este dreptunghic în $O \Rightarrow$ $OM+ON=\frac{AD}{2}+\frac{BC}{2}=MN \Rightarrow M,O,N$ sunt coliniare $\Rightarrow$ concluzia.

VII.122 Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ cu proprietatea că pentru orice punct M din interiorul său are loc relația $S_{MAB}+S_{MCD}=S_{MBC}+S_{MDA}$. Să se arate că $ABCD$ este paralelogram. (S_{XYZ} reprezintă aria triunghiului XYZ).

Prof. Marina Constantinescu,Tismana

Soluție: Fie M,N două puncte distincte în interiorul patrulaterului $ABCD$, astfel încât $MN\parallel AB(1) \Rightarrow S_{MAB}+S_{MCD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}=S_{NAB}+S_{NCD}$.

Cum $S_{MAB}=S_{NAB} \Rightarrow S_{MCD}=S_{NCD} \Rightarrow d(M,CD)=d(N,CD) \Rightarrow MN\parallel CD(2)$.

Din (1) şi (2) deducem $AB\parallel CD$. Analog $AD\parallel BC$, deci $ABCD$ este paralelogram.

VII.123 a) Să se determine numerele întregi x şi y pentru care

$$4x^2+3y=24 \text{ şi } x+y\geq 0 \ ;$$

b) Să se arate că dacă $x,y\in\mathbb{R}$ şi $4x^2+3y=24$, atunci $4x+3y\leq 25$;

c) Să se arate că dacă $x,y\in\mathbb{R}$ şi $x^2+y^2=25$, atunci $4x+3y\leq 25$.

Prof. Adriana şi Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Soluție: Această problemă nu a primit din partea elevilor nicio soluție corectă completă. Vom prezenta astfel soluția autorilor (aşteptăm şi altele, eventual comentarii)

a) remarcăm că egalitatea din ipoteză este posibilă doar dacă există $k\in\mathbb{Z}$ cu $x=3k$; prin înlocuire, deducem şi $y=4p, p\in\mathbb{Z}$ .Aşadar, din $3k^2+p=2$ ajungem la $y=8-12k^2$. Condiția $x+y\geq 0$ conduce la $12k^2-3k-8\leq 0, k\in\mathbb{Z} \Rightarrow k=0$, de unde imediat avem $x=0, y=8$;

b) folosind rezultatele deduse anterior, avem

$4x+3y=12(-3k^2+k+2)$ şi se arată că $-3k^2+k+2\leq\frac{25}{12} \Leftrightarrow (6k-1)^2\geq 0$

(de fapt inegalitatea este chiar strictă, deoarece $k\in\mathbb{Z}$);

c) folosim, de exemplu, inegalitatea C.B.S. şi avem $(4x+3y)^2\leq(4^2+3^2)(x^2+y^2)$, finalizarea fiind imediată. □

VII.124 Se consideră o mulțime $M\subset\mathbb{Q}$ care satisface următoarele proprietăți : a) $1\in M$; b) $x,y\in M \Rightarrow (5x+4y)\in M$;
c) $(4x+3y)\in M \Rightarrow (x+y)\in M$. Să se arate că $55\in M$.

Prof. Adriana şi Lucian Dragomir, Oțelu - Roşu

Soluție(Adina Țeudan) :

$x=y=1\overset{b)}{\Rightarrow}9\in M$; $9=4\cdot\frac{3}{2}+3\cdot 1\in M\overset{c)}{\Rightarrow}\frac{5}{2}\in M\overset{b)}{\Rightarrow}5\cdot 9+4\cdot\frac{5}{2}=55\in M$.

Remarcăm că am primit mai multe soluții corecte la această problemă, care au folosit însă mai multe calcule. Felicitări şi pe această cale Adinei pentru rezultatul obținut la Olimpiada Națională din acest an. □

VII.125 Un trapez dreptunghic $ABCD$ $(AB // CD, AB > CD)$ are o diagonală perpendiculară pe o latură şi $m(\hat{B})=30°$. Determinați $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ pentru care $AB = n\cdot CD.$ *Prof. Ramona Călin, Reşița*

Soluție: În ΔABC dreptunghic avem: $m(\hat{B})=30° \Rightarrow AC=\frac{AB}{2}$

Cum ΔDAC şi ΔCBA sunt asemenea, avem $\frac{AC}{AB}=\frac{DC}{AC}\Rightarrow AC^2=nDC^2$

$\Rightarrow\frac{AB^2}{4}=nDC^2\Rightarrow\frac{n}{4}=1$, deci $n=4$. □

VII.126 Fie $ABCD$ un patrulater convex şi punctele $P\in(AD)$ şi $Q\in(BC)$, astfel încât $DA=3DP$ şi $CB=3CQ$. Arătați că $PQ\leq\frac{AB+2DC}{3}$. *Prof. Ramona Călin, Reşița*

Soluție: Ducem diagonala AC şi construim $PR \parallel DC$, $R\in(AC)$. Din asemănare rezultă că $PR=\frac{2DC}{3}$. Tot cu asemănare obținem $RQ=\frac{AB}{3}$. Şi cum $PQ\leq PR+RQ$ rezultă inegalitatea cerută. □

VII.127 Să se determine $n\in\mathbb{N}$ pentru care $\frac{2n^2+7}{2n-3}\in\mathbb{Z}$.

Prof. Mihaiela Vizental, Alfred Eckstein, Arad

Răspuns: $n\in\{1,2,13\}$.

VII.128 Se consideră numărul $a=\frac{1}{\sqrt{8}}+\frac{1}{\sqrt{15}}+\frac{1}{\sqrt{24}}+\frac{1}{\sqrt{35}}$.

Să se arate că $\frac{19}{20}<a<\frac{25}{24}$. *Prof. Mircea Fianu, Bucureşti*

Soluție : Folosind inegalitatea *MG – MA* (dintre media geometrică şi cea aritmetică), avem $\sqrt{k(k+2)}<\frac{k+k+2}{2}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{k(k+2)}}>\frac{1}{k+1}$; se însumează inegalitățile care se obțin pentru $k\in\{2,3,4,5\}$ şi se ajunge imediat la $a>\frac{19}{20}$. Pentru a doua inegalitate, se foloseşte inegalitatea *MH – MG* (dintre media armonică şi cea geometrică):

$\sqrt{k(k+2)}>\frac{2}{\frac{1}{k}+\frac{1}{k+2}}$. Finalizarea nu comportă probleme. □

VII.129 Să se determine numerele întregi *a,b* pentru care

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{ab}=4.$$

Prof. Adriana şi Lucian Dragomir, Oțelu - Roşu

Soluție: Egalitatea conduce la $a=\frac{b+3}{4b-2}\in\mathbb{Z}\Rightarrow\frac{4b-2+14}{4b-2}\in\mathbb{Z}$, de unde $(4b-12)\in D_{14}$; se analizează imediat cazurile posibile şi se ajunge la $a=2, b=1$. □

Clasa a VIII-a

VIII.121 Scrieți numerele 2008 şi 2009 ca diferență de pătrate a două numere naturale.

Prof. Marian Bădoi, Oravița

Soluție: Din $k^2-p^2=2008$ avem, de exemplu, $k-p=2, k+p=1004$ şi astfel $2008=503^2-501^2$; la fel, din $k^2-p^2=2008$ avem, de exemplu, $k-p=41, k+p=49$ şi $2009=45^2-4^2$. De remarcat că, pentru *n* impar, avem $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2-\left(\frac{n-1}{2}\right)^2=n$, care poate fi utilă şi în alte situații ! □

VIII.122 Se dau mulțimile:

$A=\{(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} / a=\sqrt{6n+2}; b=\sqrt{4n+3}, n\in\mathbb{N}\}$ şi

$B=\{(x;y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} / \ (\sqrt{8}+1)x+4=(\sqrt{18}+2)y-\sqrt{50}\ \}$

Calculați: $A\cup B, A\cap B, A\Delta B.$

Prof. Delia Marinca, Timişoara

Soluție: Orice număr natural are una din formele: $6n+k, k\in\{0,1,...,5\}$ iar pătratele lor sunt de forma: M_6, M_6+1, M_6+3, M_6+4, prin urmare, numerele de forma $6n+2$ nu pot fi pătrate perfecte.Analog se arată că numerele de forma $4n+3$ nu pot fi pătrate perfecte, prin urmare $A=\varnothing$.

Din $\left(\sqrt{8}+1\right)x+4=\left(\sqrt{18}+2\right)y-\sqrt{50}$, obținem:

$2\sqrt{2}x+x+4=3\sqrt{2}y+2y-5\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}\left(2x-3y+5\right)=-x+2y-4$, de unde deducem că $2x-3y+5=0$ și $-x+2y-4=0$, ceea ce conduce la $x=2$ și $y=3$, iar $B=\{(2;3)\}$, de unde $A\cup B=B$, $A\cap B=\varnothing$ și $A\Delta B=B$. □

VIII.123 Să se determine $a,b,c>0$ astfel încât $\begin{cases} a+b+c=6 \\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

Prof. Marina Constantinescu,Tismana

Soluție: Plecăm de la inegalitatea $x+\dfrac{4}{x}\geq 4, \forall x>0,$ cu egalitate pentru $x=2$. Înmulțind a 2-a egalitate a sistemului cu 4 și adunând apoi relațiile obținem $a+\dfrac{4}{a}+b+\dfrac{4}{b}+c+\dfrac{4}{c}=12.$

Dar $a+\dfrac{4}{a}+b+\dfrac{4}{b}+c+\dfrac{4}{c}\geq 4+4+4=12.$ Egalitatea are loc pentru $a=b=c=2$. □

VIII.124 Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Să se arate că dacă $\widehat{AA'B}\equiv\widehat{CBC'}\equiv\widehat{D'C'A'}$ atunci paralelipipedul este cub.

Prof. Marina Constantinescu,Tismana

Soluție: Notăm $AB=a, BC=b, BB'=c$ lungimile muchiilor paralelipipedului. Din asemănarea triunghiurilor $A'AB, BCC', C'D'A'\left(U.U\right)$ se obțin relațiile $\dfrac{a}{c}=\dfrac{c}{b}=\dfrac{b}{a}=\dfrac{a+c+b}{c+b+a}=1$, deci $a=b=c$, adică paralelipipedul este cub. □

VIII.125 Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ și $M\in[AA'], N\in[BC], P\in[C'D']$ astfel încât triunghiul MNP este echilateral. Să se arate că $A'M=BN=C'P$.

Prof. Mircea Constantinescu, Tg-Jiu

Soluție: Dacă a este lungimea muchiei cubului și $A'M=x, BN=y, C'P=z$, din $MN^2=NP^2=MP^2$ obținem

$y^2+a^2+(a-x)^2=z^2+a^2+(a-y)^2=x^2+a^2+(a-z)^2$ de unde

$x^2+2ay=y^2+2az=z^2+2ax$.

Dacă $x>y\Rightarrow x^2>y^2\Rightarrow 2ay<2az\Rightarrow y<z\Rightarrow$

$y^2<z^2\Rightarrow 2az>2ax\Rightarrow z>x\Rightarrow z^2>x^2\Rightarrow 2ay<2ax\Rightarrow y<x$, fals.

Cazul $x<y$ duce analog la contradicție. Deci $x=y$,apoi $x=z$.□

VIII.126 Determinați $x\in\mathbb{R}$ pentru care există $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $\dfrac{x+1}{2}+\dfrac{x+2}{3}+\dfrac{x+3}{4}+.........+\dfrac{x+n}{n+1}=n$.

Prof. Ramona Călin, Reşiţa

Soluție:

$\dfrac{x+2-1}{2}+\dfrac{x+3-1}{3}+.........\dfrac{x+n+1-1}{n+1}=n$

$\dfrac{x-1}{2}+1+\dfrac{x-1}{3}+1+..........\dfrac{x-1}{n+1}+1=n$

$(x-1)\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+.........+\dfrac{1}{n+1}\right)+n=n$

$\Rightarrow x-1=0\Rightarrow x=1$. □

VIII.128 Se consideră un cub $ABCDA'B'C'D'$ în care *M* este mijlocul lui *(CD)*, *N* este mijlocul lui $(A'D')$ și *O* centrul cubului.Să se determine măsura unghiului dintre dreptele *MN* și *AO*.

Prof. Aurel Doboşan, Lugoj

Răspuns: citiți nota de la pag.14 din RMCS 27/2009. □

VIII.129 Fie $\Delta\, ABC$ dreptunghic cu $m(\hat{A})=90^\circ$ și $E\in(AB)$, $F\in(AC)$ astfel încât $EF\|BC$ și $\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{2}{3}$. Se dă $AB=\dfrac{15}{2}$ și

$AC=10$. Triunghiul ABC se îndoaie după dreapta EF astfel încât $(AEF)\perp(BEC)$. Aflați perimetrul $\Delta\, ABC$ după îndoire .

Prof. Ramona Călin, Reșița

Soluție: Înainte de îndoire :

fie $AP\perp BC, P\in BC$ și $\{Q\}=AP\cap EF$, calculăm : $BC=\frac{25}{2}$,

$AP=6$, $AQ=\frac{2}{3}\cdot 6=4$, $QP=2$

$PB^2=AB^2-AP^2\Rightarrow PB^2=\frac{81}{4}$ și $PC^2=AC^2-AP^2\Rightarrow PC^2=64$

După îndoire : $AQ\perp EF, PQ\perp EF\Rightarrow m(\angle AQP)=90°$, ca unghi plan corespunzător diedrului $\Rightarrow AP^2=AQ^2+QP^2 \Rightarrow AP^2=20$;
cum $AQ\perp BC, QP\perp BC\Rightarrow BC\perp(AQP)\Rightarrow AP\perp BC$

Din $\Delta\, APB$ dreptunghic $\Rightarrow AB^2=\frac{161}{4}$ și din $\Delta\, APC$ dreptunghic $\Rightarrow AC^2=84$. Perimetrul $\Delta\, ABC$ după îndoire este egal cu $\frac{25+\sqrt{161}+4\sqrt{21}}{2}$. □

Clasa a IX-a

IX.121 Se consideră o mulțime infinită A de numere reale cu proprietatea că suma oricăror 2008 numere distincte din A este număr rațional. Să se arate că $A\subset\mathbb{Q}$.

Prof. Mircea Constantinescu, Tg-Jiu

Soluție: Arătăm inițial că dacă $a,b\in A$ atunci $a-b\in\mathbb{Q}$. Considerăm mulțimile $\{a,x_1,x_2,...,x_{2007}\}$ și $\{b,x_1,x_2,...,x_{2007}\}$, unde $x_1,x_2,...,x_{2007}\in A$ distincte două câte două și distincte de a și b. Atunci $a+x_1+x_2+...+x_{2007}\in\mathbb{Q}$ și $b+x_1+x_2+...+x_{2007}\in\mathbb{Q}$ deci $(a+x_1+x_2+...+x_{2007})-(b+x_1+x_2+...+x_{2007})\in\mathbb{Q}$, deci $a-b\in\mathbb{Q}$. Fie acum $a\in A$ arbitrar. Vom arăta că $a\in\mathbb{Q}$, de unde concluzia. Fie $x_1,x_2,...,x_{2008}\in A$ distincte două câte două. Avem
$2008\cdot a=(a-x_1)+(a-x_2)+...+(a-x_{2008})+(x_1+x_2+...+x_{2008})\in\mathbb{Q}$,
deci $a\in\mathbb{Q}$. □

IX.122 Să se determine funcția $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ pentru care

$$1\cdot f^2(1)+2\cdot f^2(2)+...+n\cdot f^2(n)=\frac{f^2(n)\cdot[f(n)+1]^2}{4},\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Prof. Aurel Doboșan, Lugoj

Răspuns: Se obține destul de repede că $f(n)=n$ și se demonstrează prin inducție matematică. □

IX.123 Se consideră o mulțime $G\subset\mathbb{R}$ care satisface proprietățile :

a) $1\in G$; b) $x\in G\Rightarrow\sqrt{x+3}\in G$; c) $\sqrt{x+4}\in G\Rightarrow(x+5)\in G$.

Să se precizeze dacă există cel puțin patru numere întregi și patru numere iraționale care sunt elemente ale mulțimii *G.*

Prof. Adriana și Lucian Dragomir, Oțelu - Roșu

Răspuns: problemă chiar simplă, rezolvată de toți elevii care au trimis soluții . $1\in G\overset{b)}{\Rightarrow}2\in G\overset{b)}{\Rightarrow}\sqrt{5}\in G\overset{c)}{\Rightarrow}6\in G\overset{b)}{\Rightarrow}3\in G$, apoi , de exemplu, avem : $3\in G\overset{b)}{\Rightarrow}\sqrt{6}\in G\overset{c)}{\Rightarrow}7\in G\Rightarrow\sqrt{10}\in G$, apoi $11\in G\Rightarrow\sqrt{14}\in G$. Evident, am primit multe variante corecte de rezolvare. **Problemă : Puteți arăta că $\mathbb{N}\subset M$?**

IX.124 Determinați numerele naturale *n* cu proprietatea că există numerele întregi a și *b* astfel încât: $n^2=a+b$ și $n^3=a^2+b^2$.

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roșu

Soluție: $(a+b)^2\le 2(a^2+b^2)$ (!!!) conduce la $n^4\le 2n^3$, de unde $n\le 2$.
Dacă $n=0$, există $a=b=0$, dacă $n=1$, avem $a=1,b=0$, iar pentru $n=2$, se poate lua $a=b=2$. deci $n\in\{0,1,2\}$.

Observație: această problemă se găsește și în culegerea de clasa a IX a editată de Editura Bîrchi, având ca autori profesorii Adriana și Lucian Dragomir, Ovidiu Bădescu, Ion Damian Bîrchi; este vorba despre problema 57,pag.72, cap.10.

IX.125 Numerele pozitive x_1, x_2, x_3 satisfac inegalitățile $x_1x_2x_3>1$, $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}>x_1+x_2+x_3$. Să se demonstreze că:

a) nici unul din numerele date nu este egal cu 1;

b) exact unul din numerele date este mai mic ca 1. * * *

Soluție: (problema 111, pag.77, din culegerea mai sus menționată)

a) Presupunem de exemplu că $x_3 = 1$ şi obţinem două inegalităţi contradictorii; b) dacă $x_k > 1, k = \overline{1,3}$, a doua inegalitate din enunţ conduce la un rezultat contradictoriu; dacă toate numerele ar fi subunitare, am obţine produsul lor subunitar, absurd. Demonstrăm că $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3) > 0$, de unde concluzia va fi imediată; într-adevăr, inegalitatea anterioară se poate scrie $P = 1 - s + q - p > 0$, unde $s = \sum x_k$, $q = \sum x_k x_j$, $p = x_1 x_2 x_3$. Condiţiile din enunţ se scriu şi ele acum astfel: $p > 1, q > ps$, de unde $P > 1 - s + ps - p = (1-p)(1-s)$ cum $p > 1, x_k > 0$ rezultă $s > 1 \Rightarrow P > 0$. □

IX.126 Fie *ABC* un triunghi ascuţitunghic cu ortocentrul H. Dacă pentru orice punct *M* din planul triunghiului există relaţia $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MH}$, demonstraţi că *ABC* este triunghi echilateral.

Prof. D.M.Bătineţu – Giurgiu, Bucureşti

Soluţie: Folosim binecunoscuta: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$, unde *G* este centrul de grteutate al Δ *ABC*; enunţul conduce la *H* = *G*, deci Δ *ABC* este echilateral. □

IX.127 Fie *ABCD* un patrulater convex, *M* ∈ (*BC*), *N* ∈ (*CD*) şi {*P*} = (*AM*) ∩ (*B*N). Demonstraţi că dacă $\frac{BP}{BN} = \frac{BM}{BC} \cdot \frac{AP}{AM}$, atunci patrulaterul dat are două laturi paralele.

Prof. Dan Ştefan Marinescu, Ioan Şerdean , Hunedoara

Soluţie: Notăm $\frac{BM}{MC} = m$ şi $\frac{AP}{AM} = p$, cu $m, p \in (0,1) \Rightarrow$

$\overrightarrow{BP} = p\overrightarrow{BM} + (1-p)\overrightarrow{BA}$, dar $\overrightarrow{BP} = mp\overrightarrow{BN}$ şi $\overrightarrow{BM} = m\overrightarrow{BC}$, de unde:

$mp\overrightarrow{BN} = mp\overrightarrow{BC} + (1-p)\overrightarrow{BA}$ sau $mp\overrightarrow{NC} = (1-p)\overrightarrow{BA}$, de unde

$NC \,//\, AB \Rightarrow CD \,//\, AB$. □

IX.128 Fie triunghiul *ABC* şi *G* un punct în interiorul său cu proprietatea că există un punct *M* în planul său astfel încât $3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$. Să se arate că *G* este centrul de greutate al triunghiului *ABC*.

Prof. Dan Ştefan Marinescu, Viorel Cornea , Hunedoara

Soluţie: Fie *D, E, F* punctele în care semidrepetele *(AG, (BG, (CG* intersectează laturile (*BC*), (*AC*), respectiv (*AB*). Dacă $\frac{BD}{DC} = x$, $\frac{CE}{EA} = y$,

$\frac{AF}{FB} = z$, atunci avem: $\frac{CE}{CA} = \frac{y}{y+1}$ şi $\frac{AF}{AB} = \frac{z}{z+1}$. Folosind relaţia lui Van Aubel avem acum: $\frac{AG}{GD} = z + \frac{1}{y}$, de unde $\frac{AG}{AD} = \frac{yz+1}{yz+y+1}$; din teorema lui Ceva avem *xyz* = 1 şi atunci pentru un punct *M* din planul triunghiului avem: $\overrightarrow{MG} = \frac{\overrightarrow{MA} + \frac{yz+1}{y}\overrightarrow{MD}}{1 + \frac{yz+1}{y}} = \frac{yz+1}{yz+y+1}\overrightarrow{MD} + \frac{y}{yz+y+1}\overrightarrow{MA}$

$= \frac{yz+1}{yz+y+1}\left(\frac{x}{1+x}\overrightarrow{MC} + \frac{1}{1+x}\overrightarrow{MB}\right) + \frac{y}{yz+y+1}\overrightarrow{MA}$. Înlocuim acum $yz = \frac{1}{x}$ şi vom avea

$\overrightarrow{MG} = \frac{1+x}{x+xy+1} \cdot \frac{x}{1+x}\overrightarrow{MC} + \frac{1}{x+xy+1}\overrightarrow{MB} + \frac{xy}{x+xy+1}\overrightarrow{MA}$. Pe de altă parte avem $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MC}$; ajungem astfel la o relaţie de forma $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \chi\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ cu $\alpha + \beta + \chi = 0$, de unde rezultă $\alpha = \beta = \chi = 0$ (în caz contrar am avea că A, B, *C* sunt coliniare); în sfârşit, de aici reiese, prin calcul, $y = x = z = 1$, deci *G* este centrul de greutate al Δ *ABC*. □

IX.129 Fie *ABC* un triunghi, *M* şi *N* mijloacele laturilor (*BC*), respectiv (*AC*) şi *P* ∈ (*AB*) astfel încât *PA* = 2 *PB*. Fie {*G*} = *BN* ∩ *AM* şi {*Q*} = *BN* ∩ *CP*. Dacă *BM*. *BP* =*BQ*.*BG*, arătaţi că *AB* este perpendiculară pe *BC* dacă şi numai dacă *AB* = *BC*.

Prof. D.M.Bătineţu – Giurgiu, Bucureşti

Soluţie: Evident $BG = \frac{2}{3}BN = \frac{2}{3}m_B$. Aplicând teorema lui Menelaus în ΔBAN cu transversala $CQP \Rightarrow \frac{QB}{QN} \cdot \frac{CN}{CA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1 \Leftrightarrow \frac{BQ}{QN} = \frac{CN}{2NC} \cdot \frac{2PB}{PB} = 1$

$\Rightarrow \ BQ = QN \Rightarrow BQ = \dfrac{1}{2}BN = \dfrac{1}{2}m_B$. Condiția din enunț se poate scrie

$BM \cdot BP = BQ \cdot BG \ \Leftrightarrow \ \dfrac{ac}{6} = \dfrac{2m_B{}^2}{6} \ \Leftrightarrow b^2 - (a-c)^2 = a^2 + c^2$ (*)

Cum $AB \perp BC \Leftrightarrow b^2 = a^2 + c^2$, relația (*) conduce imediat la concluzie.

Clasa a X-a

X.121 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

a) Să se arate că *f* nu este injectivă şi nici surjectivă ;

b) Să se calculeze

$$f\left(\frac{1}{2008}\right) \cdot f\left(\frac{1}{2007}\right) \cdot \ldots \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f(1) \cdot \frac{1}{f(2)} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{f(2008)}.$$

Dan Emil Bugariu, elev, Oțelu – Roşu

Soluție: Deoarece $\operatorname{Im} f = \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$, avem că funcția nu este surjectivă (sau, se arată că ecuația, de exemplu, $f(x) = 1$ nu are soluții reale); pentru injectivitate şi calculul cerut e suficient să observăm că

$f\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}^*$.

X.122 Să se arate că dacă $z \in \mathbb{C}$ satisface $0 \le \operatorname{Re}(z) \le 2$ şi $0 \le \operatorname{Im}(z) \le 2$, atunci $|z - 1 - i| \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}$..

Prof. Adriana şi Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Soluție: Dacă $M(x, y)$ este imaginea geometrică a lui z, avem $x, y \in [0,2]$, deci *M* este situat în interiorul sau pe frontiera pătratului cu un vârf în origine, două laturi pe axe şi latura de lungime 2 , iar centrul în $A(1,1)$.

Inegalitatea din concluzie este astfel $MA \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; se arată imediat că aceasta este adevărată. □

X.123 Se consideră o mulțime $M \subset \mathbb{C}$ care satisface proprietățile :

a) $(1+i) \in M$;

b) $z \in M \Rightarrow z^2 \in M$;

c) $(1+z) \in M \Rightarrow z \in M$.

Prof. Adriana şi Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Să se arate că $-4 \in M, 4 \in M, (-4+4i) \in M$.

Soluție(Victor Prunar):

$z = (1+i) \in M \overset{b)}{\Rightarrow} 2i \in M \overset{b)}{\Rightarrow} -4 \in M \Rightarrow 16 \in M \overset{c)}{\Rightarrow} 15 \in M$;

Deducem succesiv din c) : $14 \in M, 13 \in M, \ldots, 4 \in M$;

$2i \in M \Leftrightarrow 2i - 1 + 1 \in M \overset{c)}{\Rightarrow} 2i - 1 \in M \overset{b)}{\Rightarrow} -3 - 4i \in M$;

Avem în sfârşit : $-3 - 4i - 1 + 1 \in M \overset{c)}{\Rightarrow} -4 - 4i \in M$. □

X.124 Să se rezolve ecuația $33^x + 70^x + 92^x = 105^x$.

Prof. Aurel Doboşan, Lugoj

Soluție: Se observă soluția $x = 3$ (calcule cam prea complicate) şi se arată, pe calea obişnuită, că aceasta este unica: se împarte cu 105^x şi se ajunge la o funcție strict descrescătoare;de aici, exercițiu de clasă.

X.125 Rezolvați ecuația : $x^{\log_2 3} = 1 + x$.

Prof. Dorel Mihet, Timişoara

Soluție: Ecuația se poate scrie

$\log_2 x = \log_3(x+1) = t \Rightarrow 2^t = x, 3^t = x + 1$ .Se ajunge astfel la $3^t = 2^t + 1$; împărțim acum cu 3^t şi folosim stricta monotonie a funcției exponențiale cu bază subunitară.Obținem unica soluție $t = 1 \Rightarrow x = 2$. □

X.126 Să se rezolve ecuația : $\log_4\left(x^4 - 4x + 5\right) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

Prof. Adriana şi Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Soluție: Se arată imediat că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ are imaginea $\operatorname{Im} f = \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$. Aşadar $f(x) \le \dfrac{1}{2}$, pentru orice *x* real. Pe de altă parte, $x^4 - 4x + 5 \ge 2$ este echivalentă cu $(x-1)^2 \cdot \left(x^2 + 2x + 3\right) \ge 0$

care e evident adevărat pentru orice x real. Urmează

$\log_4\left(x^4-4x+5\right)\geq \log_4 2=\frac{1}{2}$; așadar ecuația dată are soluții doar

dacă $f(x)=\frac{1}{2}$. Se obține imediat unica soluție $x=1$.□

X.127 Dacă $a,b,c\in(1,\infty)$, arătați că

$\log_a{}^4 b+\log_b{}^4 c+\log_c{}^4 a\geq \log_a b+\log_b c+\log_c a.$

Prof. Steluța și Mihai Monea, Deva

Soluție(de fapt idei !) : Folosim (arătăm?) inegalitățile:
$x^4+y^4+z^4\geq x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\geq xyz(x+y+z)$ și $xyz=1$ (de ce ?). □

X.128 Fie $A=\left\{z\in\mathbb{C}/z=x+i\cdot 2^x, x\in\mathbb{R}\right\}$.

a) Arătați că $\exists z_1,z_2,z_3\in A$ astfel încât afixele lor să fie vârfurile unui triunghi isoscel ;

b) Arătați că $\forall z_1,z_2,z_3\in A$ afixele lor nu pot fi vârfurile unui triunghi echilateral.

Prof. Dan Ștefan Marinescu, Ioan Șerdean , Hunedoara

Soluție: a) Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to(0,\infty), f(x)=2^x$ și arătăm că există trei puncte A, B, C pe graficul ei cu $AC=BC$. Luăm A și B pe grafic și C va fi intersecția graficului cu mediatoarea segmentului (AB);b) Fie $A(a,2^a), B(b,2^b), C(c,2^c)$. Folosind $(x+y)^2>x^2+y^2, \forall x,y>0$, avem: $(c-a)^2=(c-b+b-a)^2>(c-b)^2+(b-a)^2$ și, la fel, $\left(2^a-2^c\right)^2=\left(2^a-2^b+2^b-2^c\right)^2>\left(2^a-2^b\right)^2+\left(2^b-2^c\right)^2$; adunăm aceste două inegalități și avem $AC^2>AB^2+BC^2$, adică unghiul $\sphericalangle ABC$ este obtuz.

X.129 Fie $z\in\mathbb{C}, |z|=1$. Arătați că:

a) $\forall n\in\mathbb{N}^*$:;$\left|1-z^2\right|+\left|1+z^3\right|+...+\left|1-z^{2n}\right|+\left|1+z^{2n+1}\right|\geq n\cdot|1+z|$

b) $\forall\alpha\in\mathbb{R}$: $|\sin 2\alpha|+|\cos 3\alpha|+...+|\sin 2n\alpha|+|\cos(2n+1)\alpha|\geq n\cdot|\cos\alpha|$.

Prof. Dan Ștefan Marinescu, Hunedoara

Soluție: a) Folosim $|a|+|b|\geq|a-b|, \forall a,b\in\mathbb{C}$. Avem astfel:
$\left|1-z^2\right|+\left|1+z^3\right|\geq\left|z^2+z^3\right|=\left|z^2\right|\cdot|1+z|=|1+z|$, apoi
$\left|1-z^4\right|+\left|1+z^5\right|\geq|1+z|,...,\left|1-z^{2n}\right|+\left|1+z^{2n+1}\right|\geq|1+z|$. Adunăm membru cu membru aceste inegalități; b) Dacă luăm $z=\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha$, obținem $\left|1-z^{2k}\right|=2|\sin 2k\alpha|, \left|1+z^{2k+1}\right|=2|\cos(2k+1)\alpha|$ și folosim inegalitatea de la punctul anterior.

Clasa a XI-a

XI.121 Fie $a,b>0, n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ și $M_n(a,b)$ mulțimea matricelor pătratice de ordinul n având toate elementele din mulțimea $\{a,b\}$. Dacă $\det(A)\geq 0, \forall A\in M_n(a,b)$ să se arate că $a=b$.

Prof. Mircea Constantinescu, Tg-Jiu

Soluție: Fie A matricea cu elementele de pe diagonala principală egale cu a și restul egale cu b. Atunci $\det(A)=\left[a+(n-1)b\right]\cdot(a-b)^{n-1}$. Fie A' matricea obținută interschimbând liniile 1și 2 ale matricei A. Atunci $\det(A')=-\det(A)\leq 0$. Dar $A'\in M_n(a,b)\Rightarrow\det(A')\geq 0$, deci $\det(A')=0\Rightarrow\det(A)=0$. Deci $a=b$. □

XI.122 Să se determine locul geometric al punctelor M din planul pătratului $ABCD$ pentru care $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=3\cdot AB^2$.

Prof. Aurel Doboșan, Lugoj

Răspuns: Cercul înscris în pătrat. □

XI.123 Să se rezolve în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația $X^4-X^3=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$.

Prof. Aurel Doboșan, Lugoj

Soluție : Notând matricea din dreapta cu A, se ajunge la $AX=XA$ și se deduce că X este de forma $\begin{pmatrix}a&b\\b&a-b\end{pmatrix}$.Calcule conduc la $X=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$, , folosind eventual relația Cayley – Hamilton.

XI.124 Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin

$x_0 > 0, x_{n+1} \cdot x_n = 1 + x_n^{\ 2}, \forall n \in \mathbb{N}$. Să se calculeze $L = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n^{\ 2}}{n}$.

Prof. Alfred Eckstein, Viorel Tudoran, Arad

Soluţie : $x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n} + x_n, \forall n \in \mathbb{N}$, de unde $x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{x_n}, \forall n \in \mathbb{N}$ şi se arată imediat, inductiv, că şirul este strict crescător. Acum avem

$L = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n^{\ 2}}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}^{\ 2} - x_n^{\ 2}}{n+1-n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(2 + \dfrac{1}{x_n^{\ 2}}\right)$ şi astfel $L = 2$. □

XI.125 Se consideră matricea $A \in M_n(\mathbb{C}), n > 2$ şi ecuaţiile $X^k = O_n$, $AX = A + X$ şi $A + X + X^2 + ... + X^{k-1} = O_n$, unde $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ şi $X \in M_n(\mathbb{C})$. Să se arate că orice soluţie $B \in M_n(\mathbb{C})$ a două dintre ecuaţiile date, este soluţie şi pentru cea de-a treia ecuaţie.

Prof. D.M.Bătineţu – Giurgiu, Bucureşti

Soluţie: Dacă *B* e soluţie pentru primele două ecuaţii, se arată imediat că $AB^k = AB + B^2 + B^3 + ... + B^k = A + B + B^2 + ... + B^{k-1} + B^k$; cum $B^k = O_n$, deducem că *B* e soluţie şi pentru a treia ecuaţie ; în rest, tot tehnică de calcul. □

XI.126 Se consideră $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ astfel încât $BC = I_n$ şi funcţiile $f, g : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ pentru care $(f \circ g)(X) = A \cdot g(X) + f(X) \cdot B$, $\forall X \in M_n(\mathbb{R})$. Să se arate că dacă f este injectivă, atunci g este injectivă.

Prof. D.M.Bătineţu – Giurgiu, Bucureşti

Soluţie: Problemă destul de simplă. Dacă $g(X) = g(Y)$, atunci $f(g(X)) = f(g(Y))$ şi înmulţim egalitatea obţinută, la dreapta, cu C .□

XI.127 Fie $A \in M_2(\mathbb{R})$ cu $\det A \geq 1$ şi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ astfel încât $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}, n \geq 1$. Să se arate că dacă cele patru şiruri sunt convergente, atunci $A = I_2$.

Prof.Marian Andronache, Bucureşti

Soluţie: Fie $d = \det A$. Avem astfel $d^n = (\det A)^n = \det(A^n) = a_n d_n - b_n c_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Folosind ipoteza de convergenţă şi $d \geq 1$, deducem $d = 1$. Din relaţia Hamilton – Cayley avem $A^2 - (trA)A + I_2 = O_2$ şi astfel $A^{n+2} - (trA)A^{n+1} + A^n = O_2, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Fiecare din cele 4 şiruri din enunţ verifică deci relaţia de recurenţă $\alpha_{n+2} - (trA)\alpha_{n+1} + \alpha_n = 0$ şi evident cel puţin unul dintre cele 4 şiruri are o limită nenulă *L*. Pentru acest şir obţinem $L(2 - (trA)) = 0 \Rightarrow trA = 2$ şi deci $A^2 = I_2 + 2(A - I_2)$. Destul de rapid ajungem la $A^n = nA + (1-n)I_2$. În final găsim $a_n = n(a_1 - 1) + 1, b_n = nb_1, c_n = nc_1, d_n = n(d_1 - 1) + 1$. Condiţia de convergenţă conduce la concluzia dorită. □

XI.128 Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definit prin $x_1 = 1$, $(n+1)(x_{n+1} - x_n) \geq 1 + x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ este nemărginit .

Prof. Mircea Lascu, Zalău

Soluţie(de fapt idee):
Se prelucrează puţin inegalitatea dată şi se arată inductiv că $x_n \geq n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. □

XI.129 Arătaţi că orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu $x_0 > 0, x_{n+1} \cdot x_n - 2x_n = 3, \forall n \in \mathbb{N}$, este convergent.

Prof. D.M.Bătineţu – Giurgiu, Bucureşti

Soluţie:
Prin reducere la absurd se arată că şirul are toţi termenii nenuli. Mai departe se arată prin inducţie că $x_n > 2, \forall n \geq 1$. Intuim limita şi demonstrăm că aceasta este 3:

$|x_{n+1} - 3| = \dfrac{|x_n - 3|}{x_n} = \dfrac{|x_{n-1} - 3|}{x_n \cdot x_{n-1}} = ... = \dfrac{|x_1 - 3|}{x_n \cdot x_{n-1} \cdot ... \cdot x_1} < \dfrac{|x_1 - 3|}{2^n} \to 0$. □

Clasa a XII-a

XII.121 Să se arate că $\int_0^1 x^2 e^{x^2} dx \le \frac{e}{4}$.

Prof. Marina Constantinescu,Tismana

Soluție: Avem $\int_0^1 x^2 e^{x^2} dx \le \int_0^1 \frac{x+x^3}{2} e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x e^{x^2} dx + \frac{1}{4}\int_0^1 x^2 \left(e^{x^2}\right)' dx =$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 x e^{x^2} dx + \frac{1}{4} x^2 e^{x^2} \Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{e}{4}$

XII.122 Să se arate că $\int_1^3 \frac{2x^3 - x^2 + 8x + 9}{x^4 + 12x - 5} dx = \frac{\pi}{8} + \ln 7.$

Prof. Aurel Doboşan, Lugoj

Idee: $x^4 + 12x - 5 = (x^2 - 2x + 5)(x^2 + 2x - 1)$.

XII.123 Să se determine $\int \frac{\sin^{2008} x}{(1+\cos x)^{2009} dx}, x \in (0, \pi)$.

Prof. Aurel Doboşan, Lugoj

Răspuns: $\frac{1}{2009} \cdot \frac{\sin^{2009} x}{(1+\cos x)^{2009} dx} + \mathcal{C}$.

XII.124 Să se arate că pentru orice $x \in \mathbb{N}$, numărul $a = \left(x^7 + x + 1\right)^{23} - x^9$ se divide prin $b = x^7 + 1$.

Prof. Alfred Eckstein, Viorel Tudoran, Arad

Soluție: $a = \left(x^7 + x + 1\right)^{23} - x^9 = m \cdot \left(x^7 + 1\right) + x^{23} - x =$

$= m \cdot \left(x^7 + 1\right) + x^9 \cdot \left[\left(x^7\right)^2 - 1\right] = m \cdot \left(x^7 + 1\right) + \left(x^7 + 1\right) x^9 m \cdot \left(x^7 - 1\right)$.□

XII.125 Se consideră funcțiile continue $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care satisfac $f(x+3) + 2 \cdot f(4-x) = g(x+3), \forall x \in \mathbb{R}$ .Dacă $\int_1^6 f(x)dx = \frac{1}{3}$, să se calculeze $\int_1^6 g(x)dx.$

Prof. Alfred Eckstein, Viorel Tudoran, Arad

XII.126 Fie $(G,\cdot)$ un grup finit de ordin *n* şi $f : G \to G$ un morfism cu proprietățile: a) $f \circ f = \mathbf{1}_G$; b) $f(x) = x \Rightarrow x = e.$ Să se arate că:

1) $\left\{f(x) \cdot x^{-1} / x \in G\right\} = G;$ 2) *G* este abelian; 3) *n* este impar.

Prof. Dorel Miheț, Timişoara

Soluție: O problemă dragă nouă(frumoasă şi instructivă). 1) Se consideră funcția $g : G \to G, g(x) = f(x) \cdot x^{-1}$ şi se arată destul de repede că este injectivă;deaorece G este finită,avem că funcția este şi surjectivă,,de unde concluzia este imediată;2) Aşadar,pentru $y \in G$ arbitrar,există $x \in G$ astfel încât $g(x) = y$,de unde

$f(y) = f(f(x) \cdot x^{-1}) = x \cdot f(x^{-1}) = \left(f(x) \cdot x^{-1}\right)^{-1} = y^{-1}$;ajungem astfel la $f(xy) = f(x) f(y) \Leftrightarrow (xy)^{-1} = x^{-1} y^{-1}$ sau $xy = yx, \forall x, y \in G$; 3) Dacă $x \ne e$,avem $f(x) \ne x \Rightarrow x \ne x^{-1}$ şi astfel toate submulțimile de forma $\left\{x, x^{-1}\right\}$ formează o partiție a lui $G \setminus \{e\}$,ale cărei clase conțin toate câte două elemente,adică $G \setminus \{e\}$ conține un număr par de elemente,concluzia fiind imediată şi aici. □

XII.127 Fie $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ o funcție bijectivă.Să se studieze dacă există funcții $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ care admit primitive pe $\mathbb{R}$ şi satisfac relația $g \circ g = f$.

Prof. Adriana şi Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Soluție: Avem imediat că dacă *f* este bijectivă,atunci şi *g* este bijectivă.Presupunând că *g* admite primitive,avem că *g* are proprietatea lui Darboux.Fiind şi injectivă, *g* este strict monotonă.Pentru $x = 0$,avem $g(g(0)) = f(0)$;dacă $g(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$,contradicție cu ipoteza,aşadar $g(0) = k \in (0, \infty)$.Presupunem acum că *g* este strict crescătoare şi astfel ajungem la $g(g(x)) > g(0) = k > 0 \Rightarrow f(x) > k > 0, \forall x \in \mathbb{R}$,adică există $y \in (0, k)$ pentru care $f(x) \ne y, \forall x \in \mathbb{R}$,contradicție cu surjectivitatea lui *f*.Analog dacă *g* este strict descrescătoare,aşadar nu există funcții *g* cu proprietatea din enunț. □

XII.128 Să se găsească primitivele funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x\cdot e^x}{\sqrt{1+e^x}}$.

Prof. Dan Ştefan Marinescu, Hunedoara

Soluţie: Să observăm pentru început că $\int\frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}dx=2\int x\cdot\left(\sqrt{1+e^x}\right)^{/}dx=2x\sqrt{1+e^x}-2\int\sqrt{1+e^x}\,dx$ .Pe de altă parte,avem(calcule mai prelungite şi duse cu atenţie): $\left(\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right)\right)^{/}=...=\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$ .Avem mai departe acum: $\sqrt{1+e^x}=\frac{1+e^x}{\sqrt{1+e^x}}=\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}+2\left(\sqrt{1+e^x}\right)^{/}=$ $\left(\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right)\right)^{/}+2\left(\sqrt{1+e^x}\right)^{/}$ şi finalizarea vă aparţine. □

XII.129 Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă şi injectivă cu proprietatea că $f(1)=1$ .Demonstraţi că dacă există $x_0\in(0,1)$ astfel încât $f(x_0)\geq 2$, atunci $\int_0^1 e^{f(x)}dx>2.$

Prof. Lucian Dragomir, Oţelu – Roşu

Soluţie: f continuă şi injectivă,rezultă f strict monotonă;cum $f(x_0)\geq 2>1=f(1)$,deducem că funcţia este strict descrescătoare.Acum,pentru $x\in[0,1]$ deducem $f(x)\geq f(1)\Rightarrow e^{f(x)}\geq e$,integrare pe $[0,1]$ şi $e>2$. □

Probleme propuse
(se primesc soluţii până în data de 25 august 2009)

Notă: Se pot trimite şi soluţii la problemele propuse în articolele apărute în ultimele două numere ale revistei

Clasa I

I.11. Măriţi cu 3 diferenţa numerelor 97 şi 45. Care este rezultatul?

Înv. Hildegard Loidl, Reşiţa

I.12. Un cioban are în turma sa 23 oi albe şi 5 oi negre.
Cu câte oi rămâne ciobanul, după ce vinde şapte dintre oile sale ?

Înv. Hildegard Loidl, Reşiţa

I.13. Din suma numerelor 26 şi 43 scade răsturnatul diferenţei numerelor 36 şi 24. Cât ai obţinut ?

Inst. Măriuţa Benga,Reşiţa

I.14. Mihai are 75 timbre. Câte timbre trebuie să-şi mai cumpere pentru a avea 88 ?

Înv. Hildegard Loidl, Reşiţa

I.15. La diferenţa numerelor 45 şi 15 adună cel mai mic număr natural de două cifre identice. Ce număr ai găsit?

Inst. Măriuţa Benga,Reşiţa

I.16. Într-o cutie sunt 78 bile albe, roşii şi negre. Dintre acestea 55 sunt albe şi negre, iar 48 sunt albe şi roşii. Câte bile sunt de fiecare culoare?

Înv. Lidia Adamescu, Reşiţa

I.17. Vârsta lui Andrei este egală cu cel mai mare număr par de o cifră, iar vârsta srăbunicului este egală cu diferenţa dintre cel mai mare număr de două cifre diferite şi cel mai mic număr de două cifre.
Aflã diferenţa de vârstă dintre cei doi !

Înv. Lidia Adamescu, Reşiţa

I.18. Dacă Alina ar mai avea încă 4 baloane, ar avea cu 3 mai puţine decât fratele său. Câte baloane are Alina, dacă fratele său are 19 baloane?

Inst. Costa Moatăr, Reşiţa

I.19. La un atelier de tâmplărie se confecţionează zilnic 20 mese, iar scaune cu 4 mai multe.
a) Câte scaune se confecţionează în fiecare zi?
b) Câte mese şi scaune se confecţionează, în total, în fiecare zi?

Inst. Costa Moatăr, Reşiţa

1.20. Cosmin are 25 ani, iar sora lui este cu 4 ani mai mică. Ce vârstă va avea fiecare peste 3 ani?

Inst. Costa Moatăr, Reşiţa

Clasa a II-a

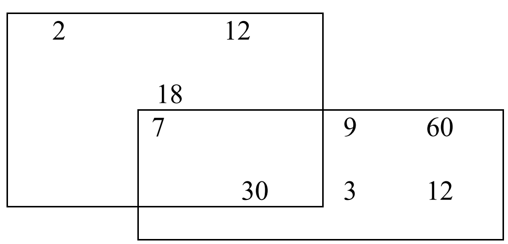
II.11. Scrieţi numerele formate din: 2 zeci şi 9 unităţi; o zece şi 6 unităţi; 7 zeci; 3 zeci şi o unitate; zece zeci; 5 zeci şi cinci unităţi.

Inst. Niculina Bobescu, Reşiţa

II.12. Care numere, cuprinse între 10 şi 60, au cifra zecilor egală cu cifra unităţilor?

Inst. Niculina Bobescu, Reşiţa

II.13. Care din numerele date aparţin ambelor figuri?



Inst. Niculina Bobescu, Reşiţa

II.14. a) .Găseşte după ce regulă s-a format şirul de numere:
0, 5, 10, 15, 20, ...
b).Continuă şirul cu încă 5 numere.

Inst. Florea-Arghir Bobescu, Reşiţa

II.15. Se dau numerele: 3; 14; 27; 5; 38; 18; 21; 46; 29; 70; 16; 25.
Încercuieşte-le pe cele care se află între 10 şi 30.

Inst. Florea-Arghir Bobescu, Reşiţa

II.16. Calculează suma şi diferenţa numerelor: 30 şi 10; 42 şi 11; 15 şi 4; 17 şi 12.

Inst. Florea-Arghir Bobescu, Reşiţa

II.17. Determinaţi cel mai mic număr natural de trei cifre diferite, având suma cifrelor sale egală cu cel mai mare număr par scris cu o cifră.

Inst. Mariana Mitrică, Reşiţa

II.18. Într-o cutie sunt 21 portocale şi 16 banane, iar în altă cutie sunt 43 portocale şi banane.Toate fructele se aşează într-o ladă.
Care este cel mai mare număr posibil de portocale din ladă? Dar cel mai mic număr posibil de banane?

Inst. Mariana Mitrică, Reşiţa

II.19. Găsiţi două numere care au suma egală cu 15, ştiind că unul dintre numere este de patru ori mai mare decât celălat.

Anisia Popa, elevă,Caransebeş

II.20. Mă gândesc la un număr. Scad din el 23 şi obţin cel mai mic număr impar scris cu două cifre diferite. La ce număr m-am gândit ?

Anisia Popa, elevă,Caransebeş

Clasa a III-a

III.11. Mama a cheltuit într-o zi 200 lei. Diana a cheltuit jumătate din cât a cheltuit mama, iar sora ei un sfert.
Câţi lei au cheltuit cele trei persoane în acea zi ?

Inst. Neta Novac, Reşiţa

III.12. La o librărie s-au vândut într-o zi 276 pixuri.A doua zi s-au vândut o treime din cele vândute în prima zi.
Cu câte pixuri s-au vândut mai mult în prima zi decât în a doua zi ?

Inst. Neta Novac, Reşiţa

III.13. Andrei are 19 timbre. Sorin are cât dublul lui Andrei, iar Darius cât Andrei şi Sorin la un loc.
Câte timbre au cei trei copii în total ?

Inst. Neta Novac, Reşiţa

III.14. O cloşcă a clocit 18 ouă. Din acestea au ieşit de 3 ori mai multe puicuțe decât cocoşei. Câți cocoşei sunt , dacă numărul lor este cu 2 mai mare decât numărul de ouă din care nu au ieşit pui ?

Inst. Victor Grindeanu, Reşița

III.15. Câți băieți şi câte fete sunt într-o clasă, dacă numărul băieților este cu 4 mai mare decât jumătate din numărul fetelor şi în total sunt 25 de elevi în clasă ?

Inst. Victor Grindeanu, Reşița

III.16. Adunând un număr cu triplul predecesorului său şi apoi cu succesorul său, obținem cel mai mare număr par scris cu trei cifre. Care este numărul căutat ?

Inst. Mariana Mitrică, Reşița

III.17. Scrieți următoarele două numere din şirul de mai jos:
3; 7; 11; 15; 19; ..; (explicați de ce ați scris acele numere)
Care este al 25-lea termen al şirului ?

Inst. Mariana Mitrică, Reşița

III.18. În clasa a III a A sunt 26 de elevi, iar numărul fetelor este mai mic cu 2 decât numărul băieților; în clasa a III a B sunt 24 de elevi, iar numărul băieților este mai mare cu 2 decât cel al fetelor. În care dintre cele două clase sunt mai mulți băieți ?

Prof. Antoanela Buzescu, Caransebeş

III.19. Pornind de la unul dintre numerele 5, 6 sau 7, numărând din 4 în 4, ajungem la numărul 567. De la care număr am pornit ?

Prof. Antoanela Buzescu, Caransebeş

III.20. Ce numere trebuie puse în locul literelor *a* şi *b* din următorul tabel şi explicați de ce: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & b \\ 4 & 10 & 16 & a & 25 \end{pmatrix}$.

Prof. Antoanela Buzescu, Caransebeş

Clasa a IV-a

IV.140. Ionel are cu 143 timbre mai mult decât Mihai. Dacă numărul timbrelor lui Ionel s-ar împărți la numărul timbrelor lui Mihai, câtul ar fi 2, iar restul 56. Câte timbre are fiecare?

Inst. Elena Crîsta, Reşița

IV.141. Fiecare literă din cuvântul REŞIȚA reprezintă un număr. Determinați valoarea fiecărui număr, ştiind că:

R + E + Ş + I + Ț + A = 999
E + Ş = 356
R = 3 x Ț
I = Ş - Ț
R + E + Ş + I = 678
Ț = 900 : 10

Inst. Elena Crîsta, Reşița

IV.142. Scrieți numărul 700 cu ajutorul a nouă de 5 şi al unor operații aritmetice.

Carolina Savu, elevă, Moldova - Nouă

IV.143. Într-o cutie sunt 320 de creioane. Aurel, Bogdan, Costel, Dan şi Virgil se hotărăsc să îşi împartă creioanele astfel: Aurel va lua o doime din numărul lor, Bogdan şi Costel vor lua câte o pătrime din rest, iar Dan şi Virgil vor lua ceea ce rămâne, în mod egal.
Câte creioane va lua fiecare copil?

Inst. Elena Stefanovici, Reşița

IV.144. Un aspirator şi un mixer costă împreună 250 lei. Dacă micşorăm prețul aspiratorului cu 20 lei şi mărim prețul mixerului cu 50 lei, aspiratorul devine de 3 ori mai scump decât mixerul.
Află prețul fiecărui articol.

Inst. Elena Stefanovici, Reşița

IV.145. Scade din a treia parte a sfertului jumătății produsului numerelor 90 şi 80 jumătatea sfertului sumei numerelor 164 şi 236. Cât ai obținut ?

Inst.Mariana Mitrică, Reşița

IV.146. Se dau trei numere naturale. Dacă se împarte primul număr la al doilea, se obține câtul 3 şi restul 2, iar dacă se împarte al treilea la al doilea, se obține câtul 2 şi restul 1.
Aflați suma celor trei numere, ştiind că diferența dintre primul şi al treilea este 15.

Inst.Mariana Mitrică, Reşița

IV.147. Găsiți un număr natural știind că sfertul sfertului său este 4.

Carolina Savu, elevă, Moldova - Nouă

IV.148. Găsiți câte numere de șase cifre se termină în ...2009. Câte dintre aceste numere se scriu cu exact trei cifre identice ?

Prof. Antoanela Buzescu, Caransebeș

IV.149. Produsul a două numere naturale este 323. Dacă se adună 2 la unul dintre factori, produsul se mărește cu 38. Determinați cele două numere.

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roșu

Clasa a V-a

V.140 Să se determine numărul natural $n \geq 1004$ și numerele prime $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_n$ astfel încât să aibă loc egalitatea $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 2009$. Să se arate ca numărul $p_1 p_2 \ldots p_n + 1$ este compus.

Prof. Lucian Petrescu, Tulcea

V.141 Să se arate că nu există numere naturale nenule m și n, cu n impar, astfel încât $2^n + 5^n = m^{2010}$.

Prof. Lucian Petrescu, Tulcea

V.142 Determinați numerele naturale nenule a și b pentru care:

$3a + 4b = 2009$ și $\frac{a}{b} + \frac{a+1}{b+1} + \frac{a+2}{b+2} + \ldots + \frac{a+2008}{b+2008} = 2009$

Prof. Antoanela Buzescu, Caransebeș

V.143 Determinați numărul natural nenul n pentru care numărul $A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n + 223$ este pătrat perfect.

Prof. Antoanela Buzescu, Caransebeș

V.144 Arătați că nu există perechi de numere naturale (x, y) astfel încât să avem $5^x + y^4 = 2009$.

Prof. Antoanela Buzescu, Caransebeș

V.145 Se consideră numărul $A = 2 + 3^2 + 2^3 + 3^4 + 2^5 + 3^6 + \ldots + 2^{99} + 3^{100}$. Calculați restul împărțirii la 10 a numărului A.

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roșu

V.146 Arătați că numărul 2009 se poate scrie ca o sumă de numere naturale care au produsul egal cu 2009.

Red.RMCS

V.147 Găsiți restul împărțirii numărului $B = 21^{2009} - 10$ la 63.

Prof. Romeo Zamfir, Galați

V.148 Determinați numerele naturale m și n știind că

$$130 < 2^m + 2^n < 140.$$

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roșu

V.149 Să se determine câte perechi (A, B) de mulțimi având elementele numere naturale nenule satisfac simultan condițiile:

a) A nu conține niciun număr par;

b) $A \cup B$ are exact șase elemente;

c) pentru orice $a \in A$, există $b \in B$ astfel încât $2a + b = 16$.

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roșu

Clasa a VI-a

VI.140 Determinați numărul maxim și numărul minim de numere întregi consecutive care au suma egală cu 26.

Concurs Brașov

VI.141 a) Arătați că pentru orice numere întregi a, b este adevărată egalitatea $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$

b) Determinați numerele naturale x și y pentru care $x^3 - 3^y = x^2 - 2^y$

Prof.Marius Damian, Brăila

VI.142 Găsiți cel mai mic număr natural care se scrie (în baza 10) doar cu cifrele 2 și 3 și care se divide cu 132.

Prof. Dorel Miheț, Timișoara

VI.143 Fie m şi n două numere diferite de câte 4 cifre distincte, acestea fiind 1, 2, 3 şi 4. Arătaţi că m nu divide pe n .

Prof. Daniela Vlaicu, Zalău

VI.144 Să se determine numerele naturale nenule p şi q pentru care

$$\frac{2^q+1}{2^p-1}\in\mathbb{N}.$$

* * *

VI.145 Un elev a simplificat o fracţie de forma $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}}$ ştergând b atât de la numărător cât şi de la numitor, obţinând totuşi rezultatul corect.

Câte astfel de fracţii există la care, simplificând greşit, obţinem un rezultat corect ? (cifrele a,b,c sunt nenule şi distincte)

* * *

VI.146 Arătaţi că pentru orice număr natural nenul n , fracţia $F(n)=\frac{6^{2n}+2001}{8^n+811}$ este reductibilă.

Prof. Alfred Eckstein, Viorel Tudoran, Arad

VI.147 Arătaţi că dacă a,b,c,d sunt numere întregi astfel încât $7/(5a+9b+12c-2d)$, atunci $7/(a-b+c+d)$.

Prof. Alfred Eckstein, Viorel Tudoran, Arad

VI.148 Să se găsească numerele $\overline{ab}$ care sunt divizibile cu $4a+3b$.

Prof. Antoanela Buzescu, Caransebeş

VI.149 La un concurs de matematică au fost date 30 de probleme.Pentru fiecare problemă rezolvată corect s-au acordat câte 5 puncte, iar pentru fiecare problemă rezolvată greşit s-au scăzut câte 3 puncte. Câte probleme a rezolvat corect un elev care a obţinut un total de 118 de puncte?

Concurs Timiş

Clasa a VII-a

VII.140 Se consideră un triunghi ABC şi punctele D şi E pe (BC) astfel încât $BD=DE=EC$; se notează cu F simetricul lui A faţă de B, $AD\cap FC=\{G\}$ şi $EG\cap AB=\{H\}$. Arătaţi că $FH=AB$.

Prof. Antoanela Buzescu, Caransebeş

VII.141 Se consideră mulţimea $A=\{1,2,\ldots,2009\}$ şi mulţimile $A_1,A_2,\ldots,A_n$ care satisfac proprietăţile :

a) pentru orice $k\in\{1,2,\ldots,n\}$, mulţimea A_k are cel puţin opt elemente;

b) $A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n=A$.

(1) Să se determine valoarea maximă a numărului n ;

(2) Să se arate că există $k\in\{1,2,\ldots,n\}$ astfel încât A_k conţine două elemente a căror diferenţă este multiplu de 8.

Prof. Lucian Petrescu, Tulcea

VII.142 La un turneu de şah au participat băieţi şi fete astfel încât fiecare participant la turneu a jucat o partidă cu fiecare dintre ceilalţi. Dacă se ştie că băieţii au jucat între ei 21 de partide şi în total s-au jucat 66 de partide, aflaţi câţi băieţi şi câte fete au participat la turneu.

Prof.Marius Damian, Brăila

VII.143 Fie $ABCD$ un romb, $E\in(BC),F\in(AB)$ astfel încât $m(\measuredangle ADF)=m(\measuredangle EDF)$. Dacă $DE=AF+CE$, arătaţi că $ABCD$ este pătrat.

Prof. Mircea Fianu, Bucureşti

VII.144 Determinaţi numerele reale x şi y pentru care

$$x+y=4 \text{ şi } 2^x+2^y=8.$$

Prof. Heidi Feil, Oţelu - Roşu

VII.145 Determinaţi mulţimile M cu trei elemente, numere naturale, care satisfac proprietatea: dacă $x\in M$, atunci $\sqrt{x}\in M$ sau $x^2\in M$.

Prof. Lucian Dragomir, Oţelu – Roşu

VII.146 Pe laturile *AD* şi *AB* ale rombului *ABCD* se consideră punctele *E*, respectiv *F* astfel încât $AE = DF$. Dreptele *BC* şi *DE* se intersectează în punctul *P*, iar *CD* şi *BF* se intersectează în *Q*. Arătaţi că:

a) $\frac{PE}{PD}+\frac{QF}{QB}=1$;

b) *P,A* şi *Q* sunt coliniare.

Concurs Deva

VII.147 Se consideră dreptunghiul *ABCD* şi se notează cu *E* simetricul lui *A* faţă de *BD,* iar $BE \cap CD = \{M\}$. Arătaţi că:

a) patrulaterul *BECD* este trapez isoscel;
b) axa de simetrie a trapezului *BCED* conţine centrul dreptunghiului *ABCD.*

Prof. Nistor Budescu, Dalboşeţ

VII.148 Să se determine numerele naturale *x* şi *y* pentru care

$$4x^2+2x+11=y^2.$$

Prof. Alfred Eckstein, Viorel Tudoran, Arad

VII.149 Se consideră un triunghi *ABC* şi *M* mijlocul laturii *(BC).*Arătaţi că există $D \in (AB), E \in (AC)$ astfel încât $DE // BC$ şi $m(\measuredangle DME) = 90^o$

* * *

Clasa a VIII-a

VIII.140 Determinaţi numerele întregi *a* şi *b* pentru care

$$\left(\frac{\sqrt{2}-a}{\sqrt{2}+a}+\frac{\sqrt{2}-b}{\sqrt{2}+b}\right)\in\mathbb{Z}$$

Prof. Traian Duţă, Făgăraş

VIII.141 Determinaţi numerele întregi *x* şi *y* pentru care

$$\sqrt{y-x}+\sqrt{x}=3 \text{ şi } \sqrt{y+x}+\sqrt{x}=5.$$

Prof. Antoanela Buzescu, Caransebeş

VIII.142 Fie *A* o mulţime de numere reale cu cel puţin trei elemente. Arătaţi că, dacă pentru orice $a, b \in A, a \neq b$, avem $\left(a^3+b\right)\in\mathbb{Q}$, atunci $A \subset \mathbb{Q}$. *Prof.Romeo Ilie, Braşov*

VIII.143 Dacă $x, y \in (0,\infty)$, arătaţi că: $\frac{x}{1+y}+\frac{y}{1+x}\geq\frac{2(x+y)}{2+x+y}$. Precizaţi în ce caz avem egalitate.

Concurs Suceava

VIII.144 În interiorul unui cub de latură 6 se consideră 1001 cuburi unitate cu feţele paralele cu feţele cubului dat. Arătaţi că există două cuburi unitate cu proprietatea că centrul unuia se află în interiorul sau pe feţele celuilalt.

Prof. Dinu Şerbănescu, Bucureşti

VIII.145 Volumul unui paralelipiped dreptunghic este 24. Mărind dimensiunile cu 2, 3, respectiv 4, produsul creşte de 8 ori. Calculaţi aria totală a paralelipipedului.

* * *

VIII.146 Să se determine minimul expresiei

$$E(x,y)=x^3+y^3-3xy \text{ , } x,y>0.$$

* * *

VIII.147 Dacă *m* şi *n* sunt numere naturale, arătaţi că numărul 5^n+5^m se poate scrie ca sumă de două pătrate perfecte dacă şi numai dacă $n-m$ este număr par.

Prof. Vasile Zidaru, Sf.Gheorghe

VIII.148 Fie mulţimea $M=\{1,2,3,..,20\}$**.** Să se demonstreze că oricum am alege 14 numere distincte din M, putem găsi printre acestea două numere al căror produs este pătrat perfect **.**

Prof. dr. Dorin Mărghidanu, Corabia

VIII.149 Fie $[AB]$ şi $[CD]$ două segmente necoplanare, iar *E* şi *F* mijloacele lor. Arătaţi că: $AD+BC>2EF$.

Concurs Olt

Clasa a IX-a

IX.140 Fie A o mulțime de numere naturale şi $f : A \to A$ o funcție cu proprietățile:

a) există $a \in A$ cu $f(a) \neq a$;

b) $f(m) - f(n) = m - n, \forall m, n \in A$.

Arătați că mulțimea A este infinită.

Prof. Mircea Becheanu, Bucureşti

IX.141 Se consideră punctele coliniare distincte A,B,C,D,E astfel încât $AB = BC = CD = DE$. Dacă F este un punct din plan, iar G şi H centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ADF, respectiv BFE, arătați că $GH \perp FC$.

Concurs Baltic 1997

IX.142 Fie $M \subset \mathbb{R}, M \neq \emptyset$ şi funcțiile $f, g : M \to M$ cu proprietățile:

a) $f(g(x)) = g(f(x)) = x,\ \forall x \in M$;

b) $f(x) + g(x) = x,\ \forall x \in M$.

Arătați că:

1) $x \in M \Rightarrow -x \in M$; 2) $f(-x) = -f(x), \forall x \in M$.

Concurs Moldova 2002

IX.143 Determinați numerele reale x,y,z care satisfac proprietățile:

a) $0 < x \leq 11$; b) $z \geq 14$; c) $x + y + z = 38$; d) $xyz = 2002$.

Concurs Australia 2002

IX.144 Să se arate nu există nici un triunghi ABC în care

$$tg\,A = \frac{a-b}{c},\ tg\,B = \frac{b-c}{a} \text{ şi } tg\,C = \frac{c-a}{b}.$$

Prof. Lucian Petrescu, Tulcea

IX.145 Comparați numerele $a = tg\frac{\pi}{9}$ şi $b = 2 - \sqrt{2}$.

Prof.Lucian Dragomir, Oțelu - Roşu

IX.146 Determinați numerele întregi x şi y care satisfac :

$$(x + y)(x^2 + y^2) = 1 + 3xy$$

Prof.Lucian Dragomir, Oțelu - Roşu

IX.147 Să se determine numerele reale m pentru care rădăcinile ecuației $x^2 - 2(m-1) \cdot x + m = 0$ sunt întregi.

Prof.Lucian Dragomir, Oțelu - Roşu

IX.148 Să se arate că dacă într-un triunghi ABC avem

$$b^2 - bc + c^2 \geq a^2 \text{, atunci } B + C \geq \frac{2\pi}{3}.$$

Red.RMCS

IX.149 Precizați natura triunghiului ABC în care

$$a^2 \sin B + b^2 \sin C + c^2 \sin A = 6 \cdot \mathcal{A}_{ABC}$$

Prof.Lucian Dragomir, Oțelu - Roşu

Clasa a X-a

X.140 Să se arate că dacă $a,b,c,d \in (0,\infty)$,atunci

$$\frac{a^4}{b^2c} + \frac{b^4}{c^2d} + \frac{c^4}{d^2a} + \frac{d^4}{a^2b} \geq a + b + c + d.$$

Prof. dr. Dorin Mărghidanu, Corabia

X.141 Să se determine toate funcțiile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ care verifică relația: $x^2 + 2f(xy) + y^2 = f^2(x + y)$ pentru orice x şi y numere naturale.

Elev Ovidiu Stăniloiu, Bocşa

X.142 Să se determine funcțiile surjective $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ pentru care $f(m) + f(n) = f(f(m + n))$, oricare ar fi m, n numere naturale.

Elev Ovidiu Stăniloiu, Bocşa

X.143 Numerele naturale distincte a,b,c,d,e,f,g,h,n verifică egalitățile $ab + cd = ef + gh = n$. Determinați cea mai mică valoare a lui n .

Concurs Belarus

X.144 Lungimile a,b,c ale laturilor unui triunghi satisfac egalitatea $b+c=3a$. Arătaţi că a este lungimea celei mai mici laturi.

* * *

X.145 Două pătrate de latură 1, având laturile paralele, se intersectează după un dreptunghi de arie $\frac{1}{8}$. Calculaţi distanţa minimă dintre centrele celor două pătrate.

Prof. Radu Gologan, Bucureşti

X.146 Să se rezolve ecuaţia $\cos 2x+2\cos 4x+\cos 6x=\cos^2 x$

Red.RMCS

X.147 Arătaţi că în orice triunghi ABC este adevărată inegalitatea

$\frac{A^2}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{B^2}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{C^2}{\sin\frac{C}{2}}\geq\frac{2\pi^2}{3}$. Precizaţi în ce caz are loc egalitatea.

Prof. Aurel Doboşan, Lugoj

X.148 Fie $z=x+i\cdot y, i^2=-1$, cu $xy\neq 0$. Arătaţi că, dacă $|z|=1$, atunci

$\left(a+\frac{b}{x^2}\right)\cdot\left(a+\frac{b}{y^2}\right)\geq(a+2b)^2$, $\forall a,b\in\mathbb{N}^*$.

Prof. D.M.Bătineţu – Giurgiu, Bucureşti

X.149 Stabiliţi dacă numărul $a=1-3\cdot C_{60}^2+9\cdot C_{60}^4-27\cdot C_{60}^6+81\cdot C_{60}^8-\ldots$ este par sau impar.

Red. RMCS

Clasa a XI-a şi Clasa a XII-a

XI.140 Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă, să se demonstreze că există $c_1,c_2\in(a,b)$ astfel încât

$$f'(c_1)=\frac{f(c_1)-f(a)}{b-c_1} \text{ şi } f'(c_2)=\frac{f(b)-f(c_2)}{c_2-a}.$$

Prof. dr. Dorin Mărghidanu, Corabia

XI.141 Fie Matricea $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$. Elementele lui A se modifică după următoarea regulă: Un element de pe diagonala principală se măreşte sau se micşorează cu 2, iar în rest, orice alt element se măreşte sau se micşorează cu 1. Este posibil ca după după 2008 astfel de transformări determinantul lui A să fie 2008 ?

Elev Ovidiu Stăniloiu, Bocşa

XI.142 Determinaţi funcţiile polinomiale $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ştiind că există $a\in\mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $x>a$, f nu este injectivă pe intervalul $[a,x]$

Elev Ovidiu Stăniloiu, Prof. Nicolae Stăniloiu, Bocşa

XI.143 Fie $a\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi şirul $(x_n(a))_{n\geq1}$ definit prin

$x_n(a)=\sin a+\frac{\sin^2 a}{2}+\ldots+\frac{\sin^n a}{n}, n\in\mathbb{N}^*$.

a) Să se demonstreze că $\lim\limits_{n\to\infty}x_n(a)=-\ln(1-\sin a)$.

b) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=+\infty$.

Prof. Lucian Petrescu, Tulcea

XI.144 Fie $a,b>0$ astfel încât ecuaţia $x^3-ax^2+bx-1=0$ să aibă soluţiile reale x_1,x_2,x_3. Dacă $[x_1^3]=[x_2^3]=[x_3^3]$, să se arate că $\left[\frac{a^2}{b}\right]=3$.

Prof. Lucian Petrescu, Tulcea

XI.145 Pe $(0,\infty)$ definim o lege de compoziţie "$\circ$" comutativă, cu proprietatea că $\forall x,y\in G$ cu $x\leq y$, avem $x\leq x\circ y\leq y$. Dacă $a,b,c\in G$ satisfac $\frac{a}{b\circ c}=\frac{b}{c\circ a}=\frac{c}{a\circ b}$, arătaţi că $a=b=c$.

Prof. Steluţa Monea şi Mihai Monea, Deva

XI.146 Să se determine funcția derivabilă $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ pentru care

$$f(0)=\sqrt{e} \text{ și } x\cdot f(x)=(1+x^2)\cdot f^{/}(x), \forall x\in\mathbb{R}.$$

Prof.Lucian Dragomir, Oțelu - Roșu

XI.147 Se consideră o funcție derivabilă $f:\mathbb{R}\to[0,\infty)$, strict crescătoare, cu $f(0)=0$.

a) Demonstrați că există $c\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\frac{f^{/}(c)}{f(c)}=tgc$.

b) Demonstrați că există $d\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ pentru care $\frac{f^{/}(d)}{f(d)}=2\cdot tg2d$.

Prof.Lucian Dragomir, Oțelu - Roșu

XI.148 Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție continuă și injectivă, iar *A,B,C* puncte situate în această ordine pe reprezentarea geometrică a graficului lui *f*. Demonstrați că: $AC^2>AB^2+BC^2$.

Prof. Steluța Monea și Mihai Monea, Deva

XI.149 Vârfurile unui triunghi sunt puncte având coordonatele întregi, unul dintre ele fiind situat pe dreapta de ecuație $y=x$, iar centrul de greutate este chiar originea sistemului de axe de coordonate. Să se arate că aria triunghiului este un număr întreg.

Prof.Lucian Dragomir, Oțelu - Roșu

Rubrica rezolvitorilor

Punctaje obținute pentru rezolvarea probemelor din RMCS nr.27
(a demarat astfel ediția a V-a a Concursului RMCS)

Clasa a I-a

Liceul Hercules Băile Herculane (înv.Adriana Laitin, inst. Mirela Bolbotină) Țimbota Alexandru Valentin 89, Petcu Alexandru Egon 93, Panduru Liviu 89, Blidariu Mihai 94, Grozăvescu Andreea Ana-Maria 91, Bîrlan Florentin 93, Mihalcea Daniel 95, Vlădica Alexandra 95, Staicu Ariana 94, Gongu Cristian 84, Cîrdei Bogdan Antonio 100, Cionca Flavius Cosmin 89.
Școala Bolvașnița Știrban George 50
Școala Generală 2 Reșița (înv. Florica Boulescu) Ciobanu Elena 120
Școala Generală 9 Reșița (inst. Costa Moatăr) Borduz Flavius 89, Voinea Nicoleta 89, Bodnar Emanuela Deborah 92
Grup școlar Moldova Nouă (înv. Anastasia Stroia) Răulea Alina 30, Cristea Bianca 97, Irimia Loredana 76, Harca George Adrian 76, Iacob Andreea 56
Școala Generală 1 Oțelu – Roșu (înv. Nicoleta Toader, înv. Nicoleta Doleanu) Janțu Lucian 70, Jebelean Cristiana 74, Boghian Tiberiu 50, Borca Delia Ariana 71, Preda Sebastian 74, Meilă Denic 80, Dobre Alexandra 42, Modîlcă Alin 60, Vețan Denis 60, Baderca Flavius 80, Pop Adrian 50
Liceul Teoretic Gen.Dragalina Oravița (înv.Ildiko Stoenescu, prof. Aurica Lazarov) Lazarov Andrei 100.

Clasa a II-a

Liceul Hercules Băile Herculane (inst.Floarea Kuszay, înv.Camelia Staicu, înv. Doina Zah) Mărțuică Ana 98, Laitin Patricia 100, Bolbotină Gabriel 252, Susana Denisa 100, Militaru Antonio 100, Jircovici Ana-Maria 100, Agafiței Cristian 93, Troacă Andrei 163, Agafiței Nichita 93, Nicoară Rebeca 163, Bocică Cristinel 93, Negoițescu Nicoleta 179, Ciobanu Antonia 174, Sorescu Valentin 182, Dorobanțu Maria 185, Stoican Anastasia 177, Dancău Maria Ileana 185, Roș Maria 177
Școala Bolvașnița Jura Miriam Iasmina 20
Școala Romul Ladea Oravița (nv. Viorica Totorean, înv. Merima Velcotă, înv.Georgeta Curea) Burcușel Alex 35, Burulea Alexandru 62,

Preda Damir 90, Gherman Oana 72, Dumitraşcu Bogdan Andrei 75, Scarlat Sara- Giulia 75, Buzdug Ionuț 76, Niță Cezar 90.
Liceul Teoretic Gen.Dragalina Oravița (înv. Mirela – Ana Nicolaevici) Mărilă Paul 79.
Şcoala Generală 2 Reşița(înv. Aurica Nițoiu) Potocean Aura Teodora 96
Şcoala Generală 8 Reşița (înv. Rodica Moldovan, înv. Corina Nedelcu) Goian Tudor George 85, Bruno Kapros 80, Nica Elena Lorena 63, Chiseliță Mara 83, Badea Elia Cristina 60, Surugiu Dragoş Andrei 68, Ciupici Vlad mihai Jiva 30, Pătru Ralph Antonio 74, Grema Denis 73, Marin Mădălin 62, Pascal Roxana 79, Țeperdel Darius 65, Ştreng Flavius 65, Cenda Sabina 74
Şcoala Generală 9 Reşița (înv. Margareta Filip) Jumanca Patricia 232
Liceul Pedagogic CD Loga Caransebeş (înv. Ion Ritta) Miculescu Andreea 100
Şcoala Generală 1 Oțelu – Roşu (mama) Buță Jana Adina 175
Şcoala Generală 12 Decebal Craiova, Dolj (inst. Letiția Lungu) Prejbeanu Andreea Cristina 100.

Clasa a III-a

Liceul Hercules Băile Herculane (înv.Maria Daria Puşchiță) Mircea Emilian Golopența 100, Brancu Violeta Petruța 100, Tudor Oana 100, Bujancă Georgiana 100, Barbu Cornel 100.
Şcoala Berzasca (înv. Elena Armanca) Bănică Mihai Sebastian 86
Liceul Pedagogic CD Loga Caransebeş (inst. Mirela Tătar) Boba Bianca 90
Şcoala Generală 2 Reşița (înv. Ana Modoran) Velcsov Flavia 110, Cioponea Alexandru Mihai 80, Mihai Flavian Andrei 100, Gligor Mădălina Georgiana 90, Presnescu Bogdan 100, Murariu Dumitru Ciprian 100, Bălean Octavian 80, Nicola Elena Beatrice 110.
Şcoala Generală 9 Reşița (înv. Mariana Mitrică, înv. Angela Adina Belu) Imbrescu Raluca 224, Gherasim Daniel 185, Vladu Andrei 170, Şoavă Daniel Viorel 295, Zaharia Flavia Cristiana 298, Remo Denis 127, Țigănilă Ionuț Lucian 185.
Şcoala Romul Ladea Oravița (înv. Camelia Suru, înv. Rozalia Arnăutu, prof. Maria Iancu) Borş Maria 98, Şchiopu Alexandra 73, Palade Teodora 83, Budimir Mădălina 98, Caracoancea Timotei 65, Brădeanu Luciana Florentina 32, Drugărin Iosmin Ciprian 93, Voin Lavinia 43.
Şcoala Rusca Teregova Blaj Petru 100

Liceul General Dragalina Oravița (înv. Livia Crețu)Clepan Daria Ştefania 30, Negru Sebastian 60.

Clasa a IV-a

Liceul Hercules Băile Herculane (Inst.Alexa Gaiță, Înv. Doina Zah, Înv.Diana Grozăvescu) Barbu Andrei 83, Şulma Patricia 100, Barbu Cristian 90, Burcin Andreea 100, Nicoară Denisa 90, Vătavu-Pepa Călina 90, Ciobanu Romina 98.
Şcoala Berzasca (înv. Ramona Soroceanu) Radovan Iasmina 143, Secobeanu Flavius 60, Bîtea Nadin 76, Mogoşan Rebeca Sara 143, Criste Gabriel 96.
Şcoala Generală nr. 6 Arad (înv. Irina Ciule) Popa Iasmina 130
Şcoala Bolvaşnița (Inst. Mihaela Goanță) Ştirban Simona 20, Jura Damarius Cătălin 20
Liceul Pedagogic Caransebeş(Înv. Elena Minea) Szabo Ciprian 100.
Liceul Traian Doda Caransebeş (înv, Ileana Petrescu) Marco Mihai 70
Şcoala Romul Ladea Oravița(Înv. Camelia Suru) Balmez Bogdan 100, Simu Victor 50 .
Şcoala Generală 2 Reşița(înv. Elisaveta Vlăduț) Popa Radu 30, Mihancea Miruna 90, Lolescu Bogdan 80, Schinteie Eugen 40, Ciucă Mihai 40, Rădoi Oana 90, Pinte Ana Maria 70.
Şcoala Generală 9 Reşița (înv. Zora Zecheru) Bălean Vlad 160

Clasa a V-a

Şcoala Generală nr.1 Anina (prof. Marin Constantin Cleşiu) Goia Ana Maria 40, Lupu Ana 40, Borcean Delia 80, Sîrghie Mădălina 70
Şcoala Bănia (prof. Iancu Cleşnescu) Andrei Nicu Daniel 90
Fără mențiune de şcoală: Stroca Andrei 90, Becia Robert 175
Liceul Hercules Băile Herculane (Prof. Constantin Bolbotină) Popa Andrei 196,Cîrdei Alex-Cosmin 196, Urzică Ionuț Sorin 92,Cernescu Maria 192, Moagă Ducu Alecsandru 70, Stanciu Ana-Maria 196, Stanciu Ani 196, Grigorie Denisa Bianca 185, Urdeş Florin 196, Radu Denisa 196, Rădoi Flavius 196.
Liceul Traian Doda Caransebeş (Prof. Delia Dragomir, Prof. Janet Miuță Bocicariu) Iliescu Alexandru 235, Jurescu Ioan Cristian 70, Nistor Răzvan 110, Dodoiu Oana 80, Stoicănescu Petru 90, Neagoe Loredana 184, Varga Florina 70, Seracin Ciprian 60, Oțet Cătălin 30.

Liceul Pedagogic Caransebeş (Prof. Dorina Humiţa,Prof. Mariţa Mirulescu) Semenescu Raluca 80, Pelin Anitta 30, Nicoară Ioana 70, Zanfir Andreea 80, Ambruş Patricia 40.
Grup Şcolar Moldova Nouă(prof.Vasilica Gîdea) Chiriac Bianca 60, Petraru Ioana 50, Airini Michel 100, Căta Alexandra 80, Dărac Alexandra 60, Căluşariu Ana Maria 50.
Şcoala Generală 2 Reşiţa (prof.Marius Şandru) Neaţu Monica 100, Ursul Larisa Iasmina 30, Ciobanu Anca 50
Şcoala Generală 6 Reşiţa (Prof. Susana Simulescu) Alexa Luana Maria 110, Herţanu Denisa 130, Vida Octavian 100
Şcoala Generală 8 Reşiţa (Prof. Mirela Rădoi)Trica Alissia 50, Sanda Mihaela 70, Puşcaşu Simona 60, Ştirbu Monica 40, Rus Daniel 100
Şcoala Generală 9 Reşiţa(prof. Irina Avrămescu, prof.Vasile Chiş) Ştefan Andrei 40, Buşoi Natalia 50, Boldea Cristina 80, Gaiţă Nadine 190, Costea Denis-Loren 200, Anănuţă Adela Marina 120, Ciortan Ionuţ Petru 195, Pupăzan Andreea 140, Muscu Dragoş 180, Bochizu Constantin 180
Liceul Teoretic Traian Lalescu Reşiţa (Prof. Otilia Bejan)Dolot Doina Nicole 160
Şcoala Romul Ladea Oraviţa (Prof.Camelia Pîrvu) Balmez Andrada-Ioana 245, Murgu Teodora 195, Chirciu Cătălina 120
Liceul Gen.Dragalina Oraviţa(Prof.Aurica Lazarov) Ţibulca Andrei 60
Şcoala Generală 1 Oţelu-Roşu (Prof. Heidi Feil)
Toader Răzvan 130, Pândici Cristian Andrei 50, Ţolea Loredana Oana 120, Simescu Larisa Geanina 90, Buzzi Cristian Alexandru 248, Opruţ Raul 80, Szatmari Larisa Maria 215, Bauer Richard 160, Erdei Dorian emeric 105, Oancea Maria Roxana 60.
Şcoala Generală nr.3 Oţelu-Roşu (Prof. Felicia Boldea, prof.Daniela Suciu) Barbu Lidia 120, Micşescu Cristian 90, Carp Andreea 165, Piess Helmuth 60, Drăgan Alexandra Diana 138, Ghercă Sabrina Marinela 116.
Grup Şcolar Oţelu-Roşu (Prof. Adriana Dragomir)Lohan Larisa 150 , Creţoiu Ionuţ 150
Şcoala Rusca Teregova (Prof. Sorin Ciucă) Humiţa Ionela 95, Banda Ioan Alexandru Ilia 120, Stepanescu Alina Iconia 103
Şcoala Vîrciorova (prof. Ioan Liuba) Bănescu Ramona 30(30).

Clasa a VI-a

Liceul Hercules Băile Herculane (Prof. Constantin Bolbotină, prof. Marius Golopenţa) Şandru Ilie Daniel 200, Gherghina Liviu 170, Török Bogdan 150, Mihart Georgiana 190, Ferescu Liana 185, Croitoru Sabina 140, Domilescu Manuel 185, Terfăloagă Ana – Maria 174 .
Şcoala Berzasca (Prof. Dana Emilia Schiha) Vulpescu Iulia 150, Velicicu Alina Andreea 150, Vîlcu Cosmin 50.
Şcoala Bozovici(Prof.Pavel Rîncu) Ruva Mihaela 70
Liceul Traian Doda Caransebeş (Prof. Delia Dragomir) Domăneanţu Octavian 130
Şcoala Generală Dalboşeţ (Prof.Pavel Rîncu) Motorga Eliza Mirela 50
Grup Şcolar Moldova Nouă (Prof. Zoran Ocanovici)Mereu Mădălina 60
Şcoala Generală nr. 6 Reşiţa (Prof. Susana Simulescu) Ciulu Miruna Dalila 230
Şcoala Generală 8 Reşiţa(Prof. Mirela Rădoi) Chiru Cristian 90, Guia Petru 40
Şcoala Generală nr. 9 Reşiţa (Prof. Ion Belci,Prof.Irina Avrămescu) Peptan Andrei Valentin 160, Pangica Antonio 160, Munteanu Ionuţ Valentin 210, Vâlcu Sebastian 30 .
Şcoala Romul Ladea Oraviţa (Prof. Mariana Iancu, Prof. Camelia Pîrvu) Gheorghişan Călin 283, Dănilă Mădălina 278, Pîrvu Ancuţa Iulia 130, Alexa Anca 276, Drinceanu Ioana 120, Trăilă Alexandra Iulia 110
Şcoala Generală 3 Oţelu-Roşu (Prof. Daniela Suciu, Prof. Felicia Boldea) Băilă Cristina 40,Românu Nicoleta 80, Barbu Daniel 80, Preda Cristina 67, Vladu Alina 60, Haba Beatrice 67.
Şcoala Generală 1 Oţelu-Roşu (Prof. Heidi Feil, prof.Anişoara Popa) Ştefănescu Andrei 240, Raţ Laura 40, Trica Alexandru 100, Manu Cristina 80, Necşa Adina 40, Neagu Alexandra 50
Grup Şcolar Oţelu-Roşu (Prof. Iulia Cecon) Olaru Ionuţ 50, Roi Călău Maria 50.
Liceul Pedagogic Caransebeş (Prof. Dorina Humiţa, Prof. Antoanela Buzescu) Bivolaru Iulia Mălina 80, Băzăvan Răzvan Alexandru 30, Băzăvan Oana Cătălina 40, Dinulică Petru Augustin 230,Dinulică Septimiu 230, Rîcă Anda Elena 90, Bogdan Roxana 90, Enăşoni Lavinia 70, Nica Hermina 60, Iordache Andreea 30, Popovici Daniel 30, Lala Timotei 60, Jurca Rebeca 50.
Şcoala Rusca Teregova (Prof. Sorin Ciucă) Stepanescu Georgeta 85, Blaj Ioan 95, Moacă Nicolae 62, Gherga Marinela 94 *(ultimii doi nu ştim*

sigur în ce clasă sunt), Codoşpan Oana 75, Banda Giorgiana Violeta 30, Boşneag Maria – Ionela 85, Driter Ioan 65.

Clasa a VII-a

Şcoala Anina(Prof. Marin Cleşiu)Paiu Andrada 60, Bardaş Georgiana Flavia 40
Şcoala Bozovici(Prof. Iosif Găină) Vrancea Andreea 80
Grup Şcolar Moldova Nouă(Prof. Vasilica Gîdea) Oprea Adelina 70
Şcoala Generală 2 Reşiţa (Prof. Mariana Drăghici) Ţeudan Adina 140, Drăghici Livia Liliana 160, Aghescu Monica Elena 90
Şcoala Generală nr. 9 Reşiţa (Prof. Irina Avramescu, Prof.Vasile Chiş, Prof. Ion Belci) Peptan Alexandru 120, Lazăr Silviu Ioan 120
Şcoala Generală 1 Oţelu-Roşu (Prof. Heidi Feil, Prof. Anişoara Popa) Pop Cristian Ionuţ 110,Radu Ionela 100, Tuştean Patricia 100 Boran Cristian (40), Alexa Alexandra 70
Şcoala Generală 3 Oţelu-Roşu (prof.Felicia Boldea) Băilă Diana 70
Grup Şcolar Industrial Oţelu-Roşu(Prof. Iulia Cecon)
Vărgatu Alina 40, Popescu Ana Maria 40.
Şcoala Rusca Teregova (Prof. Sorin Ciucă) Humiţa Ileana (probleme rezolvate numai de la clasele I – IV!!),Ursulescu Ionela 106, Banda Elisabeta 72

Clasa a VIII-a

Şcoala Berzasca (Prof. Dana Emilia Schiha) Pătraşcu Alin 60, Dragomir Ionuţ 60
Grup şcolar Construcţii Maşini Caransebeş (Prof. Carina Corîci)
Dumitraşcu Andreea 60
Liceul Traian Doda Caransebeş (Prof. Adrian Dragomir) Stoicănescu Gelu 100, Popa Andreea 35
Şcoala Rusca Teregova (Prof. Sorin Ciucă) Codoşpan Florinela 75, Blaj Marinela 52, Humiţa Maria 85, Milu Ionela 30, Stepanescu Georgeta 106
Şcoala Generală 1 Oţelu-Roşu (Prof. Heidi Feil)
Krokoş Lorena 100,Kuhn Anne Marie 100, Negrei Bianca 100
Şcoala Vîrciorova (Prof. Ioan Liuba) Măran Marius 40

Clasa a IX-a

Liceul Traian Doda Caransebeş(Prof. Delia Dragomir) Mocanu Ioana 100, Matei Sergiu 43, Szabo Cristian 46
Liceul Pedagogic C.D.Loga Caransebeş (Prof. Dorina Humiţa) Semenescu Anca 87
Grup Şcolar Oţelu-Roşu (Prof. Lucian Dragomir) Duma Andrei Florin 57, Tuştean Claudiu 17, Buliga Adrian Denis 17, Bugariu Răzvan 46.
Liceul Gen.Dragalina Oraviţa (Prof.Mihai Lazarov) Goian Raluca Mădălina 64

Clasa a X-a

Liceul Traian Doda Caransebeş (Prof. Delia Dragomir, Iacob Didraga) Baneu Petru 47, Zanfir Cristian 148, Bona Petru 42, Prunar Victor 80, Todor Elena 107, Galescu Dan 60.
Liceul Pedagogic C.D.Loga Caransebeş(Prof. Antoanela Buzescu) Marta Marian Sebastian 67.
Liceul Traian Lalescu Reşiţa (Prof. Ovidiu Bădescu) Meşter Sergiu 65
Grup Şcolar Industrial Oţelu-Roşu(Prof. Lucian Dragomir) Cococeanu Oana 90
Liceul Gen.Dragalina Oraviţa(Prof.Mihai Lazarov)Pricop Romina 40
Grup Şcolar Moldova Nouă (Prof. Lăcrimioara Ziman) Istudor Deian 57 Vireanu Adelina 20, Calotă Bianca 28, Radoicovici Iasmina 20, Harabagiu Dragana Gabriela 20, Pucă Alexandra Elena 20,Mina Nenad Neşa 20.

Clasa a XI-a

Colegiul Naţional Moise Nicoară Arad (Prof. Ovidiu Bodrogeanu) Adina Vlad 60
Liceul Tata Oancea Bocşa (Prof.Ioan Todor) Stăniloiu Ovidiu 120
Liceul Hercules Băile Herculane(Prof.Constantin Bolbotină) Stolojescu Anca (115).
Liceul Pedagogic C.D.Loga Caransebeş (Prof. Antoanela Buzescu) Mureşan Ana-Maria 50, Mureşan Alexandru Ioan 50.
Liceul Traian Doda Caransebeş (Prof. Lavinia Moatăr, Prof. Iacob Didraga) Bălulescu Bianca Veronica 30, Aghescu Alina Mihaela 30, Turnea Ana-Maria 30, Firan Maria – Mirabela 30
Grup Şcolar Industrial Oţelu-Roşu (Prof. Lucian Dragomir) Bugariu Dan 40, Damian Raluca 30